ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS AND BUSINESS

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΙΤΛΟΣ

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΣΕ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ

Όνομα Πατρ. Επώνυμο

ΙΩΑΝΝΗΣ ΣΤΑΥΡΟΥ ΦΩΣΤΗΡΟΠΟΥΛΟΣ

Διπλωματική Εργασία
που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής
του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών στο πλαίσιο του
Προπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών

με επιβλέποντα καθηγητή τον κ. ΑΘ. ΓΙΑΝΝΑΚΟΠΟΥΛΟ

Αθήνα

ΙΟΥΝΙΟΣ 2023

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ θερμά τους καθηγητές μου στο τμήμα Στατιστικής του ΟΠΑ, για όσα μου δίδαξαν. Ιδιαίτερες ευχαριστίες στον κ. Α. Γιαννακόπουλο, για την αρωγή, την υπομονή και την αμέριστη υποστήριξή του σε αυτή μου τη διατριβή. Ακόμη ευχαριστώ τους καθηγητές της σχολής Α. Ζυμπίδη και Σ. Βακερούδη για την συμμετοχή τους στην τριμελή εξεταστική επιτροπή.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Κίνηση Brown σε πολλαπλότητες

Η κίνηση Brown στη σύγχρονη εποχή είναι βασικό εργαλείο σε πολλές επιστήμες.

Η Φυσική και η Χημεία , τα Χρηματοοικονομικά με τα περίφημα Black-Scholes

η Βιολογία και η επιστήμη των υπολογιστών δίνουν λύσεις σε προβλήματά τους με βάση την κίνηση Brown.

Στην παρούσα διατριβή αρχικά θα δούμε έννοιες από τη διαφορική γεωμετρία, θα δώσουμε τον ορισμό της πολλαπλότητας και έννοιες πάνω σε αυτή, θα ορίσουμε την κίνηση Brown και τις ιδιότητές της και στη συνέχεια θα εστιάσουμε στην κίνηση Brown στην επιφάνεια μιας σφαίρας. Θα εκφράσουμε την εξίσωσή της κίνησης Brown σε καρτεσιανές ,σφαιρικές ,κυλινδρικές συντεταγμένες, και εντέλει θα βρούμε λύση της εξίσωσης.

ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Δουλεύω σα μαθηματικός σε Δημόσιο Λύκειο του Πειραιά με συνολική υπηρεσία 41 έτη. Όλα αυτά τα χρόνια, σκοπός μου είναι να αναδείξω στους μαθητές μου την ομορφιά και την χρησιμότητα των μαθηματικών ,να τους εμπνεύσω ,να αναζητήσω «ταλέντα» , να τους ενθαρρύνω, να τους υποστηρίξω.

Η αγάπη για τα μαθηματικά, με οδήγησε στην προχωρημένη ηλικία που είμαι (65 ετών) ,να καθίσω πάλι στα φοιτητικά έδρανα για να αποκτήσω νέα γνώση. Μια γνώση που πριν μισό περίπου αιώνα δεν μπορούσε να μου δώσει το πανεπιστήμιο διότι οι υπολογιστές και οι νέες τεχνολογίες ακόμη ήταν στα σπάργανα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1 ΓΕΝΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ	σελίδες 1-4
1.1Παράγωγος κατά κατεύθυνση	1
1.2 Εφαπτόμενο διάνυσμα	1
1.3Germs	2
1.4 Διανυσματικό πεδίο	2
1.5 Δυϊκός χώρος	3
2 MANIFOLD(πολλαπλότητες)	5-9
2.1Ορισμός	5
2.2Εφαπτόμενο διάνυσμα εφαπτόμενο επίπεδο	8
2.3Διαφορικό	8
3 Η ΚΙΝΗΣΗ BROWN ΣΕ η ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ	10-13
3.1 Ορισμός	10
3.2Κίνηση Brown σε d διαστάσεις	11
3.3Στοχαστική ολοκλήρωση	11
4 ΓΕΝΝΗΤΟΡΑΣ ΤΕΛΕΣΤΗΣ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ BROWN	14
5 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ BROWN	15-17
6 ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΧΥΣΗΣ ΣΕ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ	18-22
6.1Μετασχηματισμός από καρτεσιανές σε σφαιρικές συντεταγμένες	18
6.2 Λύση της εξίσωσης σε σφαιρικές συντεταγμένες	20
7 ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΧΥΣΗΣ ΣΕ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ	21-24
7.1Μετασχηματισμός από καρτεσιανές σε κυλινδρικές συντεταγμένες	21
7.2Λύση της εξίσωσης σε κυλινδρικές συντεταγμένες	24

ΣΧΗΜΑΤΑ

Σχήμα 1 διανυσματικό πεδίο X=<cosx,siny> σελ 3

Σχήμα 2 διανυσματικό πεδίο X= <-x,-y,-z> σελ 3

Σχήμα 3 Το chart(U,x) στο σημείο p για το manifold (M,T) σελ 5

Σχήμα 4 Συναρτήσεις μετάβασης $x \circ y^{-1}$ και $y \circ x^{-1}$ των chart(U,x) και (V,y) σελ 6

Σχήμα 5 Η απεικόνιση $f:M \to N$ μέσω της $y \circ f \circ x^{-1}: R^m \to R^n$ σελ 7

Σχήμα 6 Τα διατέμνοντα επίπεδα συγκλίνουν προς το εφαπτόμενο σελ 8

Σχήμα 7 Το διαφορικό $df_p: T_pM \to T_{f(p)}N$ στο σημείο p σελ 9

Σχήμα 8 Γραφήματα από πέντε τροχιές κίνησης Brown σελ 10

Σχήμα 9 Η f(t,ω) για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος Ito σελ 12

Σχήμα 10 Κίνηση Brown στην επιφάνεια σφαίρας r=1 σελ 16

Σχήμα 11 Κίνηση Brown στην επιφάνεια κυλίνδρου r=1 σελ 17

1 ΓΕΝΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Στην παράγραφο αυτή θα εισάγουμε τις βασικές έννοιες που θα χρειασθούν σε αυτή τη διατριβή του Ευκλείδειου χώρου, για καλύτερη κατανόηση της , πριν τη γενικεύσουμε στην περίπτωση των πολλαπλοτήτων.
Ευκλείδειος χώρος R^n n∈ N είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων n-άδων της μορφής $p=(p^1,p^2,\ldots,p^n)$ με $p^\iota \in R$ Ορίζουμε ως κανονική βάση του R^n την e^ι με $\iota \in N$
Ο χώρος των διανυσμάτων που έχουν αρχή το p συμβολίζεται με T_pR^n και είναι ο εφαπτόμενος χώρος του R^n στο p
Ένα διάνυσμα της μορφής $v=<v^1,v^2,\ldots,v^n>$ γράφεται σαν $v=\sum_{i=1}^{n} v^i\, e^i$

Ορισμός 1 Αν θεωρήσουμε ένα ανοιχτό σύνολο $U \subseteq R^n$ και μία συνάρτηση f: U→R λέμε ότι η f είναι C^k στο σημείο $p=(x^1,x^2,\ldots,x^n) \in U$ αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι : $\frac{\partial^j f}{\partial x^{i_1}\partial x^{i_2}\ldots\partial x^{i_j}}$ για κάθε j < k και είναι συνεχείς στο p. Αν η f είναι C^k σε κάθε σημείο p του U τότε είναι C^k σε όλο το U. Λέμε ότι η f: U→R είναι $C^\infty(\lambda\varepsilon\acute{\iota}\alpha)$ αν είναι C^k για κάθε κ≥0

Ένα πολυώνυμο βαθμού κ θα μπορεί να χαρακτηρισθεί σαν C^k ,ενώ η συναρτήσεις sinx , cosx , e^x θα χαρακτηρισθούν σαν C^∞

Μια ευθεία που διέρχεται από το p και είναι παράλληλη στο v διάνυσμα μπορεί να γραφεί με παραμετρική μορφή σαν $c(t)=\sum_{i=1}^{n}(p^i+tv^i)e^\iota$

1.1 Παράγωγος κατά κατεύθυνση

Θεωρούμε τον εφαπτόμενο χώρο T_pR^n και ένα σημείο $p \in R^n$ με $p=(p^1,p^2,\ldots,p^n)$ και το διάνυσμα $v=<v^1,v^2,\ldots,v^n>$. Μία ευθεία c(t) που διέρχεται από το p και είναι παράλληλη στο v δίνεται από την παραμετρική εξίσωση $c(t)=(p^1+v^1t,p^2+v^2t,\ldots,p^n+v^nt)$.

1.2 Εφαπτόμενο διάνυσμα

Έστω γ μια λεία καμπύλη με γ:(-ε,ε) →R^n το εφαπτόμενο διάνυσμα στο p=γ(0) είναι η ταχύτητα $\frac{d\gamma}{dt}|_{t=0}$ Ο εφαπτόμενος χώρος στο p είναι ο μονοδιάστατος χώρος που παράγεται από τα διανύσματα $\frac{d\gamma}{dt}|_{t=0}$

Ομοίως αν θεωρούσαμε α:(-ε,ε)x(-η,η) →R^n .Τα εφαπτόμενα διανύσματα έχουν τη μορφή

$<\lambda\frac{\partial}{\partial x^1},\mu\frac{\partial}{\partial x^2}>|_{(0,0)}$ α και ο εφαπτόμενος χώρος παράγεται από $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_{(0,0)},\frac{\partial}{\partial x^2}|_{(0,0)}\}$

Οι παραπάνω συναρτήσεις γ και α είναι germs (Η έννοια των germs θα δοθεί ακολούθως)
Ορισμός 2 Έστω $f : A \subseteq R^n \to R$ λεία συνάρτηση σε μία περιοχή του p και ένα εφαπτόμενο διάνυσμα v . Η παράγωγος κατά κατεύθυνση της f στο p κατά την κατεύθυνση του v είναι ο αριθμός

$\lim_{t\to 0}\frac{f(p^1+tv^1,p^2+tv^2,\ldots p^n+tv^n)-f(p^1,p^2,\ldots p^n)}{t}=\frac{d}{dt}|_{t=0}f(c(t))=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\frac{dc^i}{dt}(0)$ (από κανόνα αλυσίδας)

$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)v^i$ και συμβολίζεται με $D_v=\sum_{i=1}^{n}v^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ δηλαδή θα θεωρήσουμε την απεικόνιση του

$f \longmapsto D_vf$ για δεδομένη κατεύθυνση v

Παράδειγμα

Να υπολογισθεί η παράγωγος κατά κατεύθυνση της $f(x,y,z)=x^3-xy^2-z$ στο σημείο $p=(1,1,0)$ κατά τη διεύθυνση του $v=<2,-3,6>$

$|v|=\sqrt{4+9+36}=7$ $\hat{v}=v/7$

$\nabla f=(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})=(3x^2-y^2,-2xy,-1) \Rightarrow \nabla f_p=<2,-2,-1>$

$D_v f(1,1,0)=<2,-2,-1>1/7<2,-3,6>=4/7$

1.3 Germs

Ορισμός 3 Έστω ένα σημείο p και V ,U δύο γειτονιές του p και δύο λείες συναρτήσεις $f: U\to \mathbb{R}$, $g:V \to \mathbb{R}$. Αν υπάρχει ανοικτό σύνολο $W=V\cap U$,με $p\in W$ και f=g περιορισμένες στο W, τότε η κλάση ισοδυναμίας (U,f) ονομάζεται germ.

