ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS AND BUSINESS

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ: ΧΩΡΟΙ HILBERT ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΟΙ ΑΠΟ ΠΥΡΗΝΕΣ (RKHS) ΚΑΙ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

Ελπιάννα Στ. Εμμανουηλίδη

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής
του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών στο πλαίσιο του
Προπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών

Αθήνα
Ιούνιος 2020

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της επιτροπής που δέχτηκαν να επιβλέψουν τη διπλωματική μου εργασία, και ιδιαίτερα τον επιβλέποντα καθηγητή Α.Γιαννακόπουλο, ο οποίος δέχτηκε να μου αναθέσει το θέμα της εργασίας, ανοίγοντάς μου το δρόμο σε ανώτερες μαθηματικές σπουδές και έρευνα επί του θέματος.

ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η Ελπιάννα Εμμανουηλίδη είναι *Στατιστικός* επί πτυχίω (2ο πτυχίο, 2016-2020, Τμήμα Στατιστικής, Σχολή Επιστημών και Τεχνολογίας της Πληροφορίας, ΟΠΑ) με μεταπτυχιακό τίτλο στη *Βιοστατιστική* (ΠΜΣ, 2013-2016, Ιατρική Σχολή & Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ).

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει σκοπό να προετοιμάσει το έδαφος για ανώτερες σπουδές και έρευνα στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, ειδικά στον τομέα της Ανάλυσης, ώστε να επιτευχθεί η επιστημονική ολοκλήρωση της ενδιαφερόμενης.

Σχόλιο: Προηγούνται παλαιότερες σπουδές στην Οικονομική Επιστήμη.

Δημοσιευμένες εργασίες:

1) Η διπλωματική εργασία στα πλαίσια του ΠΜΣ Βιοστατιστική έχει τίτλο "Πρόσφατες εξελίξεις στις μεθόδους LASSO κατά Bayes", είναι προσβάσιμη εντός του δικτύου του ΕΚΠΑ και διαθέσιμη στο αποθετήριο Πέργαμος, στον ιστότοπο `https://pergamos.lib.uoa.gr/uoa/dl/frontend/el/browse/1313737`.

2) Ατομική εργασία, διαθέσιμη στον ιστότοπο `https://ideas.repec.org/a/hrs/journl/y2012vivi3p69-83.html`.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ελπιάννα Σταύρου Εμμανουηλίδη

ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ: ΧΩΡΟΙ HILBERT ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΟΙ ΑΠΟ ΠΥΡΗΝΕΣ (RKHS) ΚΑΙ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΕΣ

Ιούνιος 2020

Η θεωρία των χώρων Hilbert που παράγονται από πυρήνες (RKHS) παίζει σημαντικό ρόλο στα συναρτησιακά δεδομένα, επειδή κατασκευάζει βάσεις συναρτήσεων που μπορεί να χρησιμοποιηθούν για την αναπαράσταση και τη γενικότερη προτυποποίησή τους. Η εργασία επικεντρώνεται στα θεωρητικά μαθηματικά εργαλεία που είναι απαραίτητα σε αυτές τις τεχνικές και συγκεκριμένα στην κατασκευή των RKHS, μέσω της μελέτης ολοκληρωτικών τελεστών που συνδέονται με τους αντίστροφους ελλειπτικούς τελεστές, καθώς και την σημασία των χώρων Sobolev ως RKHS.

Elpianna St. Emmanouilidi

FUNCTIONAL STATISTICS: REPRODUCING-KERNEL HILBERT SPACES (RKHS) AND ELLIPTIC OPERATORS

June 2020

The theory of Reproducing-Kernel Hilbert Spaces (RKHS) plays an important in functional data, because it enables the construction of function bases which may be used for their representation and modeling, in general. This dissertation focuses on the theoretical mathematical tools underlying these techniques and, in particular, the construction of RKHS, by means of studying integral operators through their relation to inverse elliptic operators, as well as the importance of Sobolev spaces as RKHS.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΧΗΜΑΤΑ

ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΕΣ

ΑΜ	Αλλαγή Μεταβλητής
ΘΚΣ	Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης
ΘΜΣ	Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης
ΜΔΕ	Μερική Διαφορική Εξίσωση
ΟΚΠ	Ολοκλήρωση Κατά Παράγοντες
(Ο)ΠΣΤ	(Ομογενές) Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών
ΤΑ	Τριγωνική Ανισότητα
ε.γ.	εσωτερικό γινόμενο
κ.σ.	κατά σημείο
μ.μ.λ.	μία και μοναδική λύση
σ.π.	σχεδόν παντού

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Ο συναρτησιακός χώρος στον οποίο ανήκει η συνάρτηση που λύνει ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών δεν προσδιορίζεται εκ των προτέρων από τη μερική διαφορική εξίσωση του προβλήματος. Αυτό μας δίνει την ευελιξία να λύσουμε το πρόβλημα με ασθενή τρόπο και να ανακτήσουμε την κλασική λύση από την ασθενή, υπό συνθήκες. Ειδικά, μπορούμε να διατυπώσουμε τη διαφορική εξίσωση σε μεταβολική μορφή και να βρούμε μια επαρκώς ομαλή ασθενή λύση (με ασθενείς σχεδόν παντού ορισμένες παραγώγους), η οποία να ταυτίζεται σχεδόν παντού με την κλασική λύση (με κλασικές σημειακές παραγώγους). Για το σκοπό αυτό, θα μελετήσουμε τους συναρτησιακούς χώρους των ασθενών παραγώγων, δηλαδή τους χώρους Sobolev, και ιδιαίτερα εκείνους που είναι χώροι Hilbert παραγόμενοι από πυρήνες Green. Οι πυρήνες Green έχουν ολοκληρωτική σημειακή αναπαράσταση, μέσω της οποίας συνδέονται με τη λύση που ικανοποιεί το πρόβλημα. Ενώ οι γραμμικοί διαφορικοί τελεστές δεν είναι κατά κανόνα φραγμένοι, αν είναι πυκνά ορισμένοι, θα έχουν φραγμένο αντίστροφο έναν ολοκληρωτικό τελεστή. Οι ολοκληρωτικοί τελεστές είναι φραγμένοι ως συμπαγείς.

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει σκοπό να μελετήσει τους συναρτησιακούς χώρους Sobolev που είναι και RKHS, με σκοπό να επιλύσει το ελλειπτικό πρόβλημα με τον ασθενή τρόπο.

Το Κεφάλαιο 2 αποτελεί μια εκτενή επισκόπηση των χώρων Sobolev, τόσο στη μία, όσο και στις πολλές διαστάσεις. Ξεκινά, με τις έννοιες, αφενός της ασθενούς σχεδόν παντού ορισμένης παραγώγου, αφετέρου της ομαλοποίησης μιας τοπικά συμπαγούς συνάρτησης μέσω συνέλιξης αυτής με κατάλληλη εξομάλυνση. Ιδιαίτερη χρήσιμες στην ασθενή επίλυση του ελλειπτικού πρόβλημα είναι οι ανισότητες Sobolev. Για παράδειγμα, στη μία διάσταση, τα στοιχεία του χώρου H^1 εμφυτεύονται με συμπαγή τρόπο στο χώρο L^2, αρκεί το χωρίο να είναι φραγμένο, και η ανισότητα Poincaré παρέχει μια ισοδύναμη νόρμα. Εξίσου σημαντικά, ειδικά στις πολλές διαστάσεις, είναι η ομαλότητα του συνόρου και ο ορισμός του μέτρου Lebesgue σε αυτό. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε ομαλά σύνορα τύπου Lipschitz (τουλάχιστον C^1) και αποδεικνύουμε το θεώρημα του ίχνους, δηλαδή την ύπαρξη φραγμένου τελεστή, για παράδειγμα από τον $H^1(\Omega)$ στον $L^2(\partial\Omega)$, για το σύνολο των συνοριακών σημείων. Μάλιστα, δείχνουμε ότι τα σημεία του ίχνους είναι και σημεία Lebesgue.

Το Κεφάλαιο 3 εστιάζει σε εκείνους τους χώρους Hilbert, οι οποίοι παράγονται από πυρήνες. Ο πυρήνας είναι μια θετικά ορισμένη, συμμετρική και πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών. Οι χώροι Sobolev H^k είναι χώροι Hilbert, αν εφοδιαστούν με την κατάλληλη νόρμα, ενώ είναι χώροι Hilbert παραγόμενοι από πυρήνα k, δηλαδή χώροι RKHS, αν οι τιμές των στοιχείων τους έχουν συγκεκριμένη σημειακή αναπαράσταση ως προς τη μία μεταβλητή. Η μετατροπή των χώρων H^k σε πλήρεις χώρους RKHS είναι απαραίτητη για την ασθενή επίλυση του ελλειπτικού προβλήματος. Μια ιδιαίτερα σημαντική ιδιότητα των χώρων RKHS είναι ότι η ισχυρή σύγκλιση των συναρτήσεων ενός RKHS συνεπάγεται και σημειακή σύγκλιση με το ίδιο όριο.

Στο Κεφάλαιο 4 ακολουθούμε την τελεστική προσέγγιση των Fasshauer & Ye (2013), με σκοπό να δείξουμε ότι η λύση της ελλειπτικής εξίσωσης για ανοικτό και φραγμένο χωρίο του N-διάστατου πραγματικού επιπέδου είναι μια άγνωστη συνάρτηση, η οποία μπορεί να κατασκευαστεί έτσι ώστε να ανήκει σε ένα συναρτησιακό χώρο Sobolev, ισόμορφο με χώρο Hilbert παραγόμενο από πυρήνα Green, δηλαδή RKHS. Επειδή πρόκειται για διανυσματικούς χώρους Hilbert με ισοδύναμες νόρμες, η κατασκευή αυτή είναι βέλτιστη.

Το Κεφάλαιο 5 ασχολείται με την επίλυση του ομογενούς προβλήματος Dirichlet για τη διαφορική εξίσωση Poisson, σε ανοικτό και φραγμένο χωρίο με λείο σύνορο, για διάφορες ελλειπτικές μορφές. Η κλασική λύση είναι μια ομαλή και αρμονική συνάρτηση $u \in C^2(\bar{\Omega})$, η οποία απαιτεί δύο συνεχείς μερικές παραγώγους. Η ασθενής λύση είναι μια επαρκώς ομαλή συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί τη μεταβολική εξίσωση του προβλήματος και συγκεκριμένα, το Θεώρημα Lax-Milgram. Μάλιστα, η ασθενής λύση έχει βελτιωμένες ιδιότητες ομαλότητας, οι οποίες εξαρτώνται από την επιλογή της συνάρτησης f του δεξιού μέλους της εξίσωσης. Η επιλογή του συναρτησιακού χώρου του προβλήματος είναι ουσιώδης. Μια δόκιμη επιλογή είναι ο χώρος Sobolev H_0^1, ενώ μια καλύτερη επιλογή της f είναι ένα συναρτησιακό από το δυϊκό του χώρου H_0^1. Επειδή όμως ο H_0^1 δεν είναι ισομετρικά ισόμορφος με το δυϊκό του, χρησιμοποιούμε τον L^2 ως χώρο pivot. Αν $f \in L^2(\Omega)$, η ομαλή ασθενής λύση $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ προκύπτει με αντιστροφή, δηλαδή ανάγοντας τη διαφορική εξίσωση σε ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm, την οποία επιλύουμε με τη μέθοδο των ιδιοτιμών, αναφέροντας μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ύπαρξης λύσης. Τέλος, εφαρμόζουμε τη μέθοδο επίλυσης στο συζυγές-αυτοσυζυγές πρόβλημα, με πυρήνα τη γέφυρα Brown του Κεφαλαίου 4.

Ο αναγνώστης παραπέμπεται στο Παράρτημα σχετικά με θεωρήματα και έννοιες που άπτονται της εργασίας, όπως τα θεωρήματα συμπάγειας σε συναρτησιακούς χώρους, το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, συνθήκες απόλυτης συνέχειας και στοιχεία της θεωρίας τελεστών.

Κεφάλαιο 2

Οι χώροι Sobolev

Σε αυτό κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τους συναρτησιακούς χώρους Sobolev. Πρόκειται για χώρους με στοιχεία πραγματικές συναρτήσεις, οι οποίες έχουν ασθενείς παραγώγους μέχρι και βαθμού k, όπου k θετικός ακέραιος. Οι ασθενείς παράγωγοι είναι στοιχεία των χώρων L^p και ορίζονται σχεδόν παντού σε αντίθεση με τις κλασικές παραγώγους. Θα μελετήσουμε χωριστά τους χώρους Sobolev στη μία και στις πολλές διαστάσεις, με ιδιαίτερο ενδιαφέρον στις ανισότητες Sobolev. Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 4, οι ανισότητες αυτές χρησιμεύουν στην επίλυση της εξίσωσης Laplace.

2.1 Εισαγωγικές έννοιες

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ανοιχτό, αλλά όχι απαραίτητα φραγμένο σύνολο, όπου $1 \leq N < \infty$. Συμβολίζουμε $\partial\Omega$ το σύνορο και $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ την κλειστότητα του Ω.

2.1.1 Οι χώροι των συνεχών συναρτήσεων

Έστω $u : \Omega \to \mathbb{R}$ πραγματική συνάρτηση.

Συμβολίζουμε $C(\Omega)$ το χώρο των συνεχών συναρτήσεων στο Ω. Αν το Ω είναι φραγμένο, ο χώρος $C(\bar{\Omega})$ εφοδιασμένος με τη νόρμα supremum,

$$\|u\|_\infty := \sup\{u(x) \,|\, x \in \Omega\} < \infty,$$

είναι χώρος Banach, δηλαδή πλήρης γ.χ.ν..

Συμβολίζουμε $C^k(\Omega)$ το χώρο των συνεχών συναρτήσεων στο Ω με συνεχείς μερικές παραγώγους k-τάξης, όπου $k \geq 1$ ακέραιος. Προφανώς, $C^0(\Omega) \equiv C(\bar{\Omega})$. Χρησιμοποιούμε τον πολυδείκτη $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$ τάξης $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$, για να συμβολίσουμε την παράγωγο τάξης $|\alpha| \leq k$ της u :

$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \ldots \partial^{\alpha_N} x_N}, \quad |\alpha| \leq k.$$

Αν το Ω είναι φραγμένο, τότε οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων του $C^k(\bar{\Omega})$, με $k \geq 0$, είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $\bar{\Omega}$, άρα και συνεχείς σε αυτό. Σε αυτή την περίπτωση, ο χώρος $C^k(\bar{\Omega})$, εφοδιασμένος με τη νόρμα

$$\|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} := \textstyle\sum_{|\alpha| \leq k} \sup_\Omega |D^\alpha u| < +\infty,$$

είναι χώρος Banach, δηλαδή πλήρης γ.χ.ν.. Η νόρμα του είναι πεπερασμένη επειδή οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς σε συμπαγές. Συμβολίζουμε $C^\infty(\Omega) := \bigcap_k C^k(\Omega)$ το χώρο των συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο Ω. Οι συναρτήσεις των χώρων $C^k(\Omega)$ και $C^\infty(\Omega)$ δεν είναι απαραίτητα φραγμένες, ακόμη και αν το Ω είναι φραγμένο.

Παράδειγμα 1. *Έστω $I = (0,1)$ και $u(x) = \frac{1}{x} \in C^{\infty}(I)$. Το I είναι φραγμένο, αλλά η u δεν είναι φραγμένη σε αυτό.*

Ορισμός 1 (Φορέας συνεχούς συνάρτησης)**.** *Φορέας της συνάρτησης u ορίζεται η κλειστή θήκη (δηλαδή το σύνολο των σημείων επαφής) του συνόλου των σημείων με μη τετριμμένες τιμές:*

$$s(u) := \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}}.$$

Ορισμός 2 (Compactly contained σύνολο)**.** *Έστω $\varnothing \neq \Omega' \subset \Omega \subset \mathbb{R}^N$ ανοιχτό σύνολο. Θα λέμε ότι $\Omega' \Subset \Omega$ αν $\Omega' \subset \Omega$ και το Ω' συμπαγές (άρα και φραγμένο). Ισοδύναμα*

$$\Omega' \Subset \Omega \quad \text{αν το } \overline{\Omega'} \text{ συμπαγές και } \overline{\Omega'} \subset \Omega.$$

Αν το Ω' είναι φραγμένο και $\Omega' \Subset \Omega$, τότε:

$$\textit{dist}(\overline{\Omega'}, \partial\Omega) = \inf\{\, |x-y| \,:\, x \in \overline{\Omega'},\, y \in \partial\Omega \,\} > 0.$$

Συμβολίζουμε $C_c(\Omega)$ το χώρο των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα στο Ω και

$$C_c^{\infty}(\Omega) := C^{\infty}(\Omega) \cap C_c(\Omega)$$

το χώρο των συναρτήσεων δοκιμής ή το χώρο των κατανομών, $\mathfrak{D}(\Omega) \equiv C_c^{\infty}(\Omega)$. Παρόμοια, $C_c^k(\Omega) := C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$.

Συμβολίζουμε $C_0(\Omega)$ το χώρο των συνεχών συναρτήσεων που μηδενίζονται σε περιοχές κοντά στο σύνορό του Ω :

$$C_0(\Omega) := \{\, u : \Omega \to \mathbb{R} \mid (\forall \varepsilon > 0)(\exists\, \Omega' \Subset \Omega) : |u(x)| < \varepsilon \ \ \forall\, x \in \Omega \setminus \Omega' \,\}.$$

Παρόμοια για το χώρο $C_0^{\infty}(\Omega)$. Αν $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$, οι $\partial^{\alpha} u$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς στο $\bar{\Omega}$ για κάθε $|\alpha|$. Αν $\Omega = \mathbb{R}^N$, ο $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ είναι η πλήρωση του $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ ως προς τη νόρμα της ομοιόμορφης σύγκλισης.

2.1.2 Οι χώροι L^p

Έστω p πραγματικός αριθμός με $1 \leq p \leq \infty$. Συμβολίζουμε $L^p(\Omega)$ το σύνολο των Ω_μ-μετρήσιμων συναρτήσεων $u : \Omega \to \mathbb{R}$ με πεπερασμένη νόρμα

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Όταν $p = \infty$, συμβολίζουμε $L^{\infty}(\Omega)$ το σύνολο των ουσιωδώς φραγμένων Ω_μ-μετρήσιμων συναρτήσεων, με νόρμα

$$\|u\|_{\infty} := \text{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)| := \inf\{c \mid \exists\, c : \ |u(x)| \leq c \quad \Omega\text{-σ.π.}\}.$$

Οι χώροι L^p γίνονται Banach, δηλαδή πλήρεις γ.χ.ν., αν εφοδιαστούν με τις αντίστοιχες p-νόρμες. Ειδικά ο L^2 είναι χώρος Hilbert, δηλαδή πλήρης δ.χ. με ε.γ. αυτό που επάγει η νόρμα του.

Αναφέρουμε (χωρίς αποδείξεις) χρήσιμες ανισότητες που ισχύουν στους χώρους L^p.

Ορισμός 3 (Συζυγείς εκθέτες). *Έστω $1 \leq p, p' \leq \infty$ πραγματικοί αριθμοί. Οι p, p' ονομάζονται συζυγείς εκθέτες αν ικανοποιούν $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

Ανισότητα 2.1 (Ανισότητα Young). *Έστω $1 < p, p' < \infty$ συζυγείς εκθέτες και $a, b \geq 0$. Τότε ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Επιπλέον, για $\varepsilon > 0$, ισχύει και η ακόλουθη παραλλαγή αυτής:

$$ab \leq \varepsilon\, a^p + C_\varepsilon\, b^{p'} \quad \text{με } C_\varepsilon := \varepsilon^{-1/(p-1)}.$$

Ανισότητα 2.2 (Ανισότητα Hölder για ολοκληρώματα.). *Έστω $1 \leq p, p' \leq \infty$ συζυγείς εκθέτες. Αν $u \in L^p$ και $v \in L^{p'}$, τότε $uv \in L^1$ και ισχύει:*

$$\int |u\, v| \leq \|u\|_{L^p}\, \|v\|_{L^{p'}}\,.$$

Ορισμός 4 (Φορέας συνάρτησης του $L^1(\Omega)$). *Ο φορέας μιας συνάρτησης $u \in L^1(\Omega)$ είναι το σύνολο των σημείων $x \in \overline{\Omega}$ με την ακόλουθη ιδιότητα :*

$$(\forall\, \delta > 0)\,(\exists \varphi \in C_0\,(B(x, \delta))) : \int_{B(x,\delta)} u(y)\, \varphi(y)\, dy \neq 0,$$
$$\text{όπου} \quad B(x, \delta) := \{y \in \mathbb{R}^N \mid d_2\,(x, y) < \delta\,\} \subset \mathbb{R}^N$$

η μπάλλα με κέντρο x και ακτίνα δ, και d_2 η Ευκλείδεια μετρική στον $\mathbb{R}^N$.

Έστω $u \in L^p(\Omega)$ για $1 \leq p < \infty$. Αν επεκτείνουμε τη u σε όλο το $\mathbb{R}^N$, έτσι ώστε $u(x) = 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega$, τότε συμβολίζουμε $J_r(u)$ το μέγεθος της συνέχειας (modulus of continuity) της u στον $L^p(\Omega)$:

$$J_r(u) := \sup_{|x| \leq r} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x + z) - u(x)|^p\, dx \right),$$

και ισχύει $\lim_{r \to 0} J_r(u) = 0$.

Συμβολίζουμε

$$L^p_{\text{loc}}(\Omega) = \left\{u \mid u\, \chi_{\Omega'} \in L^p(\Omega)\; \forall\, \Omega' \Subset \Omega\right\}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

το χώρο των μετρήσιμων συναρτήσεων u, οι οποίες είναι $p-$ολοκληρώσιμες για κάθε φραγμένο σύνολο $\Omega' \Subset \Omega$. Οι χώροι αυτοί είναι τοπολογικοί χώροι, όχι χώροι Banach. Σε αντίθεση με τους χώρους $L^p(\Omega)$, έχουν το πλεονέκτημα

$$L^q_{\text{loc}}(\Omega) \hookrightarrow L^p_{\text{loc}}(\Omega) \quad \forall\, p < q,$$

ανεξάρτητα αν το Ω έχει πεπερασμένο μέτρο. Μάλιστα, ο $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ είναι ο μεγαλύτερος τοπολογικός χώρος με αυτή την ιδιότητα, αλλά $L^1_{\text{loc}}(\Omega) \nsubseteq L^1(\Omega)$.

Παράδειγμα 2. *Στη μία διάσταση, αν $I = (0, 1)$, η συνάρτηση $u : I \to \mathbb{R}$, με τιμές $u(x) = \frac{1}{x}$, ανήκει στον $L^1_{\text{loc}}(I)$, αφού $\int_a^b |u(x)|\, dx < \infty$, $\forall\, 0 < a < b < 1$, αλλά $u \notin L^1(I)$.*

Το ακόλουθο παράδειγμα παρουσιάζει μια στοιχειώδη τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση, η οποία εμφανίζεται στον τύπο της θεμελιώδους λύσης της ελλειπτικής εξίσωσης, δηλαδή της συνάρτησης του Green (βλ. Κεφάλαιο 4.1.

Παράδειγμα 3. *Έστω* $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *με τύπο* $f(x) = \frac{1}{\|x\|_2^a}$, *όπου* $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}$ *και* $a \in \mathbb{R}$. *Τότε* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *αν-ν* $\boxed{a < N}$.

Απόδειξη. Ας θεωρήσουμε την ακόλουθη τοπική προσέγγιση της f :

$$f^\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x), & \text{αν} \quad \|x\|_2 > \varepsilon, \\ 0, & \text{αν} \quad \|x\|_2 \leq \varepsilon. \end{cases}$$

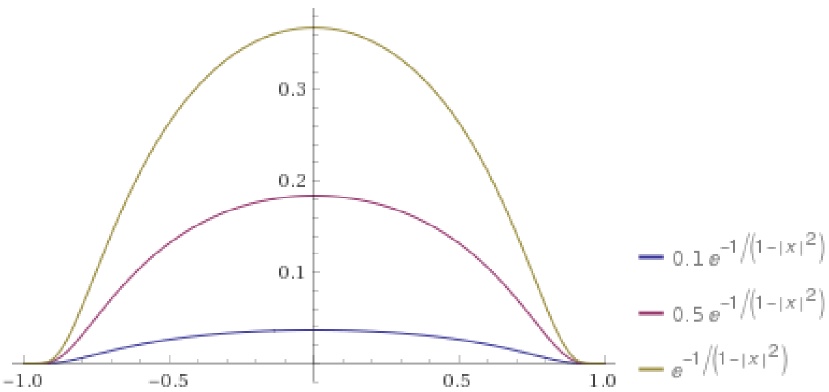
Η ακολουθία (f^ε) είναι αύξουσα και συγκλίνει μονότονα κ.σ.-σ.π. στην f, καθώς $\varepsilon \to 0^+$. Για κάθε $R > 0$, το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης (βλ. Παράρτημα Β', σελ.78) συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \int_{B(0,R)} f\, dx &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{B(0,R)} f^\varepsilon(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^R r^{N-a-1}\, dr \\ &= \begin{cases} \infty, & \text{αν} \quad N - a \leq 0, \\ (N-a)^{-1} R^{N-a}, & \text{αν} \quad N - a > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

□

2.1.3 Ομαλοποίηση συναρτήσεων

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ανοιχτό, αλλά όχι απαραίτητα φραγμένο σύνολο, και $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) \equiv C^\infty(\mathbb{R}^N)$ συνάρτηση δοκιμής:



Σχ΄ημα 2.1: Η ομαλή συνάρτηση ω στο $\mathbb{R}$ για σταθερές $c = 0.1,\, 0.5,\, 1.0$.

$$\omega(x) = \begin{cases} c\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & \text{αν } |x| < 1, \\ 0, & \text{αν } |x| \geq 1, \end{cases}$$

όπου c σταθερά κανονικοποίησης, τέτοια ώστε $\int_{\mathbb{R}^N} \omega(x)\, dx = 1$. $s(\omega) \in [-1, 1]^N$ συμπαγής, μάλιστα $s(\omega) \subset \overline{B(0,1)}$, με μη αρνητικές τιμές $\omega(0) = c\,\mathrm{e}$ και $0 \leq \omega(x) \leq c\,\mathrm{e}$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$. Επιπλέον, η ω είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο $(-1, 1)^N$. Για $\varepsilon > 0$, ορίζουμε τοπικά τη συνάρτηση εξομάλυνσης (mollifier) $\omega_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) \equiv C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$:

$$\omega_\epsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^N} \omega\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \times \mathbf{1}_{\{|x| < \varepsilon\}}(x), \qquad \int_{\mathbb{R}^N} \omega_\epsilon(x)\, dx = 1.$$

$s(\omega_\epsilon) \in [-\varepsilon, \varepsilon]^N$ συμπαγής, με μη αρνητικές τιμές $\omega_\varepsilon(0) = \frac{c\,e}{\varepsilon^N}$ και $0 \leq \omega_\varepsilon(x) \leq \frac{c\,e}{\varepsilon^N}$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$.

Εναλλακτικά, αν $\varepsilon \mapsto \dfrac{1}{n}$ $\forall\, n \geq 1$, μπορούμε ισοδύναμα να ορίσουμε ακολουθία εξομαλύνσεων με $s(\omega_n) \subset \overline{B(0, \frac{1}{n})}$ $\forall\, n \geq 1$:

$$(\omega_n)_{n\geq 1} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N) : \varphi_n(x) = c_n\, n^N\, \omega(nx).$$

Συμπεραίνουμε ότι οι εξομαλύνσεις ορίζονται ως οι μη αρνητικές πραγματικές συναρτήσεις, με συμπαγή φορέα (τοπική ιδιότητα), οι οποίες ολοκληρώνουν στη μονάδα και είναι ομαλές ως συνεχώς παραγωγίσιμες.

Ορισμός 5 (Συνέλιξη). *Έστω $\varepsilon > 0$ και $\omega_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Η ομαλοποιημένη εκδοχή u_ε μιας συνάρτησης $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, ορίζεται ως η συνέλιξη*

$$u_\varepsilon := \omega_\varepsilon \star u,$$

δηλαδή ως το ολοκλήρωμα

$$u_\varepsilon(x) := \int_\Omega \omega_\varepsilon(x-y)\, u(y)\, dy \quad \forall x \in \Omega_\varepsilon := \{\, x \in \Omega \mid dist(x, \partial\Omega) > \varepsilon \,\},$$

όπου Ω_ε τοπικά συμπαγές σύνολο. Παρόμοια, αν επιλέξουμε την ακολουθιακή προσέγγιση με $\varepsilon \mapsto \dfrac{1}{n}$ $\forall\, n \geq 1$.

Οι συναρτήσεις των χώρων C (ή C_0) και L^p ομαλοποιούνται, δηλαδή υπάρχει τοπική προσέγγιση αυτών, και έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες, στις οποίες θα επανέλθουμε στην ενότητα 2.3.

Ιδιότητες ομαλοποιημένων συναρτήσεων. Έστω $\epsilon > 0$. Θεωρούμε κατάλληλη επέκταση της u στο $\mathbb{R}^N$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Αν $\Omega = \mathbb{R}^N$ και $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, τότε $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$. Αν $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ και $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, τότε $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$.

(ii) Αν $\Omega = \mathbb{R}^N$ και $u \in L^p(\Omega)$ για $1 \leq p < \infty$, τότε $\|u_\varepsilon - u\|_{L^p(\Omega)} \to 0$, καθώς $\varepsilon \to 0^+$. Αν $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, χρησιμοποιούμε την πυκνότητα του $C_c^\infty(\Omega)$ στους $L^p(\Omega)$ για $1 \leq p < \infty$.

(iii) Αν $\Omega = \mathbb{R}^N$ και $u \in C(\Omega)$, τότε $\|u_\varepsilon - u\|_{C(\bar{\Omega}')} \rightrightarrows 0$ για κάθε $\Omega' \Subset \Omega$, καθώς $\varepsilon \to 0$. Αν το Ω είναι επιπλέον φραγμένο, τότε $\|u_\varepsilon - u\|_{C(\overline{\Omega})} \rightrightarrows 0$.[1]

2.1.4 Ασθενείς μερικές παράγωγοι

Αν $u \in C^1(\Omega)$, η παράγωγος της u ορίζεται σημειακά στο Ω και είναι συνεχής. Αν όμως $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, η παράγωγος της u δεν ορίζεται πλέον σημειακά στο Ω, και η έννοια της παραγώγου γενικεύεται.

Ορισμός 6 (Ασθενής παράγωγος). *Έστω $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ και $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ πολυδείκτης τάξης $|\alpha| = \sum_{i=1}^N \alpha_i$. Η v είναι η γενικευμένη ή ασθενής μερική παράγωγος $D^\alpha u$*

[1] Αν $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ και $u \in C(\overline{\Omega})$ και επεκτείνουμε τη u, ενδέχεται να απωλέσουμε συνέχεια. Γενικά $\|u_\varepsilon - u\|_{C(\overline{\Omega})} \nrightarrow 0$, καθώς $\varepsilon \to 0$.

της u, αν ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\int_\Omega u\, D^\alpha \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \upsilon\varphi\, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Η ασθενής παράγωγος, αν υπάρχει, είναι μοναδική.

Παρατήρηση 1. *Σε αντίθεση με τις κλασικές μερικές παραγώγους, η ασθενής παράγωγος για πολυδείκτη α, προκύπτει απευθείας από τον ορισμό, και είναι δυνατό να υπάρχει χωρίς να απαιτεί την ύπαρξη των ασθενών μερικών παραγώγων για πολυδείκτες χαμηλότερης τάξης.*

Παράδειγμα 4. *Έστω $\Omega := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x_1, x_2 < 1\}$ και $u, \upsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ με τιμές $u(x_1, x_2) := \text{sgn}\, x_1$ και $\upsilon(x_1, x_2) := \text{sgn}\, x_1 - \text{sgn}\, x_2$. Τότε $D^{(0,1)}u \equiv 0$ και $D^{(1,1)}\upsilon \equiv 0$, αλλά δεν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $D^{(1,0)}u$, $D^{(0,1)}\upsilon$ και $D^{(1,0)}\upsilon$.*

Παρατήρηση 2. *Αν $u \in C^k(\Omega)$, τότε οι ασθενείς παράγωγοι της $D^\alpha u$ υπάρχουν $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^N$ τάξης $|\alpha| \leq k$ και ταυτίζονται με τις αντίστοιχες κλασικές παραγώγους της u.*

Παρατήρηση 3. *Ο χώρος συναρτήσεων δοκιμής του ορισμού θα μπορούσε εξίσου να επιλεγεί σύμφωνα με την τάξη της παραγώγου, π.χ. $C_0^1(I)$ ή $C_c^1(I)$ όταν $k = 1$. Στη θέση της συνάρτησης $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$, θεωρούμε την ομαλοποιημένη εκδοχή της, $\varphi_n = \omega_n \star \varphi \in C_c^\infty(I)$, αφού $\varphi_n \rightrightarrows \varphi \in C^1(I)$ στα τοπικά συμπαγή του I.*

Αναφέρουμε μερικά παραδείγματα στη μία διάσταση.

Παράδειγμα 5. *Αν $I = (0, 2)$, η συνεχής συνάρτηση u με τύπο*

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{αν} \quad 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{αν} \quad 1 < x < 2, \end{cases}$$

έχει ασθενή παράγωγο πρώτης τάξης στον $L^1_{loc}(I)$, την

$$\upsilon(x) = u'(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad 0 < x < 1, \\ 0, & \text{αν} \quad 1 < x < 2, \end{cases}$$

αφού, ο ορισμός ικανοποιείται για $\varphi \in C_0^\infty(I)$:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 u\varphi'(x)\, dx &= \int_0^1 x\varphi'(x)\, dx + \int_1^2 \varphi'(x)\, dx \\
&= \left\{[x\varphi(x)]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \varphi(x)\, dx\right\} + \{\varphi(2) - \varphi(1)\}, \\
&= 1 \times \varphi(1) - 0 \times \varphi(0) - \int_0^1 \varphi(x)\, dx + \varphi(2) - \varphi(1) \\
&= -\int_0^1 1 \times \varphi(x)\, dx - \int_1^2 0 \times \varphi(x)\, dx \\
&= -\int_0^2 u'(x)\varphi(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 6. *Αν $I = (0, 2)$, η συνεχής συνάρτηση u με τύπο*

$$u(x) = \begin{cases} x, & \text{αν} \quad 0 < x \leq 1, \\ 2, & \text{αν} \quad 1 < x < 2, \end{cases}$$

δεν έχει ασθενή παράγωγο πρώτης τάξης στον $L^1_{loc}(I)$ αφού δεν ικανοποιείται ο ορισμός. Συγκεκριμένα, για $\varphi \in C_0^\infty(I)$:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 u\varphi'(x)\,dx &= \int_0^1 x\varphi'(x)\,dx + 2\int_1^2 \varphi'(x)\,dx \\
&= \left\{[x\varphi(x)]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \varphi(x)\,dx\right\} + 2\left\{\varphi(2) - \varphi(1)\right\}, \\
&= \varphi(1) - \int_0^1 \varphi(x)\,dx - 2\varphi(1) \\
&= -\int_0^1 \varphi(x)\,dx - \varphi(1), \quad \varphi(1) \neq 0.
\end{aligned}$$

Αν θεωρήσουμε το $I = (0,2) \setminus \{1\}$ αντί του $I = (0,2)$, έτσι ώστε κάθε συνάρτηση δοκιμής να ικανοποιεί $\varphi(1) = 0$, εξασφαλίζουμε ότι η u θα έχει ασθενείς παραγώγους κάθε τάξης.

Παράδειγμα 7. *Η συνάρτηση του Cantor δεν έχει ασθενή παράγωγο αφού δεν είναι απόλυτα συνεχής.*

Ορισμός 7 (Ισοδύναμος ορισμός ασθενούς παραγώγου)**.** *Έστω $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ και υπάρχει ακολουθία $(u_n)_{n\geq 1} \in C^k(\Omega)$, τέτοια ώστε $u_n \to u$ και $D^\alpha u_n \to v$ στον $L^1_{loc}(\Omega)$, καθώς $n \to \infty$, με $|\alpha| = k$. Τότε η v είναι η ασθενής παράγωγος της u στο Ω, δηλαδή $D^\alpha u = v$.*

2.2 Οι χώροι Sobolev σε μία διάσταση

Έστω $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ ανοιχτό, ενδεχομένως μη φραγμένο, διάστημα της πραγματικής ευθείας. Αν το I είναι φραγμένο, δηλαδή $-\infty < a, b < +\infty$, και θεωρήσουμε το μετρικό χώρο $(\mathbb{R}, d)$, όπου $d(x,y) = |x-y|$ η συνήθης μετρική, τότε $\partial I = \{a,b\}$ και $\bar{I} = I \cup \partial I = (a,b) \cup \{a,b\}$.

2.2.1 Οι χώροι $W^{1,p}(I)$

Έστω p πραγματικός αριθμός με $1 \le p \le \infty$.

Ορισμός 8. *Ο χώρος Sobolev $W^{1,p}(I)$ αποτελείται από τις μετρήσιμες συναρτήσεις $u \in L^p(I)$, οι οποίες έχουν ασθενή μερική παράγωγο πρώτης τάξης, δηλαδή $|\alpha| = \alpha_1 = k = 1$:*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I) \,|\, \exists\, g \in L^p(I) \,:\, \int_I u\varphi' = -\int_I \upsilon\varphi \quad \forall\, \varphi \in C_c^1(I) \text{ ή } C_c^\infty(I) \right\}.$$

$$u \in W^{1,p}(I) \Leftrightarrow Du \equiv u' = g \ \text{σ.π.}.$$

Για $p = 2$, $W^{1,2}(I) \equiv H^1(I)$.

Παρατήρηση 4. *Η $u \in W^{1,p}(I)$ και όταν $u \in C^1(I) \cap L^p(I)$ και $u' \in L^p(I)$. Σε αυτή την περίπτωση, η κλασική παράγωγος ταυτίζεται με την ασθενή σ.π., δηλαδή παντού εκτός από ένα σύνολο μηδενικού μέτρου, με πεπερασμένα ή αριθμήσιμα το πλήθος σημεία, π.χ. τα άκρα του I. Αν το I είναι φραγμένο, τότε $C^1(\bar{I}) \subset W^{1,p}(I)$.*

Παράδειγμα 8. *Έστω $I = (-1,+1)$. Αν*

$$u(x) = \begin{cases} -x & \text{αν } -1 < x < 0, \\ +x & \text{αν } \quad 0 \le x < 1, \end{cases} \quad , \text{ τότε } \quad \exists\, u'(x) = g(x) = \begin{cases} -1 & \text{αν } -1 < x < 0, \\ +1 & \text{αν } \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

Ενώ η κατά τμήματα συνάρτηση $u \in C^1(\bar{I})$ ανήκει στον $W^{1,p}(I)$, η ασθενής της παράγωγος g δεν ανήκει σε αυτόν για κανένα p. Παρατηρούμε ότι η u παρουσιάζει ακμή στο $x = 0$ (είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη σε αυτό), ενώ η g άλμα.

Ο $W^{1,p}(I)$ είναι χώρος Banach, δηλαδή πλήρης γ.χ.ν., $\forall\, 1 \le p \le \infty$, με νόρμα

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} = \|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)} \sim \left(\|u\|^p_{L^p(I)} + \|u'\|^p_{L^p(I)} \right)^{1/p} \quad \forall\, 1 \le p \le \infty.$$

Επιπλέον, σε αντίθεση με τον C^1, είναι αυτοπαθής και διαχωρίσιμος για $1 < p < \infty$. Ειδικά ο $H^1(I)$ είναι χώρος Hilbert

$$(u,\upsilon)_{H^1(I)} = (u,\upsilon)_{L^2(I)} + (u',\upsilon')_{L^2(I)} = \int_I (u\upsilon + u'\upsilon')$$

και επαγόμενη νόρμα $\quad \|u\|_{H^1(I)} = \left(\|u\|^2_{L^2(I)} + \|u'\|^2_{L^2(I)} \right)^{1/2}$.

2.2.2 Βασικές ιδιότητες

Λήμμα 2.1 (Μηδενική ασθενής παράγωγος συνεπάγεται σταθερή συνάρτηση)**.** *Αν $I = (a,b)$ **διάστημα** και $u \in L^1_{\text{loc}}(I)$, τέτοια ώστε $\int_I u\varphi' = 0 \ \forall\, \varphi \in C_c^1(I)$, τότε $\exists\, c :\ u = c$ I-σ.π.. (Βλ. Brezis, 2011, Λήμμα 8.1).*

Σύμφωνα με το επόμενο Λήμμα, η παράγουσα υ μιας συνάρτησης $g \in L^p(I)$ ανήκει στον $W^{1,p}(I)$ αν $\upsilon \in L^p(I)$, γεγονός που αληθεύει πάντα όταν το I είναι φραγμένο (Βλ. ΘΘΑΛ και συνθήκες απόλυτης συνέχειας.)

Λήμμα 2.2 (Ασθενής παράγωγος ολοκληρώματος). *Έστω $I = (a,b)$* ***διάστημα*** *και $g \in L^1_{loc}(I)$. Σταθεροποιούμε $y_0 \in I$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $\upsilon : I \to \mathbb{R}$ με $x \mapsto \upsilon(x) := \int_{y_0}^x g(t)\,dt$. Τότε $\upsilon \in C(I)$ και η g είναι η ασθενής παράγωγος της υ :*

$$\int_I \upsilon\,\varphi' = -\int_I g\,\varphi \quad \forall\,\varphi \in C^1_c(I).$$

Ειδικά, αν το I είναι φραγμένο διάστημα, τότε $g, \upsilon \in L^p(I) \Rightarrow \upsilon \in W^{1,p}(I)$.

Απόδειξη. Έστω $\varphi \in C^1_c(I)$. Από το Λήμμα 2.1, προκύπτει:

$$\begin{aligned}
0 = \int_I \upsilon\,\varphi' &= \int_I \left[\int_{y_0}^x g(t)\,dt\right] \varphi'(x)\,dx \\
&= -\int_a^{y_0} \left[\int_x^{y_0} g(t)\,dt\right]\varphi'(x)\,dx + \int_{y_0}^b \left[\int_{y_0}^x g(t)\,dt\right] \varphi'(x)\,dx \\
&= -\int_a^{y_0} \left[\int_x^{y_0} g(t)\,\varphi'(x)\,dt\right] dx + \int_{y_0}^b \left[\int_{y_0}^x g(t)\,\varphi'(x)\,dt\right] dx.
\end{aligned}$$

Αλλάζουμε τη σειρά ολοκλήρωσης, εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Fubini για το διπλό ολοκλήρωμα σε κάθε όρο του δεξιού μέλους.

Θεώρημα 2.1 (Εναλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης για το διπλό ολοκλήρωμα – Fubini). *Έστω $(X_1, \mathrm{A}_1, \mu_1)$ και $(X_2, \mathrm{A}_2, \mu_2)$ χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου, $R = \Omega_1 \times \Omega_2$ μετρήσιμο ορθογώνιο και $F \in L^1(R)$. Τότε, για κάθε $x \in \Omega_1$-σ.π., $F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2)$ και $\int_{\Omega_2} F(x,y)\,d\mu_2 \in L^1_x(\Omega_1)$. Παρόμοια, για κάθε $y \in \Omega_2$-σ.π., $F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1)$ και $\int_{\Omega_1} F(x,y)\,d\mu_1 \in L^1_y(\Omega_2)$. Επιπλέον*

$$\int_{\Omega_1} d\mu_1 \int_{\Omega_2} F(x,y)\,d\mu_2 = \int_{\Omega_2} d\mu_2 \int_{\Omega_1} F(x,y)\,d\mu_1 = \iint_R F(x,y)\,d\mu_1\,d\mu_2.$$

Για τον πρώτο όρο, θεωρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφές (a,a), (a,y_0) και (y_0,y_0) :

$$\begin{aligned}
-\int_a^{y_0} \left[\int_x^{y_0} g(t)\,\varphi'(x)\,dt\right] dx &= -\int_a^{y_0} \left[\int_a^t g(t)\,\varphi'(x)\,dx\right] dt \\
&= -\int_a^{y_0} g(t) \left[\int_a^t \varphi'(x)\,dx\right] dt \\
&= -\int_a^{y_0} g(t)\,\varphi(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Παρόμοια, για το δεύτερο όρο, προκύπτει:

$$\int_{y_0}^b \left[\int_{y_0}^x g(t)\,\varphi'(x)\,dt\right] dx = \int_{y_0}^b g(t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, το δεξί μέλος απλοποιείται στο ακόλουθο ολοκλήρωμα:

$$-\int_a^{y_0} g(t)\,\varphi'(t)\,dt + \int_{y_0}^b g(t)\,\varphi'(t)\,dt = -\int_I g(t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Έπεται το ζητούμενο. □

Οι συναρτήσεις του $W^{1,p}(I)$ είναι **οι παράγουσες** των συναρτήσεων του $L^p(I)$ για
$1 \le p \le \infty$. Κάθε συνάρτηση $u \in W^{1,p}(I)$ ορίζει μια κλάση ισοδυναμίας, στην οποία υπάρχει *μοναδικός συνεχής αντιπρόσωπος* αυτής, $\tilde{u} \in C(\bar{I})$, με την ιδιότητα

$u = \tilde{u}$ I–σ.π.. Συνεπώς, η u είναι I–σ.π. ίση με μία συνεχή συνάρτηση $\tilde{u}$, γεγονός που επιτρέπει το *σημειακό* ορισμό της μέσω του συνεχούς αντιπροσώπου της, σε αντίθεση με τους χώρους $L^p(I)$, όπου η συνέχεια ορίζεται I–σ.π..

Θεώρημα 2.2 (Συνέχεια των στοιχείων του $W^{1,p}(I)$)**.** *Έστω $I = (a,b)$* ***διάστημα*** *και $u \in W^{1,p}(I)$ με $1 \leq p < \infty$. Τότε υπάρχει μοναδικός συνεχής αντιπρόσωπος $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ στην κλάση της u, τέτοια ώστε $u \equiv \tilde{u}$ I-σ.π.. Επιπλέον, ισχύει*

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)\,dt \quad \forall\, I_0 = (x,y) \subset \bar{I}.$$

Παρατήρηση 5. *Αν $u \in W^{1,p}(I)$ και $u' \in C(\bar{I})$ μέσω του συνεχούς αντιπροσώπου της, τότε $u \in C^1(\bar{I})$ και $\tilde{u} \in C^1(\bar{I})$, $u = \tilde{u}$ I-σ.π..*

Απόδειξη. Αφού $u \in W^{1,p}(I)$, τότε $u' \in L^p(I)$. Ας υποθέσουμε ότι $u \in L^1_{\text{loc}}(I)$. Σταθεροποιούμε $y_0 \in I$ και ορίζουμε την παράγουσα συνάρτηση $\hat{u}$ της u' :

$$\hat{u} : I \to \mathbb{R} : x \mapsto \hat{u}(x) := \textstyle\int_{y_0}^x u'(t)\,dt.$$

Από το Λήμμα 2.2, $\hat{u} \in C(I)$ και ικανοποιεί

$$\textstyle\int_I \hat{u}\varphi' = -\int_I u'\varphi \overset{\text{ΟΚΠ}}{=} \int_I u\varphi' \quad \forall\, \varphi \in C_c^1(I).$$

Κατά συνέπεια $\int_I (u - \hat{u})\varphi' = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_c^1(I)$. Από το Λήμμα 2.1, μηδενική ασθενής παράγωγος συνεπάγεται σταθερή συνάρτηση, δηλαδή:

$$\exists\, C : \; u - \hat{u} = C \quad I - \text{σ.π.}.$$

Με βάση τα προηγούμενα, ορίζουμε τη συνάρτηση $\tilde{u} : I \to \mathbb{R} : x \mapsto \tilde{u}(x) = \hat{u} + C$. Έπεται ότι $\tilde{u} \in C(I)$, $\tilde{u} \equiv u$ I-σ.π. και

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) \equiv \hat{u}(x) - \hat{u}(y) = \textstyle\int_{y_0}^x u'(t)\,dt - \int_{x_0}^y u'(t)\,dt = \int_x^y u'(t)\,dt,$$

για κάθε $I_0 = (x,y) \subset I$. □

Παρατήρηση 6 (Ομαλότητα του συνόρου)**.** *Αν το I δεν είναι διάστημα, όπως στο Παράδειγμα 6, όπου $I = (0,2) \setminus \{1\}$, η u έχει ασθενή παράγωγο, αλλά δεν υπάρχει συνεχής αντιπρόσωπος στο $I = [0,2]$ στην κλάση της. Η μη ομαλότητα του συνόρου οφείλεται στο γεγονός ότι μέρος του I βρίσκεται εκατέρωθεν του σημείου $x = 1$. Τα μη ομαλά σύνορα είναι προβληματικά σε χώρους ανώτερης διάστασης.*

2.2.3 Συνεχής επέκταση των στοιχείων των χώρων $W^{1,p}(I)$ στο $\mathbb{R}$

Θεώρημα 2.3 (Τελεστής επέκτασης)**.** *Υπάρχει*

$$E : W^{1,p}(I) \to W^{1,p}(\mathbb{R}) \quad \forall\, p \in [1,\infty],$$

γραμμικός και συνεχής τελεστής επέκτασης με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(*i*) $Eu_{|I} = u \quad \forall\, u \in W^{1,p}(I)$,

(*ii*) $\|Eu\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{L^p(I)} \quad \forall\, u \in W^{1,p}(I)$,

(iii) $\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)} \quad \forall\, u \in W^{1,p}(I)$,

όπου $C = C(|I|)$ σταθερά και $|I| < \infty$, δηλαδή πεπερασμένου μήκους.
(Βλ. Brezis, 2011, Θεώρημα 8.6).

Αν το I μη φραγμένο διάστημα, της μορφής $I = (a, \infty)$ ή $I = (-\infty, a)$, τότε θεωρούμε την άρτια ανάκλαση της u ως προς το σημείο a :

$$u^* \equiv E(x) = \begin{cases} u(x), & \text{αν } x \in [a, \infty)\,, \\ u(2a - x) = u(a + (a - x)), & \text{αν } x \in (-\infty, 0)\,. \end{cases}$$

Ενδεικτικά, ας ελέγξουμε ότι ικανοποιείται η ιδιότητα (ii) για $a = 0$:

$$\|u^*\|^p_{L^p(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^0 |u(x)|^p\, dx + \int_0^\infty |u(x)|^p\, dx = 2\int_0^\infty |u(x)|^p\, dx = 2\,\|u\|^p_{L^p(I)}.$$

Η τιμή $u(0)$ ορίζεται λόγω συνέχειας, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2. Η (ii) ικανοποιείται για $C = 2^{1/p}$ με εφαρμογή της ανισότητας Hölder. $\square$

Αν το $I = (a, b)$ είναι φραγμένο διάστημα, χρησιμοποιούμε τη βοηθητική συνάρτηση $\eta\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right) \in C^1(\mathbb{R})$, με $0 \leq \eta(x) \leq 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$. Για παράδειγμα, αν $I = (0, 1)$, τότε

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right), \\ 0, & \text{αν } x \in \left(\frac{3}{4}, \infty\right), \end{cases}$$

και δουλεύουμε με την ομαλή συνάρτηση $\eta u + (1 - \eta)u$.

Η ηu μηδενίζεται στο $x = 1$ και επεκτείνεται ως ομαλή $\eta\tilde{u}$ στο $[0, \infty)$ ως μηδενική. Η $(1 - \eta)u$ μηδενίζεται στο $x = 0$ (στο $[0, 1/4]$) και επεκτείνεται ως ομαλή $(1 - \eta)\tilde{u}$ στο $(-\infty, 0]$ ως μηδενική. Αν $u \in W^{1,p}(I)$, αποδεικνύεται ότι $\eta\tilde{u} \in W^{1,p}((0, \infty))$ και $(\eta\tilde{u})' = \eta'\tilde{u} + \eta\tilde{u}'$. Αντίστοιχα για την $(1 - \eta)\tilde{u}$. (Βλ. Brezis, 2011, Λήμμα 8.3).

Στην περίπτωση της ηu, χρησιμοποιούμε την επέκταση $\tilde{u}$ της u στο $(0, \infty)$, με τιμές

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{αν } x \in (0, 1)\,, \\ 0, & \text{αν } x \in [1, \infty)\,. \end{cases}$$

Στην περίπτωση της $(1-\eta)u$, χρησιμοποιούμε την επέκταση $\tilde{u}$ της u στο $(-\infty, 1)$, με τιμές

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{αν } x \in (0, 1)\,, \\ 0, & \text{αν } x \in (-\infty, 0]\,. \end{cases}$$

Τέλος, επεκτείνουμε αφενός τη $\eta\tilde{u}$, από το $(0, \infty)$ σε όλο το $\mathbb{R}$, με άρτια ανάκλαση ως προς το σημείο 0, αφετέρου τη $(1 - \eta)\tilde{u}$, από το $(-\infty, 1)$ σε όλο το $\mathbb{R}$, με άρτια ανάκλαση ως προς το σημείο 1. Προκύπτουν οι συναρτήσεις $\upsilon_1,\ \upsilon_2 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$, αντίστοιχα, και ορίζεται η επέκταση $Eu := \upsilon_1 + \upsilon_2$. $\square$

2.2.4 Πυκνότητα των συναρτήσεων δοκιμής στους χώρους $W^{1,p}(I)$

Θεώρημα 2.4 (Πυκνότητα των συναρτήσεων δοκιμής στον $W^{1,p}(I)$)**.**

$$\forall\, u \in W^{1,p}(I) \quad \exists\, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_c^{\infty}(\mathbb{R}):\ u_{n\,|I} \to u \in W^{1,p}(I) \quad \forall\, 1 \le p < \infty.$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.4, θα χρειαστούμε το Θεώρημα του Young, το Θεώρημα 2.6 και το Λήμμα 2.3.

Θεώρημα 2.5 (Young)**.** *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ και $h \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$. Τότε:*

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f \star g)\, h = \int_{\mathbb{R}^N} g\, (\check{f} \star h), \quad \check{f}(x) := f(-x).$$

(Βλ. Brezis, 2011, Θεώρημα 4.15).

Θεώρημα 2.6. *Έστω $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ $1 \le p < \infty$. Τότε $\|\omega_n \star u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \to 0$ καθώς $n \to \infty$. (Βλ. Brezis, 2011, Θεώρημα 4.22).*

Λήμμα 2.3. *Έστω $\omega \in L^1(\mathbb{R})$ και $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ με $p \in [1,\infty]$. Τότε*

$$\omega \star u \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \ \text{ και } \ (\omega \star u)' = \omega \star u'.$$

(Βλ. Brezis, 2011, Λήμμα 8.4).

Απόδειξη. Προφανώς $u \in W^{1,p}(I) \Rightarrow u, u' \in L^p(I)$. Θεωρούμε $I = \mathbb{R}$. Σε αντίθεση με τους χώρους L^p, το θεώρημα της πυκνότητας δεν ισχύει για $I \subset \mathbb{R}$. Αρχικά, κατασκευάζουμε ακολουθία ομαλών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα

$$(u_n)_{n\ge 1} \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}):\ u_n = \zeta_n\,(\omega_n \star u) \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \quad \forall\, n \ge 1.$$

Η ακολουθία εξομάλυνσης $(\omega_n)_{n\ge1} \subset C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ ομαλοποιεί τη u, και ο πολλαπλασιαμός της $(\omega_n \star u)_{n\ge1} \subset C^{\infty}(\mathbb{R})$ με την ακολουθία αποκοπής $(\zeta_n)_{n\ge1} \subset C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ επιτυγχάνει συμπαγή φορέα. Συγκεκριμένα, θεωρούμε:

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } |x| \le 1, \\ 0, & \text{αν } |x| \ge 2, \end{cases} \quad , \quad \zeta_n(x) := \zeta_n(\tfrac{x}{n}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } |x| \le n, \\ 0, & \text{αν } |x| \ge 2n, \end{cases}$$

$$0 \le\ \zeta(x), \zeta_n(x)\ \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \ge 1,$$

$$\|\zeta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \max_{x\in\mathbb{R}} |\zeta(x)| = 1,$$

$$C := \|\zeta'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \max_{x\in\mathbb{R}} |\zeta'(x)|,$$

$$\|\zeta_n'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \max_{x\in\mathbb{R}} |\zeta_n'(x)| = \max_{x\in\mathbb{R}} |\tfrac{\zeta'(x)}{n}| = \tfrac{C}{n}.$$

Από το Θεώρημα του Young, $\|\omega_n\star u - \omega\star u\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0$ και $\|\omega_n\star u' - \omega\star u'\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0$, καθώς $n \to \infty$. Από το Λήμμα 2.3, $\omega_n \star u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ και $(\omega_n \star u)' = \omega_n \star u'$. Έπεται ότι $\omega \star u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ και $(\omega \star u)' = \omega \star u'$ (Βλ. Brezis, 2011, Παρατήρηση 4, σελ.204). Επειδή $|\zeta_n\, u(x)| \le |u(x)|$ και $\zeta_n\, u \to u$ $\mathbb{R}$–κ.σ.σ.π. καθώς $n \to \infty$, αν θέσουμε $f \equiv \omega \star u \in L^p(\mathbb{R})$ ή $f \equiv (\omega_n \star u)' \in L^p(\mathbb{R})$, τότε, από το ΘΚΣ, έπεται ότι $\|\zeta_n\, f - f\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0$, καθώς $n \to \infty$.

Ισχυρισμός. *$\|u_n - u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Ισοδύναμα $\|u_n - u\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0$ και $\|u_n' - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0$ καθώς $n \to \infty$.*

Απόδειξη. Για την πρώτη σύγκλιση, γράφουμε

$$u_n - u = \zeta_n \left((\omega_n \star u) - u \right) + (\zeta_n u - u)$$

και παίρνουμε τη νόρμα στον $L^p(\mathbb{R})$:

$$\|u_n - u\|_{L^p(\mathbb{R})} \overset{\text{TA}}{\leq} \underbrace{\|\omega_n \star u - u\|_{L^p(\mathbb{R})}}_{\text{Θεώρ. 2.6}} + \underbrace{\|\zeta_n u - u\|_{L^p(\mathbb{R})}}_{\text{ΘΚΣ}} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 2.3, $u_n' = \zeta_n' (\omega_n \star u) + \zeta_n (\omega_n \star u')$. Για τη δεύτερη σύγκλιση, γράφουμε

$$u_n' - u' = u_n' - u' \pm \zeta_n u' = \zeta_n' (\omega_n \star u) + \left(\zeta_n u' - u'\right) + \zeta_n \left(\omega_n \star u' - u'\right)$$

και παίρνουμε τη νόρμα στον $L^p(\mathbb{R})$:

$$\|u_n' - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|\zeta_n' (\omega_n \star u)\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\zeta_n u' - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|\zeta_n \left(\omega_n \star u' - u'\right)\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Από το Θεώρημα 2.6 προκύπτει ότι $\|\zeta_n' (\omega_n \star u)\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0$ καθώς $n \to \infty$, αφού

$$\|\zeta_n' (\omega_n \star u)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|\zeta_n'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\omega_n \star u\|_{L^p(\mathbb{R})} = \frac{1}{n}\|\zeta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\omega_n \star u\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{n} \|u\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

και $\|\zeta_n \left(\omega_n \star u' - u'\right)\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0$ καθώς $n \to \infty$, αφού

$$\|\zeta_n \left(\omega_n \star u' - u'\right)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|\zeta_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\omega_n \star u' - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|\omega_n \star u' - u'\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Από το ΘΚΣ προκύπτει ότι $\|\zeta_n u' - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Έπεται ότι $\|u_n' - u'\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0$, $n \to \infty$. □

Η αποδεικτέα προκύπτει συνδυάζοντας τις συγκλίσεις των u, u' στον $L^p(\mathbb{R})$. □

Σε αντίθεση με τους χώρους L^p, το Θεώρημα 2.4 δεν εφαρμόζεται όταν $I \neq \mathbb{R}$. Σε αυτή την περίπτωση, επεκτείνουμε τη συνάρτηση (με ανάκλαση και αποκοπή) και δουλεύουμε με την περιορισμένη εκδοχή της.

2.2.5 Χαρακτηρισμοί των στοιχείων των χώρων $W^{1,p}(I)$

Αρχικά, θα αναφέρουμε τις ακόλουθες συνθήκες (φράγματα) που πρέπει να ικανοποιούν οι συναρτήσεις των χώρων $W^{1,p}$.

Πρόταση 2.1. *Έστω $u \in L^p(I)$ με $1 < p \leq \infty$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) $u \in W^{1,p}(I)$,

(ii) $\exists C : \left|\int_I u \varphi'\right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}(I)} \ \forall \varphi \in C_c^1(I)$. *Επιλέγουμε* $C := \|u'\|_{L^p(I)}$.

Παρατήρηση 7. *Όταν $p = 1$, δηλαδή στην περίπτωση των απόλυτα συνεχών συναρτήσεων, (i) $\Rightarrow$ (ii) αλλά (ii) $\not\Rightarrow$ (i). (Βλ. Brezis, 2011, Πρόταση 8.3).*

Πρόταση 2.2 ($p = \infty$). *Έστω $u \in L^\infty(I)$. Τότε:*

$$u \in W^{1,\infty}(I) \Leftrightarrow \exists C : |u(x) - u(y)| \leq C\,|x - y| \quad \forall x, y \in I - \text{σ.π.}.$$

(Βλ. Brezis, 2011, Πρόταση 8.4).

Πρόταση 2.3 ($1 < p < \infty$). *Έστω $u \in L^p(\mathbb{R})$ για $1 < p < \infty$.*[2] *Τ.Α.Ε.Ι.:*

[2] Συμβολίζουμε $(\tau_h u)(x) := u(x + h)$.

(i) $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$,

(ii) $\exists\, C \,:\, \|\tau_h u - u\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C\,|h| \quad \forall\, h \in \mathbb{R}$. *Επιλέγουμε* $C := \|u'\|_{L^p(\mathbb{R})}$.

Παρατήρηση 8. *Όταν* $p = 1$, $(i) \Rightarrow (ii)$ *αλλά* $(ii) \not\Rightarrow (i)$. *(Βλ. Brezis, 2011, Πρόταση 8.5).*

2.2.6 Οι χώροι Sobolev $W^{k,p}(I)$ για $k \geq 2$

Ορισμός 9. *Έστω* $k \geq 2$ *ακέραιος. Ο χώρος Sobolev* $W^{k,p}(I)$ *αποτελείται από τις μετρήσιμες συναρτήσεις* $u \in L^p(I)$, *οι οποίες έχουν ασθενείς μερικές παραγώγους μέχρι και* k *τάξης. Ορίζεται επαγωγικά:*

$$W^{k,p}(I) = \left\{ u \in W^{k-1,p}(I)\,;\; u' \in W^{k-1,p}(I) \right\}, \quad k \geq 2.$$

Θα λέμε $u \in W^{k,p}(I)$ *αν-ν* $\exists\, k$ *συναρτήσεις* $g_1, g_2, \ldots, g_k \in L^p(I)$, *οι οποίες ορίζονται ως οι ασθενείς μερικές παράγωγοι για πολυδείκτη* ***μέχρι και*** k *τάξης της* u, *δηλαδή* $g_1 = u' \equiv Du$, $g_2 = (u')' \equiv D^2 u, \ldots, g_k = D^k u$, *ισοδύναμα:*

$$\int_I u\, D^{|\alpha|}\varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_I g_{|\alpha|}\, \varphi \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(I) \text{ και } |\alpha| \leq k.$$

Για $p = 2$, *χρησιμοποιούμε το συμβολισμό* $H^k(I)$, *χώρος Hilbert.*

Ο $W^{k,p}(I)$ είναι χώρος Banach $\forall\, 1 \leq p \leq \infty$, με νόρμα

$$\|u\|_{W^{k,p}(I)} := \|u\|_{L^p(I)} + \textstyle\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(I)} \quad \forall\, 1 \leq p \leq \infty,$$

$$\|u\|_{W^{k,p}(I)} := \left(\|u\|^p_{L^p(I)} + \textstyle\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(I)} \right)^{1/p} \quad \forall\, 1 \leq p < \infty.$$

Ο $H^k(I)$ είναι χώρος Hilbert με επαγόμενο εσωτερικό γινόμενο

$$(u,v)_{H^k(I)} := (u,v)_{L^2(I)} + \textstyle\sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(I)} = \int_I uv + \sum_{|\alpha| \leq k} \int_I D^\alpha u\, D^\alpha v.$$

Οι ανισότητες Sobolev ισχύουν και για $k \geq 2$ (βλ. Ενότητα 2.4). Για παράδειγμα, αν το I είναι φραγμένο διάστημα, τότε η εμφύτευση $W^{k,p}(I) \hookrightarrow C^{k-1}(\bar{I})$ είναι συνεχής για $1 \leq p \leq \infty$, αντίστοιχα συμπαγής για $1 < p \leq \infty$.

2.2.7 Οι χώροι $W_0^{1,p}(I)$

Ορισμός 10. *Ο χώρος* $W_0^{1,p}(I)$ *ορίζεται ως η πλήρωση του χώρου* $C_c^1(I)$ *στον* $W^{1,p}(I)$, $1 \leq p < \infty$ *(εκτός* $p = \infty$*).*

Παρατήρηση 9. *Ο* $W_0^{1,p}(I)$ *είναι εφοδιασμένος με τη νόρμα του* $W^{1,p}(I)$ $\forall\, 1 \leq p \leq \infty$ *και με το ε.γ. του* $H^1(I)$ *για* $p = 2$. *Ειδικά, ο* $W_0^{1,p}(I)$ *είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach* $\forall\, 1 \leq p \leq \infty$ *και αυτοπαθής για* $p > 1$. *Επίσης, ο* $H_0^1(I)$ *είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert.*

Παρατήρηση 10. *Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.4 (πυκνότητα), αν* $I = \mathbb{R}$, *τότε* $\overline{C_c^1(\mathbb{R})} = W^{1,p}(\mathbb{R})$, *άρα οι χώροι* $W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R})$ *ταυτίζονται. Αν όμως* $I \neq \mathbb{R}$, *τότε* $W_0^{1,p}(\mathbb{R}) \notsubseteq W^{1,p}(\mathbb{R})$ *γνήσιος υπόχωρος.*

Παράδειγμα 9. *Αν $I \neq \mathbb{R}$, τότε ο $H_0^1(I)$ είναι γνήσιος υπόχωρος του $H^1(I)$. Αν το I είναι φραγμένο, η συνάρτηση $u \in C^\infty(\bar{I})$, με $u(x) = c_1\, e^x + c_2\, e^{-x}$ και c_1, c_2 όχι ταυτόχρονα ίσες μη μηδέν, ανήκει στον $H^1(I)$. Μάλιστα, επειδή $u'' = u$,*

$$(u, \varphi)_1 = \int_I u\varphi + \int_I u'\varphi' = \int_I (u - u'')\,\varphi = 0, \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(I).$$

Από την πυκνότητα των συναρτήσεων δοκιμής, αφού $(u, \varphi)_1 = 0$, θα ισχύει και $(u, v)_1 = 0$, $\forall\, v \in H_0^1(I)$. Επειδή ο $H_0^1(I)$ είναι χώρος Hilbert, η βέλτιστη προσέγγιση της u από στοιχείο του $H_0^1(I)$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_1$, είναι η μηδενική συνάρτηση. Συνεπώς, $u \notin H_0^1(I)$.

Παρατήρηση 11. *Κάθε $u \in H^1(I)$ με $s(u) \subset I$ συμπαγές, είναι και στοιχείο του $H_0^1(I)$.*

Παρατήρηση 12. *Με χρήση ακολουθίας εξομαλύνσεων, αποδεικνύονται τα ακόλουθα:*

(i) $\overline{C_c^\infty(I)} = W_0^{1,p}(I)$.

(ii) $u \in W^{1,p}(I) \cap C_c(I) \Rightarrow u \in W_0^{1,p}(I)$.

Το ακόλουθο Θεώρημα αφορά στις συνοριακές συνθήκες των ΜΔΕ.

Θεώρημα 2.7 (Χαρακτηρισμός των συναρτήσεων του $W_0^{1,p}(I)$)**.** *Έστω $u \in W^{1,p}(I)$. Τότε $u \in W_0^{1,p}(I)$ αν-ν $u = 0$ ∂I-σ.π.. (Βλ. Brezis, 2011, Θεώρημα 8.12).*

Ορισμός 11. *Για $k \geq 2$ και $1 \leq p < \infty$, ο $W_0^{k,p}(I)$ είναι η πλήρωση του $C_c^k(I)$ στον $W^{k,p}(I)$. Οι χώροι $W_0^{k,p}(I)$ είναι πλήρεις γ.χ.ν., δηλαδή Banach. Επιπλέον, ισχύει ο μηδενισμός των τιμών όλων των παραγώγων στο σύνορο:*

$$W_0^{k,p}(I) = \left\{u \in W^{k,p}(I) \,|\, u = Du = \cdots = D^{k-1}u = 0 \ \text{ στο } \partial I\right\}.$$

Παράδειγμα 10 (Παραδείγματα)**.**

$$W_0^{2,p}(I) = \left\{u \in W^{2,p}(I) \,|\, u = Du = 0 \ \text{ στο } \partial I\right\}.$$

$$W^{2,p}(I) \cap W_0^{2,p}(I) = \left\{u \in W^{1,p}(I) \,|\, u = 0 \ \text{ στο } \partial I\right\}.$$

2.3 Οι χώροι Sobolev σε πολλές διαστάσεις

2.3.1 Συναρτήσεις Sobolev

Ορισμός 12 (Συνάρτηση Sobolev). *Έστω $p \in \mathbb{R}$ με $1 \leq p \leq \infty$.*

(i) *Μια συνάρτηση $u \in W^{1,p}(\Omega)$ αν $u \in L^p(\Omega)$ και οι ασθενείς μερικές παράγωγοι αυτής υπάρχουν στον $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, δηλαδή*
$\exists\, ux_i := g_i$ στον $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ για κάθε $i \in \{1, \dots, N\}$.

(ii) *$u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ αν $u \in W^{1,p}(\Omega')$ για κάθε ανοιχτό $\Omega' \Subset \Omega$.*

(iii) *Η u είναι συνάρτηση Sobolev αν $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ για κάποιο $1 \leq p \leq \infty$. Εξ ορισμού, με ΟΚΠ, ισχύει και η ακόλουθη σχέση:*

$$\int_\Omega u\,\varphi_{x_i}\,dx = -\int_\Omega u_{x_i}\varphi\,dx \quad \forall\,\varphi \in C^1_c(\Omega) \text{ και } \forall\, i \in \{1, \dots, n\}.$$

Αν η $u \in W^{1,p}(\Omega)$, εφοδιασμένη με την αντίστοιχη p-νόρμα, συγκλίνει ως προς αυτήν, τότε:

$$u_n \to u \in W^{1,p}(\Omega),\ n \to \infty \Leftrightarrow \|u_n - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0,\ n \to \infty,$$
$$u_n \to u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega),\ n \to \infty \Leftrightarrow \|u_n - u\|_{W^{1,p}(\Omega')} \to 0 \quad \forall\,\Omega' \Subset \Omega,\ n \to \infty.$$

2.3.2 Ομαλοποίηση συναρτήσεων Sobolev

Η τεχνική της εξομάλυνσης είναι μέθοδος προσέγγισης των συναρτήσεων Sobolev από ομαλές συναρτήσεις του χώρου C^∞. Προτού προχωρήσουμε, αναφέρουμε το Θεώρημα Παραγώγισης του Lebesgue, σύμφωνα με το οποίο, οι μέσοι μιας τοπικά ολοκληρώσιμης συνάρτησης στο Ω, συγκλίνουν κ.σ.-σ.π. σε αυτήν, καθώς συρρικνώνεται η ακτίνα της περιοχής.

Έστω $B(x,r)$ η ανοικτή μπάλλα του $\mathbb{R}^N$ με την Ευκλείδεια μετρική, δηλαδή $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}$, και $\partial B(x,r)$ η αντίστοιχη σφαίρα:

$$B(x,r) := \left\{y \in \mathbb{R}^N \,:\, \|x-y\|_2 < r\right\}, \quad \partial B(x,r) := \left\{y \in \mathbb{R}^N \,:\, \|x-y\|_2 = r\right\}.$$

Αποδεικνύεται ότι ο όγκος της μοναδιαίας μπάλλας του $\mathbb{R}^N$ ισούται με

$$\alpha_N := \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(\frac{N}{2}+1)} = \frac{\pi^{N/2}}{\frac{N}{2}\Gamma(\frac{N}{2})} = \frac{2\pi^{N/2}}{N\Gamma(N/2)}, \quad \text{όπου } \alpha_2 = \pi \text{ και } \alpha_3 = \frac{4\pi}{3}.$$

Θα συμβολίζουμε τη **μέση τιμή** (mean value) μιας συνάρτησης $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, ορισμένης στην ανοικτή μπάλλα $B(x,r) \Subset \Omega$, με το ολοκλήρωμα

$$⨍_{B(x,r)} u\,dx := \frac{1}{\alpha_N\, r^N}\int_{B(x,r)} u\,dx,$$

και αντίστοιχα, με το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$⨍_{\partial B(x,r)} u\,dS := \frac{1}{\alpha_N\, N r^{N-1}}\int_{\partial B(x,r)} u\,dS,$$

αν είναι ορισμένη στην αντίστοιχη σφαίρα.

Ορισμός 13 (Σημείο Lebesgue). *Έστω $r > 0$. Αν $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, τότε ισχύει*

$$\lim_{r\to 0^+} \fint_{B(x,r)} |u(y) - u(x)|\, dx = 0 \quad \textit{κ.σ.-σ.π. για κάποιο}\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Αν η u συνεχής σε σημείο $x \in \mathbb{R}^N$, τότε η μέση τιμή του ολοκληρώματος της u σε κάθε ανοικτή περιοχή $B(x,r) \Subset \Omega$ θα συγκλίνει στην τιμή της u στο x, καθώς η ακτίνα της περιοχής συρρικνώνεται στο μηδέν, δηλαδή:

$$\lim_{r\to 0^+} \fint_{B(x,r)} u\, dx = u(x).$$

Θεώρημα 2.8 (Χαρακτηρισμός ομαλοποιημένων συναρτήσεων Sobolev). *Έστω $\varepsilon > 0$. Αν ορίσουμε την $\varepsilon-$περιοχή του Ω ως*

$$\boxed{\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega \mid dist(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}},$$

τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $(\forall\, \varepsilon > 0) :\ u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$.

(ii) $u \in C(\Omega) \Rightarrow\ u^\varepsilon \rightrightarrows u\ \ \forall\, K \subset \Omega$ *συμπαγές.*

(iii) *Αν $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ για κάποιο $1 \le p < \infty$, τότε $u^\varepsilon \to u$ στον $L^p_{loc}(\Omega)$.*

(iv) *Επιπλέον, αν το x είναι σημείο Lebesgue της $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, τότε $u^\varepsilon(x) \to u(x)$ κ.σ.-σ.π. στα τοπικά συμπαγή του Ω.*

(v) *Αν $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ για κάποιο $1 \le p < \infty$, τότε*

$$u_i^\varepsilon = \omega_\varepsilon \star u_i,\ i = 1, \dots, N,\ \textit{στο}\, \Omega_\varepsilon$$

(vi) *και $u^\varepsilon \to u$ στον $L^p_{loc}(\Omega)$.*

Απόδειξη της (i). $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Σταθεροποιούμε κάποιο σημείο $x \in \Omega_\varepsilon$, επιλέγουμε δείκτη $1 \le i \le N$, και συμβολίζουμε $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ το ιοστό στοιχείο της κανονικής βάσης του $\mathbb{R}^N$. Για $|h|$ επαρκώς μικρό, η μετατόπιση του x στη διεύθυνση του e_i ανήκει στο U_ε, δηλαδή $x + he_i \in \Omega_\varepsilon$. Επομένως, μπορούμε να υπολογίσουμε την ακόλουθη ποσότητα για κάποιο $\Omega' \Subset \Omega$:

$$\begin{aligned}\frac{u^\varepsilon(x+he_i) - u^\varepsilon(x)}{h} &= \frac{1}{\varepsilon^N}\int_\Omega \frac{1}{h}\left[\omega\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right) - \omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right] u(y)\, dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^N}\int_{\Omega'} \frac{1}{h}\left[\omega\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right) - \omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right] u(y)\, dy\end{aligned}$$

Αφού $\omega \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, τότε:

$$\frac{1}{h}\left[\omega\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right) - \omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right] \overset{h\to 0}{\to} \frac{1}{\varepsilon}\omega_{x_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^N \omega_{\varepsilon,x_i}(x-y) \quad \forall\, y \in \Omega'.$$

Χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της τοπικής εξομάλυνσης, $\omega(\frac{x-y}{\varepsilon}) =: \varepsilon^N \omega_\varepsilon(x-y)$, και παραγωγίσαμε και τα δύο μέλη ως προς x_i : $\frac{1}{\varepsilon}\,\omega_{x_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) = \varepsilon^N \omega_{\varepsilon,x_i}(x-y)$.

Η ολοκληρωτέα είναι φραγμένη:

$$\left|\frac{1}{h}\left[\omega\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right)-\omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right]\right| |u(y)| \le \frac{1}{\varepsilon}\|Du\|_{L^\infty(\Omega')}|u| \in L^1(\Omega') \quad \forall\, x,y \in \Omega'.$$

Από το ΘΚΣ, έπεται:

$$\begin{aligned}
u^\varepsilon_{x_i} &= \exists \lim_{h\to 0}\frac{u^\varepsilon(x+he_i)-u^\varepsilon(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\varepsilon^N}\int_{\Omega'}\frac{1}{h}\left[\omega\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right)-\omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right]u(y)\,dy\\
&\overset{\text{ΘΚΣ}}{=} \frac{1}{\varepsilon^N}\int_{\Omega'}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\omega\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right)-\omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right]u(y)\,dy\\
&= \frac{1}{\varepsilon^N}\int_{\Omega}\varepsilon^N\,\omega_{\varepsilon,x_i}(x-y)\,u(y)\,dy = \int_U \omega_{\varepsilon,x_i}(x-y)\,u(y)\,dy.
\end{aligned}$$

Το ζητούμενο έπεται αν επαναλάβουμε την οριακή προσέγγιση της μερικής παραγώγου για κάθε συνιστώσα. □

Απόδειξη της (ii). Για δεδομένο $\Omega' \Subset \Omega$, επιλέγουμε $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$. Τότε, για $x \in \Omega'$, ισχύει:

$$u^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N}\int_{B(x,\varepsilon)}\omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)u(y)\,dy \overset{\text{AM}}{=} \int_{B(0,1)}\omega(z)\,u(x-\varepsilon z)\,dz.$$

Εφαρμόσαμε την αλλαγή μεταβλητής $\frac{x-y}{\varepsilon} = z$ για να πετύχουμε σημεία της μοναδιαίας μπάλλας. Επειδή $\int_{B(0,1)}\omega(z)\,dz = 1$, τότε:

$$|u^\varepsilon(x)-u(x)| \le \int_{B(0,1)}\omega(z)\,|u(x-\varepsilon z)-u(x)|\,dz.$$

Αν η u είναι ομοιόμορφα συνεχής στο Ω'', έπεται ότι $u^\varepsilon \rightrightarrows u$ στο Ω'. □

Απόδειξη της (iii). Έστω $1 \le p < \infty$ και $u \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$. Για $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$, επιλέγουμε αυθαίρετα σημείο $x \in \Omega'$, και $\varepsilon > 0$ μικρό. Τότε, για $1 < p < \infty$ ισχύει το ακόλουθο φράγμα:

$$\begin{aligned}
|u^\varepsilon(x)| &\overset{\text{AM}}{=} \left|\int_{B(0,1)}\omega(z)\,u(x-\varepsilon z)\,dz\right|\\
&= \left|\int_{B(0,1)}\omega^{1-\frac{1}{p}}(z)\,\omega^{\frac{1}{p}}(z)\,u(x-\varepsilon z)\,dz\right|\\
&\overset{\text{Hölder}}{\le} \left(\int_{B(0,1)}\omega(z)\,dz\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_{B(0,1)}\omega(z)\,|u(x-\varepsilon z)|^p\,dz\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= 1^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_{B(0,1)}\omega(z)\,|u(x-\varepsilon z)|^p\,dz\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Για $1 \le p < \infty$, υψώνουμε στην p και ολοκληρώνουμε πάνω στο Ω':

$$\int_{\Omega'}|u^\varepsilon(x)|^p \le \int_{B(0,1)}\omega(z)\left(\int_{\Omega'}|u(x-\varepsilon z)|^p\,dx\right)dz \le \int_{\Omega''}|u(x)|^p\,dy \qquad (\star)$$

για $\varepsilon > 0$ επαρκώς μικρό.

Σταθεροποιούμε $\delta > 0$. Αφού $u \in L^p(\Omega'')$, υπάρχει $\upsilon \in C(\overline{\Omega''})$, τέτοια ώστε

$$\|u^\varepsilon - \upsilon\|_{L^p(\Omega'')} \le \delta,$$

και από την (⋆),

$$\|u^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{L^p(\Omega')} \leq \delta$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}\|u^\varepsilon - u\|_{L^p(\Omega')} &= \|u^\varepsilon - v^\varepsilon + v^\varepsilon - u\|_{L^p(\Omega')} = \|u^\varepsilon - v^\varepsilon + v^\varepsilon - u + v - u\|_{L^p(\Omega')}\\ &\overset{\text{TA}}{\leq} \|u^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{L^p(\Omega')} + \|v - u\|_{L^p(\Omega')} + \|v^\varepsilon - v\|_{L^p(\Omega')}\\ &\leq \delta + \delta + \|v^\varepsilon - v\|_{L^p(\Omega')} \overset{(ii)}{\leq} 3\delta\end{aligned}$$

για $\varepsilon > 0$ επαρκώς μικρό. Εφαρμόσαμε την ιδιότητα (ii) για να δείξουμε ότι $v^\varepsilon \rightrightarrows v \in C(\overline{\Omega})$ στα συμπαγή του Ω. Έπεται το ζητούμενο. □

Απόδειξη της (iv). Έστω $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ και το $x \in \Omega$ σημείο Lebesgue της u. Από τα προηγούμενα:

$$\begin{aligned}|u^\varepsilon(x) - u(x)| &= \left| \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{B(x,\varepsilon)} \omega(\frac{x-y}{\varepsilon})\,(u(y) - u(x))\,dy \right|\\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{B(x,\varepsilon)} \omega(\frac{x-y}{\varepsilon})\,|u(y) - u(x)|\,dy\\ &= \alpha_N \frac{1}{\alpha_N \varepsilon^N} \int_{B(x,\varepsilon)} \omega(\frac{x-y}{\varepsilon})\,|u(y) - u(x)|\,dy\\ &\overset{\text{Hölder},\,\infty-1}{\leq} \alpha_N\,\|\omega\|_{L^\infty(\Omega)} ⨍_{B(x,\varepsilon)} |u(y) - u(x)|\,dy \to 0,\ \varepsilon \to 0^+,\end{aligned}$$

αφού το x σημείο Lebesgue της u στο Ω.