Παράδειγμα

$f(x)=\ln(1+x)$ $x>-1$ και $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$ $x\in(-1,1]$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι C^∞,παίρνουν ίδιες τιμές στην τομή των πεδίων ορισμού τους ,και έχουν ίδια κατά κατεύθυνση παράγωγο σε κάθε σημείο

1.4 Διανυσματικό πεδίο

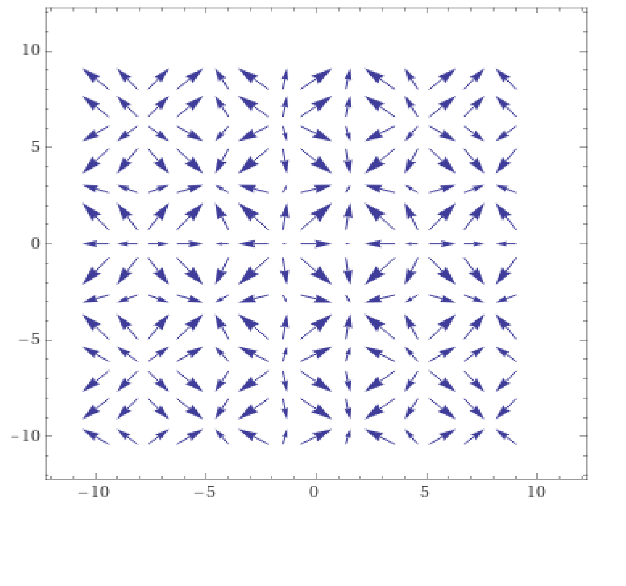
Έστω εφαπτόμενο διάνυσμα $v\in T_pR^n$ σε ένα σημείο p.Το $v=\sum_{i=1}^{n} v^i e^i$. Αν αντιστοιχίσουμε τα e_i της κανονικής βάσης του R^n με το $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \frac{\partial}{\partial x^2}|_p,\ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\}$ των μερικών παραγώγων στο p τότε $v=\sum_{i=1}^{n} v^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$

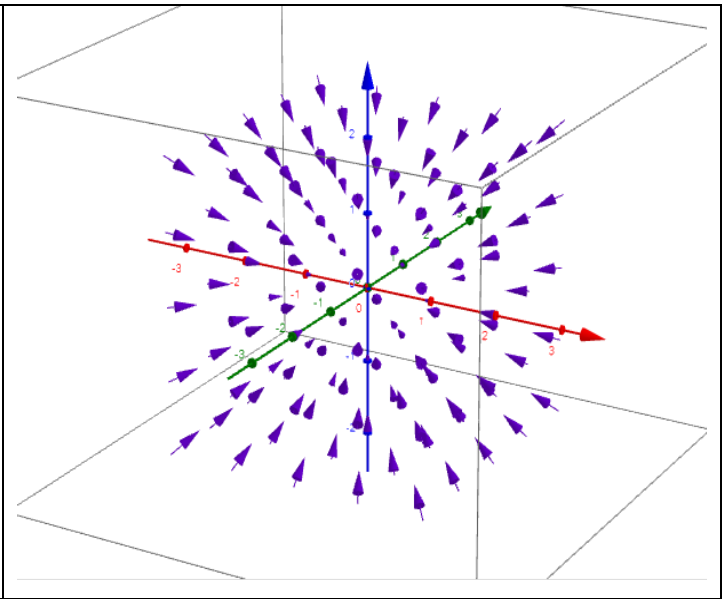
Έστω ανοικτό $U\subseteq R^n$, μια συνεχής συνάρτηση $\alpha:U\to T_pR^n$ με $\alpha=<\alpha^1,\alpha^2,\ldots,\alpha^n>$, ένα σημείο p του U και X_p εφαπτόμενο διάνυσμα του T_pR^n Το διάνυσμα αυτό γράφεται σαν : $X_p=\sum_{i=1}^{n} a^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ Η συνάρτηση α είναι το διανυσματικό πεδίο X. Αν συνιστώσες της α^i είναι λείες το πεδίο αυτό λέγεται λείο C^∞

Αν f μια λεία συνάρτηση και X ένα λείο διανυσματικό πεδίο ορίζουμε το fX λείο διανυσματικό πεδίο ως ακολούθως $(fX)(p)=f(p)X_p=\sum_{i=1}^{n}(fa^i)(p)\frac{\partial}{\partial x^i}|_p$, $p\in U$

Έστω p(x,y) σημείο και $X=\cos x\frac{\partial}{\partial x}+\sin\frac{\partial}{\partial y}=<\cos x,\cos y>$ το διανυσματικό πεδίο του σχ1 στο R^2

Στο σχ2 βλέπουμε το διανυσματικό πεδίο $X=-x\frac{\partial}{\partial x}-y\frac{\partial}{\partial y}-z\frac{\partial}{\partial z}=<-x,-y,-z>$ στο R^3





Σχήμα 1 διανυσματικό πεδίο X=<cosx,siny> Σχήμα 2 διανυσματικό πεδίο X= <-x,-y,-z>

Έστω X ένα λείο διανυσματικό πεδίο στο $U\subseteq R^n$ και f λεία συνάρτηση ορισμένη στο U.Ορίζουμε την συνάρτηση Xf στο U με:

$(Xf)(p)=<\alpha^1(p),\alpha^2(p),\ldots,\alpha^n(p)> <\frac{\partial f(p)}{\partial x^1},\frac{\partial f(p)}{\partial x^2},\ldots,\frac{\partial f(p)}{\partial x^n}>=\sum_{i=1}^{n} a^i(p)\frac{\partial f(p)}{\partial x^i}$

Η παραπάνω συνάρτηση είναι λεία και ικανοποιεί τον κανόνα του Leiblitz δηλαδή

X(fg)=(Xf)g+f(Xg)

1.5 Δυϊκός χώρος

Έστω V διανυσματικός χώρος επί του R. Με Hom(V,R) συμβολίζουμε το διανυσματικό χώρο όλων των γραμμικών συναρτήσεων $f:V\to R$. Ο δυϊκός χώρος συμβολίζεται με V^*και ισούται με το διανυσματικό χώρο Hom(V,R) . Άρα V^* **={** $f:V\to R$ / f γραμμική}.Τα στοιχεία του χώρου αυτού λέγονται συνδιανύσματα (convectors)

Έστω $\{e^\iota\}$ με $\iota\in\{1,2,\ldots,\eta\}$ η κανονική βάση του V .Κάθε $v\in V$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός $v=\sum_{i=1}^{n} v^i e^i$.

Έστω $\alpha^\iota:V\to R$ γραμμική συνάρτηση με $:\alpha^\iota(e^j)=\delta^\iota_j=\begin{cases} 1 & \alpha\nu\ \iota=j \\ 0 & \alpha\nu\ \iota\neq j\end{cases}$

$\alpha^\iota(v)=\alpha^\iota(\sum_{j=1}^{n} v^i e^j)=\sum_{j=1}^{n} v^i a^i(e^j)=\sum_{j=1}^{n} v^i\delta^\iota_j=v_\iota$

Οι συναρτήσεις $\{\alpha^\iota\}$ αποτελούν βάση του V^*

Παράδειγμα

Έστω $V=\{v^1=(1,-1),v^2=(-1,-1)\}$ μια βάση του R^2**.** Θα βρώ τη δυϊκή βάση $V^*=\{a^1,a^2\}$

$a^1(v^1)=1\Rightarrow a^2((1,-1))=a^1(e^1)-a^1(e^2)=1$

$a^1(v^2)=0\Rightarrow a^1((-1,-1))=-a^1(e^1)-a^1(e^2)=0$ από αυτές λύνοντας το σύστημα έχω $a^1(e^1)=1/2$, $a^2(e^2)=-1/2$

Όμοια εργαζόμενοι συμπεραίνουμε ότι : $a^2(e^1)=-1/2$,$a^2(e^2)=-1/2$

Συνεπώς $a^1(x,y)=xa^1(e^1)+ya^1(e^2)=1/2\ x-1/2\ y$, $a^2(x,y)=xa^2(e^1)+ya^2(e^2)=-1/2\ x-1/2\ y$

Άρα η δυϊκή βάση είναι

$V^*=\{\ a^1(x,y)=1/2\ x-1/2\ y\ ,\ a^2(x,y)=-1/2\ x-1/2\ y\}$

Μία συνάρτηση $f:V^k\to R$ με V διανυσματικό χώρο ονομάζεται **κ-γραμμική** αν για κάθε $\alpha,\beta\in R$ και $v,w\in V$

ισχύει $f(\ldots,\alpha v+\beta w,\ldots)=\alpha f(\ldots,v,\ldots)+\beta f(\ldots,w,\ldots)$,και η γραμμικότητα ισχύει για κάθε μεταβλητή. Το σύνολο των κ-γραμμικών συναρτήσεων συμβολίζεται με $L_k(V)$

Ορισμός 4 Μία κ-γραμμική συνάρτηση λέγεται **συμμετρική** αν $f(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)},\ldots, v_{\sigma(\kappa)})=f(v_1, v_1,\ldots, v_k)$ για κάθε μετάθεση σ(ι)

Μία κ-γραμμική συνάρτηση λέγεται **εναλλάσσουσα** αν $f(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)},\ldots, v_{\sigma(\kappa)})=(sgn\sigma)f(v_1, v_1,\ldots, v_k)$ για κάθε μετάθεση σ(ι) με sgn(σ)=1 αν σ άρτια και sgn(σ)=-1 αν σ περιττή Συμβολίζουμε με $A_\kappa(V)$ το σύνολο των κ-γραμμικών συναρτήσεων επί του V

Ορισμός 5 Έστω $f\in L_k(V)$,$g\in L_m(V)$ Το τανυστικό γινόμενο $f\otimes g\in L_{k+m}(V)$ ορίζεται ως:

$$f\otimes g(v_1, v_1,\ldots, v_{k+m}) =f(v_1, v_1,\ldots, v_k)g(v_1, v_1,\ldots, v_m)$$

Ορισμός 6 Έστω $f\in L_k(V)$,$g\in L_m(V)$.Το εξωτερικό γινόμενο (wedge product) $f\wedge g$ ορίζεται ως:

$$(f\wedge g)(v_1, v_1,\ldots, v_{k+m})=\frac{1}{k!m!}\sum_{\sigma\in S_{k+m}}(sgn\sigma)f(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)},\ldots, v_{\sigma(\kappa)})g(v_{\sigma(k+1)}, v_{\sigma(k+2)},\ldots, v_{\sigma(k+m)})$$

Παράδειγμα

Έστω $f\in A_2(V)$ και $g\in A_1(V)$ Το $f\wedge g\in A_3(V)$. Αν $v_1,v_2,v_3\in V$

$$S_3=\left\{ \begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{bmatrix}\right\}$$

Τα αντίστοιχα sgnσ είναι +,-,+,-+,- και

$$f\wedge g(v_1,v_2,v_3)=\frac{1}{2!1!}\{f(v_1,v_2)g(v_3)-f(v_1,v_3)g(v_2)+f(v_2,v_3)g(v_1)-f(v_3,v_2)g(v_1)+f(v_3,v_1)g(v_2)-f(v_2,v_1)g(v_3)\}=$$

$$=f(v_1,v_2)g(v_3)+f(v_2,v_3)g(v_1)+f(v_3,v_1)g(v_2)$$

Εφόσον $f(v_1,v_2)g(v_3)=-f(v_2,v_1)g(v_3)$, $f(v_2,v_3)g(v_1)=-f(v_3,v_2)g(v_1)$, $f(v_3,v_1)g(v_2)=-f(v_1,v_3)g(v_2)$

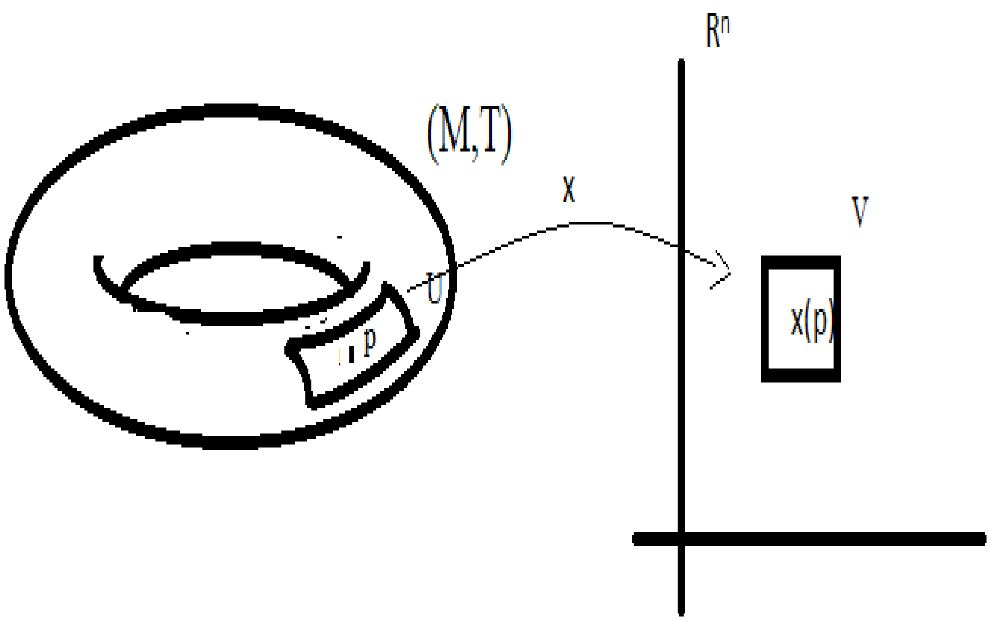
2 MANIFOLD (πολλαπλότητα)

2.1 Με τον όρο πολλαπλότητα διάστασης η ,ορίζουμε ένα γεωμετρικό αντικείμενο M, το οποίο τοπικά (σε κάθε γειτονιά ενός σημείου p ∈M)μπορεί να προσεγγισθεί από ένα ανοιχτό υποσύνολο του R^n η τοπική αυτή προσέγγιση του R^n γίνεται χρησιμοποιώντας κατάλληλα τοπικά συστήματα συντεταγμένων που μας επιτρέπουν να μελετάμε έννοιες όπως τη διαφορισιμότητα ,τον εφαπτόμενο χώρο, τη σημειακή παραγώγιση.

Παράδειγμα: Η σφαίρα η ο δακτύλιος αποτελούν πολλαπλότητες στον R^3 . Η κίνηση ενός αεροπλάνου μπορεί να καθορισθεί από τη θέση του και την πορεία του με 5 συντεταγμένες .Άρα έχουμε μία πολλαπλότητα του R^5

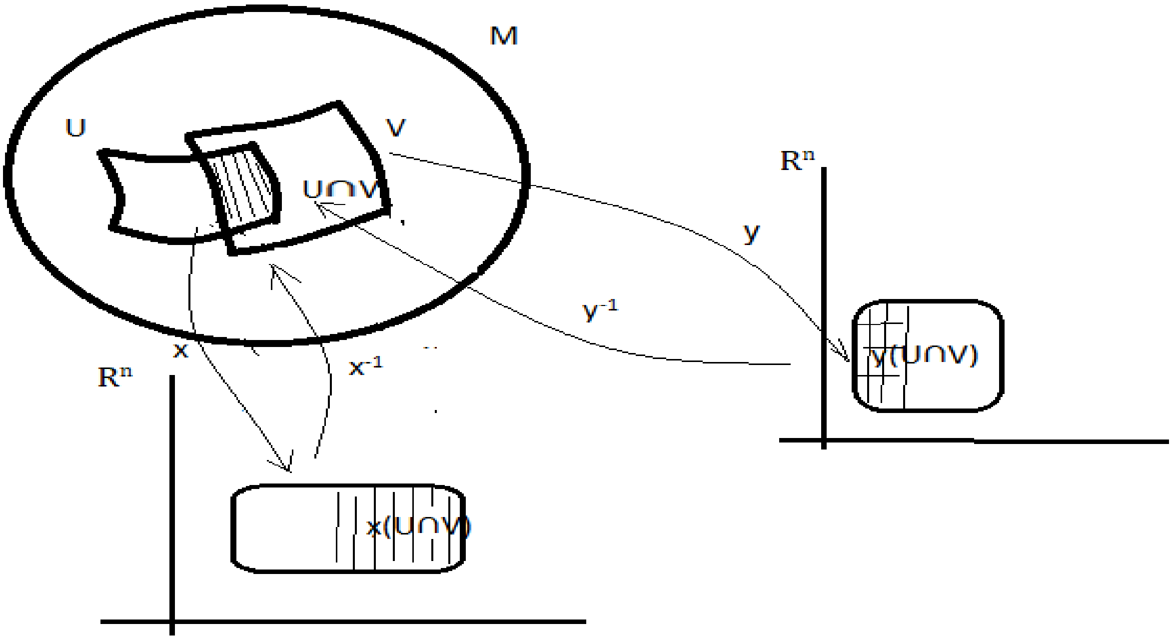
Ορισμός 6 Ένας τοπολογικός χώρος (M,T) είναι n-διάστατο manifold αν

- (M,T) είναι Hausdorff
- (M,T) είναι αριθμήσιμος δεύτερης τάξης(second-countable)
- (M,T) είναι τοπικά Ευκλείδειος. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε p∈M υπάρχει ένα ανοικτό υποσύνολο U του M με p∈U , ένα ανοικτό υποσύνολο V του R^n και ένας ομοιομορφισμός x: U→V. Το ζεύγος (U,x) ονομάζεται chart και το U είναι homeomorphic του V (U≅V)



Σχήμα 3 Το chart(U,x) στο σημείο p για το manifold (M,T)

Ας θεωρήσουμε ένα n-manifold M και δύο charts $(U, x: U \to R^n)$ και $(V, y: V \to R^n)$, με $U \cap V \neq \emptyset$.



Σχήμα 4 Συναρτήσεις μετάβασης $x \circ y^{-1}$ και $y \circ x^{-1}$ των chart (U,x) και (V,y)

Τα δυο παραπάνω charts, ονομάζονται συμβατά (compatible) αν:

$x \circ y^{-1}: y(U \cap V) \to x(U \cap V)$ και $y \circ x^{-1}: x(U \cap V) \to y(U \cap V)$ είναι C^{∞}.Οι δυο συναρτήσεις $x \circ y^{-1}$ και $y \circ x^{-1}$ ονομάζονται συναρτήσεις μετάβασης (transition functions)

Αν τώρα θεωρήσω μια συλλογή από συμβατά charts $\mathbb{A}=\{U_\iota, x_\iota\}$ που είναι C^{∞} ώστε η ένωσή τους να καλύπτει όλο το M ,δηλαδή $\bigcup_{\iota \in I} U_\iota = M$ τότε η $\mathbb{A}$ ονομάζεται άτλαντας(atlas). Ένας άτλαντας ονομάζεται μεγιστικός (maximal) αν δεν υπάρχει άτλαντας που να τον εμπεριέχει

Παράδειγμα .Έστω η σφαίρα $S=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=1\}$ και τα σημεία A(0,0,1) (βόρειος πόλος) και B(0,0,-1)

(νότιος πόλος) .Τα charts (U,f) , (V,g) με U=S-{A} , V=S-{B} και $f: U \to R^2$ $g: V \to R^2$ και τύπους

$f(x,y,z)=(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z})$ και $g(x,y,z)=(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z})$ που είναι '1-1' έχουν αντίστροφες συναρτήσεις που προκύπτουν από τη λύση των συστημάτων

$\{u_1=\frac{x}{1-z} \quad u_2=\frac{y}{1-z}, x^2+y^2+z^2=1\} \Rightarrow \{x=2\frac{u_1}{u_1^2+u_2^2+1}, y=2\frac{u_2}{u_1^2+u_2^2+1}, z=\frac{u_1^2+u_2^2-1}{u_1^2+u_2^2+1}\}$

Άρα ορίζεται η f^{-1} με $f^{-1}(u_1,u_2)=(2\frac{u_1}{u_1^2+u_2^2+1}, 2\frac{u_2}{u_1^2+u_2^2+1}, \frac{u_1^2+u_2^2-1}{u_1^2+u_2^2+1})$

Ομοίως $\{v_1=\frac{x}{1-z} \quad v_2=\frac{y}{1-z}, x^2+y^2+z^2=1\} \Rightarrow \{x=2\frac{v_1}{v_1^2+v_2^2+1}, y=2\frac{v_2}{v_1^2+v_2^2+1}, z=\frac{1-v_1^2-v_2^2}{v_1^2+v_2^2+1}\}$

και $g^{-1}(v_1,v_2)=\left(2\frac{v_1}{v_1^2+v_2^2+1}, 2\frac{v_2}{v_1^2+v_2^2+1}, \frac{1-v_1^2-v_2^2}{v_1^2+v_2^2+1}\right)$

$g(f^{-1}(u_1,u_2))=\left(\frac{u_1}{u_1^2+u_2^2}, \frac{u_2}{u_1^2+u_2^2}\right)$ $\qquad f(g^{-1}(v_1,v_2))=\left(\frac{v_1}{v_1^2+v_2^2}, \frac{v_2}{v_1^2+v_2^2}\right)$

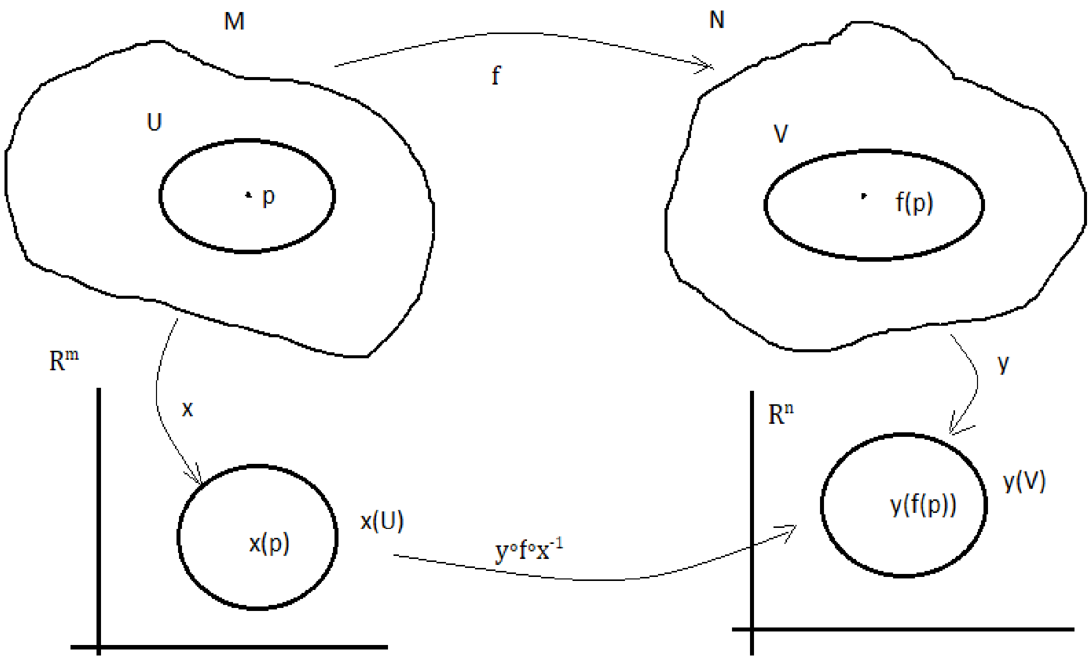
Ορισμός 7 Έστω M πολλαπλότητα και $f:M\to R$ και $p\in M$ .H f ονομάζεται λεία στο p, αν υπάρχει chart (U,x) στο p, ώστε η συνάρτηση $f\circ x^{-1}:x(U)\subseteq R^n\to R$ να είναι λεία στο x(p).H f είναι λεία αν είναι λεία σε κάθε σημείο του M.

Αν θεωρήσουμε ένα άλλο chart (V,y) του $p\in U\cap V$τότε η f θα συνεχίσει να είναι λεία διότι

$f\circ y^{-1}=(f\circ x^{-1})\circ(x\circ y^{-1})$ που είναι λεία στο y(p) Αυτό δείχνει ότι υπάρχει ανεξαρτησία ως προς τον άτλαντα που θα επιλέξουμε για να δείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι λεία

Ορισμός 8 Έστω M,N πολλαπλότητα διαστάσεων m,n αντίστοιχα , $f:M\to N$ συνεχής απεικόνιση και ένα σημείο $p\in M$. Αν υπάρχουν charts (U,x) του p και (V,y) του f(p) ,τότε η f ονομάζεται λεία στο p

αν $y\circ f\circ x^{-1}:x(f^{-1}(V)\cap U)\subseteq R^m\to R^n$ είναι διαφορίσιμη στο x(p).
H f ονομάζεται λεία αν είναι λεία σε κάθε σημείο της $p\in M$

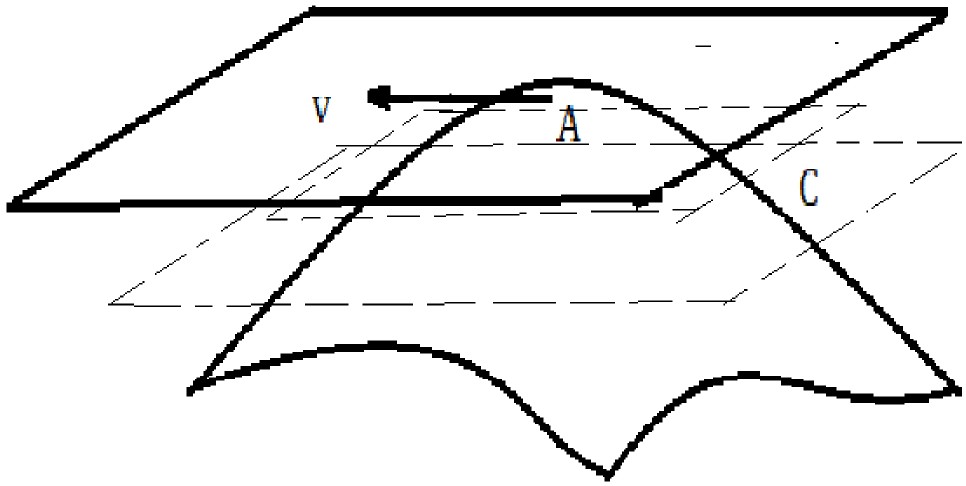


Σχήμα 5 H απεικόνιση $f:M\to N$ μέσω της $y\circ f\circ x^{-1}:R^m\to R^n$

Ορισμός 9 Έστω M,N manifold διαστάσεων m,n αντίστοιχα και $f:M\to N$ μια λεία απεικόνιση '1-1' και επί με f^{-1} επίσης λεία .Τότε η f ονομάζεται διφεομορφισμός (diffeoformism)