Χρησιμοποιήσαμε το ακόλουθο αποτέλεσμα για τον όγκο της μοναδιαίας μπάλλας στον $\mathbb{R}^N$: $|B(0,1)| = \alpha_N \varepsilon^N$. □

Απόδειξη της (v). Έστω $u \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega)$ για κάποιο $1 \leq p \leq \infty$. Χρησιμοποιώντας την οριακή προσέγγιση της παραγώγου στο (i) :

$$\begin{aligned}u^\varepsilon_{x_i}(x) &= \int_\Omega \omega_{\varepsilon,x_i}(x-y)\,u(y)\,dy \overset{\text{A.M.}}{=} -\int_\Omega \omega_{\varepsilon,y_i}(x-y)\,u(y)\,dy\\ &\overset{\text{OKΠ}}{=} \int_\Omega \omega_\varepsilon(x-y)\,u_{y_i}(y)\,dy\\ &= \left(\omega_\varepsilon \star u_{x_i}\right)(x), \quad \text{για } x \in \Omega_\varepsilon.\end{aligned}$$

□

Απόδειξη της (vi). Η (vi) έπεται από την (iii). □

Τοπική ομαλοποίηση

Η απόδειξη της τοπικής προσέγγισης συναρτήσεων Sobolev από ομαλές συναρτήσεις βασίζεται στην τεχνική της διαμέρισης της μονάδας.

Λήμμα 2.4 (Διαμέριση της μονάδας)**.** *Έστω $\Gamma \subset \mathbb{R}^N$ συμπαγές. Άρα καλύπτεται από πεπερασμένα το πλήθος ανοιχτά καλύμματα, δηλαδή $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^m U_i$. Τότε, υπάρχουν συναρτήσεις $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_m$, με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) $0 \leq \zeta_i \leq 1 \ \ \forall\, i = 0, 1, \ldots, M,$

(ii) $\sum_{i=1}^{M} \zeta_i = 1$ *στο* $\mathbb{R}^N$,

(iii) $s(\zeta_i) \subset U_i$ *συμπαγής φορέας* $\forall\, i = 0, 1, \ldots, m$, *και* $s(\zeta_0) \subset \mathbb{R}^N \setminus \Gamma$.

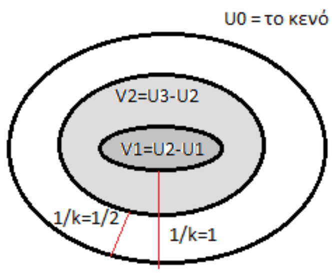
Αν το Ω *ανοικτό και* ***φραγμένο*** *με σύνορο* $\Gamma = \partial\Omega$, *τότε* $\zeta_{0|\Omega} \in C_c^\infty(\overline{\Omega})$.

Θεώρημα 2.9 (Τοπική προσέγγιση συναρτήσεων Sobolev από ομαλές συναρτήσεις)**.** *Έστω* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *για κάποιο* $1 \le p < \infty$. *Τότε, υπάρχει ακολουθία συναρτήσεων* $(u_n)_{n\ge1} \subset W^{1,p}(\Omega) \cup C^\infty(\Omega)$, *τέτοια ώστε*

$$u_n \to u \quad \text{στον} \quad W^{1,p}(\Omega).$$

Παρατήρηση 13. *Δεν ισχυριζόμαστε ότι* $(u_n)_{n\ge1} \subset C^\infty(\overline{\Omega})$, *δηλαδή η τοπική προσέγγιση δεν επεκτείνεται απαραίτητα στο σύνορο.*

Απόδειξη.



Σχήμα 2.2: Κατασκευή ακολουθίας δακτυλίων V_k με $k = 0, 1, \ldots$.

1. Θα εφαρμόσουμε την τεχνική της διαμέρισης της μονάδας. Σταθεροποιούμε $\varepsilon > 0$ και κατασκευάζουμε αφενός ακολουθία συνόλων (δακτύλιοι, ξένοι μεταξύ τους), τέτοια ώστε (βλ. Σχήμα 2.2)

$$\begin{cases} U_0 &= \varnothing, \\ U_k &= \left\{x \in U \,|\, \text{dist}\,(x, \partial U) > \frac{1}{k}\right\} \bigcap B^\circ(0,k), \; k \ge 1, \end{cases}$$
$$V_k := U_{k+1} - U_k =: U_{k+1} - \bar{U}_{k-1}, \; k \ge 1,$$

και αφετέρου ακολουθία ομαλών συναρτήσεων, $(\zeta_k)_{k\ge1}$, τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \zeta_k \in C_c^\infty(V_k), & 0 \le \zeta_k \le 1, \; k \ge 1, \\ \sum_{k\ge1} \zeta_k = 1 & \text{στο } \Omega. \end{cases}$$

Για κάθε $k \ge 1$, ισχύει $u\,\zeta_k \in W^{1,p}(\Omega)$ με φορέα $s(u\,\zeta_k) \subset V_k$. Άρα, μπορούμε να εφαρμοσουμε τις ιδιότητες των εξομαλύνσεων για τις $u\,\zeta_k$.

$$\exists\, \varepsilon_k > 0 : \begin{cases} s(u\,\zeta_k) \subset V_k \\ \left(\int_U \left|\omega_{\varepsilon_k} \star (u\,\zeta_k) - u\,\zeta_k\right|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2^k} \\ \left(\int_U \left|\omega_{\varepsilon_k} \star D(u\,\zeta_k) - D(u\,\zeta_k)\right|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2^k} \end{cases} \tag{$\star$}$$

Ορίζουμε την $u_\varepsilon := \sum_{k\ge1} \omega_{\varepsilon_k} \star (u\,\zeta_k) \in C^\infty(\Omega)$, αφού κάποια γειτονιά κάθε σημείου $x \in \Omega$, έχει πεπερασμένα το πλήθος μη μηδενικούς όρους.

2. Αφού $u = \sum_{k\geq 1} u\,\zeta_k$, η ($\star$) συνεπάγεται τις ακόλουθες συγκλίσεις στον $L^p(\Omega)$:

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{k\geq 1}\Big(\int_\Omega |\omega_{\varepsilon_k} \star (u\,\zeta_k) - u\,\zeta_k|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \overset{(\star)}{\leq} \sum_{k\geq 1}\frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon \to 0,$$

$$\|Du_\varepsilon - Du\|_{L^p(\Omega)} \leq \sum_{k\geq 1}\Big(\int_\Omega |\omega_{\varepsilon_k} \star D(u\,\zeta_k) - D(u\,\zeta_k)|^p\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \overset{(\star)}{\leq} \sum_{k\geq 1}\frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon \to 0.$$

Επομένως, $u_\varepsilon \in W^{1,p}(\Omega)$ και $u_\varepsilon \to u$ στον $W^{1,p}(\Omega)$, καθώς $\varepsilon \to 0$. □

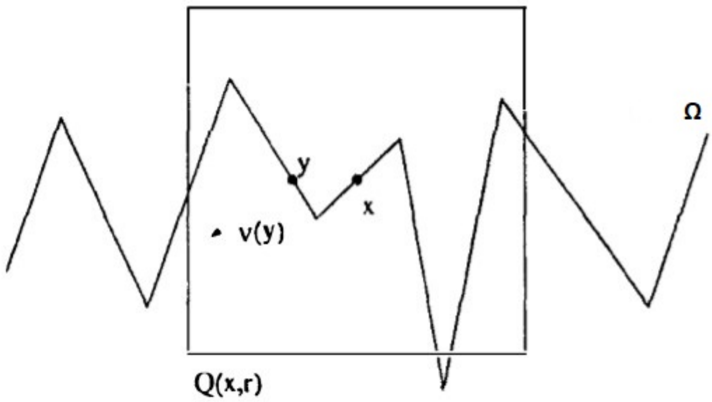
Ολική ομαλοποίηση

Η ομαλή προσέγγιση μέχρι το σύνορο είναι ολική, όχι τοπική. Το δε σύνορο πρέπει να είναι **ομαλό**. Ένα είδος ομαλότητας επιτυγχάνεται από σύνορα που έχουν την **ιδιότητα Lipschitz**.

Ορισμός 14 (Καμπύλη Lipschitz)**.** *Το σύνορο $\partial\Omega$ είναι καμπύλη Lipschitz, αν $\forall\, x \in \partial\Omega$, $\exists\, r > 0$ και $\exists\, \gamma : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ απεικόνιση Lipschitz, η οποία με κατάλληλη αναπαραμετροποίηση (περιστροφή και αλλαγή συντεταγμένων) ικανοποιεί*

$$\Omega \cap Q(x,r) = \{\, y \mid \gamma(y_1,\ldots,y_{N-1}) < y_N\} \cap Q(x,r),$$

όπου $Q(x,r) := \{\, y \mid |y_i - x_i| < r,\ i = 1,\ldots,N\}$ ο r-κύβος στο $\mathbb{R}^N$. Αν όλες οι συναρτήσεις γ επιλεγούν ώστε να είναι k-φορές συνεχώς παραγωγίσιμες, τότε λέμε ότι το σύνορο $\partial\Omega$ είναι C^k-ομαλό.



Σχ΄ημα 2.3: Σύνορο Lipschitz. (Βλ. Evans & Gariepy, 1991, , Σχήμα 4.1, σελ.127).

Παρατήρηση 14. *Δηλαδή, το σύνορο, $\partial\Omega$, έχει σημεία τομής με κάποια γειτονιά κάθε σημείου $x \in \Omega$. Επιπλέον, το εξωτερικό, κάθετο στο σύνορο, $\partial\Omega$, διάνυσμα $\nu(x)$, υπάρχει για $x \in \partial\Omega$-σ.π. ως προς το $(N-1)$-διάστατο μέτρο Hausdorff.*

Ορισμός 15 (Μέτρο Hausdorff)**.** *Το s-διάστατο μέτρο Hausdorff του $\mathbb{R}^N$ είναι εξωτερικό μέτρο και ορίζεται ως*

$$H^s_\delta(\Omega) := \inf\Big\{\sum_{i\geq 1}\frac{\alpha_s}{2^s}\mathit{diam}^s(Q_i) \mid \Omega \subset \bigcup_{i\geq 1} Q_i,\ \mathit{diam}(Q_i) \leq \delta\Big\}\,,$$

για $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $0 \leq s < \infty$, $0 < \delta \leq \infty$ και $\alpha_N := \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$ μοναδιαίος όγκος.

Παρατήρηση 15. *Συγκριτικά με το εξωτερικό μέτρο Lebesgue του* $\mathbb{R}^N$,

$$\lambda_N^*(\Omega) := \inf\left\{\sum_{i\geq 1}\lambda_N^*(Q_i) \,|\, \Omega \subset \bigcup_{i\geq 1} Q_i\right\},\ \text{για}\, \Omega \subset \mathbb{R}^N,$$

ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\lambda_N^*(\Omega) = \frac{\alpha_N}{2^N}\, diam^N(\Omega),\ \text{για}\,\Omega \subset \mathbb{R}^N, \quad \lambda_N^*(B(x,r)) = \alpha_N\, r^N,\ \text{για}\, B(x,r) \subset \mathbb{R}^N.$$

Θεώρημα 2.10 (Πυκνότητα των ομαλών συναρτήσεων στον $W^{1,p}(\Omega)$)**.** *Έστω* Ω *ανοικτό και* ***φραγμένο*** *χωρίο του* $\mathbb{R}^N$, *με* ***ομαλό*** *σύνορο Lipschitz. Τότε, αν* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *για κάποιο* $1 \leq p < \infty$ *:*

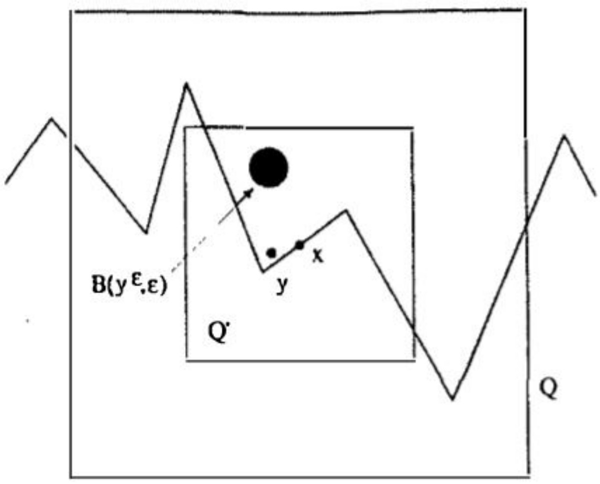
$$\exists\ (u_n)_{n\geq 1} \subset W^{1,p}(\Omega) \cup C^\infty(\overline{\Omega}) :\ u_n \to u \ \text{στον}\, W^{1,p}(\Omega).$$

Αν, επιπλέον, $u \in C(\overline{\Omega})$, *τότε* $u_n \rightrightarrows u$. *Δηλαδή, οι περιορισμοί των στοιχείων του* $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ *στο* Ω *αποτελούν πυκνό υπόχωρο του* $W^{1,p}(\Omega)$.

Απόδειξη.

1. Για $x \in \partial\Omega$, από τον ορισμό της καμπύλης Lipschitz, θεωρούμε $r > 0$ και $\gamma : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ απεικόνιση Lipschitz. Επίσης, ορίζουμε τους κύβους $Q := Q(x,r)$ και $Q' := Q(x, \frac{r}{2})$ έτσι ώστε $Q' \subset Q$.

2. Ας υποθέσουμε ότι η u μηδενίζεται κοντά στην περιοχή $\partial Q' \cap \Omega$. Για $y \in \partial Q' \cap \Omega$, $\varepsilon > 0$ και $\alpha > 0$, ορίζουμε τοπικά σημείο $y^\varepsilon := y + \varepsilon\alpha\, e_N$, έτσι ώστε $B(y^\varepsilon, \varepsilon) \subset \Omega \cap \partial Q$, $\forall\, \varepsilon > 0$ επαρκώς μικρό, υπό την προϋπόθεση ότι το $\alpha > 0$ είναι επαρκώς μεγάλο, π.χ. $\alpha :=$ Lip$(\gamma) + 2$ (βλ. Σχήμα 2.4).



Σχ'ημα 2.4: Η μικρή μπάλλα $B(y^\varepsilon, \varepsilon)$ κείται εντός του $\Omega \cap Q$. (Βλ. Evans & Gariepy, 1991, , Σχήμα 4.2, σελ.128).

Ορίζουμε

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(y) &:= \frac{1}{\varepsilon^N}\int_\Omega \omega\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) u(y^\varepsilon - z)\, dz \\ &\overset{\text{ΑΜ}}{=} \frac{1}{\varepsilon^N}\int_{B(y^\varepsilon,\varepsilon)} \omega\left(\frac{y-w}{\varepsilon} + \alpha\, e_N\right) u(w)\, dw \quad \text{για}\ y \in \Omega \cap Q'. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε την αλλαγή μεταβλητής $y^\varepsilon - z =: w$.

3. Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.8(i) & (v), θ.δ.ό. $u_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega \cap Q'}) \equiv C^\infty(\Omega \cap \bar{Q}')$ και $u_\varepsilon \to u$ στον $W^{1,p}(\Omega \cap Q')$. Επιπλέον, επειδή $u \equiv 0$ κοντά στο $\partial Q' \cap \Omega$, τότε και $u_\varepsilon \equiv 0$ κοντά στο $\partial Q' \cap \Omega$ για $\varepsilon > 0$ επαρκώς μικρό. Επομένως, η u_ε είναι επεκτάσιμη στο $\Omega \setminus Q'$ με μηδενικές τιμές.

4. Αφού το Ω φραγμένο εξ υποθέσεως, τότε το σύνορό του είναι συμπαγές. Από τον ορισμό της συμπάγειας, το $\partial\Omega$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα από κύβους $Q_i := Q(x_i, \frac{r_i}{2})$ για $i \in \{1, \ldots, M\}$.

Θα εφαρμόσουμε την τεχνική της διαμέρισης της μονάδας. Κατασκευάζουμε ακολουθία ομαλών συναρτήσεων, $(\zeta_i)_{i=0}^N$, τέτοιες ώστε:

$$\begin{cases} 0 \le \zeta_0 \le 1, & s(\zeta_0) \subset \Omega \\ 0 \le \zeta_i \le 1, & s(\zeta_i) \subset Q_i,\ i \in \{1, \ldots, M\} \\ \sum_{i=0}^M \zeta_i \equiv 1 & \text{στο } \Omega \end{cases}$$

και ορίζουμε $u^i := u\,\zeta_i$ για $i \in \{0, 1, \ldots, M\}$.

Σταθεροποιούμε $\delta > 0$. Κατασκευάζουμε συνάρτησεις $v^i := (u^i)_{\varepsilon_i} \in C^\infty(\overline{\Omega})$, όπως στο βήμα **3.**, τέτοιες ώστε να ικανοποιούν

$$\begin{cases} s(v^i) \subset \overline{\Omega} \cap Q_i \\ \|v^i - u^i\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \frac{\delta}{2M} \end{cases} \quad \text{για } i \in \{1, \ldots, M\}.$$

Επίσης, ομαλοποιούμε την u^0, όπως στο βήμα **2.** της απόδειξης του Θεωρήματος 2.9, σε $v^0 \in C_c^\infty(\Omega)$, έτσι ώστε να συγκλίνει στην u^0 στον $W^{1,p}(\Omega)$:

$$\|v^0 - u^0\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \frac{\delta}{2}.$$

Θέτουμε $v := \sum_{i=0}^M v^i \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Παρατηρούμε ότι και η v συγκλίνει στη u στον $W^{1,p}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \|v - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} &\le \|v^0 - u^0\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \textstyle\sum_{i=1}^M \|v^i - u^i\|_{W^{1,p}(\Omega)} \\ &< \frac{\delta}{2} + M\frac{\delta}{2M} = \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta. \end{aligned}$$

Έπεται ότι $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, δηλαδή $u \in W^{1,p}(\Omega)$ και $u \in C(\overline{\Omega})$. Επιπλέον, $u \in C(\overline{\Omega}) \Rightarrow u_n \rightrightarrows u$. □

Θεώρημα 2.11 (Τα στοιχεία του $W^{1,\infty}_{\text{loc}}(\Omega)$ είναι τοπικά Lipschitz-συνεχή)**.** *Έστω $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Τότε η u είναι τοπικά Lipschitz-συνεχής στο Ω αν-ν $u \in W^{1,\infty}_{\text{loc}}(\Omega)$.*

Απόδειξη.

1. Για το ευθύ ($\Rightarrow$), θα υποθέσουμε ότι η u είναι τοπικά Lipschitz-συνεχής στο Ω και θ.δ.ό. $u \in W^{1,\infty}_{\text{loc}}(\Omega)$. Θα χρειαστούμε το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 2.12 (Ασθενής συμπάγεια στον L^p)**.** *Έστω $(u_k)_{k \ge 1}$ ακολουθία συναρτήσεων στον $L^p(\Omega)$ για κάποιο $1 \not\le p < \infty$, η οποία ικανοποιεί $\sup_k \|u_k\|_{L^p(\Omega)} < \infty$. Τότε $\exists\, (u_{k_j})_{j \ge 1}$ και συνάρτηση $u \in L^p(\Omega)$, έτσι ώστε $u_{k_j} \rightharpoonup u$ στον $L^p(\Omega)$. (Βλ. Evans & Gariepy, 1991, Ενότητα 1.9, Θεώρημα 3).*

Σταθεροποιούμε κάποιο $1 \le i \le N$ και, για κάθε $\Omega' \Subset \Omega'' \Subset \Omega$ (στα τοπικά συμπαγή), επιλέγουμε $0 < h < \text{dist}\,(\Omega', \partial\Omega'')$ και ορίζουμε το αντίστοιχο πηλίκο μεταβολής (η u είναι τοπικά Lipschitz-συνεχής)

$$v_i^h := \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h}, \ x \in \Omega'.$$

Επειδή $\sup_{h>0} |g_i^h| \le \text{Lip}\,(u_{|\Omega''}) < \infty$,[3] από το Θεώρημα 2.12, έπεται ότι $\exists\, h_j \to 0$ και συνάρτηση $v \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$, έτσι ώστε $v_i^{h_j} \rightharpoonup v_i$ στον $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$, για κάθε $1 < p < \infty$.

Αν $\varphi \in C_c^1(\Omega_1)$ συνάρτηση δοκιμής, τότε ισχύει:

$$\int_\Omega u(x) \frac{\varphi(x + he_i) - \varphi(x)}{h}\, dx = -\int_\Omega v_i \varphi\, dx.$$

Θέτοντας $h \mapsto h_j$ και παίρνοντας το όριο καθώς $j \to \infty$, προκύπτει:

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega v_i \varphi\, dx.$$

Δηλαδή, η v_i είναι η ασθενής παράγωγος της u ως προς x_i (αυθαίρετη επιλογή συνιστώσας), άρα $u \in W^{1,\infty}_{\text{loc}}(\Omega)$.

2. Για το αντίστροφο ($\Leftarrow$), θα υποθέσουμε ότι $u \in W^{1,\infty}_{\text{loc}}(\Omega)$ και θ.δ.ό. η u είναι τοπικά Lipschitz-συνεχής στο Ω.

Έστω $\bar{B} \Subset \Omega$ μια κλειστή μπάλλα. Από το Θεώρημα 2.8 (χαρακτηρισμός ομαλοποιημένων συναρτήσεων Sobolev), (v) & (vi), έπεται ότι

$$\sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0} \|Du^\varepsilon\|_{L^\infty(\bar{B})} < \infty,$$

για ε_0 επαρκώς μικρό.

Αφού $u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$, από το (i), έπεται η συνέχεια Lipschitz:

$$u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y) = \int_{t=0}^1 Du^\varepsilon(y + t(x-y))\, dt, \text{ για } x, y \in B,$$

$$\left|u^\varepsilon(x) - u^\varepsilon(y)\right| \le C|x - y|.$$

Η σταθερά $C := \sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0} \|Du^\varepsilon\|_{L^\infty(\bar{B})} < \infty$ είναι ανεξάρτητη του ε. Άρα

$$|u(x) - u(y)| \le C|x - y|, \text{ για } x, y \in \bar{B}$$

Επομένως, η $u_{|B}$ είναι Lipschitz-συνεχής $\forall\, \bar{B} \Subset \Omega$ και η u τοπικά Lipschitz-συνεχής στο Ω. □

2.3.3 Ίχνος συνάρτησης Sobolev

Στο Θεώρημα 2.10, για $1 \le p < \infty$, δείξαμε ότι, αν το Ω φραγμένο με ομαλό σύνορο, τότε οι περιορισμοί των στοιχείων του $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ στο Ω, αποτελούν πυκνό υπόχωρο του $W^{1,p}(\Omega)$. Επιπλέον, το μέτρο Lebesgue ορίζεται στο σύνορο $\partial\Omega$, άρα και στο χώρο $L^p(\partial\Omega)$, και μάλιστα αποτελείται από συναρτήσεις ορισμένες στο $\partial\Omega$, με πεπερασμένη p-νόρμα, $\|\cdot\|_{L^p(\partial\Omega)}$.

Λήμμα 2.5 (Εκτίμηση της νόρμας του $L^p(\partial\Omega)$ από τη νόρμα του $W^{1,p}(\Omega)$)**.** *Έστω $1 \le p < \infty$ και $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ανοικτό και φραγμένο χωρίο με ομαλό σύνορο, για*

[3] Η πεπερασμένη σταθερά Lipschitz δηλώνει το μέγεθος της συνέχειας, τύπου Hölder. Θεωρούμε τον περιορισμό της u στο Ω_2, επειδή δε γνωρίζουμε αν $|\Omega| < \infty$.

παράδειγμα C^1. Τότε:

$$\exists\, C = C(\Omega, p): \ \|v\|_{L^p(\partial\Omega)} \le C\,\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall\, v \in C^1(\overline{\Omega}).$$

Το Λήμμα 2.5, σε συνδυασμό με το Θεώρημα 2.10 (πυκνότητα), για $1 \le p < \infty$, μας επιτρέπουν να ορίσουμε συνοριακές συνθήκες για τα στοιχεία του $W^{1,p}(\Omega)$, αρκεί το Ω να είναι φραγμένο με ομαλό σύνορο. Για παράδειγμα, αν $u \in H^1(\Omega)$, τότε (από πυκνότητα) $\exists\ (u_n)_{n\ge1} \subset C^\infty(\overline{\Omega})$, τέτοια ώστε $u_n \to u \in H^1(\Omega)$. Έπεται ότι η ακολουθία των περιορισμών στο σύνορο, $(v_n)_{n\ge1}$ με $v_n = u_{n|\partial\Omega}$, είναι Cauchy στον $L^2(\partial\Omega)$, συνεπώς συγκλίνει σε συνάρτηση $v \in L^2(\partial\Omega)$, ανεξάρτητη της αρχικής ακολουθίας $(v_n)_{n\ge1}$. Το όριο v είναι ουσιαστικά το σύνολο των συνοριακών τιμών της u στο $\partial\Omega$, $v = u_{|\partial\Omega}$, δηλαδή το ίχνος της u στο $\partial\Omega$.

Θεώρημα 2.13 (Τελεστής ίχνους). *Έστω $1 \le p < \infty$, το Ω φραγμένο με ομαλό σύνορο Lipschitz.*

(i) $\exists\, T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega; H^{N-1})$ *φραγμένος (συνεχής) γραμμικός τελεστής, τέτοιος ώστε $Tu = u$ στο $\partial\Omega$ $\ \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.*

(ii) *Επιπλέον, ισχύει ο ακόλουθος τύπος $\forall\, \varphi \in C^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ και $\forall\, u \in W^{1,p}(\Omega)$:*

$$\int_\Omega u\, \mathbf{div}(\varphi)\, dx = -\int_\Omega Du \cdot \varphi\, dx + \int_{\partial\Omega} (\varphi \cdot \nu)\, Tu\, dH^{N-1}.$$

Παρατήρηση 16. *Η συνάρτηση Tu ορίζεται κατά μοναδικό τρόπο, εκτός (λόγω πλήρωσης) από σύνολα μηδενικού μέτρου H^{N-1} στο $\partial\Omega$. Ονομάζεται **ίχνος** της u και περιλαμβάνει το σύνολο των συνοριακών τιμών της u στο $\partial\Omega$.*

Παρατήρηση 17. *Τα σημεία ίχνους είναι σημεία Lebesgue:*

$$\lim_{r\to0^+} \fint_{B(x,r)\cap\Omega} |u(y) - u(x)|\, dx = 0 \quad H^{N-1}\text{κ.σ.-σ.π. για κάποιο}\, x \in \partial\Omega.$$

Από τη συνέχεια της Tu στο σημείο αυτό, έπεται ότι

$$\lim_{r\to0^+} \fint_{B(x,r)\cap\Omega} u\, dx = Tu(x).$$

Απόδειξη της (i).

1. Έστω $u \in C^1(\overline{\Omega})$ λεία συνάρτηση. Αφού το σύνορό της $\partial\Omega$ είναι Lipschitz, από τον Ορισμό 14, για κάθε συνοριακό σημείο x, υπάρχει ακτίνα $r > 0$ και απεικόνιση $\gamma : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε με κατάλληλη αναπαραμετροποίηση να ικανοποιεί

$$\Omega \cap Q(x,r) = \{\, y \,|\, \gamma(y_1, \dots, y_{N-1}) < y_N \} \cap Q(x,r).$$

Θέτουμε $Q(x,r) \equiv Q$. Προς το παρόν, υποθέτουμε ότι η (συνεχής) u μηδενίζεται στο $\Omega \setminus Q$. Παρατηρούμε ότι

$$0 < \left(1 + \mathrm{Lip}^2(\gamma)\right)^{\frac{1}{2}} \le -e_N \cdot \nu =: \frac{1}{C} \quad H^{N-1} - \text{σ.π. στο } Q \cap \partial\Omega. \tag{$\star$}$$

2. Σταθεροποιούμε $\varepsilon > 0$ και θεωρούμε λεία παραμετροποίηση $\beta_\varepsilon : C^1(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Για $t \in \mathbb{R}$, η β_ε απεικονίζει $t \mapsto \beta_\varepsilon(t) := (t^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon \ge 0$. Επομένως, οι τιμές της φράσσονται από τη μονάδα, δηλαδή $|\beta_\varepsilon'| \leq 1$. Αν $t \mapsto u$, προκύπτει η ακόλουθη σχέση επικαμπύλιου-επιφανειακού ολοκληρώματος που παραπέμπει στο Θεώρημα του Gauss:

$$\int_{\partial\Omega} \beta_\varepsilon(u)\, d\mu = \int_{Q\cap\partial\Omega} \beta_\varepsilon(u)\, dH^{N-1} \overset{(\star)}{\leq} C \int_{Q\cap\partial\Omega} \frac{1}{C}\, \beta_\varepsilon(u)\, dH^{N-1} = -C \int_{Q\cap\Omega} \frac{\partial \beta_\varepsilon(u)}{\partial y_N}\, dy$$
$$\leq \int_{Q\cap\Omega} |\beta_\varepsilon'(u)|\, |Du|\, dy \leq \int_{Q\cap\Omega} 1\, |Du|\, dy = \int_{Q\cap\Omega} |Du|\, dy.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ είναι αυθαίρετη επιλογή, η προηγούμενη σχέση ισχύει $\forall\, \varepsilon > 0$. Παίρνοντας το όριο, καθώς $\varepsilon \to 0$, προκύπτει:

$$\therefore \int_{\partial\Omega} \beta_\varepsilon(u)\, dH^{N-1} \leq \int_{\Omega} |Du|\, dy, \quad \text{καθώς } \varepsilon \to 0. \tag{$\star\star$}$$

3. Θα άρουμε τον περιορισμό ότι $u \equiv 0$ στο $\Omega \setminus Q$ και θα γενικεύσουμε, υποθέτοντας ότι το σύνορο $\partial\Omega$ καλύπτεται, ως συμπαγές υποσύνολο του φραγμένου (εξ υποθέσεως) συνόλου $\overline{\Omega}$, από πεπερασμένους το πλήθος κύβους Q (άρα και συνοριακά σημεία). Με την τεχνική της διαμέρισης της μονάδας, παρόμοια με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.10 (ολική προσέγγιση), προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$\int_{\partial\Omega} |u|\, dH^{N-1} \leq \int_{\Omega} (|Du| + |u|)\, dy \quad \forall\, u \in C^1(\overline{\Omega}) \tag{$\star\star\star$}$$

Για κάποιο $1 < p < \infty$, επαναδιατυπώνουμε την $(\star\star\star)$ με $|f| \mapsto |f|^p$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder, λαμβάνοντας υπόψη ότι $\frac{p-1}{p} = \frac{1}{q} \Leftrightarrow p - 1 = \frac{p}{q}$ για p, q συζυγείς εκθέτες, προκύπτει το ακόλουθο φράγμα:

$$\int_{\partial\Omega} |u|^p\, dH^{N-1} \leq \int_{\Omega} \left(|Du||u|^{p-1} + |u|^p\right) dy \tag{$\star\star\star\star$}$$
$$\overset{\text{Hölder}\, p,q}{\leq} \int_{\Omega} \left(|Du||u|^{p-1} + |u|^p\right) dy \quad \forall\, u \in C^1(\overline{\Omega}). \tag{1}$$

4. Αν $Tu := u_{|\partial U} \equiv v$ ο περιορισμός ίχνους της u, τότε η $(\star\star\star\star)$ και το Θέωρημα 2.10 συνεπάγονται ότι υπάρχει μοναδικός και φραγμένος (άρα και συνεχής, λόγω πυκνότητας, αφού ο $C^1(\overline{\Omega})$ είναι πυκνός στον $W^{1,p}(\Omega)$, με επέκταση και περιορισμό). Από το Θεωρήμα 17 (Banach-Steinhaus), ο T είναι ομοιόμορφα φραγμένος τελεστής επέκτασης απο τον $W^{1,p}(\Omega)$ στον $L^p(\partial\Omega; H^{N-1})$. Έπεται ότι:

$$Tu \equiv u_{|\partial\Omega} \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}).$$

□

Απόδειξη της (ii). Ο τύπος (ii) προκύπτει, μέσω της (i), από την πρώτη ταυτότητα του Green , με εφαρμογή της δεύτερης εκδοχής του Θεωρήματος της Απόκλισης του Gauss (βλ. Παράρτημα Δ', σελ.80).

$$\forall\, u, v \in W^{1,p}(\Omega): \int_{\Omega} u_{x_i} v\, dx \overset{\Theta.\text{Gauss}}{=} -\int_{\Omega} u v_{x_i}\, dx + \int_{\partial\Omega} u\, v\, \nu_i\, dy,\ i = 1, \dots, N,$$
$$\forall\, u \in W^{2,p}(\Omega),\ v \in W^{1,p}(\partial\Omega): \int_{\Omega} v \,\triangle\, u\, dx \overset{\text{Green I}}{=} -\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dy.$$

$u \in W^{2,p}(\Omega) \Rightarrow u_{x_i} \in W^{1,p}(\Omega)\ \forall\, i = 1, \dots, N$. Άρα ορίζεται το ίχνος των u_{x_i} στο

$\partial\Omega$. Επίσης, η κατά κατεύθυνση παράγωγος της u, στη διεύθυνση του εξωτερικού μοναδιαίου διανύσματος, ν, που είναι κάθετο στο σύνορο, $\partial\Omega$, δηλαδή η $\frac{\partial u}{\partial \nu}$, ανήκει στον $L^p(\partial\Omega)$. $\square$

2.3.4 Συνεχής επέκταση συνάρτησης Sobolev στο $\mathbb{R}^N$

Θεώρημα 2.14. *Έστω $1 \le p < \infty$, Ω φραγμένο, $\partial\Omega$ Lipschitz και $\Omega \Subset \Omega'$. Τότε, $\forall\, u \in W^{1,p}(\Omega)$, υπάρχει συνεχής επέκταση της u στο $\mathbb{R}^N$, συγκεκριμένα υπάρχει φραγμένος (συνεχής) γραμμικός τελεστής*

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

τέτοιος ώστε $Eu = u$ στο Ω και $s(Eu) \subset \Omega'$ $\ \forall\, u \in W^{1,p}(\Omega)$.
(Βλ. Evans & Gariepy, 1991, Κεφ. 4.4, Θεώρημα 1).

2.3.5 Ο χώρος $W_0^{1,p}(\Omega)$

Ορισμός 16. *Παρόμοια με τη μία διάσταση, ο χώρος $W_0^{1,p}(\Omega)$ ορίζεται ως η πλήρωση του χώρου $C_c^1(\Omega)$ στον $W^{1,p}(\Omega)$, για $1 \le p < \infty$.*

Παρατήρηση 18. *Παρόμοια με τη μία διάσταση, αν $\Omega = \mathbb{R}^N$, τότε $\overline{C_c^1(\Omega)} = W^{1,p}(\Omega)$ (από πυκνότητα). Άρα οι χώροι $W_0^{1,p}(\Omega)$, $W^{1,p}(\Omega)$ ταυτίζονται. Όμως στις πολλές διαστάσεις, αν το σύνολο $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ είναι επαρκώς αραιό και $p < N$, τότε $W_0^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega)$. Για παράδειγμα, αν $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ και $N \ge p = 2$, τότε αποδεικνύεται ότι $H_0^1(\Omega) = H^1(\Omega)$.*

Παρατήρηση 19. *Παρόμοια με τη μία διάσταση, κάθε $u \in H^1(\Omega)$ με $s(u) \subset \Omega$ συμπαγές, είναι και στοιχείο του $H_0^1(\Omega)$.*

Παρόμοια με τη μία διάσταση, το ακόλουθο Θεώρημα αφορά στις συνοριακές συνθήκες.

Θεώρημα 2.15 (Χαρακτηρισμός των συναρτήσεων του $W_0^{1,p}(\Omega)$)**.** *Ας υποθέσουμε ότι το Ω είναι λείο χωρίο τάξης C^1 με λείο σύνορο Lipschitz, $\partial\Omega = \Gamma$. Έστω $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ με $1 \le p < \infty$.*[4] *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(*i*) $u = 0$ *στο* Γ.

(*ii*) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

(Βλ. Brezis, 2011, Θεώρημα 9.17).

[4] Από το Θέωρημα 2.20 για $p > N$ (συνεχείς εμφυτεύσεις), $u \in W^{1,p}(\Omega) \Rightarrow u \in C(\overline{\Omega})$.

2.3.6 Ο δυϊκός του χώρου $W_0^{1,p}(\Omega)$

Συμβολίζουμε $W^{-1,p'}(\Omega)$ το δυϊκό του χώρου $W_0^{1,p}(\Omega)$ για $1 \leq p < \infty$. Ειδικά για $p = 2$, συμβολίζουμε $H^{-1}(\Omega)$ το δυϊκό του χώρου Hilbert $H^1(\Omega)$.

Παρατήρηση 20. *Σε αντίθεση με το χώρο L^2, ο οποίος είναι ισομετρικά ισόμορφος με το δυϊκό του, αυτό δεν ισχύει για τον H^1. Οι ακόλουθοι εγκλεισμοί είναι γνήσιοι*

$$\boxed{H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)}$$

και οι αντίστοιχες εμφυτεύσεις είναι:

- ***συνεχείς** για **φραγμένο** χωρίο Ω και $\frac{2N}{N+2} \leq p < \infty$,*
- ***συνεχείς με πυκνό πεδίο τιμών** για **φραγμένο** χωρίο Ω και $\frac{2N}{N+2} < p < \infty$,*
- *συνεχείς για μη φραγμένο χωρίο Ω και $\frac{2N}{N+2} \leq p \leq 2$.*

Για $N = 1$, $\frac{2N}{N+2} = 1$.

Τα στοιχεία του $W^{-1,p'}(\Omega)$ αναπαρίστανται μέσω των στοιχείων του $L^{p'}(\Omega)$.

Πρόταση 2.4. *Έστω $F \in W^{-1,p'}(\Omega)$. Τότε, υπάρχουν (δεν είναι μοναδικές) $N+1$ συναρτήσεις $f_0, f_1, \ldots, f_N \in L^{p'}(\Omega)$, τέτοιες ώστε :*

$$\langle F, v \rangle = \int_\Omega f_0\, v + \sum_{i=1}^N \int_\Omega f_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad \forall\, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

με αντίστοιχη νόρμα δυϊκού ίση με

$$\|F\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} = \max_{0 \leq i \leq N} \|f_i\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

*Αν το Ω είναι **φραγμένο**, επιλέγουμε $f_0 = 0$.*

2.4 Ανισότητες Sobolev σε μία διάσταση

Οι χαρακτηρισμοί της προηγούμενης ενότητας χρησιμεύουν στην απόδειξη των ανισοτήτων Sobolev.

Θεώρημα 2.16 (Ανισότητα ή εμβύθιση Sobolev). *Ο χώρος $W^{1,p}(I)$ εμφυτεύεται συνεχώς στο χώρο $L^{\infty}(I)$ των ουσιωδώς φραγμένων μετρήσιμων συναρτήσεων :*

$$\boxed{W^{1,p}(I) \overset{\text{συνεχής}}{\hookrightarrow} L^{\infty}(I) \quad \forall\, p : 1 \le p \le \infty}. \tag{2}$$

Ισοδύναμα :

$$\exists\, C = C(|I|) \le +\infty : \|u\|_{L^{\infty}(I)} \le C\|u\|_{W^{1,p}(I)},\ \forall u \in W^{1,p}(I) \text{ και } \forall p \in [1,\infty].$$

Αν το I είναι φραγμένο, τότε ισχύουν και οι ακόλουθες εμφυτεύσεις :

$$\boxed{W^{1,p}(I) \overset{\text{συμπαγής}}{\hookrightarrow} C(\bar{I}) \quad \forall\, p : 1 < p \le \infty}, \tag{3}$$

$$\boxed{W^{1,1}(I) \overset{\text{συμπαγής}}{\hookrightarrow} L^{q}(I) \quad \forall\, q : 1 \le q < \infty}. \tag{4}$$

Απόδειξη της (2) *για* $I = \mathbb{R}$. Έστω $v \in C_c^1(\mathbb{R})$. Αν θέσουμε $G(s) = |s|^{p-1}s$ για $1 \le p < \infty$, τότε $w = G(v) = |v|^p \in C_c^1(\mathbb{R})$ και $w' = G'(v)v' = p\,|v|^{p-1}v'$. Το αόριστο ολοκλήρωμα της $w = G(v(x))$ ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
G(v(x)) &= \int_{-\infty}^{x} p\,|v(t)|^{p-1}\, v'(t)\,dt \ \le\ p\int_{\mathbb{R}} |v(t)|^{p-1}\, v'(t)\,dt \\
|v(x)|^p &\overset{\text{Hölder}}{\le} p\left(\int_{\mathbb{R}} |v(t)|^{(p-1)p'}\,dt\right)^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}} |v'(t)|^p\,dt\right)^{1/p} = p\,\|v\|_{L^p(\mathbb{R})}^{p-1}\,\|v'\|_{L^p(\mathbb{R})} \\
|v(x)|^p &\overset{\text{Young}}{\le} \|v\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|v\|_{L^p(\mathbb{R})} =: C\,\|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|v\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} \le C\,\|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \quad \forall\, v \in C_c^1(\mathbb{R}). \tag{5}$$

Χρησιμοποιήσαμε $(p-1)p' = p$ και $\frac{1}{p'} = \frac{p-1}{p}$. Επίσης $C \ne C(p)$.