2.2 Εφαπτόμενο διάνυσμα ,εφαπτόμενος επίπεδο

Ας θεωρήσουμε τον R^3 και ένα σημείο Α πάνω σε μία επιφάνεια C (Σχ.3) Τρία σημεία της επιφάνειας C, προσεγγίζουν στο Α ορίζοντας ένα επίπεδο, που τέμνει τη C. Καθώς αυτά συγκλίνουν προς το Α, θα ορίζεται ένα επίπεδο που θα συγκλίνει προς το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια C. Αυτό είναι μια διαισθητική προσέγγιση του εφαπτόμενου επιπέδου στη C . Ένα διάνυσμα v με αρχή το Α που ανήκει στο επίπεδο αυτό ,είναι ένα εφαπτόμενο διάνυσμα της C



Σχήμα 6 Τα διατέμνοντα επίπεδα συγκλίνουν προς το εφαπτόμενο

Γενικεύοντας ,θεωρούμε το σύνολο όλων των germs στο σημείο p ενός λείου manifold.Το σύνολο αυτό το συμβολίζουμε με $C_p^\infty(M)$ Ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στο p είναι μια απεικόνιση D(παραγώγιση στο σημείοp) τέτοια ώστε:

D: $C_p^\infty \to R$ που ικανοποιεί

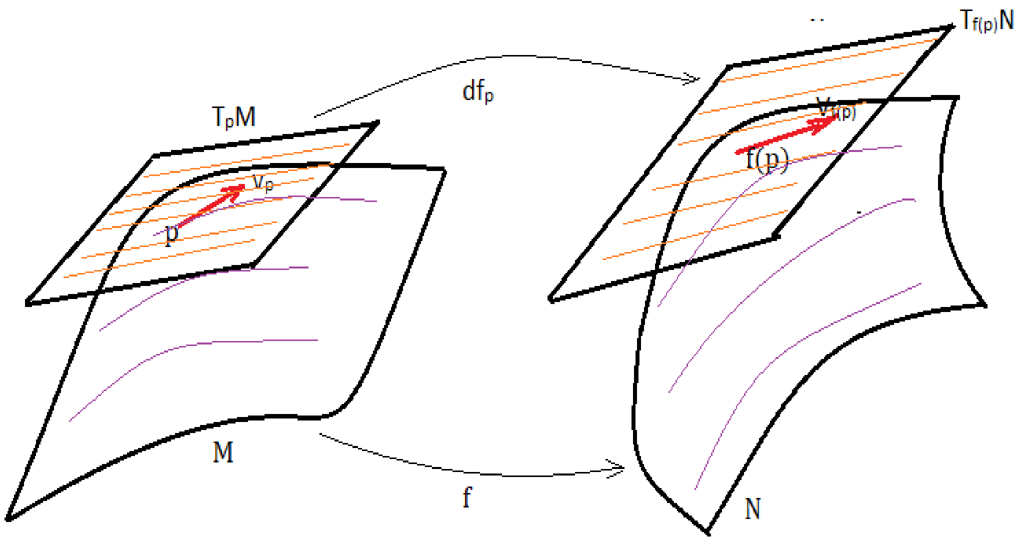
- D(af+bg)=aD(f)+bD(g)
- D(fg)=(Df)g+(Dg)f
  για κάθε u,f,g ∈ C_p^∞(M) a,b∈R

Το σύνολο όλων των εφαπτόμενων διανυσμάτων στο p ονομάζεται εφαπτόμενος χώρος και συμβολίζεται με T_pM

2.3 Το διαφορικό

Ορισμός 10 Έστω M,N λεία manifold διαστάσεων m,n αντίστοιχα με f:M→N απεικόνιση και σημείο p∈M. Το διαφορικό της f στο p είναι η απεικόνιση

$df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ με : $df_p(v_p)(\varphi) = v_p(\varphi \circ f)$ με $v_p \in T_pM$ και φ germ της f



Σχήμα 7 Το διαφορικό df_p:$T_pM \to T_{f(p)}N$ στο σημείο p

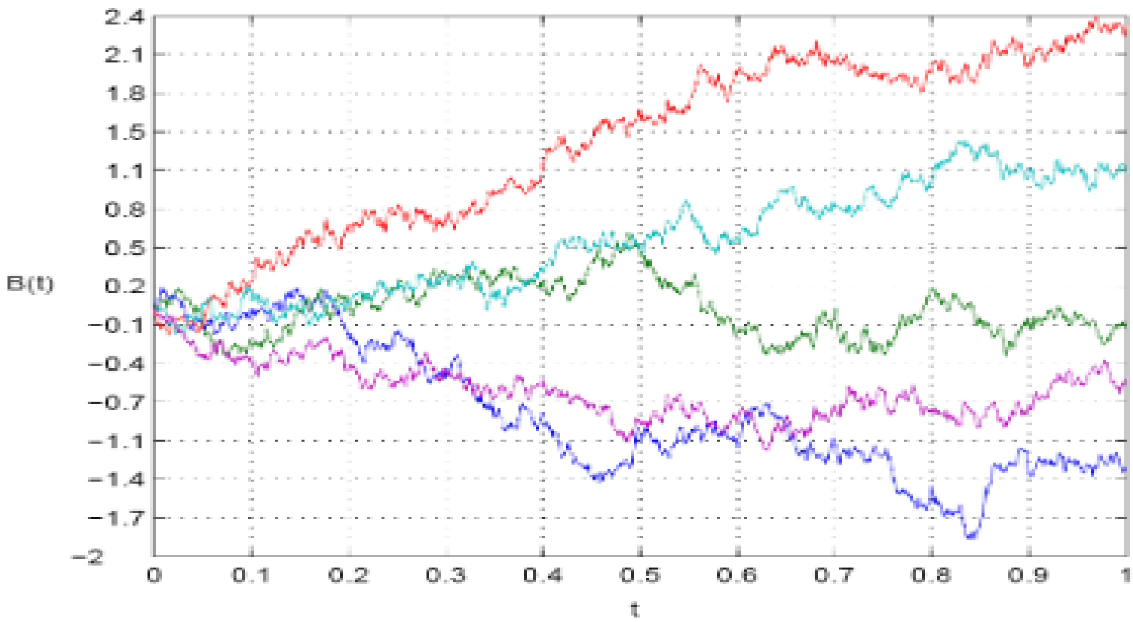
3 Η Κίνηση Brown σε n διαστάσεις

3.1 Η μαθηματική μελέτη της κίνησης Brown προέκυψε από την μελέτη του Einstein των φαινομένων που σχετίζονται με την κινητικότητα των μορίων και τη διάδοση της θερμότητας..

Ορισμός 1 Η κίνηση Brown (μπορεί να τη συναντήσουμε και ως διαδικασία Wiener) είναι μια στοχαστική διαδικασία $\{W_t \ / \ t \geq 0\}$ που έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Αν $t_0<t_1<t_2<t_3<\ldots<t_n$ τότε οι τυχαίες μεταβλητές $W_{t_1} - W_{t_0}$, $W_{t_2} - W_{t_1}$,……, , $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$

   είναι ανεξάρτητες (δηλαδή έχουμε ανεξάρτητες προσαυξήσεις)
2. Αν $t>s\geq 0$ τότε $W_t - W_s \sim N(0,t-s)$
3. Οι τροχιές της κίνησης Brown είναι συνεχείς συναρτήσεις $t \longmapsto W_t$ σχεδόν βέβαια



Σχήμα 8 Γραφήματα από πέντε τροχιές κίνησης Brown

Πρόταση

Ισχύουν οι ιδιότητες:

ι)$\sup\{\sum_{i=0}^{n-1} |W(t_{i+1}) - W(t_i)|\}=\infty$

ιι)$\sup\{\sum_{i=0}^{n-1} |W(t_{i+1}) - W(t_i)|^2\}=T$

ιιι) Η W_t είναι martingale

ιv) Αν θεωρήσουμε την $M_t = W_t^2 - t$ τότε και αυτή είναι ένα martingale

Απόδειξη της δεύτερης ιδιότητας:

$E[\sum_{i=0}^{n-1} |W(t_{i+1}) - W(t_i)|^2]= \sum_{i=0}^{n-1} E[|W(t_{i+1}) - W(t_i)|^2]= \sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i) = t_n-t_0=T$
διότι $W(t_{i+1}) - W(t_i) \sim N(0, t_{i+1}-t_i)$

Έστω $\mathcal{F}_t$=σ(W_r ,r≤t) η σ-άλγεβρα που παράγεται από την κίνηση Brown ως τη χρονική στιγμή t. Η $\mathcal{F}_t$ περιέχει όλη την πληροφορία για το τι συνέβη μέχρι τη χρονική στιγμή t στην κίνηση Brown και ονομάζεται διήθηση.

Απόδειξη της ιιι)

$E[W_t/\mathcal{F}_s]= E[W_t - W_s + W_s/\mathcal{F}_s]= E[W_t - W_s/\mathcal{F}_s]+ E[W_s/\mathcal{F}_s]= W_s$ (διότι $W_t - W_s \sim N(0,t-s)$). Επομένως η W_t είναι martingale

Απόδειξη της ιν)

$E[W_t^2 - t/ F_s]= E[\{W_t - W_s + W_s\}^2 - t/ \mathcal{F}_s]= E[\{W_t - W_s\}^2 / F_s]+ E[\{W_s\}^2 / F_s]+2 E[W_t - W_s/ F_s]E[W_s / \mathcal{F}_s]-t=$

$=t-s+ W_s^2 - t= W_s^2 - s$ άρα η M_t είναι martingale.

Θεώρημα Levy: Έστω X_t μία στοχαστική διαδικασία και $\mathcal{F}_t$=σ(X_r ,r≤t) η διήθηση που παράγεται από αυτήν .Η X_t είναι κίνηση Brown αν και μόνο αν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες

- $X_0=0$
- Οι τροχιές της X_t είναι συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου
- Η X_t είναι martingale ως προς την $\mathcal{F}_t$
- Η X_t^2-t είναι martingale ως προς την $\mathcal{F}_t$

3.2 Κίνηση Brown σε d διαστάσεις

Ορισμός 2 Μια d-διάστατη κίνηση Brown είναι μία στοχαστική διαδικασία $W_t=(W_{1,t} ,W_{2,t},\ldots W_{d,t})$ που παίρνει τιμές στο R^d και οι $W_{1,t}$, $W_{2,t}$,…, $W_{n,t}$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους κινήσεις Brown δηλαδή:

i) $W_0= (W_{1,0} ,W_{2,0},\ldots W_{n,t})=(0,0,\ldots.0)$

ii) Αν $t_0<t_1<t_2<t_3<\ldots..<t_n$ τότε $W_{t_0}, W_{t_1}-W_{t_0},\ldots\ldots W_{t_N}-W_{t_{N-1}}$

είναι ανεξάρτητες (δηλαδή έχουμε ανεξάρτητες προσαυξήσεις)

iii) Οι προσαυξήσεις $W_{t+s} - W_s \sim N(0,\Sigma)$ με $\Sigma=tI$ με I dxd μοναδιαίο πίνακα δηλαδή για s,t≥0

$$P(W_{s+t}-W_s \in A)=\int_A \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} e^{\frac{-|x|^2}{2t}} \quad \text{με } A\in B(R^d)$$

iv) Οι τροχιές της αι συνεχείς με πιθανότητα 1 δηλαδή η συνάρτηση $t \longmapsto W_t$ είναι συνεχής

3.3 Στοχαστική ολοκλήρωση

Θεωρούμε το χώρο πιθανοτήτων (Ω,$\mathcal{F}$,P). Έστω συνάρτηση f:(0,∞)xΩ→R ,μια τυχαία συνάρτηση η οποία εξαρτάται από μια μονοδιάστατη κίνηση Brown $W_t(\omega)$ που ξεκινάει από το 0

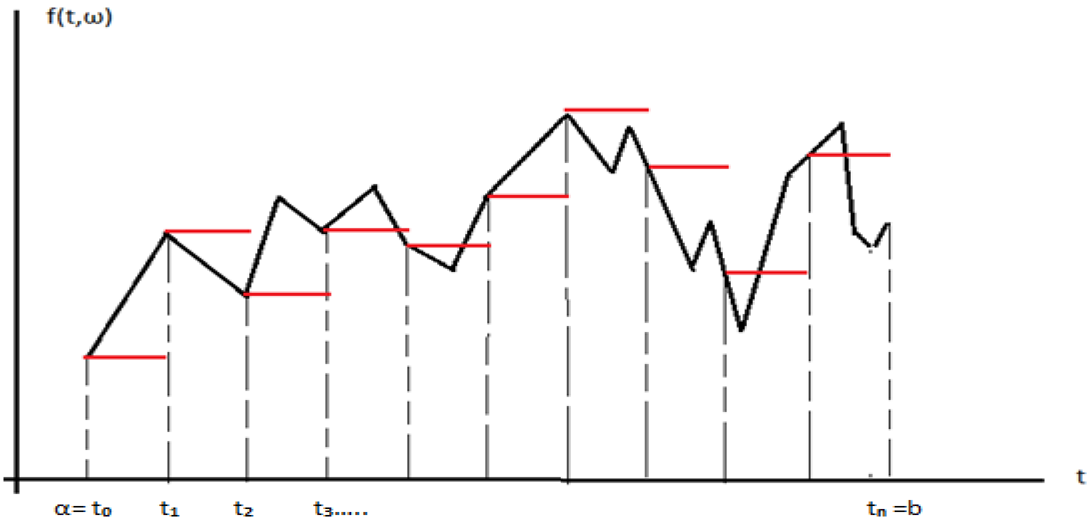
Θέλουμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^b f(t,\omega)dW_t(\omega)$

Θεωρούμε τη διαμέριση $\alpha= t_0<t_1<t_2<t_3<\ldots..<t_n =b$ του διαστήματος [α,b] και προσεγγίζουμε την $f(t,\omega)$ μέσω της διαδικασίας βήματος:

$$f(t,\omega)\cong \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i,\omega)\, \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1})}(t)$$

Το ολοκλήρωμα Itô μπορεί να ορισθεί σαν όριο στον L^2 :

$$\int_\alpha^b f(t,\omega)dW_t(\omega)=\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(t_i,\omega)[W_{t_{i+1}}(\omega)-W_{t_i}(\omega)]$$



Σχήμα 9 Η f(t,ω) είναι η μαύρη γραμμή ,η προσέγγιση είναι η κόκκινη κλιμακωτή γραμμή

Παράδειγμα Να υπολογισθεί το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int_0^T dW_t$ χρησιμοποιώντας τον ορισμό

Η f(t,ω)=1 Αν θεωρήσουμε τη διαμέριση του [0,T] σε n ίσα τμήματα της μορφής $[\frac{iT}{n}, \frac{(i+1)T}{n})$,i={0,1,..,n-1)}

τότε: $\int_0^T dW_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1}[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}] = W_T - W_0 = W_T$

Ορίζουμε το χώρο M^2 που αποτελείται από τις στοχαστικές διαδικασίες f(t) που μπορούν να προσεγγισθούν από ακολουθίες διαδικασιών βήματος και $E[\int_\alpha^b |f(t)|^2 dt < \infty$.
Επίσης το χώρο L^2 των τυχαίων μεταβλητών η για τις οποίες $E[\eta^2] < \infty$

Πρόταση

Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

α) $E[\int_0^T f(t)dW_t] = 0$

β) $E[|\int_0^T f(t)dW_t|^2] = \int_0^T E[f(t)]^2 dt$ (ισομετρία Ito)

γ) Η γραμμικότητα, δηλαδή για δύο στοχαστικές διαδικασίες f,g ισχύει $I(\lambda f+\mu g)=\lambda I(f)+\mu I(g)$ λ,μ∈R

δ) Έστω $f \in M^2$. Η $I(t) = \int_0^t f(r)dW_r$ είναι martingale

Απόδειξη (α)

$I_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}] \Rightarrow E[I_n] = E\{\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}]\} = \sum_{i=0}^{n-1} E[f(t_i)]E[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}] = 0$
διότι : $W_{t_{i+1}} - W_{t_i} \sim N(0, t_{i+1} - t_i)$

$E[I_n^2] = \sum_{i=0}^{n-1} E[f(t_i)^2]E[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}]^2 = \sum_{i=0}^{n-1} E[f(t_i)^2](t_{i+1} - t_i) \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^T E[f(t)]^2 dt$
Αν $f,g \in M^2$ τότε $E[\int_0^T f(t)dW_t \int_0^T g(t)dW_t] = E[\int_0^T f(t)g(t)dt]$

Απόδειξη(β)

I(f)= $\int_0^T f(t)dW_t$ και I(g)= $\int_0^T g(t)dW_t$ Ισχύει :

I(f) I(g)=1/4(|I(f)+I(g)|^2 -|I(f)-I(g)|^2)=> $E[\int_0^T f(t)dW_t \int_0^T g(t)dW_t]$=E[I(f) I(G)]=
1/4{E[|I(f)+I(g)|^2]-E[|I(f)-I(g)|^2]}= $\frac{1}{4}$E[|I(f)+I(g)|^2]- $\frac{1}{4}$E[|I(f)-I(g)|^2]=
$\frac{1}{4}E[\int_0^T |f(t)+g(t)|^2 dW_t]$- $\frac{1}{4}E[\int_0^T |f(t)-g(t)|^2 dW_t]$= $\frac{1}{4}E[\int_0^T [|f(t)+g(t)|^2 - |f(t)-g(t)|^2]\, dW_t$=(ισομετρία Ito)
$=E\int_0^T [(f(t)g(t)]dt$

Απόδειξη(δ)

$E[\int_0^t f(r)dW_r/\mathcal{F}_s]=E[\int_0^s f(r)dW_r+\int_s^t f(r)dW_r/\mathcal{F}_s]=E[\int_0^s f(r)dW_r/\mathcal{F}_s]+E[\int_s^t f(r)dW_r/\mathcal{F}_s]=$
$=E[\int_0^s f(r)dW_r/\mathcal{F}_s]+0=I(s)$

Ορισμός 3 Μία διαδικασία Ito X_t είναι μία στοχαστική διαδικασία πάνω στο (Ω, F,P) που μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$X_t=X_0+\int_0^t u(s,\omega)ds+\int_0^t v(s,\omega)dW_s$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί και να γραφεί σε διαφορική μορφή ως $dX_t=udt+vdW_t$

Το λήμμα Ito

Έστω f:R→R μια C^2 συνάρτηση , η W_t κίνηση Brown και $Y(t)=f(W_t)$ Η Y(t) μπορεί να εκφρασθεί:

$$Y(t)= Y(0)+\int_0^t f'(W(s))dW_s+1/2\int_0^t f''(W(s))ds$$

Απόδειξη:

Εφαρμόζοντας τη σειρά Taylor μέχρι τη δεύτερη παράγωγο έχουμε:

$Y(t_{i+1})=f(W_{t_{i+1}})=f(W_{t_i}+W_{t_{i+1}}-W_{t_i})=f(W_{t_i})+f'(W_{t_i})(W_{t_{i+1}}-W_{t_i})+1/2\, f''(W_{t_i})(W_{t_{i+1}}-W_{t_i})^2+O(\ ) =>$

$Y(t_{i+1})-Y(t_i)= f'(W_{t_i})(W_{t_{i+1}}-W_{t_i})+1/2\, f''(W_{t_i})(W_{t_{i+1}}-W_{t_i})^2+O(\ )$ (1)
$Y(T)=Y(T)-Y(t_{n-1})+Y(t_{n-1})-Y(t_{n-2})+\ldots..+Y(t_2)-Y(t_1)+Y(t_1)-Y(0)\overset{(1)}{=}$

$Y(0)+\sum_{i=0}^n f'(W_{t_i})(W_{t_{i+1}}-W_{t_i})+1/2\sum_{i=0}^n f''(W_{t_i})(W_{t_{i+1}}-W_{t_i})^2\ \overrightarrow{n\to\infty}$ (Το όριο με την έννοια του L^2) $=Y(0)+\int_0^t f'(W(s))dW_s+1/2\int_0^t f''(W(s))ds$

<u>Παράδειγμα</u> .Με τη χρήση του λήμματος Ito να υπολογισθούν τα $\int_0^t W_s^2 dW_s$ και $\int_0^t W_s dW_s$

Για το $\int_0^t W_t dW_t$:Έστω f(χ)=$\frac{1}{2}x^2$ =>f'(x)=x ,f''(x)=1 , $f(W_t)=\int_0^t f'(W_s)dW_s+\frac{1}{2}\int_0^t f''(W_s)ds$=>

$\frac{1}{2}W_t^2=\int_0^t W_s dW_s+\frac{1}{2}\int_0^t ds=>\int_0^t W_s dW_s=\frac{1}{2}W_t^2-\frac{1}{2}\int_0^t ds=\frac{1}{2}W_t^2-\frac{1}{2}t$ (1)

Για το $\int_0^t W_s^2 dW_s$: Έστω f(x)=$\frac{1}{3}x^3$=>f'(x)=x^2,f''(x)=2x $f(W_t)=\int_o^t f'(W_s)dW_s+\frac{1}{2}\int_o^t f''(W_t)ds$=>

$\frac{1}{3}W_t^3=\int_0^t W_s^2 dW_s+\frac{1}{2}\int_0^t 2W_s ds=>\int_0^t W_s^2 dW_s=\frac{1}{3}W_t^3-\int_0^t W_s ds\overset{(1)}{=}\frac{1}{3}W_t^3-\frac{1}{2}W_t^2+\frac{1}{2}t$

<u>Παράδειγμα</u> Με τη χρήση του λήμματος Ito να υπολογισθούν τα $\int_0^t e^{W_s} dW_s$

Έστω f(x)=e^x=>f΄(x)= e^x=> f΄΄(x)=e^x Άρα $f(W_t)=e^{W_t}=e^{W_0}+\int_0^t e^{W_s} dW_s$ $-1/2\int_0^t e^{W_s} dW_s$ =>

$\int_0^t e^{W_s} dW_s$ $=e^{W_t}-1-1/2\int_0^t e^{W_s} dW_s$

4 Ο ΓΑΝΝΗΤΟΡΑΣ ΤΕΛΕΣΤΗΣ ΤΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ BROWN

Έστω W(t) κίνηση Brown με W(0)=x και f:R→R μια C^2 συνάρτηση

$E[f(W(t))- f(W(0))]= E[f(W(t))- f(x)]=E(f(x)+\int_0^t f'(W(s))dW_s+1/2\int_0^t f''(W(s))ds-f(x))=$

$\cancel{E(\int_0^t f'(W(s))dW_s)}+ 1/2E(\int_0^t f''(W(s))ds)= 1/2\int_0^t E(f''(W(s)))ds$

Έστω L_f:f↦ φ και $\phi(x)= \lim_{t\to 0}\frac{E[f(W(t))- f(W(0))]}{t}$

$L_f(x)=\lim_{t\to 0}\frac{E[f(W(t))- f(W(0))]}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1/2\int_0^t E(f''(W(s)))ds}{t}=1/2f''(x)$

Είδαμε αρχικά ότι η πιθανότητα μετάβασης στην κίνηση Brown είναι μια κατανομή Gauss ,δηλαδή

$P(t,x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp(-\frac{(x-y)^2}{2t})$ Από αυτή τη σχέση με παραγωγίσεις προκύπτει : $\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$

Αν τώρα η κίνηση Brown είναι στον R^2 τότε $P(t,x,y)=\frac{1}{2\pi t}\exp(-\frac{(y-x_1)^2+(y-x_2)^2}{2t})$ με $x=(x_1,x_2)$