Στη συνέχεια, θεωρούμε $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$. Από το Θεώρημα 2.3 (πυκνότητα),

$$\exists\,(u_n)_{n\ge1} \subset C_c^1(\mathbb{R}) :\ u_n \to u \in W^{1,p}(\mathbb{R}),\ n \to \infty.$$

Αφού η $(u_n)_{n\ge1}$ συγκλίνει στον $W^{1,p}(\mathbb{R})$, τότε είναι και Cauchy σε αυτόν. Από την ανισότητα (5), έπεται ότι είναι Cauchy και στον $L^{\infty}(\mathbb{R})$:

$$u_n - u_m \in C_c^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \|u_n - u_m\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} \le C\,\|u_n - u_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \to 0.$$

Από την πληρότητα του $L^{\infty}(\mathbb{R})$, έπεται ότι συγκλίνει και σε στοιχείο $\tilde{u}$ του $L^{\infty}(\mathbb{R})$, όπου $\tilde{u} = u$ $\mathbb{R}$-σ.π. συνεχής αντιπρόσωπος, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2. Συγκεκριμένα, αφού η $(u_n)_{n\ge1}$ συγκλίνει στον $W^{1,p}(\mathbb{R})$, εξ ορισμού θα συγκλίνει και στον $L^p(\mathbb{R})$, άρα υπάρχει υπακολουθία της με την ιδιότητα $u_{n_k}(x) \to u(x), k \to \infty$, $\mathbb{R}$-σ.π.. Από την ανισότητα (5), έπεται ότι

$$\|u_n\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} \le C\,\|u_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \to \|u\|_{L^{\infty}(\mathbb{R})} \le C\,\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})},\ n \to \infty. \qquad \square$$

Απόδειξη της (2) *για* $I \subset \mathbb{R}$. Από το Θεώρημα 2.3, υπάρχει συνεχής επέκταση $E : W^{1,p}(I) \to W^{1,p}(\mathbb{R})$ της $u \in W^{1,p}(I)$ σε $Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R})$, με την ιδιότητα

$$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}),L^p(\mathbb{R})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I),L^p(I)}\,. \quad (\star)$$

Από τα προηγούμενα, $Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \Rightarrow Eu \in L^{\infty}(\mathbb{R})$. Από το Θεώρημα 2.3 της επέκτασης, $Eu \in L^{\infty}(\mathbb{R}) \Rightarrow u \in L^{\infty}(I) \Rightarrow \|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\,\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$.

Αφού $\|Eu\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C\,\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})}$ από την προηγούμενη απόδειξη, και $\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(I)}$ από το Θεώρημα 2.3 της επέκτασης, προκύπτει ότι $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(I)}$ από τη $(\star)$. Έπεται η αποδεικτέα. □

Απόδειξη της (3). Έστω I φραγμένο σύνολο. Αν $I \equiv K$ συμπαγής μετρικός χώρος και $\mathrm{H} \subset C(I)$ η μοναδιαία μπάλλα στον $W^{1,p}(I)$ για $1 < p \leq \infty$:

$$\mathrm{H} := B_{W^{1,p}(I)}(0,1) = \Big\{ u \in W^{1,p}(I) \,:\, \|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq 1 \Big\}.$$

Για κάθε $u \in \mathrm{H}$, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2 της συνέχειας, ισχύει

$$|u(x) - u(y)| = \left|\int_y^x u'(t)\,dt\right| \overset{\text{Hölder}}{\leq} \|u'\|_{L^p(I)}\,|x-y|^{1/p'} \leq |x-y|^{1/p'} < \delta^{1/p'} = \epsilon,$$

για κάθε $I_0 = (x,y) \subset I$. Συνεπώς, το σύνολο $\mathfrak{H}$ είναι και ομοιόμορφα ισοσυνεχές. Από το Θεώρημα των Ascoli-Arzelà (βλ. Παράρτημα 5.3, Θεώρημα 1), έπεται ότι το $\mathfrak{H}$ είναι σχετικά συμπαγές στο $C(\bar{I})$. □

Απόδειξη της (4). Έστω I φραγμένο σύνολο και $\mathrm{H} := B_{W^{1,1}(I)}(0,1)$ η μοναδιαία μπάλλα στον $W^{1,1}(I)$. Από το Θεώρημα 2.3, υπάρχει συνεχής επέκταση $E : W^{1,1}(I) \to W^{1,1}(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $\mathrm{F} = E(\mathrm{H}) \Rightarrow \mathrm{H} = \mathrm{F}_{|I}$.

Θα δείξουμε ότι το H είναι σχετικά συμπαγές στον $L^q(I)$ για $1 \leq q < \infty$ με εφαρμογή του Θεωρήματος των KRF για $I \subset \mathbb{R}$ (Βλ. Παράρτημα 5.3, Θεώρημα 4).

Επιλέγουμε αυθαίρετο $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε $\omega \Subset I$, $u \in \mathrm{H}$ και επιλέγουμε αυθαίρετη διεύθυνση $h \in \mathbb{R}$, με την ιδιότητα $0 < |h| < \delta < \mathrm{dist}(\omega, I)$.

Προφανώς $u \in \mathrm{H} \Rightarrow u \in W^{1,1}(I)$. Από τις Προτάσεις 2.3 & 2.1, προκύπτει ότι H είναι φραγμένο υποσύνολο του $W^{1,1}(I)$ και ισχύουν τα ακόλουθα φράγματα:

$$u \in W^{1,1}(I) \Rightarrow \exists\, C : \|\tau_h\, u - u\|_{L^1(\omega)} \leq \|u\|_{L^1(I)}\,|h| \leq |h|,\ C := \|u\|_{L^1(I)} \leq 1,$$
$$u \in W^{1,1}(I) \Rightarrow \exists\, C : \left|\int_I u\,\varphi'\right| \leq C\,\|\varphi\|_{L^\infty(I)} \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(I).$$

Επομένως, ισχύει και το ακόλουθο φράγμα για $1 < q < \infty$:

$$\begin{aligned}
\|\tau_h\, u - u\|^q_{L^q(\omega)} &= \int_\omega |u(x+h) - u(x)|^q\,dx = \int_\omega |u(x+h) - u(x)|^{q-1+1}\,dx \\
&\overset{\text{T.A.}}{\leq} \int_\omega \big[|u(x+h)| + |u(x)|\big]^{q-1}\,|u(x+h) - u(x)|\,dx \\
&\leq \big(2\,\|u\|_{L^\infty(I)}\big)^{q-1}\int_\omega |u(x+h) - u(x)|\,dx \\
&\leq C\,|h|, \quad C := \big(2\,\|u\|_{L^\infty(I)}\big)^{q-1} < \infty.
\end{aligned}$$

$$\therefore\ \|\tau_h\, u - u\|_{L^q(\omega)} = \Big\{\int_\omega |u(x+h) - u(x)|^q\,dx\Big\}^{1/q} \leq C^{1/q}\,|h|^{1/q} < \varepsilon,$$

αρκεί $|h| < \delta$.

Αφού $u \in \mathrm{H} = B_{W^{1,1}(I)}(0,1)$, έπεται ότι η u είναι ομοιόμορφα φραγμένη. Από την ανισότητα (2), έπεται και το ακόλουθο φράγμα στα σύνολα $I \setminus \omega$ του L^q :

$$\|u\|_{L^q(I\setminus\omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(I)} |I \setminus \omega|^{1/q} \leq C |I \setminus \omega|^{1/q} < \varepsilon,$$

αρκεί το μέτρο $|I \setminus \omega|$ να επιλεγεί επαρκώς μικρό.

Επομένως, το σύνολο H είναι φραγμένο στον $W^{1,1}(I)$, αφού δείξαμε ότι είναι φραγμένο τόσο στον $L^1(I)$ όσο και στον $L^\infty(I)$, άρα και στον $L^q(I)$ για ενδιάμεσα q, από την ανισότητα Sobolev (2). Από το Θεώρημα KRF για $I \subset \mathbb{R}$, έπεται ότι το H είναι σχετικά συμπαγές στον $W^{1,1}(I)$. $\square$

Αξίζει να αναφέρουμε ότι, σε αντίθεση με τους χώρους $L^p(I)$, οι χώροι $W^{1,p}(I)$ είναι άλγεβρες Banach (ορίζεται επιπλέον η πράξη της σύνθεσης), αφού το γινόμενο στοιχείων του $W^{1,p}(I)$, ανήκει και αυτό στον $W^{1,p}(I)$.

Παράδειγμα 11. *Έστω $I = (0,1)$. Η συνάρτηση $u : I \to \mathbb{R}$, με τιμές $u(x) = x^{-1/4}$, ανήκει στον $L^2(I)$, αφού η αντίστροφη, $|u|^2 = u^2$, της τετραγωνικής ρίζας, είναι ολοκληρώσιμη στο I, αλλά $u^2 \notin L^2(I)$:*

$$\int_{(0,1)} |u(x)|^2 \, d\mu = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \left(\frac{1}{x^4}\right)^2 dx = \lim_{a\to 0^+} \left[\frac{-8}{x^7}\right]_a^1 = -7 < \infty,$$

$$\int_0^1 \sqrt{u(x)}\, dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} \, dx = \left[-\frac{1}{2}\sqrt{x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2} < \infty,$$

$$\int_{(0,1)} |u^2(x)|^2 \, d\mu = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x} \, dx = \lim_{a\to 0^+} [\ln(x)]_a^1 = +\infty.$$

Πόρισμα 2.1. *Έστω I διάστημα και $u, v \in W^{1,p}(I)$ με $1 \leq p \leq \infty$. Τότε και το γινόμενο $uv \in W^{1,p}(I)$. Μάλιστα ισχύει $(uv)' = u'v + uv'$. Επιπλέον, μπορούμε να ολοκληρώσουμε κατά παράγοντες:*

$$\textstyle\int_x^y u'v = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_x^y uv' \quad \forall\, I_0 = (x,y) \subset I.$$

(Βλ. Brezis, 2011, Πόρισμα 8.10).

2.4.1 Ανισότητα Poincaré σε μία διάσταση

Θα κλείσουμε με την ανισότητα Poincaré για ισοδύναμες νόρμες, η οποία εκτός από συναρτήσεις $u \in C^1(\bar{I})$, όπου $I = (a,b)$ φραγμένο διάστημα, με την ιδιότητα $u_{|\partial I} = 0$, εφαρμόζεται και στα στοιχεία του $W_0^{1,p}(I)$.

Πρόταση 2.5 (Ανισότητα Poincaré)**.** *Έστω $I = (a,b)$ **φραγμένο** διάστημα, άρα και πεπερασμένου μέτρου, δηλαδή $|I| = (b-a) < \infty$. Τότε*

$$\exists\, C = C(|I|) \,:\, \|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq C \|u'\|_{L^p(I)} \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(I),$$

δηλαδή η νόρμα $\|u'\|_{L^p(I)}$ είναι ισοδύναμη με την $\|u\|_{W^{1,p}(I)}$ για τα στοιχεία του χώρου $W_0^{1,p}(I)$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.7 (μηδενισμός στο σύνορο), $u \in W_0^{1,p}(I)$ αν-ν $u(a) = u(b) = 0$. Για κάθε $x \in I$, από το Θεώρημα 2.2 (συνέχεια), έπεται:

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| = \left|\int_a^x u'(t)\,dt\right| \leq \left|\int_a^b u'(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |u'(t)|\,dt =: \|u'\|_{L^1(I)}.$$

Άρα και $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq \|u'\|_{L^1(I)}$. Από την ανισότητα (2), αν το I είναι φραγμένο, κάθε στοιχείο του $L^\infty(I)$ εμφυτεύεται συνεχώς και στον $W^{1,p}(I)$.

Υψώνοντας στο p και ολοκληρώνοντας, προκύπτει:

$$\begin{aligned}
|u(x)|^p &= \|u'\|^p_{L^1(I)} \\
\int_a^b |u(x)|^p\,dt &= \int_a^b \|u'\|^p_{L^1(I)}\,dt = (b-a)\,\|u'\|^p_{L^1(I)} \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} (b-a)\left(\int_a^b 1^q\,dt\right)^{p/q} \|u'\|^p_{L^p(I)} = (b-a)^p\,\|u'\|^p_{L^p(I)} \\
&\therefore \quad \|u\|^p_{L^p(I)} \leq |I|^p\,\|u'\|^p_{L^p(I)}.
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω σχέση με το γεγονός ότι $u \in W_0^{1,p}(I)$, η ζητούμενη ανισότητα προκύπτει παίρνοντας τη νόρμα της u στον $W_0^{1,p}(I)$, η οποία δεν είναι παρά η νόρμα της u στον $W^{1,p}(I)$:

$$\begin{aligned}
\|u\|^p_{W_0^{1,p}(I)} &= \|u\|^p_{L^p(I)} + \|u'\|^p_{L^p(I)} \leq (1 + |I|^p)\,\|u'\|^p_{L^p(I)} \\
\therefore \quad \|u\|_{W_0^{1,p}(I)} &\leq (1 + |I|^p)^{1/p}\,\|u'\|^p_{L^p(I)}\,.
\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 21. *Η υπόθεση ότι $u \in W_0^{1,p}(I) \sim u \in W^{1,p}(I)$, βασίζεται στην πυκνότητα των συναρτήσεων δοκιμής και στους χώρους $W_0^{1,p}(I)$, αρκεί $I = \mathbb{R}$. Συνεπώς, εννοείται ότι αρχικά θεωρήσαμε μία συνάρτηση δοκιμής, έστω $v \in C_0^\infty(I)$, όπου $I \subset \bar{I} \subset \mathbb{R}$, και ορίσαμε τη u ως τον περιορισμό της v στο I, δηλαδή $u_{|I} = v$.*

Παρατήρηση 22. *Για γενικό φραγμένο χωρίο Ω, η σταθερά της ανισότητας είναι η διάμετρος του Ω, η οποία ορίζεται ως η μεγίστη χορδή του συνόλου Ω : $0 \leq \mathit{diam}(\Omega) := \sup\{\mathit{dist}(x,y) \,:\, \forall\, x,y \in \Omega\} \leq \infty$. Αφού το Ω φραγμένο, τότε $\mathit{diam}(\Omega) < \infty$. Στη μία διάσταση, $\Omega = I = (a,b)$ και*

$$\mathit{diam}(I) := \sup I - \inf I = b - a =: |I|.$$

Παρατήρηση 23. *Για $p = 2$, η $\|u'\|_{L^2(I)}$, η οποία είναι ημινόρμα στον $H^1(I)$, είναι νόρμα στον $H_0^1(I)$, ισοδύναμη με την $\|u\|_{H^1(I)}$:*

$$\|u\|_{H^1(I)} \leq \left[1 + |I|^p\right]^{1/p} \|u'\|_{L^2(I)} \quad \forall\, u \in H_0^1(I),$$

δηλαδή $C = C(p,|I|) = [1 + |I|^p]^{1/p} = \left[1 + |I|^2\right]^{1/2}$. Για παράδειγμα, αν $I = (0,1)$, τότε $C = \sqrt{2}$.

2.5 Ανισότητες Sobolev σε πολλές διαστάσεις, $\Omega = \mathbb{R}^N$

Θα χρειαστούμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 17 (Συζυγής εκθέτης Sobolev)**.** *Για* $1 \le p < N$, *ορίζουμε*

$$p^* \equiv \frac{Np}{N-p} \overset{p=1}{=} \frac{N}{N-1} \equiv 1^*$$

το συζυγή εκθέτη Sobolev του p. *Ισχύει* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.

Για $N = 1$, δείξαμε ότι, αν $u \in W^{1,p}(\Omega)$, τότε υπάρχει **συνεχής** εμφύτευση, τέτοια ώστε $u \in L^\infty(\Omega)$, για κάθε $1 \le p \le \infty$ (βλ. εμφύτευση (2)). Για $\boxed{N \ge 2}$, αυτό αληθεύει μόνο για $\boxed{p > N}$. Αν όμως $\Omega = \mathbb{R}^N$, τότε για κάποιο $1 \le p < N$, ισχύει η ακόλουθη εμφύτευση:

$$\boxed{W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \overset{\text{συνεχής}}{\hookrightarrow} L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \quad \text{για } p < p^* < \infty}. \tag{6}$$

Παρόμοια για τις ακόλουθες ενδιάμεσες τιμές του q :

$$\boxed{W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \overset{\text{συνεχής}}{\hookrightarrow} L^{q}(\mathbb{R}^N) \quad \forall\, p \le q \le p^*}. \tag{7}$$

Η εμφύτευση δεν είναι απαραίτητα συνεχής για $q \ge N$:

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \quad \forall\, N \le q < \infty.$$

2.5.1 Ανισότητα Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, $1 \le p < N$

Η εμφύτευση (6) έπεται από την ανισότητα Gagliardo-Nirenberg-Sobolev.

Θεώρημα 2.17 (Ανισότητα Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, GNS)**.**
Έστω $1 \le p < N$. *Τότε* :

$$\boxed{\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \le C_1 \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}. \tag{8}$$

Ισοδύναμα :

$$\exists\, C_1 = C_1(p, N) : \left(\int_{\mathbb{R}^N} \|u\|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \le C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \|Du\|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

Απόδειξη.

1. Από το Θεώρημα 2.9 (ολική προσέγγιση), υποθέτουμε ότι $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Τότε, για κάθε $1 \le i \le N$:

$$u(x_1,\dots,x_i,\dots,x_N) = \int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1,\dots,t_i,\dots,x_N)\,dt_i \le \int_{\mathbb{R}} u_{x_i}(x_1,\dots,t_i,\dots,x_N)\,dt_i$$

$$\Rightarrow |u(x)| \le \int_{\mathbb{R}} |u_{x_i}(x_1,\dots,t_i,\dots,x_N)|\,dt_i \quad \text{για κάθε } 1 \le i \le N$$

$$\Rightarrow |u(x)|^N \le \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} |Du(x_1,\dots,t_i,\dots,x_N)|\,dt_i \right)$$

$$\Rightarrow |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \le \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} |Du(x_1,\dots,t_i,\dots,x_N)|\,dt_i \right)^{\frac{1}{N-1}}.$$

Θέτουμε $\frac{N}{N-1} = 1^*$ και παραγοντοποιούμε ως προς x_1 :

$$|u(x)|^{1^*} \le \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} |Du(t_1,x_2,\dots,x_N)|\,dt_1 \right)^{\frac{1}{N-1}}}_{\text{σταθερός όρος ως προς } x_1} \times \prod_{i=2}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} |Du(x_1;x_2,\dots,t_i,\dots,x_N)|\,dt_i \right)^{\frac{1}{N-1}}.$$

Θέτουμε C_1 τη σταθερά ως προς x_1 και ολοκληρώνουμε ως προς x_1 :

$$\int_{\mathbb{R}} |u|^{1^*}\,dx_1 \le C_1 \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=2}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} |Du|\,dt_i \right)^{\frac{1}{N-1}} dx_1 \overset{\text{Hölder}}{\le} C_1 \left(\prod_{i=2}^{N} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |Du|\,dx_1\,dt_i \right)^{\frac{1}{N-1}}$$

Ο τελευταίος όρος προκύπτει υψώνοντας κάθε όρο του γινομένου στη $N-1$ και εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder σε $N-1$ όρους:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \prod_{i=2}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}} |Du|\,dt_i \right)^{\frac{1}{N-1}} dx_1 \\
&\qquad \le \left[\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |Du|\,dt_2 \right)^{\frac{N-1}{N-1}} dx_1 \right]^{\frac{1}{N-1}} \times \cdots \times \left[\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |Du|\,dt_N \right)^{\frac{N-1}{N-1}} dx_1 \right]^{\frac{1}{N-1}} \\
&\qquad \le \left(\prod_{i=2}^{N} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |Du|\,dx_1\,dt_i \right)^{\frac{1}{N-1}}.
\end{aligned}$$

Συνεχίζουμε την παραγοντοποίηση ως προς x_2 :

$$\int_{\mathbb{R}} |u|^{1^*}\,dx_1 \le \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} |Du|\,dt_1 \right)^{\frac{1}{N-1}}}_{\text{εξαρτάται από } x_2} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |Du|\,dx_1\,dt_2 \right)^{\frac{1}{N-1}}}_{\text{ανεξάρτητο του } x_2} \times \prod_{i=3}^{N} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |Du|\,dx_1 dt_i \right)^{\frac{1}{N-1}}}_{\text{εξαρτάται από } x_2}.$$

Ολοκληρώνουμε ως προς x_2 :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |u|^{1^*}\,dx_1 dx_2 \le {}& \left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |Du|\,dx_1\,dt_2 \right)^{\frac{1}{N-1}} \times \\
& \int_{\mathbb{R}} \left\{ \left(\int_{\mathbb{R}} |Du|\,dt_1 \right)^{\frac{1}{N-1}} \prod_{i=3}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |Du|\,dx_1\,dt_i \right)^{\frac{1}{N-1}} \right\} dx_2
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder στο δεύτερο όρο του γινομένου του δεξιού μέλους, όπως προηγουμένως, προκύπτει:

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |u|^{1^*}\, dx_1 dx_2 \le \left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |Du|\, dx_1\, dt_2\right)^{\frac{1}{N-1}} \times \left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |Du|\, dt_1\, dx_2\right)^{\frac{1}{N-1}} \times \prod_{i=3}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |Du|\, dx_1\, dt_i\, dx_2\right)^{\frac{1}{N-1}}.$$

Συνεχίζουμε ολοκληρώνοντας ως προς τις υπόλοιπες συνιστώσες. Προκύπτει η ακόλουθη ανισότητα:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{1^*}\, dx &\le C_N \prod_{i=1}^{N} \left(\int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}} |Du|\, dx_1, \ldots, dx_n\right)^{\frac{1}{N-1}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |Du|\, dx\right)^{\frac{N}{N-1}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |Du|\, dx\right)^{1^*}.\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{1^*}\, dx\right)^{\frac{1}{1^*}} \le \int_{\mathbb{R}^N} |Du|\, dx. \tag{$\star$}$$

Η ($\star$) είναι η αποδεικτέα για $p = 1$.

2. Για $1 < p < N$, θέτουμε $v = |u|^\gamma$ με $\gamma > 0$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα ($\star$) για τη συνάρτηση v, προκύπτει:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{1^*}\, dx\right)^{\frac{1}{1^*}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\gamma\, 1^*}\, dx\right)^{\frac{1}{1^*}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{\gamma N}{N-1}}\right)^{\frac{N-1}{N}}.$$

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{\gamma N}{N-1}}\right)^{\frac{N-1}{N}} &\overset{(\star)}{\le} \gamma \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\gamma-1}|Du|\, dx \\ &\overset{\text{Hölder}}{\le} \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{(\gamma-1)p}{p-1}}\, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |Du|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \frac{p-1}{p} = \frac{1}{q}.\end{aligned}$$

Επιλέγουμε το γ, εξισώνοντας τις δυνάμεις, ώστε οι ολοκληρωτέες συναρτήσεις, $|v|^{1^*}$ (αριστερό μέλος) και $|u|^{\frac{(\gamma-1)p}{p-1}}$ (δεξί μέλος), να ταυτίζονται και τα αντίστοιχα ολοκληρώματα να διαφέρουν μόνο ως προς τη δύναμη, στην οποία είναι υψωμένα:

$$\gamma\, 1^* := \frac{\gamma N}{N-1} \equiv \frac{(\gamma-1)p}{p-1} \Leftrightarrow \hat{\gamma} = \frac{p(N-1)}{N-p} \Rightarrow \frac{\hat{\gamma} N}{N-1} = \frac{Np}{N-p} =: p^*.$$

Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη ανισότητα και απλοποιώντας, προκύπτει:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{N-1}{N}} \le C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |Du|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \le C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |Du|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad C = C(p, N).$$

□

2.5.2 Ανισότητα Poincaré σε πολλές διαστάσεις

Σε χώρους ανώτερης διάστασης, η τοπική εκδοχή της ανισότητας GNS για συναρτήσεις με συμπαγή φορέα, συγκεκριμένα μπάλλες, παρέχει ισοδύναμες νόρμες.

Λήμμα 2.6. *Για κάθε* $1 \le p < \infty$, *υπάρχει σταθερά* $C = C(p, N)$, *τέτοια ώστε :*

$$\int_{B(x,r)} |u(y) - u(z)|^p \, dy \le C \, r^{N+p-1} \int_{B(x,r)} |Du(y)|^p \, |y - z|^{1-N} \, dy$$

$\forall \, B(x, r) \subset \mathbb{R}^N$, $\forall \, u \in C^1(B(x, r))$ *και* $\forall \, z \in B(x, r)$.

Απόδειξη. Αν $y, z \in B(x, r)$, τότε:

$$u(y) - u(z) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u(z + t(y - z)) \, dt = \int_0^1 Du(z + t(y - z)) \, (y - z) \, dt,$$

$$|u(y) - u(z)|^p \le |y - z|^p \int_0^1 |Du(z + t(y - z))|^p \, dt.$$

Θεωρούμε ακτίνα $s > 0$, έτσι ώστε $|y - z| < s$. Συμβολίζουμε μ το $(N-1)$-διάστατο μέτρο Hausdorff. Ολοκληρώνοντας πάνω στην τομή $B(x, r) \cap B(z, s)$, προκύπτει:

$$\begin{aligned}
&\int_{B(x,r)\cap B(z,s)} |u(y) - u(z)|^p \, d\mu(y) \\
&\qquad \le s^p \int_{t=0}^1 \int_{B(x,r)\cap B(z,s)} |Du(z + t(y - z))|^p \, d\mu(y) \, dt \\
&\qquad \overset{\text{A.M.}}{=} s^p \int_{t=0}^1 \frac{1}{t^{N-1}} \int_{B(x,r)\cap B(z,ts)} |Du(w)|^p \, d\mu(w) \, dt \quad [z + t(y - z) \equiv w] \\
&\qquad \le s^{N+p-1} \int_{t=0}^1 \int_{B(x,r)\cap B(z,ts)} |Du(w)|^p \, |w - z|^{1-N} \, d\mu(w) \, dt \quad [w - z = t(y - z) \le ts] \\
&\qquad = s^{N+p-2} \int_{B(x,r)\cap B(z,ts)} |Du(w)|^p \, \frac{|w - z|^{1-N}}{(ts)^{1-N}} \, dw \quad \left[dt = s^{-1} d(ts)\right].
\end{aligned}$$

Η αποδεικτέα έπεται με εφαρμογή της Πρότασης 2.6. □

Πρόταση 2.6. *Έστω* $u(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}) \in \mathfrak{L}^N(\mathbb{R}^N)$ *και* $r > 0$. *Τότε :*

$\int_{\mathbb{R}^N} u \, dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B(0,r)} u \, d\mu \right) dr, \quad$ *όπου* $\frac{d}{dr} \left(\int_{B(0,r)} u \, dx \right) = \int_{\partial B(0,r)} u \, d\mu \quad \mathfrak{L}^1$*−σ.π.*.

Θεώρημα 2.18 (Τοπική ανισότητα GNS ~ Ανισότητα Poincaré)**.**
Για κάθε $1 \le p < \infty$, *υπάρχει σταθερά* $C_2 = C_2\,(p, N)$, *τέτοια ώστε,* $\forall \, B(x, r) \subset \mathbb{R}^N$ *και* $\forall \, u \in W^{1,p}(B^o(x, r))$ *να ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:*

$$\left(⨍_{B(x,r)} |u - (u)_{x,r}|^{p^*} dy \right)^{\frac{1}{p^*}} \le C_2 \, r \left(⨍_{B(x,r)} \|Du\|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{όπου} \quad (u)_{x,r} \equiv ⨍_{B(x,r)} u \, dy.$$

Αν το Ω **δεν είναι φραγμένο**, αλλά αυθαίρετο ανοικτό σύνολο, και $1 \le p < N$, τότε το ακόλουθο φράγμα προκύπτει από το Θεώρημα 2.17 (ανισότητα GNS για $\Omega = \mathbb{R}^N$ και $1 \le p < N$):

$$\exists \, C = C(p, N) : \; \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \le C \, \|Du\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall \, u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

όπου $\|Du\|_{L^p(\Omega)} := \sum_{i=1}^N \left(\|u_{x_i}\|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Αν το Ω είναι ανοικτό και **φραγμένο** (πεπερασμένου μέτρου) σύνολο, και $1 \le p < \infty$, τότε η ανισότητα Poincaré έπεται ότι η $\|Du\|_{L^p(\Omega)}$ είναι νόρμα στον $W_0^{1,p}(\Omega)$, ισοδύναμη με την $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Ειδικά για $p = 2$, το ημι-εσωτερικό γινόμενο των κλίσεων, $\sum_{i=1}^N \int_\Omega u_{x_i} v_{x_i}$, είναι εσωτερικό γινόμενο στον $H_0^1(\Omega)$, το οποίο επάγει τη νόρμα $\|Du\|_{L^2(\Omega)}$, η οποία είναι ισοδύναμη με τη συνήθη νόρμα του $H^1(\Omega) : \|u\|_{H^1(\Omega)} := (\|u\|^p + \|Du\|^p)^{\frac{1}{p}}$. (Για μια εφαρμογή, βλ. σελ.65.)

Παρόμοια για τη νόρμα του $W^{k,p}(\Omega)$ με $k \ge 2$,

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} := \left(\|u\|^p + \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha u\|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

αρκεί το σύνορο να είναι επαρκώς ομαλό.

Απόδειξη.

1. Προσεγγίζουμε τοπικά, εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.6, για $u \in C^1(B(x,r))$:

$$\begin{aligned}
\fint_{B(x,r)} |u - (u)_{x,r}|^p \, dy &= \fint_{B(x,r)} \left| \fint_{B(x,r)} (u(y) - u(z)) \, dz \right|^p dy \\
&\overset{\text{Jensen}}{\le} \fint_{B(x,r)} \fint_{B(x,r)} |u(y) - u(z)|^p \, dz \, dy \quad \text{(κυρτή)} \\
&\overset{\text{Λήμμα}}{\le} C \fint_{B(x,r)} r^{N+p-1} \frac{1}{\alpha_N r^N} \int_{B(x,r)} |Du(z)|^p \, |y - z|^{1-N} \, dz \, dy \\
&\le C \, r^p \, \frac{1}{\alpha_N r^N} \int_{B(x,r)} |Du|^p \, dz \quad [|y - z| < r] \\
&= C \, r^p \fint_{B(x,r)} |Du|^p \, dz. \qquad (\star)
\end{aligned}$$

2. Αφού $B(x,r) = x + B(0,r) = x + \frac{1}{r} B(0,1)$, θεωρούμε τη μοναδιαία μπάλλα μετασχηματίζοντας το $y \in B(x,r)$ ως $v(y) \mapsto \frac{1}{r} v(ry)$ και θέτοντας $x = 0$ και $r = 1$. Ισχυριζόμαστε ότι $\exists\, C = C(p,N)$, τέτοια ώστε, $\forall\, v \in W^{1,p}(B^o(x,r))$, να ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$\left(\int_{B(x,r)} |v|^{p^*} dy \right)^{\frac{1}{p^*}} \le C \left(r^p \fint_{B(x,r)} |Dv|^p \, dy + \fint_{B(x,r)} |v|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

Απόδειξη ισχυρισμού. Από το Θεώρημα 2.14, υπάρχει $\tilde{v} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ συνεχής επέκταση της v, η οποία ικανοποιεί:

$$\|\tilde{v}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \le C \, \|\tilde{v}\|_{W^{1,p}(B^o(0,1))} \qquad (\star\star)$$

Η ανισότητα GNS (Θεώρημα 2.17) έπεται:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{B(0,1)} |v|^{p^*} dy \right)^{\frac{1}{p^*}} &\le \left(\int_{B(0,1)} |\tilde{v}|^{p^*} dy \right)^{\frac{1}{p^*}} \quad \text{(από επέκταση)} \\
&\le C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |D\tilde{v}|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{(από SGN)} \\
&\le C \left(\int_{B^o(0,1)} (|Dv|^p + |v|^p) \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{(από } (\star\star)\text{)}.
\end{aligned}$$

□

3. Η αποδεικτέα προκύπτει με εφαρμογή της $(\star)$ και του ισχυρισμού για $v \equiv u - (u)_{x,r}$. □

2.5.3 Ανισότητα Morrey, $p > N$

Η περίπτωση $N < p < \infty$ καλύπτεται από την ανισότητα Morrey.

Ορισμός 18 (Συνέχεια Hölder)**.** *Έστω $0 < \alpha < 1$. Μια πραγματική συνάρτηση $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ είναι Hölder-συνεχής με εκθέτη α, αν η ακόλουθη ποσότητα είναι πεπερασμένη, δηλαδή:*

$$[u]_{\alpha,\mathbb{R}^N} := \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^N\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty.$$

Εκθέτης $\alpha > 1$ δηλώνει ***σταθερή*** *συνάρτηση. Επομένως, η $[u]_\alpha$ είναι* ***ημι-νόρμα****, αφού μηδενίζεται στην περίπτωση των σταθερών συναρτήσεων.*

Θεώρημα 2.19 (Ανισότητα Morrey)**.** *Έστω $p > N$. Τότε:*

$$\boxed{W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \overset{\text{συνεχής}}{\hookrightarrow} L^\infty(\mathbb{R}^N)}. \tag{9}$$

(i) *Επιπλέον, για κάθε $\boxed{N < p < +\infty}$, υπάρχει σταθερά $C_3 = C_3(p,N)$, τέτοια ώστε:*

$$|u(y)-u(z)| \leq C_3\, r \left(⨍_{B(x,r)} \|Du\|^p \, dw \right)^{\frac{1}{p}}$$

$\forall\, B(x,r) \subset \mathbb{R}^N$, $\forall\, u \in W^{1,p}(B^o(x,r))$ *και για* $y,z \in B^o(x,r)$ $\mathfrak{L}^N$*-σ.π..*

(ii) *Ειδικά, αν $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, τότε:*

$$\exists \lim_{r\to 0} (u)_{x,r} \equiv u^*(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N,$$

δηλαδή το προηγούμενο όριο (σημείο Lebesgue) υπάρχει $\forall\, x \in \mathbb{R}^N$, αλλά η u^* είναι Hölder-συνεχής με εκθέτη $\boxed{\alpha = 1 - \frac{N}{p}}$, δηλαδή:

$$\exists\, C = C(p,N) : \ |u^*(x) - u^*(y)| \leq C\, |x-y|^\alpha \, \|Du^*\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \quad \text{σ.π. } x,y \in \mathbb{R}^N.$$

Παρατήρηση 24. *Η περίπτωση $\boxed{p = +\infty}$ καλύπτεται από το Θεώρημα 2.11, με το οποίο αποδείξαμε την τοπική συνέχεια Lipschitz των συναρτήσεων του χώρου $W^{1,\infty}_{loc}(\Omega)$.*

Γενικά, αν $\boxed{N < p \leq +\infty}$, ισχύει:

$$\exists\, C = C(p,N) : \ \|u\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \leq C\, \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N). \tag{10}$$

Συμβολίζουμε $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων του $\mathbb{R}^N$, οι οποίες είναι ομοιόμορφα Hölder-συνεχείς με εκθέτη α. Ο χώρος αυτός είναι πλήρης αν προσαυξήσουμε τη νόρμα supremum κατά την ημινόρμα $[\cdot]_{\alpha,\mathbb{R}^N}$.

Απόδειξη.

1. Έστω $u \in C^1(B(x,r))$ (τοπική προσέγγιση) και σημείο $w \in B(x,r)$, τέτοιο ώστε $|y-w|, |w-z| < r$. Εφαρμόζωντας το Λήμμα 2.6, αρχικά για $p=1$, προκύπτει η ακόλουθη εκτίμηση:

$$
\begin{aligned}
|u(y)-u(z)| &\leq \fint_{B(x,r)} \left(|u(y)-u(w)| + |u(w)-u(z)|\right)\, dw \\
&\overset{\text{Λήμμα}}{\leq} C \int_{B(x,r)} |Du(y)| \left(|y-w|^{1-N} + |w-z|^{1-N}\right) dw, \quad (p=1) \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} C \left(\int_{B(x,r)} \left(|y-w|^{1-N} + |w-z|^{1-N}\right)^{\frac{p}{p-1}} dw\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{B(x,r)} |Du|^p\, dw\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{\text{Λήμμα}}{\leq} C \left(\int_{B(x,r)} \left(2r^{-(N-1)}\right)^{\frac{p}{p-1}} dw\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{B(x,r)} |Du|^p\, dw\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \left[\frac{p-1}{p} = \frac{1}{q}\right] \\
&= C \left(2r^{-(N-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{B(x,r)} dw\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{B(x,r)} |Du|^p\, dw\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C' \left(r^{-(N-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(r^N\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{B(x,r)} |Du|^p\, dw\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C'\, r^{\left(N-(N-1)\frac{p}{p-1}\right)\frac{p-1}{p}} \left(\int_{B(x,r)} |Du|^p\, dw\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= C'\, r^{1-\frac{N}{p}} \left(\int_{B(x,r)} |Du|^p\, dw\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

2. Αν $u \in C^1(B(x,r))$, τότε η προηγούμενη εκτίμηση ισχύει (υπάρχει σταθερά) *προσεγγιστικά* για κάθε σημείο $y,z \in B^o(x,r)$ $\mathfrak{L}^N$-σ.π.. Έπεται η (i) :

$$
|u(y)-u(z)| \leq C'\, r^{1-\frac{N}{p}} \left(\int_{B(x,r)} |Du|^p\, dw\right)^{\frac{1}{p}} = C_3\, r \left(\fint_{B(x,r)} |Du|^p\, dw\right)^{\frac{1}{p}}.
$$

3. Έστω τώρα ότι $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Τότε, μπορούμε να εφαρμόσουμε την προσεγγιστική εκτίμηση της (i) με $r = |x-y|$, για κάθε x,y $\mathfrak{L}^N$-σ.π., έτσι ώστε να ισχύει παντού στο $\mathbb{R}^N$:

$$
|u(y)-u(z)| \leq C\, |x-y|^{1-\frac{N}{p}} \left(\fint_{B(x,r)} |Du|^p\, dw\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\, \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\, |x-r|^{\alpha},
$$

όπου $0 < \alpha \equiv 1 - \frac{N}{p} < 1$ ο εκθέτης Hölder. Επομένως, η u είναι σ.π.-ισοδύναμη με μία Hölder-συνέχη συνάρτηση, $\tilde{u}$. Προφανώς, $u^* \equiv \tilde{u}$ παντού στο $\mathbb{R}^N$. $\square$

2.6 Ανισότητες Sobolev σε πολλές διαστάσεις, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ανοικτό χωρίο με λείο σύνορο.

Θεώρημα 2.20 (Συνεχείς εμφυτεύσεις). *Αν το Ω είναι C^1 χωρίο με* ***φραγμένο*** *λείο σύνορο, τότε, $\forall\, p$ και $\forall\, N$, ο $W^{1,p}(\Omega)$ εμφυτεύεται* ***συνεχώς*** *στον $L^p(\Omega)$. Ειδικά:*

$$\begin{aligned}
&W^{1,p}(\Omega) \overset{\text{συνεχής}}{\hookrightarrow} L^{p*}(\Omega) & & \text{αν} \quad p < N,\\
&W^{1,p}(\Omega) \overset{\text{συνεχής}}{\hookrightarrow} L^{q}(\Omega) & \forall\, p \le q < \infty, & \text{αν} \quad p = N,\\
&W^{1,p}(\Omega) \overset{\text{συνεχής}}{\hookrightarrow} L^{\infty}(\Omega) & & \text{αν} \quad p > N.
\end{aligned}$$

Επιπλέον, αν $p > N$, τότε $\forall\, u \in W^{1,p}(\Omega)$ ισχύει:

$$|u(x) - u(y)| \le C\, \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} |x-y|^{\alpha} \quad x, y \in \Omega - \sigma.\pi.,$$

με $\alpha = \lfloor 1 - \frac{N}{p} \rfloor$ και $C = C(\Omega, p, N)$. Ειδικά, αν $\boxed{p > N}$, ισχύει η ακόλουθη:

$$\boxed{W^{1,p}(\Omega) \overset{\text{συνεχής}}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})}\,.$$

(Βλ. Brezis, 2011, Θεώρημα 9.16).

Αν το Ω είναι επιπλέον φραγμένο, τότε ισχύουν και οι ακόλουθες εμφυτεύσεις.

Θεώρημα 2.21 (Εμφυτεύσεις Rellich-Kondrachov). *Αν το C^1 χωρίο Ω είναι* ***φραγμένο****, τότε, $\forall\, p$ και $\forall\, N$, ο $W^{1,p}(\Omega)$ εμφυτεύεται* ***συμπαγώς*** *στον $L^p(\Omega)$. Ειδικά:*

$$\begin{aligned}
&W^{1,p}(\Omega) \overset{\text{συμπαγής}}{\hookrightarrow} L^{q}(\Omega) & \forall\, 1 \le q < p^*, & \quad \text{αν} \quad p < N,\\
&W^{1,p}(\Omega) \overset{\text{συμπαγής}}{\hookrightarrow} L^{q}(\Omega) & \forall\, p \le q < \infty, & \quad \text{αν} \quad p = N,\\
&\boxed{W^{1,p}(\Omega) \overset{\text{συμπαγής}}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})} & & \quad \text{αν} \quad \boxed{p > N}.
\end{aligned}$$

(Βλ. Brezis, 2011, Θεώρημα 9.16).

Παρατήρηση 25. *Η πρώτη εμφύτευση ισχύει για $q = p^*$, αλλά δεν είναι συμπαγής, ακόμη και αν το Ω είναι φραγμένο και λείο.*

Παρατήρηση 26. *Η δεύτερη εμφύτευση δεν ισχύει πάντα για $p = N$. Μπορεί να βρούμε $u \in W^{1,N}(\Omega)$ αλλά $u \notin L^{\infty}(\Omega)$. Για παράδειγμα, αν $\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^N \;:\; |x| < 1/2\right\}$, τότε η συνάρτηση $u : \Omega \to \mathbb{R}$, με τιμές $u(x) = \log|x|^{-\alpha}$ και $0 < \alpha < 1 - \frac{1}{N}$, ανήκει στον $W^{1,N}(\Omega)$ αλλά δεν είναι φραγμένη στο $x = 0$.*

Παρατήρηση 27. *Επιπλέον, αν το το Ω είναι φραγμένο και λείο, το μέγεθος $\|Du\|_p + \|u\|_q$ είναι νόρμα ισοδύναμη με τη συνήθη του $W^{1,p}$, αρκεί:*

$$\begin{aligned}
&1 \le q \le p^* \quad \text{αν} \quad 1 \le p \le N,\\
&1 \le q < \infty \quad \text{αν} \quad p = N,\\
&1 \le q \le \infty \quad \text{αν} \quad p > N.
\end{aligned}$$

Κεφάλαιο 3

Οι χώροι RKHS

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εισάγουμε μια ειδική κατηγορία χώρων Hilbert, τους Reproducing Kernel Hilbert Spaces (RKHS). Οι χώροι RKHS εμφυτεύονται συνεχώς στους χώρους Sobolev και έχουν μια ιδιαίτερα χρήσιμη ιδιότητα: η ισχυρή σύγκλιση των στοιχείων τους έπεται και τη σημειακή σύγκλιση στο ίδιο όριο.

3.1 Ορισμός των χώρων RKHS

Ένας χώρος Hilbert είναι RKHS, αν παράγεται σημειακά από πυρήνα.

Ορισμός 19 (Reproducing Kernel Hilbert Space – RKHS). *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ και H χώρος Hilbert πραγματικών συναρτήσεων $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι ο H είναι χώρος Hilbert παραγόμενος από τον πυρήνα $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$, αν-ν :*

(i) $\forall\, y \in \Omega :\ K(\cdot, y) \in H$, *και*

(ii) $\boxed{\forall\, y \in \Omega,\ \forall\, f \in \mathrm{H} :\ \langle f, K(\cdot, y)\rangle = f(y)}$. (*Ιδιότητα reproducing kernel*)

Έπεται ότι

$$\forall\, x, y \in \Omega \times \Omega :\ K(x, y) = \langle K(\cdot, y), K(\cdot, x)\rangle.$$

Ορισμός 20 (Θετικά ορισμένος πυρήνας). *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ και $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ πραγματικός πυρήνας. Επιπλέον, ο K είναι συμμετρικός, δηλαδή: $K(x, y) = K(y, x)$ $\forall x, y \in \Omega$. Θα λέμε ότι ο K είναι θετικά ορισμένος αν, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, διακριτό ζεύγος σημείων $\{x_1, \dots, x_N\} \subset \Omega$ και μη μηδενικών συντελεστών $(c_1, \dots, c_N)^T \in \mathbb{R}^N$, η ακόλουθη τετραγωνική μορφή είναι θετική:*

$$\textstyle\sum_{i,j=1}^N c_i c_j K(x_i, x_j) > 0.$$

Θεώρημα 3.1. *Ο πυρήνας K ενός RKHS χώρου H είναι μοναδικός, συμμετρικός και θετικά ορισμένος.*

Απόδειξη.
1. Ας υποθέσουμε ότι ο H παράγεται από δύο πυρήνες, K_1, K_2. Τότε, η ιδιότητα (ii) του Ορισμού 19 έπεται τη μοναδικότητα της K :

$$\begin{aligned} f(y) \overset{(ii)}{=} \langle f, K_1(\cdot, y)\rangle = \langle f, K_2(\cdot, y)\rangle \quad \forall\, f \in H, y \in \Omega \\ \langle f, K_1(\cdot, y) - K_2(\cdot, y)\rangle = 0 \quad \forall\, f \in H, y \in \Omega \\ \therefore \quad K_1 \equiv K_2. \end{aligned}$$

2. Η συμμετρία προκύπτει και αυτή από τον Ορισμό 19:

$$K(x, y) = \langle K(\cdot, y), K(\cdot, x)\rangle = \langle K(\cdot, x), K(\cdot, y)\rangle = K(y, x).$$

3. Η συμμετρία έπεται ότι η K είναι θετικά ημιορισμένη (≥ 0), άρα και θετικά ορισμένη (> 0) :

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{N} c_i c_j K(x_i, x_j) &= \sum_{i,j=1}^{N} c_i c_j \langle K(\cdot, x_i), K(\cdot, x_j)\rangle \\ &= \langle \sum_{i=1}^{N} c_i K(\cdot, x_i), \sum_{j=1}^{N} c_j K(\cdot, x_j)\rangle \geq 0.\end{aligned}$$

□

Η ύπαρξη και μοναδικότητα των χώρων RKHS εξασφαλίζονται από το Θεώρημα των Moore-Aronszajn (βλ. Hsing & Eubank, 2015, Λήμμα 2.7.4).

Παράδειγμα 12. *Έστω $\Omega \equiv I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ φραγμένο διάστημα, H πεπερασμένης διάστασης χώρος Hilbert και $\{e_1, \ldots, e_p\}$ μια ορθοκανονική βάση του. Η συνάρτηση*

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{p} e_i(x) e_j(y) \quad \forall\, x, y \in I$$

είναι πυρήνας που παράγει το χώρο H, αφού ικανοποιεί τον Ορισμό 19. Συγκεκριμένα, $K(\cdot, y) \in H$ για κάθε $y \in \Omega$ και

$$\langle e_j, K(\cdot, y)\rangle = \sum_{i=1}^{p} \langle e_j, e_i\rangle e_i(y) = e_j(y) \quad \forall\, 1 \leq j \leq p.$$

Παράδειγμα 13. *Έστω $\Omega \equiv I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ φραγμένο διάστημα. Αν $f \equiv L^2(I)$, δηλαδή πρόκειται για κλάση ισοδυναμίας και όχι για χώρο συναρτήσεων, τότε **δεν** υπάρχει οικογένεια πυρήνων $K(\cdot, y)$ για $y \in I$, τέτοιες ώστε να ικανοποιούν τη συνθήκη*

$$\forall f \in L^2(I) : \int_I f\, K(\cdot, y)\, d\lambda = f(y) \quad \lambda - \text{σ.π. στο}\, I,$$

αφού η ταυτοτική απεικόνιση δε μπορεί να αναπαρασταθεί ως ολοκληρωτικός τελεστής στον $L^2(I)$.

Παράδειγμα 14. *Έστω $\Omega \equiv I = (0, 1)$. Ο συναρτησιακός χώρος*

$$H \equiv \left\{ u \mid u(0) = 0,\ u \text{ απόλυτα συνεχής και}\, u' \in L^2(I) \right\},$$

όπου u' η σ.π. παράγωγος της απόλυτα συνεχούς συνάρτησης u, με το ακόλουθο εσωτερικό γινόμενο

$$\langle u, v\rangle_{\mathrm{H}} := \int_0^1 (u'v')\, d\lambda,$$

είναι χώρος Hilbert παραγόμενος από τον πυρήνα $K(x, y) = \min\{x, y\}$. Η ασθενής παράγωγος της $K(\cdot, y) = \min\{\cdot, y\}$ είναι η δείκτρια συνάρτηση $\mathbf{1}_{(0,y)}$ και ικανοποιεί τη συνθήκη (ii) του Ορισμού 19 :

$$\langle u, v\rangle_H = \int_0^y u'(x)\, d\lambda(x) = u(y) - u(0) = u(y).$$

Παράδειγμα 15. *Έστω $\Omega = \mathbb{R}$. Ο συναρτησιακός χώρος Sobolev*

$$H^1(\mathbb{R}) = \left\{ u \mid u \text{ απόλυτα συνεχής και}\, u, u' \in L^2(I) \right\},$$

εφοδιασμένος με το ακόλουθο εσωτερικό γινόμενο

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\mathbb{R})} := \int_{\mathbb{R}} (uv + u'v')\, d\lambda,$$

είναι χώρος Hilbert παραγόμενος από τον πυρήνα

$$K(x,y) = \frac{1}{2}\exp\left(-|x-y|\right).$$

$$K_x(x,y) = \begin{cases} -K(x,y), & \text{αν} \quad x-y>0, \\ K(x,y), & \text{αν} \quad x-y<0, \end{cases} \qquad K_{xx}(x,y) = K(x,y), \quad \text{αν}\, x \neq y.$$

Αν $u, v \in H$ δύο φορές παραγωγίσιμες εκτός ίσως από το σημείο y, τότε

$$\langle u, v\rangle_{\mathrm{H}} := \int_{\mathbb{R}} uv\, d\lambda + \int_{\mathbb{R}} u'v'\, d\lambda = u(y).$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} u'v'\, d\lambda &= \int_{-\infty}^{y} u'v'\, d\lambda + \int_{y}^{\infty} u'v'\, d\lambda \quad [\text{γενικευμένη ΟΚΠ}] \\ &= \left[uv'\right]_{-\infty}^{y} - \int_{-\infty}^{y} u'v''\, d\lambda + \left[uv'\right]_{y}^{\infty} - \int_{y}^{\infty} u'v''\, d\lambda \\ &= u(y) - \int_{\mathbb{R}} uv''\, d\lambda \\ &= u(y) - \int_{\mathbb{R}} uv'\, d\lambda \quad \left[K(y,y)\tfrac{1}{2},\ v := K(\cdot, y)\right]. \qquad \square \end{aligned}$$

Έπεται ότι ο χώρος Sobolev $H^1(\mathbb{R})$ είναι RKHS με πυρήνα K.

3.2 Ολοκληρωτική αναπαράσταση των πυρήνων

Η ολοκληρωτική αναπαράσταση των πυρήνων χρησιμεύει στη φασματική ανάλυση των πυρήνων του Green.

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ **συμπαγές** σύνολο και $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ συμμετρικός και θετικά ορισμένος πυρήνας με την ιδιότητα rk. Ας ορίσουμε τον **ολοκληρωτικό τελεστή** $I_{K,\Omega} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, με τύπο

$$(I_{K,\Omega}\, f)(y) := \int_{\Omega} K(x,y) f(x)\, d\mu(x), \quad f \in L^2(\Omega),\ y \in \Omega. \tag{1}$$

Ο τελεστής $I_{K,\Omega}$ είναι συνεχής απεικόνιση από τον $L^2(\Omega)$ στον RKHS χώρο $H(\Omega)$, ο οποίος παράγεται από τον πυρήνα K. Συγκεκριμένα, ο $I_{K,\Omega}$ είναι ο συζυγής του τελεστή πλήρωσης του $H(\Omega)$ στον $L^2(\Omega)$, δηλαδή ικανοποιεί

$$\int_{\Omega} f(x) g(x)\, d\mu(x) = \langle f, I_{K,\Omega} g\rangle_{H(\Omega)}, \quad \text{για } f \in H(\Omega),\ g \in L^2(\Omega).$$

Επιπλέον, η εικόνα του, $\mathrm{Im}(I_{K,\Omega}) = \left\{ I_{K,\Omega}\, g : \ g \in L^2(\Omega) \right\}$, είναι πυκνή στον $H(\Omega)$ ως προς τη νόρμα του.

Θεώρημα 3.2 (Ολοκληρωτική αναπαράσταση των πυρήνων)**.** *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ και RKHS πυρήνας $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$ με την ακόλουθη αναπαράσταση:*

$$y, y' \in \Omega : \ K(y, y') = \int_{\Omega} g(y', x)\, g(y, x)\, d\mu(x), \tag{2}$$

όπου $\{g(y,\cdot) : y \in \Omega\}$ συλλογή συναρτήσεων στον $L^2(\Omega)$. Τότε, ο χώρος $H(\Omega)$ που αντιστοιχεί στην K, αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις της μορφής

$$f(y) = \int_{\Omega} F(x)\, g(y,x)\, d\mu(x),$$

για μοναδικό στοιχείο F της γραμμικής θήκης $\overline{\text{span}\{g(y,\cdot) : y \in \Omega\}} \subset L^2(\Omega)$. Ο $H(\Omega)$ και αυτή η γραμμική θήκη του $L^2(\Omega)$ είναι ***ισομετρικά ισόμορφοι*** *χώροι. (Βλ. Hsing & Eubank, 2015, Θεώρημα 2.7.7).*

Απόδειξη. Ο ισομορφισμός προκύπτει από την ακόλουθη σχέση:

$$K(y, y') = \langle K(y, \cdot), K(y', \cdot)\rangle_{H(\Omega)} = \langle g(y, \cdot), g(y', \cdot)\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Τότε, αν $f \in H(\Omega)$ η εικόνα της F, η ιδιότητα rk έπεται:

$$f(y) = \langle f, K(y, \cdot)\rangle_{H(\Omega)} = \langle F, g(y, \cdot)\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

□

Παράδειγμα 16. *Έστω $\Omega \equiv I = [0, 1]$ συμπαγές σύνολο και πυρήνας K με τύπο*

$$K(x, y) = \min\{x, y\} = \int_\Omega (y - s)^0_+ (x - s)^0_+ \, dt,$$

όπου $z^0_+ = z\mathbf{1}_{\{z>0\}}(z) + 0\mathbf{1}_{\{z\leq 0\}}(z)$. Ο χώρος $H(\Omega)$, ο οποίος παράγεται από τον πυρήνα K, αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις της μορφής

$$f(y) = \int_\Omega (y - t)^0_+ F(t)\, dt = \int_0^y F(t)\, dt \quad \text{με} \quad \|f\|^2_{H(\Omega)} = \int_\Omega |F(t)|^2 \, dt.$$

Ισοδύναμα, ο $H(\Omega)$ είναι το σύνολο των απόλυτα συνεχών ως προς το μέτρο Lebesgue συναρτήσεων με τετραγωνικά ολοκληρώσιμες παραγώγους.

3.3 Σύγκλιση σε χώρους RKHS

Σε αυτή την ενότητα θα αποδείξουμε μια σημαντική ιδιότητα των στοιχείων των χώρων RKHS, σύμφωνα με την οποία, η ισχυρή norm–σύγκλιση έπεται σημειακή σύγκλιση στο ίδιο όριο.

Θεώρημα 3.3 (Συνέχεια των συναρτησιακών). *Θα λέμε ότι ο συναρτησιακός χώρος H των πραγματικών συναρτήσεων στο Ω παράγεται από πυρήνα K αν-ν η συλλογή των συναρτησιακών $(z_y)_{y\in\Omega}$, τα οποία απεικονίζουν κάθε $y \in \Omega$ στο $\mathbb{R}$ μέσω της $z_y : H \to \mathbb{R}$, είναι συνεχή στον H. (Βλ. Berlinet & Agnan, 2004, Θεώρημα 1).*

Απόδειξη.

1. Για το ευθύ ($\Rightarrow$), έστω ότι ο H παράγεται από τον πυρήνα K. Το συναρτησιακό z_y είναι γραμμικό εξ ορισμού:

$$\forall\, f \in H : \; z_y(f) = \langle f, K(\cdot, y)\rangle_{H(\Omega)}, \quad \forall\, y \in \Omega.$$

Επιπλέον, είναι συνεχές, ως φραγμένο, $\forall\, y \in \Omega$:

$$|z_y(f)| = |\langle f, K(\cdot, y)\rangle_{H(\Omega)}| \overset{\text{C-S}}{\leq} \|f\|_{H(\Omega)} \|K(\cdot, y)\| = \|f\|_{H(\Omega)} \sqrt{K(x, x)}.$$

Αν $f = K(\cdot, y)$, μπορούμε να εκτιμήσουμε ένα άνω φράγμα της νόρμας του z_y :

$$\|z_y\| = \sup\left\{\frac{|z_y(f)|}{\|f\|_{H(\Omega)}} : \|f\|_{H(\Omega)} \neq 0\right\} = \sqrt{K(x, x)}.$$

□

2. Για το αντίστροφο ($\Leftarrow$), από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz για χώρους Hilbert (βλ. Παράρτημα Ε', σελ.85), αν η απεικόνιση $f \mapsto z_y(f) = f(y)$ είναι γραμμική και συνεχής για $f \in H(\Omega)$, τότε υπάρχει $g_y(x) \in H(\Omega)$ με την ιδιότητα

$$\forall\, f \in H(\Omega) : \; \langle f, g_y\rangle_{H(\Omega)} = f(y).$$

Αν αυτή ισχύει $\forall\, y \in \Omega$, τότε ο πυρήνας $K(x,y) = g_y(x)$ παράγει τον $H(\Omega)$. $\square$

Η συνέχεια των συναρτησιακών ενός χώρου RKHS μας επιτρέπει να δείξουμε ότι, αν μια συνάρτηση συγκλίνει ως προς τη νόρμα ενός χώρου RKHS, δηλαδή ισχυρά, τότε συγκλίνει και κατά σημείο στο ίδιο όριο.

Πόρισμα 3.1 (Η ισχυρή σύγκλιση συνεπάγεται σημειακή σύγκλιση)**.** *Έστω $H(\Omega)$ χώρος RKHS, παραγόμενος από πυρήνα K, και $(f_n)_{n\geq 1} \subset H(\Omega)$ ακολουθία συναρτήσεων, η οποία συγκλίνει στην $f \in H(\Omega)$ ως προς τη νόρμα του $H(\Omega)$:*

$$\|f_n - f\|_{H(\Omega)} \to 0 \quad \textit{καθώς} \quad n \to \infty.$$

Τότε, έπεται η σημειακή σύγκλιση στο ίδιο όριο:

$$|f_n(y) - f(y)| \to 0 \quad \textit{καθώς} \quad n \to \infty, \ \forall\, y \in \Omega.$$

Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη αν επιπλέον $\sup_{y\in\Omega} K(y,y) < +\infty$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η ακόλουθη μεταβολή είναι φραγμένη στον $H(\Omega)$ για κάθε $y \in \Omega$ και για κάθε $n \geq 1$:

$$|f_n(y) - f(y)| \overset{\text{C-S}}{\leq} \|f_n - f\|_{H(\Omega)} \sqrt{K(y,y)}.$$

Από την υπόθεση, $\|f_n - f\|_{H(\Omega)} \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Επομένως, ορίζεται και η ακόλουθη μεταβολή:

$$|f_n(y) - f(y)| = z_y(f_n) - z_y(f) \quad \forall\, y \in \Omega.$$

Η συνέχεια των συναρτησιακών έπεται ότι $z_y(f_n) \to z_y(f)$ για κάθε $y \in \Omega$ και για κάθε $n \geq 1$, καθώς $n \to \infty$. $\square$

3.4 Διάσπαση των χώρων RKHS

Ας θεωρήσουμε τους χώρους Sobolev $H^k(I) \equiv W^{k,2}(I)$, δηλαδή για $p = 2$, με ιδιαίτερο ενδιαφέρον στον $H^1(I) \equiv W^{1,2}(I)$, όπου $I = [0,1]$ συμπαγές διάστημα της πραγματικής ευθείας.

Αν $e_i(y) = \frac{y^i}{i!}$, $i \geq 0$ δυναμοσειρά και $G_k(y,x) = \frac{(y-x)_+^{k-1}}{(k-1)!}$ πυρήνας, τότε κάθε $u \in H^1(I)$ μπορεί να προσεγγιστεί τοπικά με ανάπτυγμα Taylor βαθμού $k-1$:

$$k \geq 1 : \ u(y) = \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} u^{(i)}(0)\, e_i(x) + \int_I G_k(y,x)\, u^{(k)}(x)\, dx. \tag{3}$$

Αν συμβολίσουμε $u^{(i)}(0) \equiv a_i \in \mathbb{R}$, με $i = 0, 1, \ldots, k-1$, και $u^{(k)}(x) \equiv v^{(k)}(x) \in L^2(I)$, όπου $v^{(k)}$ η I-σ.π. τάξης k μερική **ασθενής** παράγωγος, τότε:

$$k \geq 1 : \ u(y) = \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} a_i\, e_i(y) + \int_0^1 G_k(t, sy, x)\, v^{(k)}(x)\, dx. \tag{4}$$

Το ανάπτυγμα αυτό αναλύεται σε άθροισμα πυρήνων αν θεωρήσουμε τα ακόλουθα σύνολα:

$$H_0 = \operatorname{span}\{e_0, \ldots, e_{k-1}\}, \quad H_1 := \left\{\int_0^1 G_k(y,x)\, v(x)\, dx : \ v \in L^2(I)\right\}.$$

Αν τα στοιχεία του ορθοκανονικού συνόλου H_0 είναι επιπλέον γραμμικά ανεξάρτητα, τότε $B_{H_0} = \{e_0, \ldots, e_{k-1}\}$ μια ορθοκανονική βάση του H_0. Οι ακόλουθες συναρτήσεις ορίζουν αντίστοιχα εσωτερικά γινόμενα:

$$\langle u, v\rangle_{H_0} = \sum_{i=0}^{k-1} u^{(i)}(0)v^{(i)}(0), \quad \langle u, v\rangle_{H_1} = \int_0^1 u^{(k)}(x)\, v^{(k)}(x)\, dx.$$

Το ε.γ. του H_1 προκύπτει αν θέσουμε $u(y) = \int_0^1 G_k(y, x)\, v(x), dx \in H_1$ για κάποια $v \in L^2(I)$. Ουσιαστικά, μηδενίζουμε τις μερικές παραγώγους κατώτερης τάξης στα αναπτύγματα (3),(4), $u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(k-1)}(0) = 0$, έτσι ώστε $u^{(k)} = v$.

Θεώρημα 3.4. *Οι χώροι εσωτερικού γινομένου* $\left(H_i, \langle\cdot,\cdot\rangle_{H_i}\right)$, *με* $i = 0, 1$, *είναι RKHS παραγόμενοι από πυρήνα. Συγκεκριμένα:*

$$k_0(x, y) := \sum_{i=0}^{k-1} e_i(x)\, e_i(y), \quad k_1(x, y) := \int_0^1 G_k(x, x)\, G_k(y, x)\, dx.$$

(Βλ. Hsing & Eubank, 2015, Θεώρημα 2.8.1).

Απόδειξη. Ο πυρήνας του H_0 είναι αυτός που είδαμε στο Παράδειγμα 12 για χώρους πεπερασμένης διάστασης, ενώ αυτός του H_1 προκύπτει από την ολοκληρωτική αναπαράσταση των πυρήνων του Θεωρήματος 3.2.

Μάλιστα ο $\left(H_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_{H_1}\right)$ είναι **πλήρης**, αφού μια ακολουθία $(u_n)_{n\geq 1}$ είναι Cauchy στον H_1, αν η ακολουθία των k-τάξης μερικών **ασθενών** παραγώγων $\left(u_n^{(k)}\right)_{n\geq 1}$ είναι Cauchy στον $L^2(I)$, δηλαδή αν ικανοποιεί

$$u_n^{(k)} \to v \in L^2(I), \quad n \to \infty,$$

για κάποια $v \in L^2(I)$. Επειδή ο $L^2(I)$ είναι πλήρης με την αντίστοιχη νόρμα του, η προηγούμενη συνθήκη σύγκλισης, η οποία ισοδυναμεί με την ακόλουθη ολοκληρωτική αναπαράσταση

$$u(y) := \int_0^1 G_k(y, x)\, v(x)\, dx \in H_1 \quad \forall\, y \in [0, 1],$$

συνεπάγεται την πληρότητα του H_1. $\square$

Κεφάλαιο 4

Χώροι Sobolev παραγομένοι από πυρήνες: προσέγγιση από διαφορικούς και συνοριακούς τελεστές

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ακολουθήσουμε την τελεστική προσέγγιση των Fasshauer & Ye (2013), με σκοπό να δείξουμε ότι η λύση της ελλειπτικής εξίσωσης για ανοικτό και φραγμένο χωρίο του N-διάστατου πραγματικού επιπέδου είναι μια άγνωστη συνάρτηση, η οποία μπορεί να κατασκευαστεί έτσι ώστε να ανήκει σε ένα συναρτησιακό χώρο Sobolev, ισόμορφο με χώρο Hilbert παραγόμενο από πυρήνα Green, δηλαδή RKHS. Επειδή πρόκειται για διανυσματικούς χώρους Hilbert με ισοδύναμες νόρμες, η κατασκευή αυτή είναι βέλτιστη.

4.1 Πυρήνας Green για τον τελεστή Laplace

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ανοιχτό και φραγμένο χωρίο με λείο σύνορο. Συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε τη μοναδιαία μπάλλα του $\mathbb{R}^N$ για $N \geq 2$:

$$\Omega = B(0,1) = \left\{x \in \mathbb{R}^N \ : \ \|x\|_2 := \textstyle\sum_{i=1}^N x_i^2 < 1\right\}.$$

Στο Κεφάλαιο 2 είδαμε ότι ο χώρος Sobolev $H^k(\Omega)$ είναι ο χώρος των **ασθενών** μερικών παραγώγων, το πολύ τάξης k,

$$H^k(\Omega) := \left\{u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) : D^{|\alpha|}u \in L^2(\Omega),\ |\alpha| \leq k,\ \alpha \in \mathbb{N}_0^N\right\}, \quad k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\},$$

με εσωτερικό γινόμενο

$$(u,v)_{H^k(\Omega)} := \textstyle\sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega D^{|\alpha|}u(x)\, D^{|\alpha|}v(x)\, dx, \quad u,v \in H^k(\Omega).$$

Ο **πυρήνας** του **Green**, ο οποίος αντιστοιχεί στον ελλειπτικό τελεστή του ομογενούς προβλήματος Dirichlet για την εξίσωση Poisson στο Ω, είναι η συνάρτηση δύο μεταβλητών $G : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$, με τύπο:

$$G(x,y) := \phi(x-y) - \phi(\|x\|_2 y - x), \quad x,y \in \Omega. \tag{1}$$

Για σταθερό $y \in \Omega$, η **συνάρτηση** μίας μεταβλητής $G(.,y)$ του **Green** είναι στοιχείο του χώρου Sobolev $H^k(\Omega)$ και ικανοποιεί το ομογενές πρόβλημα Dirichlet για την εξίσωση Poisson:

$$\begin{cases} LG(.,y) = \delta_y, & \text{στο} \quad \Omega, \\ \quad G(.,y) = 0, & \text{στο} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{ΠΣΤ I}$$

Συμβολίζουμε $L \equiv -\Delta = -\nabla^T\nabla$ το γραμμικό διαφορικό τελεστή Laplace, και ∇ τον αντίστοιχο τελεστή κλίσης. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_N}\right)^T \quad \text{και} \quad \Delta \equiv \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = -\nabla^T\nabla = \textstyle\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i^2}.$$

Η συνάρτηση $\phi \equiv G(x,0)$ είναι η **θεμελιώδης λύση** του L με τύπο:

$$\phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\|x\|_2, & N=1, \\ -\frac{1}{2\pi}\log\|x\|_2, & N=2, \quad \alpha_N := \frac{\pi^{N/2}}{\Gamma(\frac{N}{2}+1)} = V(B(0,1)) \equiv V(\Omega), \\ \frac{1}{N(N-2)\alpha_N}\frac{1}{\|x\|_2^{N-2}}, & N \geq 3, \end{cases} \tag{2}$$

όπου α_N ο όγκος της μοναδιαίας μπάλλας του $\mathbb{R}^N$ (βλ. σελ.18).

Ο πυρήνας του Green έχει σημειακή αναπαράσταση ως προς το ημι-εσωτερικό γινόμενο των κλίσεων για κάθε ομαλή συνάρτηση $f \in C_0^1(\Omega)$ και για κάθε $y \in \Omega$,

$$(G(.,y),f)_{\nabla,\Omega} = \int_\Omega \left[P\,G(x,y)^T P\right] f(x)\,dx \overset{\text{Green I}}{=} \sum_{j=1}^N \int_\Omega G_{x_j}(x,y) f_{x_j}(x)\,dx = f(y),$$

αλλά **δεν είναι** reproducing, αφού δεν ικανοποιεί τη συνθήκη (ii) του ορισμού 19. Συγκεκριμένα, $G(x,x) = \infty$ στη διαγώνιο για κάθε $x \in \Omega$.

Αν όμως θεωρήσουμε το ακόλουθο πρόβλημα,

$$\begin{cases} LG(.,y) = \delta_y, & \text{στο} \quad \Omega, \\ BG(.,y) = 0, & \text{στο} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{ΠΣΤ II}$$

τότε η G **είναι** reproducing και ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες που συνοψίζει ο διανυσματικός τελεστής B.

4.2 Ανάλυση του τελεστή Laplace

Ο τελεστής L, τάξης το πολύ $2k$, αναλύεται ως

$$L = P^{*T}P = \sum_{i=1}^{n_b} P_j^* P_j, \tag{3}$$

όπου $P = \left(P_1, \cdots, P_{n_p}\right)^T = \nabla$ και $P^* = \left(P_1^*, \cdots, P_{n_p}^*\right)^T = -\nabla$ γραμμικοί διαφορικοί **συζυγείς** τελεστές κλίσης, με συνιστώσες $P_j : H^k(\Omega) \to L^2(\Omega)$, οι οποίες είναι φραγμένοι τελεστές στον $L^2(\Omega)$, για $j = 1, \cdots, n_p$.[1]

Συμβολίζουμε n_b τη διάσταση του γραμμικού συνοριακού τελεστή $B = \left(B_1, \cdots, B_{n_b}\right)^T$, ο οποίος συνοψίζει τις συνοριακές συνθήκες του του ΠΣΤ II, με συνιστώσες $B_j : H^k(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$, οι οποίες είναι φραγμένοι τελεστές στον $L^2(\Omega)$, για $j = 1, \cdots, n_b$. Επιπλέον, ορίζεται το ημι-εσωτερικό γινόμενο ως προς B στον $H^k(\Omega)$:

$$(u,v)_{B,\partial\Omega} := \sum_{i=1}^{n_b} \left(B_j u, B_j v\right)_{L^2(\partial\Omega)}, \quad u,v \in H^k(\Omega). \tag{4}$$

Μπορούμε πλέον να προσδιορίσουμε τις συνθήκες, υπό τις οποίες ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες.

Λήμμα 4.1. *Έστω B φραγμένος συνοριακός τελεστής τάξης $k-1$ στο Ω. Τότε η συνάρτηση $u \in H^k(\Omega)$ είναι και στοιχείο του χώρου πλήρωσης $H_0^k(\Omega)$, αν-ν $Bu = 0$. Η συνθήκη ικανοποιείται αν-ν $D^\beta_{|\partial\Omega} u = 0$ για κάθε $|\beta| \leq k-1$, με $\beta \in \mathbb{N}_0^N$.*

Επειδή το δεξί μέλος της εξίσωσης Poisson του ΠΣΤ II έχει επιλεγεί ως **σημειακή** μάζα στο y, μπορεί να θεωρηθεί συναρτησιακό από το δυϊκό του

[1] Το Ω είναι συμπαγές και $C^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$.

χώρου των συναρτήσεων δοκιμής, τον $\mathfrak{D}'(\Omega)$. Σε αυτή την περίπτωση, οι τελεστές P, P^*, B μπορούν να οριστούν με την ασθενή έννοια μέσω των γραμμικών απεικονίσεων $P, P^*, B : \mathfrak{D}'(\Omega) \to \mathfrak{D}'(\Omega)$, με τύπο:

$$P = \sum_{|\alpha|\le k} \omega_\alpha \circ D^\alpha, \quad P^* = \sum_{|\alpha|\le k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \circ \omega_\alpha, \quad B = \sum_{|\beta|\le k-1} \omega_\beta \circ D^\beta_{|\partial\Omega},$$

όπου $\omega_\alpha \in C^\infty(\Omega)$, $\omega_\beta \in C(\partial\Omega)$ ομαλές συναρτήσεις και $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N$ πολυδείκτες. Οι γραμμικές απεικονίσεις P, P^*, B είναι συνεχείς τελεστές στον $\mathfrak{D}'(\Omega)$, αν αυτός εφοδιαστεί με την ασθενή τοπολογία του δυϊκού (weak-star).[2] Επιπλέον, οι περιορισμοί των P, P^* στο $\mathfrak{D}(\Omega)$ είναι συνεχείς τελεστές σε αυτόν, οι οποίοι χαρακτηρίζονται μοναδικά από την ακόλουθη σχέση συζυγίας:

$$\langle PT, \varphi \rangle_\Omega = \langle T, P^*\varphi \rangle_\Omega \quad \text{και} \quad \langle P^*T, \varphi \rangle_\Omega = \langle T, P\varphi \rangle_\Omega, \quad \forall\, T \in \mathfrak{D}'(\Omega),\ \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Αφού ο χώρος Sobolev $H^k(\Omega)$ είναι ο χώρος των ασθενών μερικών παραγώγων το πολύ τάξης k, η βαθμίδα $D^\alpha \in \mathfrak{L}(\mathfrak{D}(\Omega))$ μπορεί να επεκταθεί μοναδικά στην **ασθενή** εκδοχή της, P^α, μέσω της ακόλουθης δυϊκής αναπαράστασης:

$$\langle P^\alpha T, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall\, T \in \mathfrak{D}'(\Omega),\ \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Επιπλέον, ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο ως προς P στον $H^k(\Omega)$:

$$(u, v)_{P,\Omega} = \sum_{j=1}^{n_p} \left(P_j u, P_j v \right)_{L^2(\Omega)}, \quad u, v \in H^k(\Omega). \tag{5}$$

Όταν $|\alpha| = k = 1$, ταυτίζεται με το αντίστοιχο ημι-εσωτερικό γινόμενο των κλίσεων στον $H^1(\Omega)$. Κατά συνέπεια, ισχύει η ανισότητα Poincaré, σύμφωνα με την οποία η ημινόρμα των κλίσεων είναι ισοδύναμη με τη συνήθη νόρμα του $H_0^1(\Omega)$.

Λόγω των συνοριακών συνθηκών, η βαθμίδα πρέπει να εκτιμηθεί και στο σύνορο. Ας θεωρήσουμε τον περιορισμό της D^β στο σύνορο, για $\beta \in \mathbb{N}_0^N$, μέσω της απεικόνισης:

$$D^\beta_{|\partial\Omega} : H^k(\Omega) \to L^2(\partial\Omega).$$

Στη μία διάσταση, αν $\Omega \equiv I = [a, b]$, τότε $\partial\Omega \equiv \partial I = \{a, b\}$, και ισχύει:

$$\left(D^\beta_{|\partial I} u \right)(x) := D^\beta u_{|\partial I}, \quad u \in H^k(I),\ x \in I.$$

Αν $p = 2$ και $N \ge p$, αφού το Ω έχει υποτεθεί ομαλό, η ανισότητα Rellich-Kondrachov εξασφαλίζει ότι ο $H^k(\Omega)$ εμφυτεύεται συμπαγώς στον $C^{k-1}(\overline{\Omega})$. Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε και την ακόλουθη απεικόνιση ίχνους:

$$D^\beta_{|\partial\Omega} : C^k(\Omega) \to C(\partial\Omega), \quad \text{με} \quad \left(D^\beta_{|\partial\Omega} u \right) := D^\beta u_{|\partial\Omega},\ u \in C^k(\Omega).$$

Η πυκνότητα των συναρτήσεων δοκιμής $C^k(\Omega)$ στον $H^k(\Omega)$ σε συνδυασμό με το Λήμμα 2.5, το οποίο επιτρέπει την εκτίμηση της νόρμας του $L^2(\partial\Omega)$ από αυτήν

[2] H weak-star τοπολογία, $\sigma(\mathfrak{D}'(\Omega), \mathfrak{D}(\Omega))$, περιέχει λιγότερα ανοικτά αλλά περισσότερα **συμπαγή** σύνολα. Σε όρους σύγκλισης, αν $(T_n, T)_{n\ge1} \in \mathfrak{D}'(\Omega)$, τότε:

$$T_n \overset{*}{\rightharpoonup} T \text{ στην } \sigma(\mathfrak{D}'(\Omega), \mathfrak{D}(\Omega)) \iff \langle T_n, \varphi \rangle_\Omega \to \langle T, \varphi \rangle_\Omega,\ \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

του $H^k(\Omega)$, συγκεκριμένα

$$\exists\, C_\beta = C_\beta(\Omega, p=2): \; \|D^\beta u\|_{L^2(\partial\Omega)} \overset{\Lambda.2.5}{\leq} C_\beta \|D^\beta u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_\beta \|u\|_{H^k(\Omega)}, \forall\, u \in C^k(\overline{\Omega}),$$

εξασφαλίζει ότι ο τελεστής διαφόρισης του ίχνους

$$D^\beta_{|\partial\Omega} : C^k(\Omega) \subset H^k(\Omega) \to C(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$$

παραμένει φραγμένος.

Η σημειακή μάζα στο $y \in \Omega$, δ_y, είναι συναρτησιακό του χώρου $\mathfrak{D}'(\Omega)$, με δυϊκή αναπαράσταση

$$\langle \delta_y, \varphi \rangle := \varphi(y), \quad \forall\, y \in \Omega,\; \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) \equiv C_0^\infty(\Omega).$$

Από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz (βλ. Παράρτημα Ε΄, σελ.85), για κάθε τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, υπάρχει μοναδικό συναρτησιακό $F_f \in \mathfrak{D}'(\Omega)$, τέτοιο ώστε:

$$\langle F_f, \varphi \rangle =: F(\varphi), \quad \forall\, y \in \Omega,\; \forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega).$$

Αφού $f\varphi \in L^1(\Omega)$, ορίζεται η ακόλουθη ολοκληρωτική αναπαράσταση:

$$(f, \varphi)_\Omega := \textstyle\int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx, \quad f\varphi \in L^1(\Omega).$$

Έπεται η σύνδεση $\langle F_f, \varphi \rangle = (f, \varphi)_\Omega$, $\forall\, \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$. Αφού $L^1_{\text{loc}}(\Omega) \subset \mathfrak{D}'(\Omega)$, ισχύει η ταύτιση $\boxed{F_f \equiv f}$.

4.3 Ο RKHS του ελλειπτικού προβλήματος είναι Sobolev

Μας ενδιαφέρει να χαρακτηρίσουμε τη λύση του ΠΣΤ ΙΙ, καθώς και το συναρτησιακό χώρο αυτής. Αν η λύση u είναι στοιχείο ενός χώρου Sobolev, τότε η ανάλυση του τελεστή Laplace που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, επιτρέπει να τη χαρακτηρίσουμε ως στοιχείο ενός χώρου RKHS, ο οποίος εμφυτεύεται συνεχώς σε αυτό το χώρο Sobolev.

Ας ορίσουμε τους ακόλουθους χώρους Hilbert

$$H_P(\Omega) := \left\{u \in H^k(\Omega) : \; Bu = 0\right\}, \quad H_B(\Omega) := \overline{\text{span}\,\{e_1, \cdots, e_{n_a}\}},$$

και τα αντίστοιχα εσωτερικά γινόμενα:[3]

$$(u, v)_{H_P(\Omega)} = \textstyle\sum_{j=1}^{n_p} \left(P_j u, P_j v\right)_{L^2(\Omega)}, \; u, v \in H^k(\Omega),$$
$$(u, v)_{H_B(\Omega)} = \textstyle\sum_{j=1}^{n_a} c_j^{-1} \hat{u}_j \hat{v}_j, \; u, v \in H_B(\Omega),$$

όπου $\{e_j\}_{j=1}^{n_a}$ μια επεκτάσιμη ορθοκανονική βάση του μηδενόχωρου (πυρήνα)

$$\text{Null}(L) := \left\{u \in H^k(\Omega) : \; Lu = 0\right\},$$

με συντελεστές $c_j \in \mathbb{R}^+$, για $j = 1, \cdots, n_a$. Συμβολίζουμε $\hat{u}_j$ και $\hat{v}_j$ τους συντελεστές Fourier των u, v ως προς την επιλεγμένη επεκτάσιμη βάση:

$$u = \textstyle\sum_{j=1}^{n_a} \hat{u}_j e_j, \quad v = \textstyle\sum_{j=1}^{n_a} \hat{v}_j e_j.$$

[3] Το εσωτερικό γινόμενο του $H_B(\Omega)$ είναι ημι-εσωτερικό γινόμενο.

Δεδομένης της επεκτασιμότητας της επιλεγμένης βάσης, ισχύει $H_P(\Omega) \simeq H^k(\Omega)$, δηλαδή ο χώρος $H_P(\Omega)$ είναι **ισομετρικά ισόμορφος** με τον $H^k(\Omega)$, επομένως εμφυτεύεται συνεχώς ο ένας στον άλλο μέσω της ταυτοτικής απεικόνισης (φραγμένος τελεστής) για πυκνό υπόχωρο. Η ισομετρία απορρέει από την ανισότητα Poincaré για τη νόρμα του χώρου πλήρωσης $H_0^k(\Omega)$. Έπεται ότι ο $H_P(\Omega)$ θα είναι επίσης διαχωρίσιμος.