Ακολουθώντας τα βήματα που κάναμε στη μία διάσταση θα προκύπτει για 3 διαστάσει

$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}$

5 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ BROWN

Θεωρούμε ένα submanifold S διάστασης p που είναι λεία υποσύνολα του R^d

Έστω π(x) η ορθογώνια προβολή του R^d στο $T_x(S)$ και H(x) το διάνυσμα της μέσης καμπυλότητας Για την περίπτωση σφαίρας θεωρούμε

$\phi: R^3 \to R$ με $\phi(x)=||x||^2-1 \Rightarrow \phi(x_1,x_2,x_3)=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}-1 \Rightarrow \partial_{x_i}(x)=x_i/(x_1^2+x_2^2+x_3^2) \Rightarrow$

$$\left\{ \partial_{x_1}\left(\partial_{x_1}(\varphi(x))\right)=\frac{x_2^2+x_3^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2},\ \partial_{x_2}\left(\partial_{x_2}(\varphi(x))\right)=\frac{x_1^2+x_3^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2},\ \partial_{x_3}\left(\partial_{x_3}(\varphi(x))\right)=\frac{x_2^2+x_1^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2} \right\}(1)$$

Το $\pi(x)=I_3-\begin{bmatrix}\frac{x_1}{||x||}\\ \frac{x_2}{||x||}\\ \frac{x_3}{||x||}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{x_1}{||x||} & \frac{x_2}{||x||} & \frac{x_3}{||x||}\end{bmatrix}=I_3-\frac{1}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\begin{bmatrix}x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3\\ x_1x_2 & x_2^2 & x_3x_2\\ x_1x_3 & x_3x_2 & x_3^2\end{bmatrix}=$

$$\frac{1}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\begin{bmatrix}x_2^2+x_3^2 & -x_1x_2 & -x_1x_3\\ -x_1x_2 & x_1^2+x_3^2 & -x_3x_2\\ -x_1x_3 & -x_3x_2 & x_2^2+x_1^2\end{bmatrix}$$

Το $H(x)=\{\sum_{i=1}^{3}\partial_{x_i}\left(\partial_{x_i}(\varphi(x))\right)\}\,\partial(\varphi(x))=$(λόγω (1))$=2\begin{bmatrix}\frac{x_1}{||x||}\\ \frac{x_2}{||x||}\\ \frac{x_3}{||x||}\end{bmatrix}$

Έστω τώρα $X_t=\begin{bmatrix}X_t^1\\ X_t^2\\ X_t^3\end{bmatrix}$ διάχυση στον R^3 που ορίζεται από

$dX_t=-1/2H(X_t)dt+\pi(X_t)dW_t$ (2) με W_t κίνηση Brown σε 3 διαστάσεις

Για την περίπτωση της σφαίρας θα έχουμε

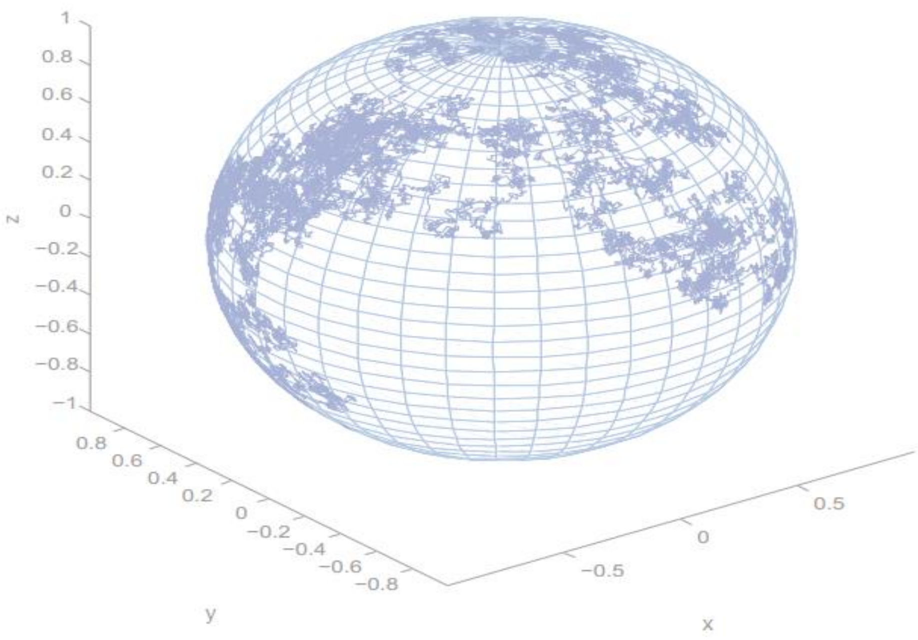
$$d\begin{bmatrix}X_t^1\\ X_t^2\\ X_t^3\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\frac{X_t^1}{||Xt||}\\ \frac{X_t^2}{||Xt||}\\ \frac{X_t^3}{||Xt||}\end{bmatrix}dt+$$

$$\frac{1}{(X_t^1)^2+(X_t^2)^2+(X_t^3)^2}\begin{bmatrix}(X_t^2)^2+(X_t^3)^2 & -X_t^1X_t^2 & -X_t^1X_t^3\\ -X_t^1X_t^2 & (X_t^1)^2+(X_t^3)^2 & -X_t^3X_t^2\\ -X_t^1X_t^3 & -X_t^3X_t^2 & (X_t^2)^2+(X_t^1)^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}dW_t^1\\ dW_t^2\\ dW_t^3\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$dX_t^1=\frac{X_t^1}{(X_t^1)^2+(X_t^2)^2+(X_t^3)^2}dt+\frac{1}{(X_t^1)^2+(X_t^2)^2+(X_t^3)^2}\{((X_t^2)^2+(X_t^3)^2)\,dW_t^1-X_t^1X_t^2dW_t^2-X_t^1X_t^3dW_t^3\}$$

$$dX_t^2=\frac{X_t^2}{(X_t^1)^2+(X_t^2)^2+(X_t^3)^2}dt+\frac{1}{(X_t^1)^2+(X_t^2)^2+(X_t^3)^2}\{-X_t^1X_t^2dW_t^1+((X_t^1)^2+(X_t^3)^2)\,dW_t^2-X_t^3X_t^2dW_t^3\}$$

$$dX_t^3=\frac{X_t^3}{(X_t^1)^2+(X_t^2)^2+(X_t^3)^2}dt+\frac{1}{(X_t^1)^2+(X_t^2)^2+(X_t^3)^2}\{-X_t^1X_t^3dW_t^1-X_t^3X_t^2dW_t^2+((X_t^2)^2+(X_t^1)^2)\,dW_t^3\}$$



Σχήμα 10 Το παραπάνω σχήμα μας δείχνει την κίνηση Brown στην επιφάνεια σφαίρας r=1

Στην περίπτωση τώρα κυλίνδρου θα ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία:

$\varphi(x_1,x_2,x_3)=\sqrt{x_1^2+x_2^2}-1 \Rightarrow \partial_{x_i}(x)=x_i/(x_1^2+x_2^2) \Rightarrow$

$\{\partial_{x_1}(\partial_{x_1}(\varphi(x)))=\frac{x_2^2}{x_1^2+x_2^2}, \partial_{x_2}(\partial_{x_2}(\varphi(x)))=\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2}, \partial_{x_3}(\partial_{x_3}(\varphi(x)))=0\}(2)$

Το $\pi(x)=I_3-\begin{bmatrix}\frac{x_1}{||x||}\\ \frac{x_2}{||x||}\\ 0\end{bmatrix}[\frac{x_1}{||x||} \quad \frac{x_2}{||x||} \quad 0]=I_3-\frac{1}{x_1^2+x_2^2}\begin{bmatrix}x_1^2 & x_1x_2 & 0\\ x_1x_2 & x_2^2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\frac{1}{x_1^2+x_2^2}\begin{bmatrix}x_2^2 & -x_1x_2 & 0\\ -x_1x_2 & x_1^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$H(x)=\{\sum_{i=1}^{3}\partial_{x_i}(\partial_{x_i}(\varphi(x))\}\partial(\varphi(x))=$(λόγω (2))$=\{\frac{x_2^2}{x_1^2+x_2^2}+\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2}+0\}\begin{bmatrix}\frac{x_1}{||x||}\\ \frac{x_2}{||x||}\\ 0\end{bmatrix}=\frac{1}{x_1^2+x_2^2}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ 0\end{bmatrix}$

Έστω $X_t=\begin{bmatrix}X_t^1\\ X_t^2\\ X_t^3\end{bmatrix}$ διάχυση στον R^3 που ορίζεται από

$dX_t=-1/2H(X_t)dt+\pi(X_t)dW_t$ με W_t κίνηση Brown σε 3 διαστάσεις

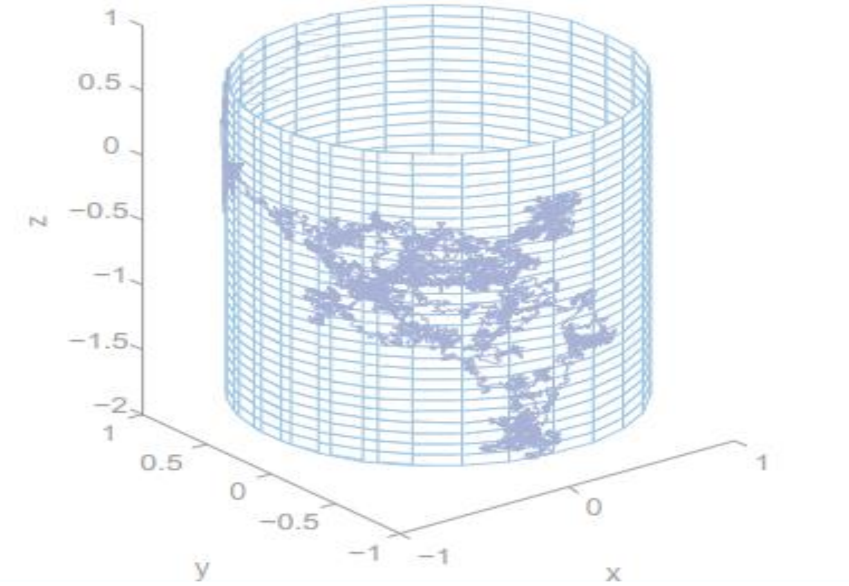
Για την περίπτωση του κυλίνδρου θα έχουμε

$$\begin{bmatrix}dX_t^1\\ dX_t^2\\ dX_t^3\end{bmatrix}=-1/2\frac{1}{(X_t^1)^2+(X_t^2)^2}\begin{bmatrix}X_t^1\\ X_t^2\\ 0\end{bmatrix}dt+\frac{1}{(X_t^1)^2+(X_t^2)^2}\begin{bmatrix}(X_t^2)^2 & -X_t^1X_t^2 & 0\\ -X_t^1X_t^2 & (X_t^1)^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}dW_t \Leftrightarrow$$

$$dX_t^1=-1/2\frac{1}{(X_t^1)^2+(X_t^2)^2}X_t^1dt+\frac{1}{(X_t^1)^2+(X_t^2)^2}((X_t^2)^2\, dW_t^1-X_t^1X_t^2\, dW_t^2)$$

dX_t^2=-1/2$\frac{1}{(X_t^1)^2+(X_t^2)^2}X_t^2$dt+$\frac{1}{(X_t^1)^2+(X_t^2)^2}((X_t^1)^2$ $dW_t^2 - X_t^1X_t^2$ dW_t^1)

$dX_t^3 = \frac{1}{(X_t^1)^2+(X_t^2)^2}dW_t^3$



Σχήμα 11 Το παραπάνω σχήμα μας δείχνει την κίνηση Brown στην επιφάνεια κυλίνδρου r=1

Χρησιμοποιώντας τη φόρμουλα Itô για κάθε λεία συνάρτηση F στον R^d έχουμε

$dF(X_t)=\sum_{k=1}^{d} \partial_{x_k}(F)(X_t)dX_t^k+1/2\sum_{k,l=1}^{d} \partial_{x_k,x_l}(F)(X_t)\, dX_t^k\, dX_t^l=L(F)(X_t)+dM_t(F)$

όπου L(F)=1/2 Δ(F)=1/2tr(∇^2F) και M_t(F) martingale με

$dM_t(F)=<(\partial F)(X_t),\pi(X_t)dB_t>= \sum_{k=1}^{d} \partial_{\pi_k}(F)(X_t)\, dB_t^k$

6 ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΧΥΣΗΣ ΣΕ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

6.1 Μετασχηματισμός από καρτεσιανές σε σφαιρικές συντεταγμένες

Θα κάνουμε μετασχηματισμό της εξίσωσης από καρτεσιανές σε σφαιρικές συντεταγμένες