Θεώρημα 4.1. *Αν $k \in \mathbb{N}$ με $\boxed{2k > N}$, όπου $2k$ η τάξη του τελεστή L, τότε ο μηδενόχωρος (πυρήνας)*

$$\mathit{Null}(P) := \left\{u \in H^k(\Omega) \,:\, Pu = 0\right\},$$

*είναι **πεπερασμένης διάστασης**, άρα και κλειστός, χώρος Hilbert. Επομένως, αν $u_P, u_B \in H^k(\Omega)$, τότε ισχύει η ακόλουθη ορθογώνια διάσπαση:*

$$H_{PB}(\Omega) = H_P(\Omega) \oplus H_B(\Omega) = \{u = u_P + u_B \,:\, Bu_P = 0,\ Pu_B = 0\}.$$

*Ο $H_{PB}(\Omega)$ γίνεται **χώρος RKHS**, δηλαδή χώρος Hilbert παραγόμενος από πυρήνα G του L, αν εφοδιαστεί με το ακόλουθο εσωτερικό γινόμενο:*

$$\begin{aligned}(u,v)_{H_{PB}(\Omega)} &:= (u,v)_{H_P(\Omega)} + (u,v)_{H_B(\Omega)}, \quad u,v \in H_{PB}(\Omega)\\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n_p} \int_\Omega P_j u(x) P_j v(x)\, dx + \sum_{j=1}^{n_b} \int_{\partial\Omega} B_j u(x) B_j v(x)\, dS(x).\end{aligned}$$

Επιπλέον, εμφυτεύεται συνεχώς στο χώρο Sobolev $H^k(\Omega)$ (βλ. Θεώρημα 4.2).

Παρατήρηση 28. *Αφού $H_P(\Omega) \simeq H^k(\Omega)$, αν $2k > N$, θα ισχύει και*

$$H_{PB}(\Omega) \simeq H_0^k(\Omega) \oplus \mathit{Null}(P),$$

με το ακόλουθο εσωτερικό γινόμενο και τη συνήθη νόρμα του $H^k(\Omega)$:

$$(u,v)_{H_{PB}(\Omega)} := (u,v)_{H_P(\Omega)} + (u,v)_{H_B(\partial\Omega)}, \quad u,v \in H_{PB}(\Omega).$$

Παρατήρηση 29. *Αφού υποθέσαμε **ομογενείς** συνοριακές συνθήκες Dirichlet, θα πρέπει Null$(P) = \left\{0_{H^k(\Omega)}\right\}$ και $n_a = 0$. Διαφορετικά, θα είναι υπόχωρος θετικής συνδιάστασης:*

$$K(x,y) = G(x,y) + R(x,y), \quad R(x,y) := \textstyle\sum_{j=1}^{n_a} c_j e_j(x) e_j(y), \quad x,y \in \Omega.$$

Παρατήρηση 30. *Αν $2k \leq N$, τότε ο πυρήνας K ($n_a = 0 \Rightarrow K = G$) **δεν** είναι reproducing kernel, οπότε η συνεχής εμφύτευση του $H_{PB}(\Omega)$ σε χώρο Sobolev διάστασης k δεν είναι πλέον εφικτή.*

Ο RKHS χώρος $H_{PB}(\Omega)$ εμφυτεύεται συνεχώς (ως διαχωρίσιμος χώρος Hilbert) στο χώρο Sobolev $H^k(\Omega)$, στοιχείο του οποίου είναι η λύση της ομογενούς ελλειπτικής εξίσωσης Laplace για το ομογενές πρόβλημα του Dirichlet, όπως αποδεικνύει το Λήμμα 4.2 και το Θεώρημα 4.2.

Λήμμα 4.2. *Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο πρόβλημα ομογενών συνοριακών συνθηκών Dirichlet για την εξίσωση Laplace:*

$$\begin{cases} Lu = 0, & \text{στο} \quad \Omega, \\ Bu = 0, & \text{στο} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

Το πρόβλημα επιδέχεται μοναδική τετριμμένη λύση $u \equiv 0$, η οποία είναι στοιχείο του χώρου Sobolev $H^k(\Omega)$.

Απόδειξη. Αν η $u \in H^k(\Omega)$ είναι λύση του προβλήματος, θα πρέπει να είναι στοιχείο του $H_0^k(\Omega)$. Από την πυκνότητα των συναρτήσεων δοκιμής στους χώρους Sobolev, υπάρχει ακολουθία $(\varphi_n)_{n\geq 1} \subset \mathfrak{D}(\Omega)$, τέτοια ώστε $\|\varphi_n - u\|_{H^k(\Omega)} \to 0$, καθώς $n \to \infty$. Αφού $P_j^* P_j u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$, $P_j u \in L^2(\Omega)$, και $P_j \varphi_n \in \mathfrak{D}(\Omega)$ από συνεχή επέκταση, ισχύει η ακόλουθη σύνδεση:

$$\left(P_j u, P_j \varphi_n\right)_{L^2(\Omega)} = \langle P_j u, P_j \varphi_n \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle P_j^* P_j u, \varphi_n \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Έπεται το ακόλουθο:

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j=1}^{n_p} \left(P_j u, P_j u\right)_{L^2(\Omega)} &= \lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{j=1}^{n_p} \left(P_j u, P_j \varphi_n\right)_{L^2(\Omega)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{j=1}^{n_p} \langle P_j^* P_j u, \varphi_n \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle Lu, \varphi_n \rangle_{L^2(\Omega)} = 0, \quad [Lu = 0]. \end{aligned}$$

Επιπλέον, με εφαρμογή της ανισότητας Poincaré για την P ημινόρμα, προκύπτει η ακόλουθη εκτίμηση της ενέργειας της εξίσωσης:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u\|_{H^k(\Omega)}^2 \leq C_P \|u\|_{P,\Omega} = C_P \textstyle\sum_{j=1}^{n_p} \|P_j u\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0 \Rightarrow u \equiv 0.$$

(Βλ. Fasshauer & Ye, 2013, Λήμμα 3.3). □

Θεώρημα 4.2. *(Χωρίς απόδειξη). Ο $H_{PB}(\Omega)$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, ο οποίος εμφυτεύεται συνεχώς στο χώρο Sobolev $H^k(\Omega)$:*

$$\begin{aligned} (u, v)_{H_{PB}(\Omega)} &= (u, v)_{H_P(\Omega)} + (u, v)_{H_B(\Omega)} - \textstyle\sum_{j,j'=1}^{n_a} \hat{u}_j \hat{v}_{j'} \left(e_j, e_{j'}\right)_{H_P(\Omega)}, \; u, v \in H_{PB}(\Omega) \\ &= (u, v)_{H_P(\Omega)} + \textstyle\sum_{j=1}^{n_a} c_j^{-1} \hat{u}_j \hat{v}_j - \textstyle\sum_{j,j'=1}^{n_a} \hat{u}_j \hat{v}_{j'} \left(e_j, e_{j'}\right)_{H_P(\Omega)}, \end{aligned}$$

με συντελεστές Fourier $\hat{u}_j := \left(u, e_j\right)_{B,\partial\Omega}$ για $j = 1, \cdots, n_a$. Αν η ορθοκανονική βάση $\{e_j\}_{j=1}^{n_a}$ επιλεγεί ώστε να ανήκει στον Null(P), τότε προκύπτει η ακόλουθη εκτίμηση της νόρμας του $H_{PB}(\Omega)$:

$$\|u\|_{H_{PB}(\Omega)}^2 = \|u\|_{H_P(\Omega)}^2 + \textstyle\sum_{j=1}^{n_a} c_j^{-1} |\hat{u}|^2, \quad u \in H_{PB}(\Omega).$$

(Βλ. Fasshauer & Ye, 2013, Θεώρημα 3.2).

Θεώρημα 4.3. *Ο πυρήνας $G \in L^2(\Omega \times \Omega)$, ο οποίος αντιστοιχεί στον τελεστή L του ΠΣΤ ΙΙ, παράγει τον $H_P(\Omega)$, ο οποίος είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $H_0^k(\Omega)$. (Βλ. Fasshauer & Ye, 2013, Θεώρημα 4.1).*

Απόδειξη. Θα επαληθεύσουμε ότι ο πυρήνας έχει ικανοποιεί τις συνθήκες του Ορισμού 19, επομένως παράγει τον $H_P^0(\Omega)$.

Ας σταθεροποιήσουμε κάποιο $y \in \Omega$. Ως προς τη συνθήκη (i), αφού $H_P(\Omega) \simeq H_0^k(\Omega)$, τότε η συνάρτηση $G(\cdot, y)$ είναι στοιχείο του $H^k(\Omega)$ και ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη $BG(\cdot, y) = 0$. Το Λήμμα 4.1 έπεται ότι $G(\cdot, y) \in H_0^k(\Omega)$.

Ως προς τη συνθήκη (ii), από την ανισότητα Sobolev για φραγμένο Ω, ο χώρος $H^k(\Omega)$ εμφυτεύεται συμπαγώς στον $C(\overline{\Omega})$, αρκεί $2k > N$, δηλαδή:

$$\exists\, C_k > 0 : \ \|u\|_{C(\overline{\Omega})} := \sup\{|u(x)| : x \in \Omega\} \leq C_k \|u\|_{H^k(\Omega)}, \quad u \in H^k(\Omega) \subseteq C(\overline{\Omega}).$$

Επομένως, αν $u \in H_P(\Omega)$, υπάρχει ακολουθία συναρτήσεων δοκιμής, $(\varphi_n)_{n\geq 1} \subset \mathfrak{D}(\Omega)$, η οποία, λόγω πυκνότητας στον $H^k(\Omega)$, ικανοποιεί την ακόλουθη σύγκλιση:

$$|u(y) - \varphi_n(y)| \leq \|u - \varphi_n\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C_k \|u - \varphi_n\|_{H^k(\Omega)} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{7}$$

Οι συναρτήσεις της ακολουθίας δοκιμής έχουν την ακόλουθη σημειακή αναπαράσταση:

$$(G(\cdot, y), \varphi_n)_{H_P(\Omega)} := (G(\cdot, y), \varphi_n)_{P,\Omega} = \sum_{j=1}^{n_p} \left(P_j G(\cdot, y), P_j \varphi_n\right)_{L^2(\Omega)} \overset{(\star)}{=} \varphi_n(y), \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned}(\star) : \ \left(P_j G(\cdot, y), P_j \varphi_n\right)_{L^2(\Omega)} &= \langle P_j G(\cdot, y), P_j \varphi_n \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle P_j^* P_j G(\cdot, y), \varphi_n \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \langle LG(\cdot, y), \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \delta_y, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \varphi(y), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Επιπλέον, συγκλίνουν ισχυρά ως προς τη νόρμα του $H^k(\Omega)$, δηλαδή:

$$\begin{aligned}|\,(G(\cdot, y), u)_{H_P(\Omega)} - \varphi_n(y)|_{C(\overline{\Omega})} &= |\,(G(\cdot, y), u)_{H_P(\Omega)} - (G(\cdot, y), \varphi_n)_{H_P(\Omega)}\,|_{C(\overline{\Omega})} \\ &\leq |u - \varphi_n|_{H^k(\Omega)}\, |G(\cdot, y)|_{H_P(\Omega)} \\ &\leq |u - \varphi_n|_{H^k(\Omega)}\, C_P |G(\cdot, y)|_{H^k(\Omega)} \to 0, \ n \to \infty.\end{aligned} \tag{8}$$

Η δεύτερη ανισότητα έπεται από την ισομετρία μεταξύ των χώρων $H_P(\Omega)$ και $H_0^k(\Omega)$. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (7) και (8), προκύπτει η οριακή σημειακή αναπαράσταση $(G(\cdot, y), u)_{H_P(\Omega)} = u(y)$. □

4.3.1 Παράδειγμα reproducing πυρήνα

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα (6) στη μία διάσταση, για $\Omega = (0, 1)$ φραγμένο διάστημα, $P = \frac{d}{dx}$, $P^* = -\frac{d}{dx}$, $L = P^* P = -\frac{d^2}{dx^2}$, και $B = I_{|\{0,1\}}$ (όπου I η ταυτοτική συνάρτηση).

Αφού $N = 1$, $O(P) = O(B) + 1 = 0 + 1 = 1 = k = |\alpha|$. Παρατηρούμε ότι ικανοποιείται η συνθήκη $2k > N$ του Θεωρήματος 4.1.

Επειδή υποθέσαμε **ομογενείς** συνοριακές συνθήκες Dirichlet, ο χώρος Null(P), ισοδύναμα ο μηδενόχωρος του L, έχει μηδενική διάσταση. Επομένως, ο πυρήνας $K(x, y)$ με τύπο

$$K(x, y) = G(x, y) + R(x, y) = G(x, y) := \min\{x, y\} - xy, \quad x, y \in \Omega,$$

γνωστός ως συνδιακύμανση της γέφυρας Brown, παράγει το χώρο

$$H_P(\Omega) = \left\{u \in H^1(0, 1) : u(0) = u(1) = 0\right\} \simeq H_0^1(\Omega),$$

με αντίστοιχο εσωτερικό γινόμενο

$$(u, v)_{H_P(\Omega)} = \left(u', v'\right)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u'(x)v(x)\,dx, \quad u, v \in H_P(\Omega).$$

Αν υποθέσουμε **μη ομογενείς** συνοριακές συνθήκες Dirichlet, τότε $\text{Null}(L) = \overline{\text{span}\{e_1, e_2\}}$. Έστω $e_1(x) = x$ και $e_2(x) = 1 - x$ για $x \in \Omega$. Εκτιμάμε τους συντελεστές Fourier της u ως προς αυτές:

$$\hat{u}_1 = (u, e_1)_{B,\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} u'(x)e_1'(x)\,dx = u(0)e_1(0) + u(1)e_1(1) = u(1),$$
$$\hat{u}_2 = (u, e_2)_{B,\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} u'(x)e_2'(x)\,dx = u(0)e_2(0) + u(1)e_2(1) = u(0).$$

Αν επιλέξουμε $c_1 = 1$ και $c_2 = 0$, το Θεώρημα 4.2 μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε ένα διαφορετικό πυρήνα και παραγόμενο χώρο για το πρόβλημα. Αφού

$$R(x, y) = c_1 e_1(x)e_1(y) + c_2 e_2(x)e_2(y) = e_1(x)e_1(y) = xy, \quad x, y \in \Omega,$$

ο πυρήνας K, ο οποίος παράγει το χώρο $H_{PB}(\Omega)$, δεν είναι παρά ο πυρήνας του ελαχίστου της κίνησης Brown (βλ. επίσης Παραδείγματα 14 & 16):

$$K(x, y) = G(x, y) + R(x, y) = \min\{x, y\} - xy + xy = \min\{x, y\}, \quad x, y \in \Omega.$$

Ο RKHS $H_{PB}(\Omega)$ είναι χώρος Sobolev της μορφής

$$H_{PB}(\Omega) = H_P(\Omega) \oplus H_B(\Omega) = H_P(\Omega) \oplus \overline{\text{span}\{e_1\}} = \left\{u \in H^1(\Omega) : \, u(0) = 0\right\},$$

με το ακόλουθο εσωτερικό γινόμενο:

$$\begin{aligned}(u, v)_{H_{PB}^{\mathfrak{A}}(\Omega)} &= (u, v)_{P,\Omega} + \frac{u(1)u(0)}{1} - u(1)u(0)\,(e_1, e_1)_{P,\Omega} \\ &= \int_\Omega u'(x)v'(x)\,dx + u(1)u(0) - u(1)u(0)\int_\Omega 1 \times (-1)\,dx \\ &= \int_\Omega u'(x)v'(x)\,dx, \quad u, v \in H_{PB}(\Omega).\end{aligned}$$

4.4 Φασματική ανάλυση reproducing πυρήνα Green

Έστω G reproducing πυρήνας για το ΠΣΤ ΙΙ. Αφού $G(\cdot, y) \in C(\Omega)$ για κάθε $x, y \in \Omega$, ο G είναι και ομοιόμορφα συνεχής στο Ω. Επομένως, θα είναι και στοιχείο του $L^2(\Omega \times \Omega)$, με φασματική αναπαράσταση:

$$G(x, y) = \sum_{n\geq 1} \lambda_n e_n(x)e_n(y), \quad x, y \in \Omega.$$

όπου $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ η ακολουθία ιδιοτιμών, με $\lambda_n \in \mathbb{R}^+$ για κάθε $n \geq 1$, και $\{e_n\}_{n\geq 1}$ μια ορθοκανονική βάση του $L^2(\Omega) \setminus \{0\}$. Επίσης ισχύει:

$$(F_G\, e_n)(y) = (G(\cdot, y), e_n)_{L^2(\Omega)} = \lambda_n e_n(y), \quad y \in \Omega,$$

όπου F_G ο ολοκληρωτικός τελεστής που είδαμε στην Ενότητα 4.2.

Ανάλογα, αν $\{e_n\}_{n\geq 1} \subset H^k(\Omega) \setminus \{0\}$ και $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$, με $\mu_n \in \mathbb{R}^+$ για κάθε $n \geq 1$, τα ιδιοποσά του τελεστή L, τότε το ΠΣΤ ΙΙ έχει την ακόλουθη φασματική αναπαράσταση :

$$\begin{cases} Le_n = \mu_n e_n, & \text{στο} \quad \Omega, \\ \quad Be_n = 0, & \text{στο} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Μάλιστα, οι ιδιοτιμές των G και L συνδέονται αντιστρόφως.

Πρόταση 4.1. *Αν $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$, με $\lambda_n \in \mathbb{R}^+$ για κάθε $n \geq 1$, οι ιδιοτιμές και $\{e_n\}_{n\geq 1}$ οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του πυρήνα G, τότε $\left\{\lambda_n^{-1}\right\}_{n\geq 1}$ και $\{e_n\}_{n\geq 1}$ είναι τα αντίστοιχα ιδιοποσά του τελεστή L για το ΠΣΤ ΙΙ. Επιπλέον, η ακολουθία $\left\{\sqrt{\lambda_n} e_n\right\}_{n\geq 1}$ είναι πλήρης ορθοκανονική βάση (ΠΟΚΒ) του $H_P(\Omega)$ (για τον οποίο είδαμε ότι ισχύει $H_P^0(\Omega) \simeq H_0^k(\Omega)$), αρκεί το ορθοκανονικό σύνολο $\{e_n\}_{n\geq 1}$ να είναι βάση του $L^2(\Omega)$. (Βλ. Fasshauer & Ye, 2013, Πρόταση 4.2).*

Απόδειξη. Αν $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, τότε ισχύει:

$$\begin{aligned}
\langle Le_n,\varphi\rangle_{L^2(\Omega)} &= \left(e_n, L^*\varphi\right)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega e_n(y)(L^*\varphi)(y)\,dy \\
&= \int_\Omega \lambda_n^{-1}\,(G(\cdot,y),e_n)_{L^2(\Omega)}\,(L^*\varphi)(y)\,dy, \quad \left[(G(\cdot,y),e_n)_{L^2(\Omega)} = \lambda_n e_n(y)\right], \\
&= \int_\Omega\int_\Omega \lambda_n^{-1} G(x,y)\,e_n(x)\,(L^*\varphi)(y)\,dx\,dy, \quad [\Theta.\text{Fubini}], \\
&= \int_\Omega \lambda_n^{-1} e_n(x)\left(G(x,\cdot),L^*\varphi\right)_{L^2(\Omega)}\,dx, \quad (\star) \\
&= \int_\Omega \lambda_n^{-1} e_n(x)\,\varphi(x)\,dx \\
&= \langle \lambda_n^{-1} e_n,\varphi\rangle_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad Le_n = \lambda_n^{-1} e_n, \ \forall\, n \geq 1.$$

$(\star) : \left(G(x,\cdot),L^*\varphi\right)_{L^2(\Omega)} = \langle G(\cdot,x),L^*\varphi\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle LG(\cdot,x),\varphi\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \delta_x,\varphi\rangle_{L^2(\Omega)} = \varphi(x).$

Είδαμε ότι ο ολοκληρωτικός τελεστής F_G είναι συνεχής δυϊκή απεικόνιση από τον $L^2(\Omega)$ στον $H_P(\Omega)$. Αφού ικανοποιείται η ιδιότητα rk,

$$\lambda_n e_n(y) = (G(\cdot,y),e_n)_{L^2(\Omega)} = \left(F_{G,\Omega} e_n\right)(y), \quad y \in \Omega,$$

έπεται ότι οι ιδιοσυναρτήσεις e_n είναι στοιχεία του $H_P(\Omega)$, επομένως ικανοποιούν τη συνοριακή συνθήκη $Be_n = 0$, για κάθε $n \geq 1$. □

Πρόταση 4.2. *Αν $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$, με $\mu_n \in \mathbb{R}^+$ για κάθε $n \geq 1$, οι ιδιοτιμές και $\{e_n\}_{n\geq 1}$ οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή L για το ΠΣΤ ΙΙ, τότε $\left\{\mu_n^{-1}\right\}_{n\geq 1}$ και $\{e_n\}_{n\geq 1}$ είναι τα αντίστοιχα ιδιοποσά του reproducing πυρήνα G. Επιπλέον, αν το ορθοκανονικό σύνολο $\left\{\sqrt{\lambda_n} e_n\right\}_{n\geq 1}$ είναι ορθοκανονική βάση του $L^2(\Omega)$, τότε*

$$G(x,y) = \sum_{n\geq 1} \mu_n^{-1} e_n(x) e_n(y), \quad x,y \in \Omega.$$

(Βλ. Fasshauer & Ye, 2013, Πρόταση 4.3).

Απόδειξη. Αφού ο G είναι reproducing, θα έχει την ακόλουθη ιδιότητα:

$$(G(\cdot,y),e_n)_{H_P(\Omega)} = e_n(y), \quad y \in \Omega,\ n \in \mathbb{N}.$$

Επίσης:

$$(G(\cdot,y),e_n)_{H_P(\Omega)} = \sum_{n\geq 1}\left(P_j G(\cdot,y),P_j e_n\right)_{L^2(\Omega)} = (G(\cdot,y),\mu_n e_n)_{L^2(\Omega)} = \mu_n\,(G(\cdot,y),e_n)_{L^2(\Omega)}\,.$$

Συνδυάζοντας τις παραστάσεις, προκύπτει το ζητούμενο:

$$\mu_n\,(G(\cdot,y),e_n)_{L^2(\Omega)} = e_n(y) \Leftrightarrow (G(\cdot,y),e_n)_{L^2(\Omega)} = \mu_n^{-1} e_n(y),\ y \in \Omega,\ n \in \mathbb{N}.$$

□

Θεώρημα 4.4 (Ο πυρήνας K παράγει το χώρο $H_{PB}(\Omega)$)**.** *Ο πυρήνας R, με τύπο*

$$R(x,y) := \sum_{j=1}^{n_a} \lambda_j e_j(x) e_j(y), \quad x, y \in \Omega,$$

παράγει το χώρο $H_B(\Omega)$. Αν $n_a = 0$, τότε $R \equiv 0$. Επιπλέον, ο πυρήνας K, ο οποίος ορίζεται ως το άθροισμα των πυρήνων G και R,

$$K(x,y) := G(x,y) + R(x,y), \quad x, y \in \Omega,$$

παράγει το χώρο $H_{PB}(\Omega)$. (Βλ. Fasshauer & Ye, 2013, Θεώρηματα 4.4-4.5).

Απόδειξη. Θα επαληθεύσουμε τις συνθήκες του Ορισμού 19. Ως προς την (i), αν σταθεροποιήσουμε κάποιο $y \in \Omega$, τότε:

$$\sum_{j=1}^{n_a} \langle \lambda_j e_j(x) \rangle e_j(y) \in H_B(\Omega).$$

Ως προς τη (ii), αν θεωρήσουμε κάποια $u \in H_B(\Omega)$, με $u = \sum_{j=1}^{n_a} \hat{u}_j e_j$, τότε:

$$(R(\cdot, y), u)_{H_B(\Omega)} = \sum_{j=1}^{n_a} \frac{\lambda_j e_j(x) \hat{u}_j}{\lambda_j} = \sum_{j=1}^{n_a} e_j(x) \hat{u}_j = u(y), \quad y \in \Omega,$$

δηλαδή ο R έχει την ιδιοτητα rk. □

Παρατήρηση 31. *Ο πυρήνας K είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, ως άθροισμα reproducing πυρήνων. Αυτό δε σημαίνει ότι θα είναι θετικά ορισμένος και στο σύνορο $\partial\Omega$, εκτός αν τα ιδιοποσά ικανοποιούν* ***συνολικά*** *τις συνοριακές συνθήκες, δηλαδή αν $BG(\cdot, y) = 0$ και $BR(\cdot, y) = 0$ στο σύνορο.*

Για παράδειγμα, αν $G(x,y) := \frac{1}{2}|x - y|$ πυρήνας Green (βλ. Παράδειγμα 15) για τον τελεστή L, τότε η θεμελιώδης λύση του L (θέτουμε $y = 0$), δηλαδή η συνάρτηση $\phi(x) := G(x, 0)$, είναι δεσμευμένα θετικά ορισμένη συνάρτηση πεπερασμένης τάξης ένα, επομένως ***δεν*** *είναι reproducing για τον L.*

Κεφάλαιο 5

Μέθοδοι επίλυσης του ομογενούς προβλήματος Dirichlet για την ελλειπτική εξίσωση

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, γενικεύσαμε τους χώρους των ασθενών παραγώγων σε ισομετρικά ισόμορφους χώρους Hilbert, παραγόμενους από πυρήνες Green. Συγκεκριμένα, δείξαμε ότι η λύση του προβλήματος Dirichlet για την ελλειπτική εξίσωση μπορεί να κατασκευαστεί με βέλτιστο τρόπο μέσω ενός χώρου Hilbert παραγόμενου από κατάλληλο πυρήνα Green για τον ελλειπτικό τελεστή Laplace. Αν η διάσταση του χώρου είναι μικρότερη της τάξης του ελλειπτικού τελεστή, τότε ο χώρος αυτός είναι ισόμορφος με χώρο Sobolev (βλ. Θεωρήματα 4.1 και 4.3).

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα μελετήσουμε εκτενώς το πρόβλημα Dirichlet για την ελλειπτική εξίσωση και θα επιχειρήσουμε να το επιλύσουμε με διαφορετικούς ισοδύναμους τρόπους: κλασικά, ασθενώς με ομαλά ελλειπτική διγραμμική μορφή σε ρόλο πυρήνα, και με αντιστροφή του ελλειπτικού τελεστή. Θα κλείσουμε την ανάλυσή μας επιλύοντας την ολοκληρωτική εξίσωση για το αυτοσυζυγές πρόβλημα Sturm-Liouville, με τη μέθοδο των ιδιοτιμών του Fredholm.

5.1 Το ομογενές πρόβλημα Dirichlet–Poisson για τον τελεστή Laplace

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ανοικτό και φραγμένο χωρίο με ομαλό σύνορο, όπως στην Ενότητα 4.1. Η ομογενής εξίσωση Laplace είναι γραμμική, δεύτερης τάξης ΜΔΕ, της μορφής

$$-\triangle u(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega,$$

όπου $u \in C^2(\Omega) \cup C(\overline{\Omega})$ ομαλή συνάρτηση. Η εξίσωση Poisson

$$-\triangle u(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega,$$

είναι η μη ομογενής εξίσωση Laplace για δεδομένη ομαλή συνάρτηση $f \in C(\overline{\Omega})$. Το πρόβλημα του Dirichlet για την εξίσωση Poisson προκύπτει αν επιβάλλουμε τη συνοριακή συνθήκη

$$u(x) = g(x) \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

για ομαλή συνάρτηση $g \in C(\partial\Omega)$. Αν $g \equiv 0$ στο $\partial\Omega$, το πρόβλημα είναι ομογενές.

5.1.1 Η κλασική λύση

Η κλασική λύση του ομογενούς προβλήματος Dirichlet–Laplace είναι μια ομαλή συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 5.1. *Αν $u \in C^2(\overline{\Omega})$ με $\Delta u = 0$ στο Ω και $u = 0$ στο $\partial\Omega$, δηλαδή αν μηδενίζεται το ίχνος της u, τότε $u = 0$. (Βλ. και Λήμμα 4.2).*

Απόδειξη. Έστω $v \in C^2(\overline{\Omega})$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα της Απόκλισης του Gauss στην απόκλιση του γινομένου $u\,\nabla v$, για το οποίο ισχύει η πρώτη ταυτότητα του Green (βλ. Παράρτημα Δ', σελ.80), προκύπτει:

$$\int_\Omega \operatorname{div}(u\,\nabla v) \overset{\text{Green I}}{=} \int_\Omega (u \bigtriangleup v + \nabla u \cdot \nabla v)\,dx \overset{\Theta.\text{Gauss}}{=} \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu}\,dx.$$

Θέτοντας $v = u$, η υπόθεση ότι $-\bigtriangleup u = 0$ στο Ω και $u = 0$ στο $\partial\Omega$, έπεται:

$$\int_\Omega (u \bigtriangleup u + \nabla u \cdot \nabla u)\,dx = \oint_{\partial\Omega} u\frac{\partial u}{\partial \nu}\,dx$$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u\,dx = 0, \quad \left[\nabla u \cdot \nabla u = \|\nabla u\|^2\right]$$

$$\int_\Omega \|\nabla u\|^2\,dx = 0 \Rightarrow \|\nabla u\|^2 = 0 \Rightarrow \nabla u = 0 \Rightarrow u = c \text{ στο } \Omega.$$

Συμβολίζουμε

$$\|\nabla u\| = \sum_{i=1}^N \left(\|u_{x_i}\|_2^p\right)^{\frac{1}{p}},\; p = 2,$$

όπου $\|\cdot\|_2$ η Ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^N$. Αφού $u \in C(\overline{\Omega})$, έπεται ότι η u είναι σταθερή στο $\overline{\Omega}$. Επειδή όμως υποθέσαμε ότι $u = 0$ στο $\partial\Omega$, τότε $u = 0$ στο $\overline{\Omega}$. $\square$

Αν οι συναρτήσεις u_1, u_2 αποτελούν λύσεις, το ίδιο θα ισχύει και για τη $u = u_1 - u_2$. Επομένως, η συνάρτηση u που ικανοποιεί το Λήμμα 5.1 είναι μοναδική.

Αφού η νόρμα έχει τη φυσική ερμηνεία της ενέργειας της εξίσωσης, το ολοκλήρωμα της νόρμας στο Ω αποτελεί εκτίμηση ενέργειας. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, αν $f \in L^2(\Omega)$ γενική συνάρτηση, τότε η ενέργεια της εξίσωσης περιγράφεται επαρκώς από την L^2-νόρμα των κλίσεων.

Εκτός από τις συνοριακές συνθήκες Dirichlet, θα μπορούσαμε να επιβάλλουμε συνοριακή συνθήκη Neumann στην παράγωγο κατεύθυνσης:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = g(x) \quad \forall\, x \in \partial\Omega.$$

Η συμβιβαστότητα της συνθήκης Neumann για την εξίσωση Laplace προκύπτει (δεν είναι ο μοναδικός τρόπος) με ολοκλήρωση της εξίσωσης Laplace και εφαρμογή του Θεωρήματος της Απόκλισης του Gauss:

$$\int_\Omega \Delta u\,dx = \int_\Omega \nabla \cdot \nabla u\,dx = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \nu\,dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,dx \quad \left[\operatorname{div}\nabla u \equiv \nabla u \cdot \nu\right].$$

5.1.2 Η κλασική λύση είναι αρμονική συνάρτηση

Επειδή η u είναι **αρμονική** συνάρτηση, χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα της μέσης τιμής (βλ. Ενότητα 2.3.2).

Θεώρημα 5.1 (Ιδιότητα μέσης τιμής για αρμονικές συναρτήσεις)**.** *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ανοικτό σύνολο και $B(x,r) \Subset \Omega$ μια ανοικτή r-περιοχή του. Αν $u \in C^2(\Omega)$ και ικανοποιεί $\Delta u = 0$, δηλαδή είναι αρμονική, τότε οι μέσες τιμές, εντός και επί της περιοχής, χαρακτηρίζονται από την ακόλουθη σχέση:*

$$\fint_{B(x,r)} \Delta x\,dx = \frac{N}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\fint_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS\right]. \tag{1}$$

(Βλ. Hunter, 2014, Θεώρημα 2.1).

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,r)} \Delta u\, dx &= \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS, \quad \text{(Θ.Gauss)}\\
&= r^{N-1} \int_{\partial B(0,1)} u_r(x+ry)\, dS(y), \quad \text{(ακτινική ολοκλήρωση)}\\
&= r^{N-1} \frac{\partial}{\partial r}\left[\int_{\partial B(0,1)} u(x+ry)\, dS(y)\right].
\end{aligned}$$

Η αποδεικτέα σχέση των μέσων τιμών προκύπτει διαιρώντας κατά μέλη με $a_N r^N$, όπου $a_N := V(B(0,1))$.[1] □

Παρατήρηση 32. *Επειδή η u είναι αρμονική, η μέση τιμή της πάνω στη σφαίρα με κέντρο x είναι* ***ανεξάρτητη της ακτίνας*** *r, και το σημειακό της όριο, καθώς $r \to 0^+$, ισούται με την τιμή της στο κέντρο:*

$$⨍_{\partial B(x,r)} u\, dS = u(x).$$

Θεώρημα 5.2. *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ανοικτό σύνολο και $u \in C(\Omega)$ με την ιδιότητα της μέσης τιμής* (1). *Τότε η ομαλή συνάρτηση $u \in C^\infty(\Omega)$ ικανοποιεί $\Delta u = 0$ στο Ω. (Βλ. Hunter, 2014, Θεώρημα 2.2).*

Απόδειξη. Η απόδειξη βασίζεται: (i) στη συνάρτηση ομαλοποίησης $u^\varepsilon \equiv \omega_\varepsilon \star u$ (βλ. σελ.7), έτσι ώστε να υπάρχει το ολοκλήρωμα στις τοπικά συμπαγείς περιοχές $B(x,\varepsilon) \Subset \Omega$, (ii) στην αλλαγή μεταβλητής $y = rz$ για να αναπαραστήσουμε τα σημεία της μοναδιαίας σφαίρας, και (iii) στη μέση τιμή της u στη σφαίρα με κέντρο x.

$$\begin{aligned}
(\omega_\varepsilon \star u)(x) &= \int_{B(0,\varepsilon)} \omega_\varepsilon(y)\, u(x-y)\, dy\\
&= \int_0^\varepsilon \left[\int_{\partial B(0,1)} \omega_\varepsilon(rz)\, u(x-rz)\, dS(z)\right] r^{N-1}\, dr, \quad [y = rz]\\
&= N a_N \int_0^\varepsilon \left[⨍_{\partial B(x,r)} u\, dS\right] \omega_\varepsilon(r)\, r^{N-1}\, dr, \quad [\|x\|_2 = r]\\
&= N a_N \int_0^\varepsilon u(x)\, \omega_\varepsilon(r)\, r^{N-1}\, dr = u(x) \int_0^\varepsilon N a_N\, \omega_\varepsilon(r)\, r^{N-1}\, dr\\
&= u(x) \int \omega_\varepsilon(y)\, dy\\
&= u(x).
\end{aligned}$$

Αφού η $\omega_\varepsilon \star u$ είναι ομαλή, θα είναι ομαλή και η u. Επειδή η u έχει την ιδιότητα της μέσης τιμής, έπεται ότι:

$$\int_{B(x,r)} \Delta u\, dx = 0 \quad \forall\, B(x,r) \Subset \Omega.$$

Αφού η Δu συνεχής, έπεται ότι και $\Delta u = 0$ στο Ω. □

[1] Μετασχηματίσαμε τη σφαίρα παρόμοια με το μετασχηματισμό της μοναδιαίας μπάλλας στη μπάλλα ακτίνας r, $T : B(0,1) \to B(x,r)$, σύμφωνα με τον οποίο, αν $x \in B(0,1)$, τότε $T(x) = rx$ και ισχύει $J_T(x) = |\det(DT(x))| = r^N$.

5.1.3 Ο ρόλος της συνάρτησης Green

Ας θεωρήσουμε την εξίσωση Poisson, αρχικά χωρίς περιορισμό του χώρου, για **γνωστή τοπικά ομαλή** συνάρτηση $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$:

$$-\triangle\, u = f \quad \text{στο} \quad \mathbb{R}^N.$$

Η λύση είναι μια **άγνωστη ομαλή** συνάρτηση $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$, η οποία χαρακτηρίζεται ως η συνέλιξη

$$u = G \star f \Leftrightarrow u(x) = \int G(x-y) \triangle f(y)\, dy \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N, \tag{2}$$

όπου $G \in C(\mathbb{R}^N \setminus \{0_{\mathbb{R}^N}\};\mathbb{R})$ η ομαλή **συνάρτηση Green**. Η συνάρτηση $G(x)$ αποτελεί τη **θεμελιώδη λύση** $\phi(x)$ του ελλειπτικού τελεστή, με τύπο όπως στην (2)). Ικανοποιεί:

$$G(x) = \begin{cases} O(\|x\|_2^{N-2}), & \text{όταν} \quad N = 2, \\ O(\log(\|x\|_2)), & \text{όταν} \quad N \geq 3. \end{cases}$$

Αν $\boxed{x \neq 0_{\mathbb{R}^N}}$, οι πρώτες και δεύτερες μερικές παράγωγοι της G έχουν την ακόλουθη αναλυτική μορφή:

$$\partial_i G(x) = -\frac{1}{N\alpha_N}\frac{1}{\|x\|_2^{N-1}}\frac{x_i}{\|x\|_2}, \quad \partial_{ii}G(x) = \frac{1}{\alpha_N}\frac{x_i^2}{\|x\|_2^{N+2}} - \frac{1}{N\alpha_N}\frac{1}{\|x\|_2^N}.$$

Παρατηρούμε ότι η G είναι ομογενής συνάρτηση βαθμού $-N+2$, με πρώτη παράγωγο ομογενή συνάρτηση βαθμού $-N+1$, και με δεύτερη παράγωγο ομογενή συνάρτηση βαθμού N. Έπεται ότι $\Delta G = 0$, δηλαδή η G είναι **αρμονική** συνάρτηση για κάθε τρυπημένη ανοικτή περιοχή της αρχής των αξόνων, αφού το μηδενικό διάνυσμα είναι **σημείο ανωμαλίας**.

Αν $\boxed{x \neq 0_{\mathbb{R}^N}}$ και θέσουμε $\nu = \frac{x}{\|x\|_2}$ το εξωτερικό κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα, προκύπτει:

$$DG \cdot \nu = -\frac{1}{N\alpha_N}\frac{1}{\|x\|_2^{N-1}}.$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα της Απόκλισης του Gauss για την ανοικτή μπάλλα $B(0,r) \subset \mathbb{R}^N$, παρατηρούμε ότι ο ρυθμός εκροής από την επιφάνεια (το σύνορο) είναι ανεξάρτητος της ακτίνας r, αλλά το επιφανειακό ολοκλήρωμα **δε μηδενίζεται** (βλ. σελ.80):

$$-\int_{\partial B(0,r)} DG \cdot \nu\, dS = 1 \neq 0. \tag{3}$$

Αυτό συμβαίνει, επειδή η G είναι αρμονική μόνο στους δακτυλίους $B(0,R) \setminus B(0,r)$. Όπως παρατηρήσαμε, η G δεν είναι φραγμένη σε καμία ανοικτή περιοχή του μηδενός, αφού $G(x) \to +\infty$ όταν $x \to 0_{\mathbb{R}^N}$. Για τον ίδιο λόγο, στο Κεφάλαιο 4.1, διαπιστώσαμε ότι ο πυρήνας G δεν είναι reproducing, εκτός αν επιβάλλουμε το συνοριακό τελεστή B.

Τόσο όμως η G, όσο και η DG, **είναι τοπικά ολοκληρώσιμες**. Μάλιστα, λόγω της κανονικοποίησης της εκροής, μπορούμε να φράξουμε τις συνιστώσες της βαθμίδας ώστε

$$|\partial_i G(x)| \leq \frac{C_N}{\|x\|_2^{N-1}},$$

αφού η συνάρτηση $\|x\|_2^{-a}$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}^N$, αρκεί $a < N$ (βλ. σελ.6). Αντίθετα, οι δεύτερες μερικές παράγωγοι της G **δεν είναι** τοπικά ολοκληρώσιμές, αφού είναι τάξης $\|x\|_2^{-N}$, καθώς $x \to 0_{\mathbb{R}^N}$.

Ας επιστρέψουμε στο χαρακτηρισμό της λύσης της εξίσωσης Poisson στο χώρο. Αφού $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ και $G \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, τότε $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, και ισχύει:

$$u = G \star f \Rightarrow \boxed{\Delta u = G \star \Delta f = -f}. \tag{4}$$

Αν $\boxed{x \notin s(f)}$, επιλέγουμε ένα ομαλό και ανοικτό σύνολο Ω, τέτοιο ώστε $s(f) \subset \Omega$ και $x \notin \Omega$. Τότε, η συνάρτηση $G(x,y)$ είναι μια ομαλή και αρμονική συνάρτηση για κάθε σταθερό σημείο $y \in \overline{\Omega}$, ενώ οι συναρτήσεις f, Df μηδενίζονται στο $\partial\Omega$. Έπεται ότι:

$$\Delta u(x) = \int_\Omega G(x-y)\,\Delta f(y)\,dy \overset{\text{Green II}}{=} \int_\Omega \Delta G(x-y) f(y)\,dy = 0 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} -\Delta u(x) = f(x).$$

Διαφορετικά, αν $\boxed{x \in s(f)}$, περιορίζουμε το χώρο στο σφαιρικό δακτύλιο $\Omega_r(x) = \Omega \setminus B^o(x,r)$, **μεταβάλλοντας** όμως το σύνορο! Αφού η Δf είναι φραγμένη με συμπαγή φορέα και η G τοπικά ολοκληρώσιμη, το ακόλουθο όριο υπάρχει από το ΘΚΣ (βλ. Παράρτημα Β′, σελ.78):

$$G \star (\Delta f)(x) = \lim_{r \to 0^+} \int_{\Omega_r(x)} G(x-y)\,\Delta\, f(y)\,dy = -f(x).$$

5.1.4 Η ασθενής λύση

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ανοικτό και φραγμένο χωρίο με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$, έστω κλάσης C^1, και $f \in C(\overline{\Omega})$ επαρκώς ομαλή, γνωστή συνάρτηση. Ας θεωρήσουμε το ομογενές πρόβλημα Dirichlet–Poisson στο Ω, για τον ελλειπτικό τελεστή Laplace $\boxed{L = -\Delta}$ με την ανάλυση $\boxed{L = P^{*T} P = -\nabla^T \nabla}$ που είδαμε στο Κεφάλαιο 4.2 :

$$\begin{cases} Lu = f & \text{στο } \Omega, \\ u = 0 & \text{στο } \partial\Omega. \end{cases} \tag{ΟΠΣΤ Dirichlet-Poisson}$$

Στο Λήμμα 5.1, είδαμε ότι η κλασική λύση είναι μια ομαλή συνάρτηση $u \in C^2(\overline{\Omega})$, με δύο συνεχείς μερικές παραγώγους, η οποία είναι αρμονική εντός και μηδενική στο σύνορο (βλ. επίσης Λήμμα 4.2). Ας θεωρήσουμε τη μεταβολική διατύπωση του προβλήματος:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi\,dx = \sum_{i=1}^N \left(u_{x_i}, \varphi_{x_i}\right)_\Omega = \int_\Omega f\varphi\,dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \tag{ΜΕ Α}$$

Μια επαρκώς ομαλή συνάρτηση u, η οποία ικανοποιεί τη ΜΕ Α, αποτελεί ασθενή λύση του ΟΠΣΤ Dirichlet-Poisson. Η μεταβολική διατύπωση επιτρέπει τη μελέτη των ιδιοτήτων της ασθενούς λύσης u για ελεγχόμενες μεταβολές της συνάρτησης δοκιμής φ.

Η ασθενής λύση έχει βελτιωμένες ιδιότητες ομαλότητας, οι οποίες εξαρτώνται από την επιλογή της συνάρτησης f. Επομένως, η επιλογή του συναρτησιακού χώρου του προβλήματος είναι ουσιώδης.

Αναπαράσταση του δεξιού μέλους της μεταβολικής εξίσωσης

Αν τόσο η f όσο και η βαθμίδα Du ανήκουν στον $L^2(\Omega)$, τότε το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της ΜΕ Α είναι πεπερασμένο από την ανισότητα Cauchy-Schwartz. Επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $u \in H^1(\Omega)$. Αν, επιπλέον, θέλουμε η συνοριακή συνθήκη να ικανοποιείται με την ασθενή έννοια, θα πρέπει $u \in H_0^1(\Omega)$. Η πυκνότητα των συναρτήσεων δοκιμής έπεται $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, με συνέχεια από το αριστερό στο δεξί μέλος της ΜΕ Α. Συνεπώς, η ΜΕ Α είναι καλώς ορισμένη $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$, αν $f \in L^2(\Omega)$.

Ακόμη καλύτερη επιλογή της f θα ήταν ένα συναρτησιακό από το δυϊκό χώρο του $H_0^1(\Omega)$, ο οποίος ορίζεται ακόλουθα:

$$\left(H_0^1(\Omega)\right)^* \equiv H^{-1}(\Omega) := \left\{ F_f : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R} \mid F \text{ γραμμικό και φραγμένο} \right\},$$

Αντίθετα από τον $L^2(\Omega)$, ο $H_0^1(\Omega)$ δεν είναι ισομετρικά ισόμορφος με το δυϊκό του. Αφού όμως υποθέσαμε ότι το Ω είναι **φραγμένο**, τότε ισχύουν οι ακόλουθες **συνεχείς** και **πυκνές** εμφυτεύσεις, με τον αυτοπαθή χώρο $L^2(\Omega)$ σε ρόλο pivot (βλ. Παρατήρηση 20):

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \simeq \left(L^2(\Omega)\right)^* \hookrightarrow H^{-1}(\Omega). \tag{5}$$

Από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz, κάθε συνάρτηση $f \in L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ ορίζει ένα γραμμικό συναρτησιακό $F_f \in L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, το οποίο έχει μοναδική αναπαράσταση ως ολοκλήρωμα στον $L^2(\Omega)$:

$$\varphi \mapsto \int_\Omega f\varphi, \quad F_f(\varphi) := \langle F_f, \varphi \rangle \equiv (f,\varphi)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega f\varphi\, dx \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega), \tag{6}$$

και παραμένει φραγμένο στον $H_0^1(\Omega)$:

$$\langle F_f, \varphi \rangle \overset{\text{C-S}}{\leq} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \tag{7}$$

$$\|F_f\|_{H^{-1}(\Omega)} := \sup\left\{ \frac{\langle F_f, \varphi \rangle}{\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}} : 0 \neq \varphi \in H_0^1(\Omega) \,\text{και}\, \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1 \right\} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Η (6) επιτρέπει την ταύτιση $\boxed{F_f \equiv f}$ (βλ. Κεφάλαιο 4.2). Το συναρτησιακό $f \in H^{-1}(\Omega)$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός από τον $H^{-1}(\Omega)$ στον $H_0^1(\Omega)$.

Από το Θεώρημα Riesz-Fréchet για χώρους Hilbert, η ασθενής λύση είναι μια συνάρτηση $u \in H_0^1(\Omega)$, η οποία ικανοποιεί μοναδικά την ακόλουθη σχέση, για δεδομένο συναρτησιακό $f \in H^{-1}(\Omega)$:

$$F_f \equiv f, \quad F_f \mapsto u, \quad (u,\varphi)_{H^1(\Omega)} = \langle F_f, \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \tag{8}$$

Αναπαράσταση του αριστερού μέλους της μεταβολικής εξίσωσης

Αφού ο $H_0^1(\Omega)$ είναι χώρος Hilbert, μπορούμε να κατασκευάσουμε φραγμένο τελεστή L σε αυτόν, βασισμένο σε κατάλληλη συνεχή διγραμμική μορφή (βλ. πυρήνα), $\alpha_L(u,u) := \langle Lu, u \rangle$, τέτοια ώστε να ικανοποιεί την ιδιότητα της ελλειπτικής ομαλότητας.

Η απεικόνιση $\alpha_L : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ είναι διγραμμική ελλειπτική μορφή στον $H_0^1(\Omega)$:

$$u \mapsto \alpha_L(u,\varphi) : \alpha_L(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, \varphi) = \lambda_1 \alpha_L(u_1,\varphi) + \lambda_2 \alpha_L(u_2,\varphi) \quad \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R},$$
$$\varphi \mapsto \alpha_L(u,\varphi) : \alpha_L(u, \mu_1\varphi_1 + \mu_2\varphi_2) = \mu_1 \alpha_L(u,\varphi_1) + \mu_2 \alpha_L(u,\varphi_2) \quad \forall\, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}.$$

Η α_L είναι **συνεχής**, ως φραγμένη, αν

$$\exists\, C > 0 : \ |\alpha_L(u,\varphi)| \le C \,\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall\, u, \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

και **ελλειπτικά ομαλή** (coercive) αν

$$\alpha_L(\varphi,\varphi) \ge \|\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Η μεταβολική διατύπωση του ΟΠΣΤ Dirichlet-Poisson προκύπτει με ΟΚΠ:

$$\begin{aligned} \alpha_L\,(u,\varphi) &:= (u,\varphi)_{H^1(\Omega)} = \langle F_f, \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \qquad (9)\\ \text{όπου} \quad (u,\varphi)_{H^1(\Omega)} &= (u,\varphi)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla \varphi)_{L^2(\Omega)} \\ &= (u,\varphi)_{L^2(\Omega)} + \textstyle\sum_{i=1}^N \left(u_{x_i}, \varphi_{x_i}\right)_{L^2(\Omega)} . \end{aligned}$$

Ισοδύναμες εκτιμήσεις ενέργειας

Παρατηρούμε ότι η ΜΕ Α συνδέεται με δύο **ισοδύναμες** εκτιμήσεις ενέργειας για το χώρο $H_0^1(\Omega)$, οι οποίες απορρέουν από διαφορετικά εσωτερικά γινόμενα (βλ. σελ.38).

Το $(u,v)_0$ αναλογεί στον τελεστή Laplace $\boxed{L = -\Delta}$, ενώ το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του $H^1(\Omega)$ στο γενικότερο ελλειπτικό τελεστή $\boxed{L = -\,\Delta + I}$. Συγκεκριμένα, αν $u, v \in H_0^1(\Omega)$, τότε:

$$(u,v)_0 := \textstyle\int_\Omega Du \cdot Dv \, dx, \quad \|u\|_0 := \left(\int_\Omega \|Du\|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$(u,v)_1 := \textstyle\int_\Omega (uv + Du \cdot Dv)\, dx, \quad \|u\|_1 := \left(\int_\Omega \left(\|u\|^2 + \|Du\|^2\right) dx\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$\|u\|_0 \le \|u\|_1 \le \sqrt{(C+1)}\|u\|_0 \Leftrightarrow \|u\|_0 \sim \|u\|_1 \quad [\text{ανισ. Poincaré}].$$

Ύπαρξη ασθενούς λύσης

Αν $f \in L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ γνωστή συνάρτηση, τότε η ύπαρξη και η μοναδικότητα μιας ασθενούς λύσης $u \in H_0^1(\Omega)$, τέτοια ώστε να ικανοποιεί την (9), καθώς και μια εκτίμησης της νόρμας της, έπονται από το Θεώρημα Lax-Milgram για κατάλληλο συναρτησιακό $F_f \in H^{-1}(\Omega)$ με $F_f \equiv f$ (σύνδεση (6)).

Θεώρημα 5.3 (Το Θεώρημα Lax-Milgram). *Έστω $\alpha_L(u,\varphi)$ συνεχής και ελλειπτικά ομαλή διγραμμική μορφή στο χώρο Hilbert $H \equiv H_0^1(\Omega)$. Τότε:*

$$\left(\forall\, F_f \in H^*\right)(\exists!\, u \in H) : \ \alpha_L(u,\varphi)_H = \langle F_f, \varphi \rangle_{(H^*, H)} \ \forall \varphi \in H. \qquad (10)$$

*Σύμφωνα με το Θεώρημα Riesz-Fréchet, η απεικόνιση $F_f \mapsto u$ είναι **ισομετρικός ισομορφισμός** από τον H^* στον H. Αν η α_L είναι επιπλέον **συμμετρική**, τότε η ασθενής λύση u ικανοποιεί την **αρχή του Dirichlet** για το συναρτησιακό $J(\varphi)$:*

$$u \in H_0^1(I) \ : \ J(u) = \arg \min_{\varphi \in H_0^1(I)} J(\varphi) \quad \text{με} \quad J(\varphi) := \frac{1}{2}\alpha_L(\varphi,\varphi) - \langle F_f, \varphi \rangle. \quad (11)$$

Επομένως, η ασθενής λύση u ελαχιστοποιεί στον $H_0^1(\Omega)$ ένα μοναδικό συναρτησιακό, το $J(\varphi)$. Ισοδύναμα, η $J(\varphi)$ λύνει την **εξίσωση του Euler**, $DJ(u) = 0$, δηλαδή την (10), η οποία αντιστοιχεί στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης (11).

Μια φυσική ερμηνεία της J προκύπτει από την Αρχή της Ελάχιστης Δράσης του Hamilton και αφορά στην ενέργεια της εξίσωσης, η οποία, όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, εκτιμάται από την ισοδύναμη νόρμα του $H_0^1(\Omega)$. Μια άλλη ερμηνεία της J είναι η παράγωγος Fréchet.

Ορισμός 21 (Παράγωγος Fréchet)**.** *Έστω J πραγματικό συναρτησιακό ορισμένο σε χώρο Banach, εδώ $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$. Η J είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $u \in H_0^1(\Omega)$, αν υπάρχει φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό $T : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, με την ιδιότητα*

$$\lim_{h\to 0} = \frac{J(u+h) - J(u) - Th}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} = 0.$$

Αν υπάρχει η T, είναι μοναδική. Η T ονομάζεται παράγωγος Gâteaux ή διαφορικό της $J(u)$ και συμβολίζεται $DJ(u) = T$. (Θεωρούμε όπου h την φ.)

Παρατήρηση 33. *Αν η παράγωγος Fréchet υπάρχει σε κάποιο σημείο του χώρου, τότε θα υπάρχει και με την ασθενέστερη έννοια της παραγώγου Gâteaux, η οποία ορίζεται μέσω της παραγώγου κατεύθυνσης $\delta J(u;h) = \delta J(u)h$, με $\delta J(u) \in (H_0^1(\Omega))^*$. Μάλιστα ισχύει $DJ(u) = \delta J(u)$, αλλά όχι και το αντίθετο.*

$$\forall\, h \in H_0^1(\Omega) : \ \exists\, \delta J(u;h) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{J(u+\varepsilon h) - J(u)}{\varepsilon} = \frac{d}{d\epsilon} J(u+\varepsilon h)_{|\varepsilon=0}.$$

Παρατήρηση 34. *Αν η J επιτυγχάνει τοπικό ελάχιστο για $u \in H_0^1(\Omega)$ και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό $\forall\, h \in H_0^1(\Omega)$, τότε η συνάρτηση $J_{u;h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με τύπο $J_{u;h}(t) = J(u+th)$, είναι παραγωγίσιμη στο $t = 0$. Έπεται ότι*

$$\frac{d}{dt} J_{u;h}(0) = \delta J(u;h) = 0 \quad \forall\, h \in H_0^1(\Omega).$$

Επομένως $DJ(u) = 0$.

Η ασθενής λύση ικανοποιεί την ακόλουθη **συνθήκη ομαλότητας**. Έστω $k \geq 1$. Αν το σύνορο είναι ομαλό κλάσης C^k και $f \in H^k(\Omega)$, τότε $u \in H^{k+2}(\Omega)$ με εκτίμηση νόρμας $\|u\|_{H^{k+2}(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{H^k(\Omega)}$ για κάποια σταθερά $C > 0$.[2]

Ανάκτηση της κλασικής λύσης από την ασθενή

Έστω $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ φραγμένο διάστημα. Ας θεωρήσουμε το ομογενές πρόβλημα Dirichlet-Poisson στο I, με $\boxed{Lu := -u'' + u}$, για $f \in L^2(I)$ γνωστή συνάρτηση.

Η κλασική λύση είναι μια συνάρτηση $u \in C^2(\bar{I})$. Η ασθενής λύση είναι μια επαρκώς ομαλή συνάρτηση $u \in H_0^1(I)$, η οποία, για κατάλληλο συναρτησιακό $F_f \in H^{-1}(I)$ (με τη γνωστή σύνδεση μέσω της ολοκληρωτικής αναπαράστασης), ικανοποιεί την ακόλουθη μεταβολική εξίσωση:

$$\int_I -u''\varphi + \int_I u\varphi \overset{\text{ΟΚΠ}}{=} \int_I (u'\varphi' + u\varphi) = \int_I f\varphi \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(I). \tag{12}$$

[2] Η συνθήκη αποδεικνύεται με επαγωγή για $k \geq 1$.

Κάθε κλασική λύση είναι και ασθενής. Αφενός, αν $I \in C^1$, $u \in H^1(I) \cap C(\bar{I}) \Rightarrow u \in H_0^1(I)$ (βλ. σελ.17). Αφετέρου η πυκνότητα των συναρτήσεων δοκιμής στον $H_0^1(I)$ έπεται ότι η μεταβολική εξίσωση (12) ικανοποιείται $\forall\, \varphi \in C_c^1(I)$.

Η κλασική λύση μπορεί να ανακτηθεί από την ασθενή. Αν $f \in L^2(I)$ και $u \in H_0^1(I)$, τότε η ασθενής λύση είναι μια συνάρτηση $u \in H^2(I) \Leftrightarrow u, u' \in H^1(I)$, η οποία ικανοποιεί τη μεταβολική εξίσωση (12):

$$\int_I u'\varphi' = \int_I (f-u)\varphi \quad \forall\, \varphi \in C_c^1(I) \sim H_0^1(I).$$

Αφού $u' \in H^1(I)$ και $(f-u) \in L^2(I)$, θα πρέπει η ασθενής λύση να είναι μια συνάρτηση $u \in H^2(I)$. Αν $f \in C(\bar{I})$ και $u \in H^2(I)$, τότε η ασθενής λύση θα είναι μια συνάρτηση $u \in C^2(\bar{I})$. Αφού $u \in H^2(I)$, έχουμε $(u')' \in C(\bar{I})$ και $u' \in C^1(\bar{I})$. Είδαμε ότι η κλασική λύση είναι και αυτή μια συνάρτηση $u \in C^2(\bar{I})$, η οποία ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη, άρα $u \in C^2(I)$. Ανακτάται με ΟΚΠ της (12):

$$\int_I (-u'' + u)\,\varphi' = \int_I f\varphi \quad \forall\, \varphi \in C_c^1(I)$$

Έπεται ότι $Lu = f$ I-σ.π. και, επειδή η ασθενής λύση είναι μια συνάρτηση $u \in C^2(\bar{I})$, τότε και παντού στο I. Άρα, η ασθενής λύση είναι και κλασική.

5.2 Το ομογενές πρόβλημα Dirichlet–Poisson για γενικότερες ελλειπτικές μορφές

Έστω $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ φραγμένο διάστημα. Ας θεωρήσουμε το ομογενές πρόβλημα Dirichlet-Poisson στο I, για $f \in L^2(I)$ γνωστή συνάρτηση, με την ακόλουθη ελλειπτική μορφή, όπου $\alpha_L(u,u) := \langle Lu, u\rangle$:

$$\boxed{Lu := -(au')' + bu' + cu}\,, \tag{13}$$

για τις συναρτήσεις $a, b \in C^1(\bar{I})$, $c \in C(\bar{I})$. Επιπλέον,

$$a(x) \geq k > 0,$$

δηλαδή **κάτω φραγμένη** και

$$c(x) - \frac{1}{2}b'(x) > 0,$$

δηλαδή **θετική**, $\forall\, x \in \bar{I}$.

Η ελλειπτική μορφή (13) έχει την ακόλουθη **συζυγή** μορφή:

$$\boxed{Lu := -(au')' - bu' + (c-b')u}\,, \tag{14}$$

Αν θέσουμε $b = 0$ στην (14), προκύπτει η ακόλουθη εκδοχή της ελλειπτικής μορφής (13), η οποία ικανοποιεί $c(x) > 0 \ \forall\, x \in \bar{I}$:

$$\boxed{Lu := -(au')' + cu}\,. \tag{15}$$

Αν η μορφή (15) ικανοποιεί επιπλέον $a' \equiv b$, προκύπτει η **αυτοσυζυγής** εκδοχή της, γνωστή ως **Sturm-Liouville**.

Μια **γενικότερη** ελλειπτική μορφή προκύπτει, αν θεωρήσουμε τη (13) (ή κάποια εκδοχή της) επαυξημένη κατά άγνωστη **φασματική παράμετρο** $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\boxed{L_\mu := L + \mu I}\,. \tag{16}$$

5.2.1 Η οικογένεια των συζυγών-αυτοσυζυγών ελλειπτικών τελεστών

Έστω $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ φραγμένο διάστημα. Ας θεωρήσουμε την ελλειπτική μορφή (13). Η κλασική λύση είναι μια συνάρτηση $u \in C^2(\bar{I})$. Η ασθενής λύση είναι μια συνάρτηση $u \in H_0^1(I)$, η οποία ικανοποιεί την ακόλουθη μεταβολική εξίσωση:

$$\begin{aligned}
\int_I -(au')'\varphi\,dx + \int_I bu'\varphi\,dx + \int_I cu\varphi\,dx &= \int_I f\varphi\,dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(I)\\
\int_I au'\varphi'\,dx + \int_I bu'\varphi\,dx + \int_I cu\varphi\,dx &= \int_I f\varphi\,dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(I) \quad [\text{με ΟΚΠ}]\\
\left(au', \varphi'\right)_{L^2(I)} + \left(bu', \varphi\right)_{L^2(I)} + (cu, \varphi)_{L^2(I)} &= (f, \varphi)_{L^2(I)} \quad \forall \varphi \in H_0^1(I) \qquad (17)\\
\alpha_L(u, \varphi) &= (f, \varphi)_{L^2(I)} \quad \forall \varphi \in H_0^1(I), \qquad (18)
\end{aligned}$$

όπου $\alpha_L : H_0^1(I) \times H_0^1(I) \to \mathbb{R}$ διγραμμική μορφή με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) **Συνεχής.** $\forall\, u, \upsilon \in H_0^1(I)$ ισχύει το φράγμα (19):

$$\begin{aligned}
|\alpha_L(u, \upsilon)| &\le \max_{x\in I} a(x)\|u'\|_{L^2(I)}\|\upsilon'\|_{L^2(I)} + \max_{x\in I} b(x)\|u'\|_{L^2(I)}\|\upsilon\|_{L^2(I)} +\\
&\quad \max_{x\in I} c(x)\|u\|_{L^2(I)}\|\upsilon\|_{L^2(I)} \quad \left[C := 2\max\left\{\max_{x\in I} a(x), \max_{x\in I} b(x), \max_{x\in I} c(x)\right\}\right]\\
|\alpha_L(u, \upsilon)| &\le \frac{C}{2}\left(\|u'\|_{L^2(I)}\|\upsilon'\|_{L^2(I)} + \|u'\|_{L^2(I)}\|\upsilon\|_{L^2(I)} + \|u\|_{L^2(I)}\|\upsilon\|_{L^2(I)}\right)\\
|\alpha_L(u, \upsilon)| &\overset{\text{C-S}}{\le} \frac{C}{2}\left(\|u'\|_{L^2(I)} + \|u'\|_{L^2(I)} + \|u\|_{L^2(I)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\|\upsilon'\|_{L^2(I)} + \|\upsilon\|_{L^2(I)} + \|\upsilon\|_{L^2(I)}\right)^{\frac{1}{2}}\\
|\alpha_L(u, \upsilon)| &\le \|u\|_{H^1(I)}\|\upsilon\|_{H^1(I)} \quad \forall\, u, \upsilon \in H_0^1(I). \qquad (19)
\end{aligned}$$

Έπεται ότι η α_L είναι συνεχής στον $H_0^1(I)$.

(ii) **Ελλειπτικά ομαλή.** Θέτοντας $u = \upsilon$, η $\alpha_L(\upsilon, \upsilon)$ είναι **κάτω φραγμένη** $\forall\, \upsilon \in H_0^1(I)$:

$$\begin{aligned}
\alpha_L(\upsilon, \upsilon) &= \left(a\upsilon', \upsilon'\right)_{L^2(I)} + \left(b\upsilon', \upsilon\right)_{L^2(I)} + (c\upsilon, \upsilon)_{L^2(I)}\\
&= \left(a\upsilon', \upsilon'\right)_{L^2(I)} + \frac{1}{2}\left(b, (\upsilon^2)'\right)_{L^2(I)} + (c\upsilon, \upsilon)_{L^2(I)}\\
&= \left(a\upsilon', \upsilon'\right)_{L^2(I)} + \left(\left(c - \frac{1}{2}b'\right)\upsilon, \upsilon\right)_{L^2(I)}, \quad [\text{με ΟΚΠ}]\\
\alpha_L(\upsilon, \upsilon) &\ge k\,\|\upsilon'\|^2_{L^2(I)}, \quad \left[c(x) - \frac{1}{2}b'(x) > 0\ \forall\, x \in I\right]\\
\alpha_L(\upsilon, \upsilon) &\ge k\,\|\upsilon'\|^2_{L^2(I)} \quad \forall\, \upsilon \in H_0^1(I) \qquad (20)\\
\alpha_L(\upsilon, \upsilon) &\ge \frac{k}{2}\,\|\upsilon\|^2_{H^1(I)} \quad \forall\, \upsilon \in H_0^1(I), \quad [\text{ανισ. Poincaré}] \qquad (21)
\end{aligned}$$

Θα φράξουμε και το δεξί μέλος της (18). Αφού $f \in C(\bar{I})$, τότε θα είναι ολοκληρώσιμη I-σ.π. στον $L^2(I)$. Όπως είδαμε, θεωρούμε γραμμικό συναρτησιακό $F_f \in H^{-1}(I)$, με ολοκληρωτική αναπαράσταση $F_f(\varphi) := (f, \varphi)_{L^2(I)}$, φραγμένο στον $H_0^1(I)$:

$$\left|F_f(\varphi)\right| = \left|(f,\varphi)_{L^2(I)}\right| \overset{\text{C-S}}{\leq} \|f\|_{L^2(I)}\,\|\varphi\|_{L^2(I)} \leq \|f\|_{L^2(I)}\,\|\varphi\|_{H_0^1(I)} \tag{22}$$

$$\therefore \quad \|F_f\|_{H^{-1}(I)} \leq \|f\|_{L^2(I)}, \tag{23}$$

για $\varphi \neq 0_{H_0^1(I)}$ στη μοναδιαία σφαίρα του $H_0^1(I)$. Από το Θεώρημα 5.3 (Lax-Milgram), η (18) έχει μοναδική ασθενή λύση στον $H_0^1(I)$.

Είδαμε ότι η ασθενής λύση προκύπτει και υπό ασθενέστερες υποθέσεις για τη συνάρτηση f. Για παράδειγμα, δείξαμε ότι αν $f \in L^2(I)$, τότε η ασθενής λύση είναι μια ομαλή συνάρτηση $u \in H_0^1(I)$. Θέτοντας $u = \varphi$ στη (18), προκύπτει ότι ικανοποιείται η ελλειπτική ομαλότητα:

$$\begin{aligned}
&\alpha_L(\varphi,\varphi) = \|\varphi\|_{H_0^1(I)} \overset{(23)}{\leq} \|f\|_{L^2(I)},\\
&k\,\|\varphi'\|^2_{L^2(I)} \overset{(20)}{\leq} \|\varphi\|_{H_0^1(I)} \sim \frac{k}{2}\,\|\varphi\|^2_{H^1(I)} \overset{(21)}{\leq} \|\varphi\|_{H_0^1(I)},\\
&k\,\|\varphi'\|^2_{L^2(I)} \overset{(20),(23)}{\leq} \|f\|_{L^2(I)} \sim \frac{k}{2}\,\|\varphi\|^2_{H^1(I)} \overset{(21)(23)}{\leq} \|f\|_{L^2(I)}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι η ασθενής λύση είναι μια **ομαλότερη** συνάρτηση $u \in H^2(I)$. Από την εξίσωση (17), προκύπτει:

$$\int_I au'\varphi'\,dx = -\int_I (f - bu' - cu)\,\varphi\,dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I).$$

Αφού $f - bu' - cu \in L^2(I)$, έπεται ότι η au' έχει ασθενή παράγωγο στον $L^2(I)$, άρα $au' \in L^2(I)$ και $au' \in H^1(I)$. Συνεπώς:

$$(au')' = f - bu' - cu.$$

Θέτοντας $u' := \frac{au'}{a}$ και λαμβάνοντας υπόψη την υπόθεση ότι $a \in C(\bar{I})$ ομαλή και θετική συνάρτηση, προκύπτει ότι $u' \in H^1(I) \Rightarrow u \in H^2(I)$. Επομένως,

$$u \in H^2(I) \cap H_0^1(I) = \{u \in H^2(I) \,|\, u = 0 \text{ στο } \partial I\},$$

αφού θα πρέπει να ικανοποιείται και η συνοριακή συνθήκη. Επιπλέον:

$$\begin{aligned}
&(au')' := au'' + a'u' = f - bu' - cu \Leftrightarrow au'' = f - bu' - cu - a'u',\\
&k\,\|u''\|_{L^2(I)} \overset{\text{TA}}{\leq} \|f\|_{L^2(I)} + \max_{x\in I}\left|a'(x) + b(x)\right|\,\|u'\|_{L^2(I)} + \max_{x\in I}|c(x)|\,\|u\|_{L^2(I)}\\
&k\,\|u''\|_{L^2(I)} \overset{(24)}{\leq} c_1\,\|f\|_{L^2(I)} \overset{\text{ανισ. Poincaré}}{\Longrightarrow} \|u\|_{H^2(I)} \leq c_2\,\|f\|_{L^2(I)}. \quad \square
\end{aligned} \tag{25}$$

Αν κάνουμε την ισχυρή υπόθεση ότι $f \in C(\bar{I})$ συνεχής, τότε η ασθενής λύση είναι και κλασική. Συγκεκριμένα, αφού $u \in H^2(I)$ τότε $u' \in C(\bar{I}) \Rightarrow u \in C^1(\bar{I})$. Η σχέση $au'' = f - bu' - cu - a'u'$ έπεται $u'' \in C(\bar{I}) \Rightarrow u \in C^2(\bar{I})$, αφού το δεξί μέλος είναι συνεχής συνάρτηση. Επειδή η συνέχεια ισχύει παντού στο I, η συνοριακή συνθήκη έπεται $u \in C^2(I)$. Συνεπώς η u είναι και κλασική λύση.

Λόγω έλλειψης συμμετρίας της διγραμμικής μορφής, η ασθενής λύση ικανοποιεί το Θεώρημα 5.3 (Lax-Milgram) , αλλά δεν ισοδυναμεί με τη συνάρτηση που λύνει το αντίστοιχο πρόβλημα ελαχιστοποίησης της εξίσωσης Euler.

5.2.2 Ελλειπτικοί τελεστές με φασματική παράμετρο

Έστω $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ φραγμένο διάστημα. Αναζητούμε ασθενή λύση $u \in H_0^1(I)$ του ομογενούς προβλήματος Dirichlet–Poisson για το τελεστή Laplace με φασματική παράμετρο $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$L_\mu := L + \mu I, \quad L := -\triangle\,. \tag{26}$$

- Αν $\mu > 0$, η ασθενής λύση υπάρχει αν ικανοποιείται η μεταβολική σχέση

  $$(u, \varphi)_{L_\mu} = \langle F_f, \varphi \rangle \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(I).$$

  Το $(u, \varphi)_{L_\mu} := \int_I (\mu uv + Du \cdot Dv)\, dx$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον $H_0^1(I)$ με αντίστοιχη νόρμα $\|\cdot\|_{L_\mu}$, **ισοδύναμη** με τη συνήθη του $H_0^1(I)$:

  $$C^{-1}\|u\|_{L_\mu}^2 \le \|u\|_{H_0^1(I)}^2 \le C\,\|u\|_{L_\mu}^2, \quad C = \max\left\{\mu, \mu^{-1}\right\}.$$

  Επομένως, η λύση αυτή είναι μοναδική.

- Μοναδική ασθενής λύση υπάρχει και στην περίπτωση όπου $\mu < 0$. Σε αυτή την περίπτωση, η ποσότητα

  $$(u, u)_{L_\mu} := \int_I \left(\mu u^2 + \|Du\|^2\right) dx \ge (1 - C|\mu|) \int_I \|Du\|^2\, dx.$$

  ορίζει νόρμα στον $H_0^1(I)$, ισοδύναμη με τη συνήθη (από ανισότητα Poincaré), αρκεί $-C^{-1} < \mu < 0$ για $|\mu|$ επαρκώς μικρό.

Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι η καλύτερη επιλογή της σταθεράς C στην ανισότητα Poincaré είναι **η ελάχιστη ιδιοτιμή** του $L := -\triangle$.

5.2.3 Επίλυση με αντιστροφή του ελλειπτικού τελεστή

Οι διαφορικοί τελεστές σε απειροδιάστατους χώρους **δεν είναι φραγμένοι** αλλά έχουν φραγμένο αντίστροφο έναν ολοκληρωτικό τελεστή. Γενικά, έστω

$$A : D(A) \subseteq H_1 \to \mathrm{Im(A)} \subseteq H_2$$

γραμμικός αλλά μη φραγμένος τελεστής με πεδίο ορισμού $D(A)$ σε χώρους Hilbert. Ο A θα είναι αντιστρέψιμος αν έχει φραγμένο αντίστροφο, τέτοιο ώστε $AA^{-1} = y$ για κάθε $y \in H_2$ και $A^{-1}Ax = x$ για κάθε $x \in D(A)$.

Επιπλέον, αν ένας γραμμικός αλλά μη φραγμένος τελεστής $A : D(A) \subseteq H_1 \to\subseteq H_2$ είναι **πυκνά ορισμένος**, δηλαδή $\overline{D(A)} = H_1$, τότε **θα έχει συζυγή** τελεστή $A^* : D(A^*) \to H_1 : \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ για κάθε $x \in D(A)$ και $y \in D(A^*)$.

Παράδειγμα 17. *Έστω $I = [0,1]$ και $u : I \to \mathbb{R}$ απόλυτα συνεχής συνάρτηση, δηλαδή $u' \in L^2(I)$ και $u(x) - u(0) := \int_0^x u'(t)\,dt$ για κάθε $x \in I$. Αν ο χώρος $D(A) = \left\{u \in L^2(I) :\ u \text{ απόλυτα συνεχής},\ u' \in L^2(I) \text{ και } u(0) = 0\right\}$ είναι τύπου Sobolev, τότε αποδεικνύεται ότι ο γραμμικός τελεστής A είναι κλειστός αλλά **δεν είναι φραγμένος**, αφού, αν $u_n(t) = t^n \in D(A)$, τότε:*

$$\|u_n\|_{L^2(I)}^2 = \int_I t^{2n}\, dt = \tfrac{1}{2n+1} \le 1,\ \textit{αλλά}\ \|Au_n\|_{L^2(I)}^2 = \int_I n^2 t^{2n-2}\, dt = \tfrac{n^2}{2n+1} \to \infty.$$

Αν θέσουμε $u(x) = \int_0^x g(t)\,dt$, *όπου* g *η ασθενής μερική παράγωγος, τότε* $u \in D(A)$ *και* $Au = g$. *Αν ορίσουμε* $A^{-1}g = u$ *για* $g \in L^2(I)$, *τότε ο* A^{-1} *είναι φραγμένος, με πεδίο τιμών το* $D(A)$:

$$|(A^{-1}g)(x)| = \left|\int_0^x g(t)\,dt\right| \le \int_I |g(t)|\,dt \le \left(\int_I |g(t)|\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = \|g\|^2_{L^2(I)},$$
$$\|A^{-1}g\|^2 = \int_I |(A^{-1}g)(t)|^2\,dt \le \int_I |g|^2_{L^2(I)} = |g|^2_{L^2(I)} \Rightarrow \|A^{-1}\| \le 1.$$

Ας επιστρέψουμε στο πρόβλημα. Έστω $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ φραγμένο διάστημα. Αναζητούμε ασθενή λύση $u \in H_0^1(I)$ του ομογενούς προβλήματος Dirichlet–Poisson για ελλειπτικό τελεστή L.

Αρχικά, υποθέτουμε ότι ο L είναι της μορφής (13), ή κάποιας εκδοχής του. Υπενθυμίζουμε ότι ο L είναι θετικά ορισμένος και έχει συμμετρική συζυγή και αυτοσυζυγή εκδοχή. Αν η συνάρτηση $u \in H_0^1(I)$ είναι ασθενής λύση, θα πρέπει να ικανοποιεί την ακόλουθη μεταβολική εξίσωση για γνωστή συνάρτηση $f \in L^2(I)$:

$$\alpha_L(u,\varphi)_{H^{-1}(I),H_0^1(I)} = \langle Lu,\varphi\rangle_{H^{-1}(I),H_0^1(I)} = \langle f,\varphi\rangle_{H^{-1}(I),H_0^1(I)} \quad \forall\varphi \in H_0^1(I).$$

Στην ουσία, λύνουμε την εξίσωση $\boxed{Lu = f}$. Αν $D(L) = H_0^1(I)$ πυκνό στον $L^2(I)$, ο γραμμικός διαφορικός τελεστής $L : D(L) \subset L^2(I) \to L^2(I)$ δεν είναι φραγμένος, αλλά έχει φραγμένο αντίστροφο, τον ολοκληρωτικό τελεστή $K \equiv L^{-1}$, ο οποίος λύνει την εξίσωση $\boxed{u = Kf}$.[3] Αφού το I έχει υποτεθεί φραγμένο, ο αντίστροφος τελεστής θα είναι **συμπαγής** στον $L^2(I)$, από την ανισότητα Sobolev (4). Επιπλέον, το πεδίο τιμών του θα ανήκει στον $H^2(I) \cap H_0^1(I)$. Στην ουσία, η λύση με αντιστροφή ανάγει τη **διαφορική** εξίσωση σε **ομογενή ολοκληρωτική Fredholm** :

$$u = G \star f \Leftrightarrow \boxed{u(y) = \int_I G(x,y)f(x)\,dx}, \quad y \in I.$$

Η αντιστροφή των πράξεων είναι αμφίδρομη και βασίζεται στη σύνδεση του πυρήνα $G \in (L^2(I) \times L^2(I))$ του Green με τον τελεστή L :

$$Lu(y) = f(x) \overset{\text{ΠΣΤ II}}{\Leftrightarrow} LG(\cdot,y) = \delta_y$$
$$\forall\, n \ge 1 : Le_n(y) = \mu_n e_n(y) \overset{\text{Πρ.4.2}}{\Rightarrow} (G(\cdot,y),e_n)_{L^2(I)} = \mu_n^{-1}e_n(y),$$

όπου $\mu_n \to \infty \Leftrightarrow \mu_n^{-1} \to 0^+$, καθώς $n \to +\infty$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε το πρόβλημα για τον ελλειπτικό τελεστή $L_\mu : L + \mu I$, με L της μορφής (13), ή κάποιας εκδοχής του. Σε αυτή την περίπτωση, η αντιστροφή ανάγει τη διαφορική εξίσωση στην **ημιομογενή** ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm λόγω της φασματικής παραμέτρου μ. Η αντίστοιχη ολοκληρωτική εξίσωση έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\boxed{u(y) - \lambda\int_I G(x,y)f(x)\,dx = f(y)}. \tag{27}$$

όπου $\boxed{R(\lambda) := (I - \lambda K)^{-1}}$ ο **επιλύων** τελεστής του ολοκληρωτικού τελεστή K, ο

[3] Ο K είναι **ολοκληρωτικός** τελεστής στον $L^2(I)$, δηλαδή σε **απειροδιάστατο** χώρο Hilbert. Οι ολοκληρωτικοί τελεστές είναι μεν **συμπαγείς**, αλλά **δεν** είναι απαραίτητα διαγωνιοποιήσιμοι, δηλαδή μπορεί να μην έχουν ιδιοτιμές.

οποίος αντιστοιχεί στον πυρήνα G. Η μέθοδος επίλυσης της (27) μέσω του $R(\lambda)$ βασίζεται στο Εναλλακτικό Θεώρημα του Fredholm.

Θεώρημα 5.4 (Το Εναλλακτικό Θεώρημα του Fredholm). *Ας θεωρήσουμε την ολοκληρωτική εξίσωση* (27). *Για κάθε τιμή της φασματικής παραμέτρου λ, αληθεύει ένα από τα ακόλουθα:*

(i) *Η εξίσωση* (27) *έχει μ.μ.λ..*

(ii) *Η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση έχει πεπερασμένες το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις.*

Απόδειξη.

(i) Αν το $\frac{1}{\lambda}$ δεν είναι ιδιοτιμή, τότε $\frac{1}{\lambda} \notin \sigma(K) \setminus \{0\}$. Επομένως, ο $(I - \lambda K)$ είναι αντιστρέψιμος και η εξίσωση (27) έχει μ.μ.λ., την $u = (I - \lambda K)^{-1} f$.

(ii) Αν το $\frac{1}{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή, τότε οι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης αποτελούν τον ιδιόχωρο $\ker\left(\frac{1}{\lambda} I - K\right)$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\frac{1}{\lambda}$. Επειδή ο K είναι **συμπαγής** στον $L^2(I)$, έπεται ότι **ο ιδιόχωρος** αυτός είναι **πεπερασμένης διάστασης**.

□

5.2.4 Η ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm

Η ημιομογενής **διαφορική** εξίσωση Sturm-Liouville (βλ. τύπο (14)) με φασματική παράμετρο $\mu \in \mathbb{R}$, ανάγεται **ισοδύναμα**, μέσω του επιλύοντος, σε **ολοκληρωτική** εξίσωση Fredholm στον $L^2(I)$, με αντίστοιχη φασματική παράμετρο λ :

$$Lu(y) + \mu u(y) = f(y) \Leftrightarrow u(y) - \lambda \textstyle\int_I G(x,y)\, u(x)\, dx = f(y),\ y \in I. \tag{28}$$

Ο πυρήνας $G(x,y)$ ορίζει έναν αυτοσυζυγή **ολοκληρωτικό** (άρα και συμπαγή) τελεστή στον $L^2(I)$, τον $K : L^2(I) \to L^2(I)$, με

$$(Ku)(y) = \textstyle\int_I G(y,x)\, u(x)\, dx.$$

Από το Φασματικό Θεώρημα 15 (βλ. επίσης σελ.56), κάθε $u \in L^2(I)$ έχει εικόνα

$$Ku = \textstyle\sum_{n\geq 1} \mu_n \langle u, e_n\rangle\, e_n \quad \text{ως προς τη νόρμα} \quad \|\cdot\|_{L^2(I)}, \tag{29}$$

Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με e_m, η (28) μετατρέπεται σε εξίσωση στον $L^2(I)$:

$$\langle u, e_m\rangle - \lambda\mu_m \langle u, e_m\rangle = \langle f, e_m\rangle \Rightarrow (1 - \lambda\mu_m)\langle u, e_m\rangle = \langle f, e_m\rangle. \tag{30}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των ιδιοτιμών του Fredholm. Ισχύει ένα από τα ακόλουθα δύο:

(i) Το $\frac{1}{\lambda}$ δεν είναι ιδιοτιμή του K και η εξίσωση (28) έχει μ.μ.λ..