Θέτω $x=r\sin\theta\cos\varphi$ $y=r\sin\theta\sin\varphi$ $z=r\cos\theta$ $\theta \in [0,2\pi), \varphi \in [0,\pi]$

Ισχύει $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\theta=\arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ $\varphi=\arctan\frac{y}{x}$

$$\Delta P=\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{r\sin\theta\cos\varphi}{r}=\sin\theta\cos\varphi$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}=-\sqrt{\frac{1}{1-(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})^2}}(-\frac{1}{2})\frac{2xz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}=\frac{r\sin\theta\cos\varphi\, r\cos\theta}{r\sin\theta\, r^2}=\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}(-\frac{y}{x^2})=-\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{r\sin\theta\cos\varphi}{r^2\sin^2\theta}=-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{r\sin\theta\sin\varphi}{r}=\sin\theta\sin\varphi$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y}==-\sqrt{\frac{1}{1-(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})^2}}(-\frac{1}{2})\frac{2yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}=\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{zy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3}=\frac{r\sin\theta\sin\varphi\, r\cos\theta}{r\sin\theta\, r^2}=\frac{\sin\varphi\cos\theta}{r}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\frac{1}{x}=\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{1}{x}=\frac{r\sin\theta\cos\varphi}{r^2\sin^2\theta}=\frac{\cos\varphi}{r\sin\ \theta}$$

$$\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{r\cos\theta}{r}=\cos\theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z}=-\sqrt{\frac{1}{1-(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})^2}}\frac{\partial}{\partial z}(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})=-\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-z\frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2}=$$

$$-\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{r^2\sin^2\theta}{r^2 r\sin\theta}=-\frac{\sin\theta}{r}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial P}{\partial x}]=\frac{\partial}{\partial r}[\frac{\partial P}{\partial x}]\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \theta}[\frac{\partial P}{\partial x}]\frac{\partial \theta}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \varphi}[\frac{\partial P}{\partial x}]\frac{\partial \varphi}{\partial x}=\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}[\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial \varphi}]+\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}[\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial \varphi}]-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}[\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial \varphi}]=$$

$=\sin^2\theta\cos^2\varphi\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}$ - $\frac{1}{r^2}\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi\frac{\partial P}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\,sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\frac{\partial^2 P}{\partial\theta\,\partial r}+\frac{1}{r^2}\,sin\varphi cos\varphi\,\frac{\partial P}{\partial\varphi}$ -
$\frac{1}{r}\,sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial\varphi}+\frac{1}{r}\cos^2\varphi\cos^2\theta\frac{\partial P}{\partial r}+$

$\frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\frac{\partial^2 P}{\partial\theta\,\partial r}$ - $\frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\,\frac{\partial P}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\cos^2\theta\cos^2\varphi\frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2}\,\frac{cos^2\theta cos\varphi sin\varphi}{sin^2\theta}\,\frac{\partial P}{\partial\varphi}$ -
$\frac{1}{r^2}\,\frac{cos\theta cos\varphi sin\varphi}{sin\theta}\,\frac{\partial^2 P}{\partial\theta\,\partial\varphi}+$

$\frac{1}{r}\sin^2\varphi\frac{\partial P}{\partial r}$ - $\frac{1}{r}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial\varphi}+\frac{1}{r^2}\,\frac{sin^2\varphi cos\theta}{sin\theta}\,\frac{\partial P}{\partial\theta}$ - $\frac{1}{r^2}\,\frac{cos\theta cos\varphi sin\varphi}{sin\theta}\,\frac{\partial^2 P}{\partial\theta\,\partial\varphi}+\frac{1}{r^2}\,\frac{cos\varphi sin\varphi}{sin^2\theta}\,\frac{\partial P}{\partial\varphi}$
$+\frac{1}{r^2}\,\frac{sin^2\varphi}{sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 P}{\partial\varphi^2}$ (2)

$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\sin\theta\sin\varphi\,\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{r sin\theta}\frac{\partial P}{\partial\varphi}$

$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\,[\frac{\partial P}{\partial y}]=\frac{\partial}{\partial r}\,[\frac{\partial P}{\partial y}]\,\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\theta}\,[\frac{\partial P}{\partial y}]\,\frac{\partial\theta}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\,[\frac{\partial P}{\partial y}]\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\sin\theta\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial r}\,[\sin\theta\sin\varphi\,\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta}+$
$\frac{\cos\varphi}{r sin\theta}\,\frac{\partial P}{\partial\varphi}]+\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,[\sin\theta\sin\varphi\,\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{r sin\theta}\,\frac{\partial P}{\partial\varphi}]+\frac{\cos\varphi}{r sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\,[\sin\theta\sin\varphi\,\frac{\partial P}{\partial r}+$
$\frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta}+\frac{\cos\varphi}{r sin\theta}\,\frac{\partial P}{\partial\varphi}]=$

$=\sin^2\theta\sin^2\varphi\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}$ - $\frac{1}{r^2}\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi\frac{\partial P}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi\frac{\partial^2 P}{\partial\theta\,\partial r}$ - $\frac{1}{r^2}\sin\varphi\cos\varphi\,\frac{\partial P}{\partial\varphi}$
$+\frac{1}{r}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial\varphi}+\frac{1}{r}\sin^2\varphi\cos^2\theta\frac{\partial P}{\partial r}+$

$\frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi\frac{\partial^2 P}{\partial\theta\,\partial r}$ - $\frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi\,\frac{\partial P}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\cos^2\theta\sin^2\varphi\frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2}$ -
$\frac{1}{r^2}\,\frac{\cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial P}{\partial\varphi}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi}{\sin\theta}\,\frac{\partial^2 P}{\partial\theta\,\partial\varphi}+$

$+\frac{1}{r}\sin\varphi\cos\varphi\,\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{1}{r}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial\varphi}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\cos^2\varphi\cos\theta}{\sin\theta}\,\frac{\partial P}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi}{\sin\theta}\,\frac{\partial^2 P}{\partial\theta\,\partial\varphi}$ - $\frac{1}{r^2}\,\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial P}{\partial\varphi}$
$+\frac{1}{r^2}\,\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 P}{\partial\varphi^2}$ (3)

$\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial P}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial P}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}+\frac{\partial P}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial P}{\partial r}\cos\theta$- $\frac{\partial P}{\partial\theta}\,\frac{1}{r}\sin\theta$

$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\,[\frac{\partial P}{\partial z}]=\frac{\partial}{\partial r}\,[\frac{\partial P}{\partial z}]\,\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial\theta}\,[\frac{\partial P}{\partial z}]\,\frac{\partial\theta}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\,[\frac{\partial P}{\partial z}]\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial r}\,[\frac{\partial P}{\partial r}\cos\theta$- $\frac{\partial P}{\partial\theta}\,\frac{1}{r}\sin\theta]\cos\theta-\frac{\partial}{\partial\theta}\,[\frac{\partial P}{\partial r}\cos\theta$-
$\frac{\partial P}{\partial\theta}\,\frac{1}{r}\sin\theta]\;\frac{\sin\theta}{r}=$

$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\cos^2\theta+\frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta\,\frac{\partial P}{\partial\theta}$ - $\frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 P}{\partial\theta\,\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 P}{\partial\theta\,\partial r}+\frac{1}{r}\sin^2\theta\frac{\partial P}{\partial r}$
$+\frac{1}{r^2}\sin^2\theta\frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta\,\frac{\partial P}{\partial\theta}$ (4)

Αντικαθιστούμε στη σχέση (1) τις σχέσεις (2,3,4)

$$\Delta P= \sin^2\theta\cos^2\varphi\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi\frac{\partial P}{\partial \theta}+\frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\frac{\partial^2 P}{\partial\theta\,\partial r}+\frac{1}{r^2}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial P}{\partial\varphi}$$
$$-\frac{1}{r}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial\varphi}+\frac{1}{r}\cos^2\varphi\cos^2\theta\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\frac{\partial^2 P}{\partial\theta\,\partial r} -$$
$$\frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\frac{\partial P}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\cos^2\theta\cos^2\varphi\frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi}{\sin^2\theta}\frac{\partial P}{\partial\varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial^2 P}{\partial\theta\,\partial\varphi}+$$

$$\frac{1}{r}\sin^2\varphi\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial\varphi}+\frac{1}{r^2}\frac{\sin^2\varphi\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial^2 P}{\partial\theta\,\partial\varphi}+\frac{1}{r^2}\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\sin^2\theta}\frac{\partial P}{\partial\varphi}$$
$$+\frac{1}{r^2}\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 P}{\partial\varphi^2} + \sin^2\theta\sin^2\varphi\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi\frac{\partial P}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi\frac{\partial^2 P}{\partial\theta\,\partial r} - \frac{1}{r^2}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial P}{\partial\varphi}$$
$$+\frac{1}{r}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial\varphi}+\frac{1}{r}\sin^2\varphi\cos^2\theta\frac{\partial P}{\partial r}+$$

$$\frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi\frac{\partial^2 P}{\partial\theta\,\partial r} - \frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi\frac{\partial P}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\cos^2\theta\sin^2\varphi\frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2} -$$
$$\frac{1}{r^2}\frac{\cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi}{\sin^2\theta}\frac{\partial P}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial^2 P}{\partial\theta\,\partial\varphi}+$$

$$+\frac{1}{r}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial\varphi}+\frac{1}{r^2}\frac{\cos^2\varphi\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta\cos\varphi\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial^2 P}{\partial\theta\,\partial\varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\sin^2\theta}\frac{\partial P}{\partial\varphi}$$
$$+\frac{1}{r^2}\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 P}{\partial\varphi^2}$$

$$+\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\cos^2\theta+\frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial P}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 P}{\partial\theta\,\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 P}{\partial\theta\,\partial r} + \frac{1}{r}\sin^2\theta\frac{\partial P}{\partial r}$$
$$+\frac{1}{r^2}\sin^2\theta\frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}=$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 P}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial\theta}$$

Επομένως η εξίσωση διάχυσης σε σφαιρικές συντεταγμένες εκφράζεται από την εξίσωση

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 P}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial\theta}\right\}$$

Αν εφαρμόσουμε την εξίσωση αυτή σε μία σφαίρα ακτίνας r=1 μονάδα τότε $\frac{\partial P}{\partial r}=0$ και $\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}=0$

Επομένως η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 P}{\partial\varphi^2} + \cot\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right\} \text{ με } \theta \in [0,2\pi),\varphi \in[0,\pi] \quad (5)$$

6.2 Λύση της εξίσωσης σε σφαιρικές συντεταγμένες

Για να λυθεί η παραπάνω μερική διαφορική εξίσωση θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών ,δηλαδή θα γράψουμε την $P(t,\theta,\varphi)=T(t)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$(*)

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{dT}{dt}\Theta(\theta)\Phi(\varphi) \quad , \quad \frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2}=\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}T(t)\Phi(\varphi) \, , \, \frac{\partial P}{\partial\theta}=\frac{d\Theta}{d\theta}T(t)\Phi(\varphi) \quad , \quad \frac{\partial^2 P}{\partial\varphi^2}=\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}T(t)\Theta(\theta) \quad (6)$$

$$(5),(6)\Rightarrow \frac{dT}{dt}\Theta(\theta)\Phi(\varphi)=\frac{1}{2}\left\{\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}T(t)\Phi(\varphi)+\cot\theta\frac{d\Theta}{d\theta}T(t)\Phi(\varphi)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}T(t)\Theta(\theta)\right\}$$

διαιρούμε τη σχέση με $T(t)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ και έχουμε

$$\frac{1}{T(t)}\frac{dT}{dt}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d\Theta}{d\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}\right\} \quad (7)$$

$\frac{1}{T(t)}\frac{dT}{dt}$=-λ²⇔$\frac{dT}{dt}$=-λ²T(t)⇔ T(t)=A$e^{-\lambda^2 t}$(8)

$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}$=-2μ²Φ(φ)⇔ $\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}$+2μ²Φ(φ)=0⇔ Φ(φ)=Bcos(μφ)+Γsin(μφ) (9)

$\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}$+cotθ$\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d\Theta}{d\theta}$ =-2n² ⇔$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}$+cotθ$\frac{d\Theta}{d\theta}$ + m(m+1)Θ(θ)=0 . Αυτή είναι μία εξίσωση Legendre . Αν αντικαταστήσω x=cosθ $\frac{d\Theta}{d\theta}=-\frac{d\Theta}{dx}$sinθ και

$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=-\frac{d}{dx}[-\frac{d\Theta}{dx}\sqrt{1-x^2}]$sinθ=

=($\frac{d^2\Theta}{dx^2}\sqrt{1-x^2}$ - $\frac{d\Theta}{dx}\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$)$\sqrt{1-x^2}$=$\frac{d^2\Theta}{dx^2}$(1-x²)- $\frac{d\Theta}{dx}$

(10) <=> $\frac{d^2\Theta}{dx^2}$(1-x²)- 2x$\frac{d\Theta}{dx}$+m(m+1)Θ=0 με m∈Z

Η διαφορική εξίσωση Legendre μπορεί να λυθεί αν θέσουμε

$\Theta=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Leftrightarrow \Theta'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \Leftrightarrow \Theta''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$ αντικαθιστώντας στη (10) έχουμε

$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}+m(m+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \Leftrightarrow$

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$ - $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n$ - $2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n+2\omega^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=0 \Leftrightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$ - $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+2}$- $2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1}+m(m+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n=0 \Leftrightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+2}+2(n+1)a_{n+1}x^{n+1}-[(n+2)(n+1)a_{n+2}+2\omega^2 a_n]\,x^n\}=0$

(για n=0) $2*1a_2x^2+2a_1x-[2a_2+2\omega^2a_0]+$

(για n=1) $3*2a_3x^3+2*3a_2x^2-[3*2a_3+m(m+1)a_1]+$

(για n=2) $4*3a_4x^4+2*4a_3x^3-[4*3a_3+m(m+1)a_2]+$

(για n=3) $5*4a_5x^5+2*5a_4x^4-[5*4a_3+m(m+1)a_3]+$.....