Απόδειξη. Αν το $\frac{1}{\lambda}$ δεν είναι ιδιοτιμή του K, ο $I - \lambda K$ είναι αντιστρέψιμος και η εξίσωση (28) έχει μ.μ.λ.. Τότε, από την (30) έπεται:

$$1 - \lambda\mu_m \neq 0 : \langle u, e_m \rangle = \frac{\langle f, e_m \rangle}{1 - \lambda\mu_m}, \quad \forall\, m \geq 1,$$
$$\therefore \quad u = f + \textstyle\sum_{n\geq 1} \frac{\mu_n}{1-\lambda\mu_n} \langle f, e_n \rangle e_n.$$

Η σειρά της γενικής λύσης συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $L^2(I)$. Αφενός η ακολουθία $\left(\frac{\mu_n}{1-\lambda\mu_n}\right)_{n\geq 1}$ είναι φραγμένη ως μηδενική, αφετέρου ισχύει:

$$\textstyle\sum_{n\geq 1} |\langle f, e_n \rangle|^2 = \|f\|^2_{L^2(I)} < +\infty.$$

Επομένως, η γενική λύση έχει την ακόλουθη αναλυτική μορφή:

$$u(y) = f(y) + \textstyle\sum_{n\geq 1} \frac{\lambda\mu_n}{1-\lambda\mu_n} \left(\int_0^1 f(x)\, e_n(x)\, dx \right) e_n(x) \quad \forall\, y \in I - \text{σ.π.}. \tag{31}$$

□

(ii) Το $\frac{1}{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του K και η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση έχει πεπερασμένες το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις.

Απόδειξη. Αν το $\frac{1}{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του K, τότε $\frac{1}{\lambda} = \mu_m \Rightarrow 1 - \lambda\mu_m = 0$ για πεπερασμένους το πλήθος δείκτες $m \in \mathbb{N}^*$. Ας θεωρήσουμε τα σύνολα $A = \{m \in \mathbb{N}^* : 1 - \lambda\mu_m \neq 0\}$ και $B = \{m \in \mathbb{N}^* : 1 - \lambda\mu_m = 0\}$. Αν η εξίσωση έχει λύση, από την (30) θα πρέπει να ικανοποιεί την ακόλουθη η συνθήκη ορθογωνιότητας για κάθε $m \in B$:

$$\langle f, e_m \rangle = 0 \quad \forall\, m \in B. \tag{32}$$

Η λύση θα έχει την ακόλουθη αναλυτική μορφή:

$$u = f + \textstyle\sum_{n\geq 1} \frac{\lambda\mu_n}{1-\lambda\mu_n} \langle f, e_n \rangle e_n + \sum_{n\in B} c_n e_n, \tag{33}$$

όπου $\{c_n : n \in B\}$ αυθαίρετες σταθερές. □

Παράδειγμα με reproducing πυρήνα Green

Θα λύσουμε την ολοκληρωτική εξίσωση (27) με πυρήνα τη συνάρτηση συνδιακύμανσης της γέφυρας Brown:

$$G(x, y) = \min_{x,y\in I} \{x, y\} - xy$$

Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 4.3.1, ο πυρήνας αυτός είναι reproducing τόσο για ομογενείς όσο (με κάποια τροποποίηση) και για μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet.

Αν $\mu \neq 0$ μια ιδιοτιμή του και $e \in L^2(I)$ το αντίστοιχο ορθομοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα, τότε:

$$\mu e(y) = Ke(y) = \int_0^y (1 - y)x\, e(x)\, dx + \int_y^1 (1 - x)y\, e(x)\, dx, \quad y \in I. \tag{34}$$

Αφού το δεξί μέλος της (34) είναι συνεχής συνάρτηση, έπεται ότι και $e \in C([0,1])$, άρα η (34) είναι παραγωγίσιμη ως συνεχής, και μάλιστα τάξης $N = 1 < 2 = 2k$, όπου $k = 1$ ο βαθμός του αντίστοιχου χώρου Sobolev. Με παραγώγιση $2k$ φορές, καταλήγουμε στην ακόλουθη ομογενή διαφορική εξίσωση

$$e''(y) + \frac{1}{\mu} e(y) = 0, \quad y \in I,$$

την οποία θα επιλύσουμε έτσι ώστε να ικανοποιεί τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες Dirichlet, $e(0) = e(1) = 0$.

Αν $\mu < 0$, τότε $c_1 = c_2 = 0$ και η λύση είναι τετριμμένη. Για μη τετριμμένη λύση, θεωρούμε $\mu > 0$. Τότε, αν $\frac{1}{\mu} = \kappa^2$, $\kappa > 0$, η λύση είναι ημιτονοειδής:

$$\begin{aligned} e(y) &= c_1 \cos(\kappa y) + c_2 \sin(\kappa y), \\ e(0) =0 &\Leftrightarrow c_1 = 0, \quad e(1) = 0 \Leftrightarrow c_2 \sin(\kappa) = 0, \ \kappa > 0, \\ \sin(\kappa) =0 &\Rightarrow \kappa = n\pi = \frac{1}{\sqrt{\mu}}, \ n \geq 1 \Rightarrow \mu = \frac{1}{\kappa^2} = \frac{1}{n^2\pi^2}, \ n \geq 1. \end{aligned}$$

Η λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι η ακόλουθη:

$$e(y) = \begin{cases} c_1 \cosh \frac{y}{\sqrt{|\mu|}} + c_2 \sinh \frac{y}{\sqrt{|\mu|}}, & \text{αν} \quad \mu < 0, \\ c_1 \cos \frac{y}{\sqrt{\mu}} + c_2 \sin \frac{y}{\sqrt{\mu}}, & \text{αν} \quad \mu > 0. \end{cases}$$

Επομένως, $(\mu_n)_{n\geq 1}$ με $\mu_n = \frac{1}{n^2\pi^2}$, $\quad n \geq 1$ η ακολουθία των απλών και πραγματικών ιδιοτιμών, και $e_n(y) = \sqrt{2}\sin n\pi y$, $\forall\, n \geq 1$, η αντίστοιχη ορθοκανονική ακολουθία ιδιοδιανυσμάτων για $y \in I$.

Στη συνέχεια, θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο των ιδιοτιμών στη μη ομογενή εξίσωση (28):

(i) Αν $\lambda \neq \frac{1}{n^2\pi^2}$, η λύση προκύπτει από τη σχέση (31):

$$u(y) = f(y) + \textstyle\sum_{n\geq 1} \frac{\lambda}{n^2\pi^2 - \lambda} \left(\int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx \right) \sin n\pi y \quad \forall\, y \in I.$$

Αφού $|\sin n\pi x \sin n\pi y| \leq 1$, τότε η σειρά

$$\textstyle\sum_{n\geq 1} \frac{2\lambda}{n^2\pi^2 - \lambda} \left(\int_0^1 f(x) \sin n\pi x \sin n\pi y \, dx \right)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα, και μπορούμε να γράψουμε

$$u(y) = f(y) + \int_0^1 r_\lambda(x,y) f(x) \, dx,$$

όπου $r_\lambda(x,y) := \sum_{n\geq 1} \frac{2\lambda}{n^2\pi^2 - \lambda} \sin n\pi x \sin n\pi y$ για $x, y \in I$.

(ii) Αν $\lambda = \frac{1}{m^2\pi^2}$ για κάποιο $m \geq 1$, τότε υπάρχει λύση αν-ν ικανοποιείται η συνθήκη (32), δηλαδή αν $\int_0^1 \sin m\pi y \, f(y) \, dy = 0$ για κάθε τέτοιο m. Στην περίπτωση αυτή, η λύση προκύπτει από τη σχέση (33):

$$u(y) = f(y) + c \sin m\pi y + \int_0^1 r_\lambda(x,y) f(x) \, dx \quad \forall\, y \in I,$$

όπου $r_\lambda(x,y) := \sum_{n\geq 1, n\neq m} \frac{2\lambda}{n^2\pi^2 - \lambda} \sin n\pi x \sin n\pi y$ για $x, y \in I$ και c αυθαίρετη σταθερά (οι ιδιοτιμές είναι απλές).

5.3 Μελλοντική έρευνα

Εξυπακούεται ότι το ελλειπτικό πρόβλημα που μελετήσαμε επιδέχεται γενίκευση αναφορικά με το είδος του μη φραγμένου διαφορικού τελεστή, το χωρίο και τις συνοριακές συνθήκες. Επίσης ενδιαφέρον είναι η αριθμητική προσέγγιση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Fredholm με τη μέθοδο διακριτοποίησης Galerkin, αλλά και με μεθόδους ελεύθερες πλέγματος (βλ. Fasshauser).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α' – Βασικά θεωρήματα συμπάγειας

Ως γνωστό, το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass, σύμφωνα με το οποίο κάθε φραγμένη πραγματική ακολουθία συναρτήσεων έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, δε γενικεύεται στους μετρικούς χώρους χωρίς επιπλέον υποθέσεις.

Για παράδειγμα, αν $K = [0,1]$ συμπαγές αλλά υπεραριθμήσιμο σύνολο, τότε η ακολουθία ομοιόμορφα (άρα και σημειακά) φραγμένων συναρτήσεων $(f_n)_{n\geq 1}$ με $f_n : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(nx)$, με πεδίο τιμών στο συμπαγή μετρικό χώρο $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$, δεν έχει ομοιόμορφα συγκλίνουσα υπακολουθία. Η συνθήκη της ισοσυνεχείας εξασφαλίζει τη σύγκλιση σε μετρικούς χώρους.

Αναφέρουμε το Θεώρημα των Ascoli-Arzelà, το οποίο εξασφαλίζει τη σύγκλιση στους συμπαγείς μετρικούς χώρους $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$, καθώς και την L^p-εκδοχή του.

Θεώρημα 1 (Ascoli-Arzelà – Πρώτη εκδοχή)**.** *Έστω K συμπαγής μετρικός χώρος και $\mathfrak{F} \subset (C(K), \|\cdot\|_\infty)$ ομοιόμορφα φραγμένο υποσύνολο. Αν το $\mathfrak{F}$ ομοιόμορφα ισοσυνεχές, δηλαδή*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \forall\, f \in \mathfrak{F},$$

*τότε η κλειστότητα του $\mathfrak{F}$ στον $C(K)$, $\bar{\mathfrak{F}}$, είναι **σχετικά συμπαγές** σύνολο. (Βλ. Brezis, 2011, Θεώρημα 4.25).*

Θεώρημα 2 (Ascoli-Arzelà – Δεύτερη εκδοχή)**.** *Έστω (K,d) συμπαγής μετρικός χώρος και $(f_n)_{n\geq 1}$ ισοσυνεχής και ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία συναρτήσεων, τέτοιες ώστε $f_n : K \to \mathbb{R}$. Τότε υπάρχει ομοιόμορφα συγκλίνουσα υπακολουθία στο K.*

Απόδειξη. Το πεδίο τιμών της $(f_n)_{n\geq 1}$ είναι φραγμένο υποσύνολο του $C(K)$. Από το Θεώρημα 1, είναι συμπαγές, άρα η $(f_n)_{n\geq 1}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στο K. □

Παράδειγμα 1 (Ισοσυνέχεια)**.** *Έστω $K = [a,b] \subset \mathbb{R}$ φραγμένο διάστημα και $M > 0$ πραγματικός αριθμός. Η ακόλουθη οικογένεια συναρτήσεων είναι ομοιόμορφα ισοσυνεχής με $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$:*

$$\mathfrak{F}_M = \left\{ f : K \to \mathbb{R} : |f'(x)| \leq M \quad \forall\, x \in K \right\}.$$

Ειδικότερα, αν η ακολουθία παραγωγίσιμων συναρτήσεων $(f_n)_{n\geq 1}$ με $f_n : K \to \mathbb{R}$, έχει την ακολουθία των παραγώγων της $(f_n')_{n\geq 1}$ ομοιόμορφα φραγμένη από $M > 0$, δηλαδή $|f'(x)| \leq M \;\; \forall\, x \in K$ και $\forall\, n \geq 1$, ισοδύναμα $\|f'\|_\infty \leq M \;\; \forall\, n \geq 1$, τότε είναι ισοσυνεχής στο K, ως υποσύνολο του ισοσυνεχούς συνόλου $\mathfrak{F}_M$.

Ας συμβολίσουμε $(\tau_h f)(x)$, την τιμή της πραγματικής (διανυσματικής) συνάρτησης f για μετατόπιση του σημείου (διανύσματος) $x \in \mathbb{R}^N$ στη διεύθυνση $h \in \mathbb{R}^N$.

Θεώρημα 3 (Kolmogorov-Riesz-Fréchet – KRF, $\Omega = \mathbb{R}^N$). *Έστω $\mathfrak{F} \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ φραγμένο σύνολο (οικογένεια συναρτήσεων), για $1 \le p < \infty$. Αν, $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$, τέτοιο ώστε $\forall\, h \in \mathbb{R}^N$ με $|h| < \delta$ να ικανοποιείται η συνθήκη*

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon \quad \forall\, f \in \mathfrak{F},$$

ισοδύναμα,

$$\lim_{|h|\to 0} \|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 0 \text{ ομοιόμορφα } \quad \forall\, f \in \mathfrak{F},$$

*τότε η κλειστότητα του περιορισμού $\mathfrak{F}_{|\Omega}$ είναι συμπαγής στον $L^p(\Omega)$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ με πεπερασμένο μέτρο. Ισοδύναμα, το $\mathfrak{F}_{|\Omega}$ είναι **προσυμπαγές** στον $L^p(\Omega)$ (Βλ. Brezis, 2011, Θεώρημα 4.26).*

Παρατήρηση 35. *Η υπόθεση του Θεωρήματος 3 είναι η εκδοχή της ισοσυνέχειας για ολοκληρώματα.*

Θεώρημα 4 (KRF, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$). *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ανοιχτό και $\mathfrak{F} \subset L^p(\Omega)$ φραγμένο σύνολο, για $1 \le p < \infty$. Αν, $\forall\, \varepsilon > 0$ και $\forall\, \omega \Subset \Omega$, $\exists\, \delta > 0$ με την ιδιότητα $0 < \delta < dist(\omega, \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$, έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη*

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon \quad \forall\, f \in \mathfrak{F} \text{ και } \forall\, h \in \mathbb{R}^N \text{ με } \quad |h| < \delta,$$

*τότε η κλειστότητα του $\mathfrak{F}$ είναι συμπαγής στον $L^p(\Omega)$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ με πεπερασμένο μέτρο. Ισοδύναμα, το $\mathfrak{F}$ είναι **προσυμπαγές** στον $L^p(\Omega)$.*

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β' – Βασικά θεωρήματα σύγκλισης στον L^1

Τα ακόλουθα θεωρήματα αφορούν στη σύγκλιση ακολουθιών μετρήσιμων συναρτήσεων στο χώρο L^1. Ισχύει η σ.π. ταυτοποίηση, δηλαδή $L^1(\Omega) = \mathfrak{L}^1(\Omega)|_{\equiv}$. $f \in L^1(\Omega)$ σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι Lebesgue–ολοκληρώσιμη Ω–σ.π..

Θεώρημα 5 (Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης – ΘΜΣ).

Αύξουσες. *Έστω $(f_n)_{n\ge 1}$, $f_n : \Omega \to [0, \infty]$, ακολουθία μη αρνητικών, Ω-μετρήσιμων συναρτήσεων τ.ω. $0 \le f_1(x) \le \cdots \le f_n(x) \le \cdots \le \infty$ $\forall x \in \Omega$, και $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ κ.σ. $\forall x \in \Omega$. Τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu.$$

ΘΜΣ Beppo-Levi. *Η υπόθεση $f_n \uparrow f \in L_1(\Omega)$ να ισχύει Ω-σ.π. αντί κ.σ..*

Φθίνουσες. *Έστω $(f_n)_{n\ge 1}$, $f_n : \Omega \to [0, \infty]$, ακολουθία μη αρνητικών, Ω-μετρήσιμων συναρτήσεων τ.ω. $f_1(x) \ge f_2(x) \ge \cdots \ge f_n(x) \ge \cdots \ge 0$ $\forall x \in \Omega$, και $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ κ.σ. $\forall x \in \Omega$. Αν $\int_\Omega f_1 \, d\mu < \infty$, τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu.$$

Αν $\nexists \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,d\mu$, εφαρμόζουμε το Λήμμα του Fatou.

Θεώρημα 6 (Λήμμα του Fatou). *Έστω $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n : \Omega \to [0,\infty]$, ακολουθία μη αρνητικών, Ω-μετρήσιμων συναρτήσεων. Αν θέσουμε $f(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \leq \infty$ $\forall x \in \Omega$, τότε $f \in L_1(\Omega)$ και*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu = \int_\Omega f\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,d\mu.$$

Θεώρημα 7 (Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue – ΘΚΣ).
Ισχυρή εκδοχή. *Έστω $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n : \Omega \to [0,\infty]$, ακολουθία Ω-μετρήσιμων συναρτήσεων τ.ω. $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ κ.σ. $\forall x \in \Omega$. Αν $\exists\, g \in L_1(\Omega)$ τ.ω. $|f_n(x)| \leq g(x)$ κ.σ. $\forall x \in \Omega$, τότε $f \in L_1(\Omega)$ και $\|f_n - f\|_{L_1(\Omega)} \to 0$ καθώς $n \to \infty$, ισοδύναμα,*

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n\,d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu = \int_\Omega f\,d\mu.$$

Ασθενής εκδοχή. *Οι υποθέσεις $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ και $|f_n(x)| \leq g(x)$ να ισχύουν Ω-σ.π. αντί κ.σ..*
Παρατήρηση. *Αν όπου $g(x)$, σταθερά $M > 0$, δηλαδή το σ.π. φράγμα της $f_n(x)$ στο Ω, προκύπτει το Θεώρημα Φραγμένης Σύγκλισης - ΘΦΣ.*

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ' – Παραγωγισιμότητα συναρτήσεων του L^1

Επιπλέον, αναφέρουμε τα ακόλουθα Θεωρήματα για το ολοκλήρωμα Lebesgue, τα οποία ουσιαστικά παρέχουν **συνθήκες απόλυτης συνέχειας**.

Θεώρημα 8 (Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού (ΘΘΑΛ) για το ολοκλήρωμα Lebesgue). *Έστω $I = [a,b]$ συμπαγές διάστημα. Η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι **απόλυτα συνεχής** αν-ν είναι παραγωγίσιμη **παντού**, δηλαδή αν-ν $f' \in L^1(I)$, και ισχύει*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'\,d\lambda \quad \forall\, x \in I.$$

Παρατήρηση 36. *Το Θεώρημα 8 παρέχει μια **συνθήκη απόλυτης συνέχειας**: αρκεί η f να είναι παραγωγίσιμη παντού και $f' \in L^1(I)$. Η συνθήκη της παραγωγισιμότητας παντού μπορεί να αντικατασταθεί από συνέχεια παντού & παραγωγισιμότητα σ.π..*

Θεώρημα 9 (Γενίκευση του ΘΘΑΛ για το ολοκλήρωμα Lebesgue). *Έστω $I = [a,b]$ συμπαγές διάστημα. Η συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ είναι **απόλυτα συνεχής** αν-ν είναι παραγωγίσιμη I-**σ.π.**, δηλαδή αν-ν $f' \in L^1(I)$, ή γενικότερα, αν-ν $f' \in L^1_{loc}(I)$, και ισχύει*

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'\,d\lambda \quad \forall\, x \in I.$$

Παρατήρηση 37. *Το Θεώρημα 9 γενικεύει την παραγωγισιμότητα της f και επιτρέπει να βρούμε απλές συνθήκες απόλυτης συνέχειας. Ειδικά μας ενδιαφέρει η **συνθήκη Lipschitz**, σύμφωνα με την οποία, αν $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα, τότε κάθε συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη συνθήκη $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|$ για κάθε $x, y \in I$, όπου $C \in \mathbb{R}$, είναι απόλυτα συνεχής.*

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ' – Το Θεώρημα της Απόκλισης του Gauss

Θεώρημα 10 (Θεώρημα Απόκλισης του Gauss). *(Χωρίς απόδειξη). Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ανοικτό και φραγμένο με ομαλό C^1 σύνορο, και $\mathbf{F} \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ διανυσματικό πεδίο. Αν συμβολίσουμε ν το εξωτερικό και κάθετο στο $\partial\Omega$ μοναδιαίο διανύσμα, τότε:*

$$\int_\Omega div\, \mathbf{F}\, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \nu\, dS. \qquad \text{(Gauss)}$$

Αν $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ και $\mathbf{F} = (uv)_i = (0, \dots, uv, \dots, 0)$, εφαρμόζοντας ΟΚΠ, προκύπτει η ακόλουθη εκδοχή:

$$\int_\Omega u\, \partial_i v\, dx = -\int_\Omega \partial_i u\, v\, dx + \int_{\partial\Omega} uv\, \nu_i\, dS. \qquad \text{(Gauss – 2η εκδοχή)}$$

Θεώρημα 11 (Ο νόμος του Gauss στο επίπεδο). *(Χωρίς απόδειξη). Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ανοικτό και φραγμένο. Τότε, αν $\boxed{0_{\mathbb{R}^3} \notin \partial\Omega}$, ισχύει:*

$$\int_{\partial\Omega} \frac{r}{\|r\|_2^3} \cdot \nu\, dS = \begin{cases} 4\pi, & \text{αν} \quad 0_{\mathbb{R}^3} \in \Omega, \\ 0, & \text{αν} \quad 0_{\mathbb{R}^3} \notin \Omega. \end{cases},$$

όπου r το ακτινικό διάνυσμα.

Ο τελεστής Laplace, $-\triangle$, συνδέεται με τον τελεστή απόκλισης μέσω της ισότητας $\triangle = \text{div}(D) = \nabla \cdot D$ για τον τελεστή βαθμίδας D.

Θεώρημα 12 (Οι Ταυτότητες του Green). *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ανοικτό και φραγμένο σύνολο, ομαλό τάξης C^1 και $u, v \in C^2(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$ βαθμωτά πεδία. Αν συμβολίσουμε $\frac{\partial v}{\partial \nu} = \nabla v \cdot \nu$ την παράγωγο κατεύθυνσης, τότε ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:*

$$\int_\Omega u \triangle v\, dx = -\int_\Omega Du \cdot Dv\, dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu}\, dS, \qquad \text{(Green I)}$$

$$\int_\Omega u \triangle v\, dx = -\int_\Omega v \triangle u + \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS. \qquad \text{(Green II)}$$

Απόδειξη. Αν $\mathbf{F}$ διανυσματικό πεδίο και f, g βαθμωτά πεδία, C^1 στο Ω, τότε ισχύουν οι ακόλουθοι τύποι για την απόκλιση:

$$\text{div}\,(f\mathbf{F}) = f\, \text{div}(\mathbf{F}) + \mathbf{F} \cdot \nabla f,$$

$$\text{div}(f\nabla g - g\nabla f) := \nabla \cdot (f\nabla g - g\nabla f) = f\, \nabla^2 g - g\nabla^2 f = f \triangle g - g \triangle f.$$

Θέτοντας όπου f τη συνάρτηση u και όπου $\mathbf{F}, g$ την κλίση της, ∇v, προκύπτουν αντίστοιχα οι ακόλουθοι τύποι:

$$\text{div}\,(u\,\nabla v) = u \triangle v + Du \cdot Dv \quad \text{και} \quad \text{div}\,(u\,\nabla v - v\nabla u) = u \triangle v - v \triangle u.$$

Η πρώτη ταυτότητα προκύπτει ολοκληρώνοντας τον πρώτο τύπο πάνω στο Ω και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Απόκλισης του Gauss. Η δεύτερη ταυτότητα προκύπτει ολοκληρώνοντας το δεύτερο τύπο πάνω στο Ω. □

Οι ταυτότητες του Green παρέχουν εκτιμήσεις της ενέργειας των εξισώσεων Laplace και Poisson, αντίστοιχα. Επιπλέον, η δεύτερη ταυτότητα αποδεικνύει ότι ο διαφορικός τελεστής Laplace είναι αυτοσυζυγής.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε' – Στοιχεία Θεωρίας Τελεστών

Ορισμός 1 (Γραμμικός/Διανυσματικός χώρος). *Το σύνολο $X \neq \emptyset$ είναι γραμμικός χώρος στο $\mathbb{R}$ αν είναι εφοδιασμένος με τις πράξεις της πρόσθεσης $+ : X \times X \to \mathbb{R}$ και του πολλαπλασιασμού $\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$, ώστε να ισχύουν*

(I) τα αξιώματα της πρόσθεσης: $\forall x, y, z \in X$,

(i) $x + y = y + x$,

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$,

(iii) $\exists 0_X : \forall x \in X,\ 0_X + x = x$,

(iv) $\forall x \in X,\ \exists (-x) \in X : x + (-x) = 0_X$, *και*

(II) τα αξιώματα του πολλαπλασιαμού: $\forall x, y \in X$ *και* $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

(i) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$,

(ii) $1x = x$,

(iii) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,

(iv) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \lambda y$.

Ορισμός 2 (Νόρμα). *Νόρμα στο γραμμικό χώρο X ονομάζεται κάθε απεικόνιση $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες:*

(i) $||x|| \geq 0,\ \forall x \in X$ *και* $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(ii) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in X$ *(θετική ομογένεια),*

(iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||,\ \forall x, y \in X$ *(τριγωνική ανισότητα).*

Ορισμός 3 (Επαγόμενη μετρική). *Η συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με*

$$d(x, y) = ||x - y||,\ \forall x, y \in X$$

είναι μετρική που επάγεται στον X από τη νόρμα του. Μια μετρική έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $d(x, y) \geq 0$ *και* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(ii) $d(y, x) = d(x, y)$, *και*

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

$\forall x, y, z, \in X$ *και* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. *Από τη συνέχεια των πράξεων της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού σε κάθε γραμμικό χώρο X με νόρμα, μια επαγόμενη μετρική έχει επιπλέον τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ *και*

(ii) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ *(θετική ομογένεια),* $\forall x, y \in X\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 4 (Πραγματικό εσωτερικό γινόμενο). *Έστω X γραμμικός χώρος. Η συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ είναι πραγματικό εσωτερικό γινόμενο αν ικανοποιεί τα παρακάτω:*

(i) (Μη αρνητική) $\langle x, x\rangle \geq 0,\ \forall x \in X$ και $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_X$,

(ii) (Συμμετρική) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle,\ \forall x, y \in X$,

(iii) (Γραμμική από αριστερά) $\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y\rangle = \lambda_1\langle x_1, y\rangle + \lambda_2\langle x_2, y\rangle,\ \forall x_1, x_2, y \in X$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

(iv) (Γραμμική από δεξιά) $\langle x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2\rangle = \mu_1\langle x, y_1\rangle + \mu_2\langle x, y_2\rangle,\ \forall x, y_1, y_2 \in X$ και $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$.

Το πραγματικό εσωτερικό γινόμενο είναι διγραμμική πράξη.

Ορισμός 5 (Χώρος Hilbert). *Ένας χώρος με ε.γ. είναι Hilbert, $(X, \langle \cdot \rangle) = H$, αν είναι πλήρης ως προς τη νόρμα που επάγεται από το ε.γ.. Μια νόρμα στο γραμμικό χώρο X προέρχεται από ε.γ. αν-ν ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου:*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2),\ \forall x, y \in X.$$

Ορισμός 6 (Γραμμικός τελεστής). *Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$ και $(Y, \|\cdot\|_Y)$ χώροι με νόρμα. Γραμμικός τελεστής είναι κάθε απεικόνιση $T : X \to Y$ που ικανοποιεί*

$$T(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda T(x_1) + \mu T(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X \text{ και } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Ορισμός 7 (Πυρήνας και Εικόνα). *Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$ και $(Y, \|\cdot\|_Y)$ γ.χ.ν. και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Ο πυρήνας (kernel) του T είναι το σύνολο*

$$\ker T = \{x \in X : T(x) = 0\} = T^{-1}(\{0\})$$

και η εικόνα (image) του T είναι το σύνολο

$$Im\, T = \{y \in Y | \exists x \in X : T(x) = y\} = \{T(x) : x \in X\}.$$

Ο πυρήνας και η εικόνα είναι γραμμικοί υπόχωροι των X και Y, αντίστοιχα.

Ορισμός 8 (Φραγμένος τελεστής). *Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$ και $(Y, \|\cdot\|_Y)$ γ.χ.ν.. Ο γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ είναι φραγμένος αν*

$$\exists\, c > 0 : \|T(x)\|_Y \leq c\,\|x\|_X,\ \forall x \in X.$$

Ορισμός 9 (Νόρμα φραγμένου τελεστή). *Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$ και $(Y, \|\cdot\|_Y)$ γ.χ.ν. και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Αν ο T είναι φραγμένος, η νόρμα του είναι η μικρότερη σταθερά c που τον φράσσει:*

$$\|T\| = \inf C_T = \min C_T := \min\{c \geq 0 : \forall x \in X,\ \|T(x)\|_Y \leq c\,\|x\|_X\}.$$

Επιπλέον, ισχύει $\|Tx\|_Y \leq \|T\|\,\|x\|_X,\ \forall x \in X$.

Ορισμός 10 (Εναλλακτικός ορισμός νόρμας φραγμένου τελεστή). *Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$ και $(Y, \|\cdot\|_Y)$ χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Ο T*

είναι φραγμένος, αν ο περιορισμός του στη μοναδιαία σφαίρα του X, $T(B_X)$ με $B_X := \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$, είναι φραγμένη συνάρτηση, δηλαδή αν

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|_Y := \sup\{\|T(x)\|_Y : x \in X, \|x\| \leq 1\} < +\infty.$$

Ένας φραγμένος T απεικονίζει φραγμένα σύνολα του X σε φραγμένα του Y.

Αν ο T είναι φραγμένος, τότε οι παρακάτω εκφράσεις είναι ισοδύναμες:

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup_{x \in B_X} \|Tx\|_Y = \sup_{x \neq 0} \tfrac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X = 1} \|T(x)\|_Y \\ &= \min\{c > 0 : \|T(x)\|_Y \leq c\,\|x\|_X,\ \forall x \in X\} = \|T\|.\end{aligned}$$

Αν $\dim X < \infty$ χώρος πεπερασμένης διάστασης, τότε ο T είναι αναγκαστικά συνεχής. Γενικά, οι γραμμικοί τελεστές είναι αυτόματα συνεχείς σε χώρους πεπερασμένης διάστασης.

Θεώρημα 13 (Συνέχεια γραμμικού τελεστή)**.** *Αν $(X, \|\cdot\|_X)$ και $(Y, \|\cdot\|_Y)$ είναι χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Ο T είναι τοπολογικά συνεχής στον X, δηλαδή απεικονίζει ανοιχτά σε ανοιχτά, κλειστά σε κλειστά, και η αντίστροφη είναι συνεχής.

(ii) Ο T είναι συνεχής σε σημείο x_0 του X, δηλαδή

$$(\forall \epsilon > 0)\,(\forall x \in X)\,(\exists \delta = \delta(x, \epsilon) > 0) : \|T(x) - T(x_0)\| < \epsilon \text{ αρκεί } \|x - x_0\| < \delta.$$

(iii) Ο T έχει την ιδιότητα Lipschitz, δηλαδή

$$(\exists M = M_T \geq 0) : \|T(x)\|_Y \leq M \cdot \|x\|_X \ \forall x \in X.$$

(iv) Ο περιορισμός του T στη μοναδιαία σφαίρα του X είναι φραγμένη συνάρτηση, δηλαδή το σύνολο $T(B_X) \equiv \{\|T(x)\|_Y : x \in X,\ \|x\| \leq 1\}$ είναι φραγμένο.

(v) Ο T είναι ομοιόμορφα συνεχής, δηλαδή

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists\, \delta = \delta(\epsilon) > 0) : (\forall x \in X)\, \|T(y) - T(x)\|_Y < \epsilon \text{ αρκεί } \|y - x\|_X < \delta.$$

Ορισμός 11 (Φάσμα φραγμένου τελεστή)**.** *Το φάσμα, $\sigma(T)$, ενός φραγμένου τελεστή $T \in \mathfrak{B}(H)$, είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και ορίζεται ως*

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T),$$

όπου $\rho(T)$ το επιλύον σύνολο

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - T : D \subset T \to H \quad \text{αντιστρέψιμος}\}.$$

(i) ***Σημειακό φάσμα*** *του T ορίζεται το σύνολο των ιδιοτιμών του:*

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ker(\lambda I - T) \neq \varnothing\}.$$

(ii) ***Προσεγγιστικό σημειακό φάσμα*** *του T ορίζεται το σύνολο των γενικευμένων ιδιοτιμών του:*

$$\sigma_{ap}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \exists\, (x_n)_n \subset H :\ \|x_n\| = 1\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \textit{και}\ \|(\lambda I - T)x_n\| \to 0\}.$$

Παρατηρούμε ότι αν $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$, τότε ο τελεστής $\lambda I - T$ δεν είναι κάτω φραγμένος.

(iii) ***Φάσμα συμπίεσης*** *του T ορίζεται το σύνολο*

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \overline{(\lambda I - T)} \neq H\}.$$

Ισχύει το ακόλουθο:

$$\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_c(T), \quad \sigma_p(T) \subseteq \sigma_{ap}(T).$$

Παρατήρηση 38. *Αν ο τελεστής $T \in \mathfrak{B}(H)$ είναι αυτοσυζυγής, δηλαδή $T = T^*$, τότε:*

(i) $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \subseteq \mathbb{R}$.

(ii) *Είτε $-\|T\|$ είτε $\|T\| \in \sigma(T)$.*

(iii) *Ο T έχει φασματική ακτίνα $r(T) = \|T\|$.*

Επιπλέον, αν $m = \inf_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle$ και $M = \sup_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle$, τότε:

(i) $\sigma(T) \subseteq [m, M]$,

(ii) $m, M \in \sigma(T)$.

Ορισμός 12 (Συμπάγεια γραμμικών τελεστών). *Έστω X, Y χώροι Banach. Ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ λέγεται συμπαγής, αν απεικονίζει την κλειστή μοναδιαία σφαίρα του X, $B_X \equiv \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$, σε ένα $\|\cdot\|-$σχετικά συμπαγές υποσύνολο του Y, δηλαδή αν το $T(B_X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y.*

Ορισμός 13 (Τελεστής Hilbert-Schmidt – HS). *Ένας τελεστής $K \in \mathfrak{B}(H)$, όπου H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, έστω ο $L^2(I)$, είναι τελεστής Hilbert-Schmidt αν υπάρχει ορθοκανονική (διανυσματική) βάση $(e_n)_{n\geq 1}$, τέτοια ώστε να ικανοποιείται η ακόλουθη συνθήκη:*

$$\sum_{n\geq 1} \|Ke_n\|^2 < +\infty.$$

Αποδεικνύεται ότι κάθε τελεστής HS είναι συμπαγής, ενώ δεν ισχύει το αντίστροφο. Ειδικά οι ολοκληρωτικοί τελεστές είναι συμπαγείς και HS.

Θεώρημα 14 (Φάσμα συμπαγούς τελεστή). *Έστω $H \equiv L^2(I)$ με $I = [0, 1]$ απειροδιάστατος χώρος Hilbert.*

(i) *Αν $K \in \mathfrak{B}(H)$ συμπαγής τελεστής, τότε $0 \in \sigma(K)$ ακόμη και αν δεν έχει ιδιοτιμές.*

(ii) *Αν ο τελεστής $K \in \mathfrak{B}(H)$ είναι συμπαγής με $\lambda \neq 0$, αλλά το λ δεν είναι ιδιοτιμή του K, τότε το σύνολο τιμών του $\lambda I - K$ είναι κλειστό και $\mathfrak{R}(\lambda I - K) = H$. Επομένως, η αντίστροφη απεικόνιση $(\lambda I - K)^{-1}$ υπάρχει και είναι φραγμένος τελεστής.*

(iii) *Αν $K \in \mathfrak{B}(H)$ συμπαγής σε απειροδιάστατο χώρο Hilbert, τότε το φάσμα του αποτελείται από το μηδέν και το πολύ από ένα αριθμήσιμο σύνολο ιδιοτιμών, με πιθανό σημείο συσσώρευσης το μηδέν. Επιπλέον, κάθε ιδιόχωρος του K, ο οποίος αντιστοιχεί σε μη μηδενική ιδιοτιμή, είναι πεπερασμένης διάστασης.*

Θεώρημα 15 (Φασματικό Θεώρημα)**.** *Έστω $K \in \mathfrak{B}(H)$ συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής σε χώρο Hilbert. Τότε, υπάρχει ορθοκανονική (ενδεχομένως πεπερασμένη) ακολουθία $(e_n)_{n\geq 1}$ ιδιοδιανυσμάτων του K, με αντίστοιχες ιδιοτιμές $(\mu_n)_{n\geq 1}$, τέτοια ώστε:*

$$K = \textstyle\sum_{n\geq 1} \mu_n \left(e_n \otimes e_n\right).$$

Η σειρά συγκλίνει ως προς τη νόρμα του $\mathfrak{B}(H)$.

Ορισμός 14 (Ισομετρικός ισομορφισμός)**.** *Ο $T : X \to Y$ είναι ισομορφισμός αν είναι γραμμικός, 1-1 και επί τελεστής (δηλαδή η γραμμική ισομετρία είναι επί), και οι απεικονίσεις T και T^{-1} είναι φραγμένοι τελεστές. Ισοδύναμα, ο T είναι ισομετρικός ισομορφισμός αν είναι ισομορφισμός και, επιπλέον, $\forall x \in X$ ισχύει $\|Tx\| = \|x\|$.*

Ορισμός 15 (Δυϊκός χώρος)**.** *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ γραμμικός χώρος με νόρμα. Ο δυϊκός χώρος του X, X^* ανήκει στο γραμμικό χώρο των φραγμένων, άρα και συνεχών, τελεστών της μορφής $T : X \to \mathbb{R}$, ισοδύναμα $X^* = \mathfrak{L}(X, \mathbb{R})$, με νόρμα*

$$\|T\|_{X^*} := \sup_{\|x\|\leq 1} |Tx| < +\infty.$$

Ο X^* είναι ισόμορφος με τον X.

Ο συζυγής (ως προς το ε.γ.) T^* ενός φραγμένου τελεστή T σε χώρο Hilbert, είναι ο μοναδικός φραγμένος τελεστής στον ίδιο χώρο, $T \to T^*$, με την ιδιότητα:

$$(\forall T \in \mathfrak{B}(H))\,(\exists\,!\,T^* \in \mathfrak{B}(H)) : \langle T^*x, y\rangle_H = \langle x, Ty\rangle_H,\ \forall x, y \in H.$$

Αν $T = T^*$, ο T ονομάζεται αυτοσυζυγής με νόρμα

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H,\ \|x\| \leq 1\}.$$

Οι τελεστές T^* αναπαρίστανται ακολούθως:

Θεώρημα 16 (Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz)**.**

$$(\forall T : H \to \mathbb{R} \text{ συνεχής γραμμική })\,(\exists\,!\,z_T \in H) : Tx = \langle x, z_T\rangle,\ \forall x \in H.$$

Η απεικόνιση $T : H \to H^*$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός.

Θεώρημα 17 (Ομοιόμορφο φράγμα, Banach-Steinhaus)**.** *Έστω X, Y χώροι Banach και $(T_i)_{i\in I}$ οικογένεια (όχι απαραίτητα αριθμήσιμη) συνεχών γραμμικών* *τελεστών από το X στο Y. Ας υποθέσουμε ότι οι νόρμες των τελεστών της οικογένειας είναι φραγμένη σημειακά* : $\sup_{i\in I} \|Tx_i\| < \infty \quad \forall\, x \in X$. *Τότε, θα είναι φραγμένη και ομοιόμορφα*: $\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathfrak{L}(X,Y)} < \infty$, *δηλαδή υπάρχει σταθερά* c, *τέτοια ώστε* $\|T_i x\| \leq c\,\|x\| \quad \forall\, x \in X,\ \forall\, i \in I$. *(Βλ. Brezis, 2011, Θεώρημα 2.2).*

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Κουμουλλής, Γ. και Νεγρεπόντης, Σ. (2005). *Θεωρία Μέτρου*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα

Hsing, T. and Eubank, R. (2011). *Theoretical Foundations of Functional Data Analysis, with an Introduction to Linear Operators*. John Wiley & Sons Ltd., United Kingdom

Hunter, J.K. (2014). *Notes on Partial Differential Equations*. Department of Mathematics, UC Davis

Fasshauer, G.E. and Ye, Q. (2013). Reproducing Kernels of Sobolev Spaces via a Green Kernel Approach with Differential Operators and Boundary Operators, *Advances in Computational Mathematics*, 38, 891–921

Brezis, H. (2011). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York

Berlinet, A. and Thomas-Agnan, C. (2004). *Reproducing Kernel Hilbert Spaces in Probability and Statistics*. Springer Science + Business Media, New York

Evans, L.C. (1998). *Partial Differential Equations*. Volume 19 of Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society

Evans, L.C. and Gariepy, R.F. (1991). *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