…………………………………………………………….

………………………………………………………………

(για n=n-2) $n(n-1)a_nx^n+2(n-1)a_{n-1}x^{n-1}-[n(n-1)a_n+m(m+1)a_{n-2}]x^{n-2}+$

(για n=n-1) $(n+1)na_{n+1}x^{n+1}+2na_nx^n-[(n+1)na_{n+1}+m(m+1)a_{n-1}]x^{n-1}+$

(για n=n) $(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+2}+2(n+1)a_{n+1}x^{n+1}-[(n+2)(n+1)a_{n+2}+m(m+1)a_n]x^n+$…………………=0

Οι συντελεστές των x^k τάξης όρων είναι 0. Ο ν-στός συντελεστής είναι

$n(n-1)a_n+2na_n-(n+2)(n+1)a_{n+2}-m(m+1)a_n=0 \Leftrightarrow (n+2)(n+1)a_{n+2}=[n(n+1)-m(m+1)]a_n \Leftrightarrow$

$a_{n+2}=\frac{(n+1)n-m(m+1)}{(n+2)(n+1)}a_n \Leftrightarrow a_{n+2}=\frac{n^2-m^2+n-m}{(n+2)(n+1)}a_n=\frac{(n-m)(n+m+1)}{(n+2)(n+1)}a_n$

$n=0$: $a_2=\frac{-m(m+1)}{2*1}a_0$ $\qquad$ $n=1$: $a_3=\frac{(1-m)(m+2)}{3*2}a_1$

$n=2$ $a_4=\frac{(2-m)(m+3)}{4*3}a_2$ $\qquad$ $n=3$: $a_5=\frac{(3-m)(m+4)}{5*4}a_3$

$n=4$: $a_6=\frac{(4-m)(m+5)}{6*5}a_4$ $\qquad$ $n=5$: $a_7=\frac{(5-m)(m+6)}{7*6}a_5$

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

$n=2k-2$: $a_{2k}=\frac{(2k-2-m)(2k+m-1)}{2k(2k-1)}a_{2k-2}$ $\qquad$ $n=2k-1$: $a_{2k+1}=\frac{(2k-1-m)(2k+m)}{(2k+1)2k}a_{2k-1}$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη έχουμε:

$a_{2k}=\frac{-m(2-m)(4-m)\ldots\ldots(2k-2-m)(m+1)(m+3)\ldots\ldots(m+2k-1)}{(2k)!}a_0$ και

$a_{2k+1}=\frac{(1-m)(3-m)(5-m)\ldots\ldots(2k+1-m)(m+2)(m+4)(m+6)\ldots\ldots(2k+2+m)}{(2k+1)!}a_1$

Οι συντελεστές του πολυωνύμου μας εξαρτώνται από τα a_0 και a_1

Το

$\Theta(x)=a_0\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-m(2-m)(4-m)\ldots\ldots(2k-2-m)(m+1)(m+3)\ldots\ldots(m+2k-1)}{(2k)!}x^{2k}\}+a_1\{x+$
$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-m)(3-m)(5-m)\ldots\ldots(2k-1-m)(m+2)(m+4)(m+6)\ldots\ldots(2k+m)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\}$

$\Theta(\theta)=a_0\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-m(2-m)(4-m)\ldots\ldots(2k-m)(m+1)(m+3)\ldots\ldots(m+2k+1)}{(2k)!}(\cos\theta)^{2k}\}+a_1\{(\cos\theta)+$
$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-m)(3-m)(5-m)\ldots\ldots(2k-1-m)(m+2)(m+4)(m+6)\ldots\ldots(2k+m)}{(2k+1)!}(\cos\theta)^{2k+1}\}$ (11)

Τελικά από (8),(9),(11) έχουμε:

$P(t,\theta,\varphi)=Ae^{-\lambda^2 t}\{B\cos(\mu\varphi)+\Gamma\sin(\mu\varphi)\}\{$
$a_0\{1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-m(2-m)(4-m)\ldots\ldots(2k-m)(m+1)(m+3)\ldots\ldots(m+2k+1)}{(2k)!}(\cos\theta)^{2k}\}+a_1\{(\cos\theta)+$
$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-m)(3-m)(5-m)\ldots\ldots(2k-1-m)(m+2)(m+4)(m+6)\ldots\ldots(2k+m)}{(2k+1)!}(\cos\theta)^{2k+1}\}\}$ με
$\lambda^2=\mu^2+\omega^2$

7 ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΧΥΣΗΣ ΣΕ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

7.1 Μετασχηματισμός από καρτεσιανές σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Όπως δουλέψαμε στις σφαιρικές συντεταγμένες το αντίστοιχο πρόβλημα θα το δουλέψουμε σε κυλινδρικές συντεταγμένες . Οι αντίστοιχες καρτεσιανές συντεταγμένες θα μετασχηματιστούν από τους τύπους

$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $z=z$ $r\geq 0$, $0\leq\theta\leq 2\pi$ $z\in R$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=\arctan(y/x)$,$z=z$

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cos\theta \quad , \quad \frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}(-\frac{y}{x^2})=-\frac{y}{x^2+y^2}=-\frac{r\sin\theta}{r^2}=-\frac{\sin\theta}{r} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\sin\theta \quad , \quad \frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\frac{1}{x}=\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{1}{x}=\frac{r\cos\theta}{r^2}=\frac{\cos\theta}{r} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y}=0 \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial z}=1$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial P}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial P}{\partial x}\right]=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial P}{\partial x}\right]\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial P}{\partial x}\right]\frac{\partial\theta}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial P}{\partial x}\right]\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial P}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial P}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}\right]\cos\theta-\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial P}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial P}{\partial\theta}\frac{\sin\theta}{r}\right]\frac{\sin\theta}{r}=$$

$$=\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\cos^2\theta-\frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}+\frac{\partial P}{\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}-\frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}+\frac{\partial P}{\partial r}\frac{\sin^2\theta}{r}+\frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2}\frac{\sin^2\theta}{r^2}+\frac{\partial P}{\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial P}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial P}{\partial y}\right]=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial P}{\partial y}\right]\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial P}{\partial y}\right]\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial P}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial P}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}\right]\sin\theta+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial P}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial P}{\partial\theta}\frac{\cos\theta}{r}\right]\frac{\cos\theta}{r}=$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\sin^2\theta+\frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}-\frac{\partial P}{\partial\theta}\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}+\frac{\partial P}{\partial r}\frac{\cos^2\theta}{r}+\frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2}\frac{\cos^2\theta}{r^2}-\frac{\partial P}{\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial P}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial P}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}+\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z}=\frac{\partial P}{\partial z}\Leftrightarrow\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}$$

$$\Delta P=\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\cos^2\theta-\frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}+\frac{\partial P}{\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}-\frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}+\frac{\partial P}{\partial r}\frac{\sin^2\theta}{r}+\frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2}\frac{\sin^2\theta}{r^2}+\frac{\partial P}{\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}+$$

$$+\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\sin^2\theta+\frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}-\frac{\partial P}{\partial\theta}\frac{\cos\theta\sin\theta}{r^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r}+\frac{\partial P}{\partial r}\frac{\cos^2\theta}{r}+\frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2}\frac{\cos^2\theta}{r^2}-\frac{\partial P}{\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}$$

$$\Delta P=\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\ (*)$$

Επομένως η εξίσωση μας γίνεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}$ με $0\leq\theta\leq 2\pi$, $-1\leq z\leq 1$, $z^2+r^2=1$ ώστε να έχουμε σφαίρα ακτίνας 1

7.2 Λύση της εξίσωσης σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Για να λυθεί η παραπάνω μερική διαφορική εξίσωση θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών ,δηλαδή θα γράψουμε την P(t,θ,φ)=T(t)Θ(θ)R(r)Z(z)

$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{dT}{dt}\Theta(\theta)R(r)Z(z)$ $\quad\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}=\frac{d^2R}{dr^2}T(t)\Theta(\theta)Z(z)$ $\quad\frac{\partial P}{\partial r}=\frac{dR}{dr}T(t)\Theta(\theta)Z(z)$

$\frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2}=\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}T(t)\,R(r)Z(z)$ $\quad\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}=\frac{d^2Z}{dz^2}T(t)\Theta(\theta)R(r)$

$(*)\Rightarrow\frac{dT}{dt}\Theta(\theta)R(r)Z(z)=\frac{d^2R}{dr^2}T(t)\Theta(\theta)Z(z)+\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}T(t)\,R(r)Z(z)+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}T(t)\Theta(\theta)Z(z)+\frac{d^2Z}{dz^2}T(t)\Theta(\theta)R(r)$

Διαιρούμε T(t)Θ(θ)R(r)Z(z) και έχουμε

$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}=\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}+\frac{1}{rR}\frac{dR}{dr}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}$

$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=-k^2\Leftrightarrow\frac{d^2Z}{dz^2}+k^2Z=0\Rightarrow Z(z)=A\cos(kz)+B\sin(kz)$

$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt}=-m^2\Leftrightarrow\frac{dT}{dt}=-m^2T\Rightarrow T(t)=Ce^{-k^2t}$

$\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=-n^2\Leftrightarrow\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}=-n^2\Theta\Rightarrow\Theta(\theta)=D\cos(n\theta)+E\sin(n\theta)$

$-m^2=\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2}-\frac{1}{r^2}n^2+\frac{1}{rR}\frac{dR}{dr}-k^2\Leftrightarrow$ (πολλαπλασιάζουμε με r^2R)

$r^2\frac{d^2R}{dr^2}-Rn^2+r\frac{dR}{dr}+(m^2-k^2)r^2R=0\Leftrightarrow\quad r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}+[(m^2-k^2)r^2-n^2]R=0$

Η παραπάνω εξίσωση είναι μια εξίσωση Bessel με λύση

$R(r)=K\,J((m^2-k^2)r)+MG((m^2-k^2)r)$

Όπου $J_n((m^2-k^2)r)$, $G_n((m^2-k^2)r)$ είναι συναρτήσεις Bessel πρώτου και δευτέρου είδους αντίστοιχα

Τελικά

$P(t,\theta,\varphi)=Ce^{-k^2t}(A\cos(kz)+B\sin(kz))\,(D\cos(n\theta)+E\sin(n\theta))\{K\,J((m^2-k^2)r)+MG((m^2-k^2)r)\}$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Α.Ν. Γιαννακόπουλος Στοχαστικές Διαδικασίες ΙΙ

Α. Αρβανιτογεώργος Στοιχειώδης διαφορική γεωμετρία

Loring W.Tu An introduction to Manifolds

Pierre del Moral-Spiridon Penev Stochastic Processes

Frank Morgan Riemannian Geometry

Bart Heemskerk Heat Equation and Brownian Motion on Riemannian Manifolds