

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΑΘΗΝΩΝ



ATHENS UNIVERSITY
OF ECONOMICS
AND BUSINESS

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Σχολή Επιστημών και Τεχνολογίας της Πληροφορίας

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αριθμητικές Προσεγγίσεις
Διαδικασιών Διάχυσης

Κοντογιάννης Φίλιππος

Επιβλέπων Καθηγητής: Αθανάσιος Γιαννακόπουλος

Τριμελής Επιτροπή
Αθανάσιος Γιαννακόπουλος, Καθηγητής
Επαμεινώνδας Κυριακίδης, Καθηγητής
Μιχαήλ Ζαζάνης, Καθηγητής

Αθήνα, Ιούνιος 2017

Περίληψη

Ο κλάδος της Στοχαστικής Ανάλυσης είναι ένας τομέας που βρίσκει ολοένα και περισσότερες εφαρμογές. Μερικές από αυτές είναι τα χρηματοοικονομικά, η βιολογία κ.α.. Πολλές φορές, ενδιαφερόμαστε να περιγράψουμε σχέσεις μεταξύ φαινομένων οι οποίες εμπεριέχουν αβεβαιότητα. Κάτι τέτοιο είναι αδύνατο να γίνει σχεπτόμενοι την μοντελοποίηση βάση των ντετερμινιστικών μαθηματικών. Κρίνεται λοιπόν σκόπιμο η ανάπτυξη μιας θεωρίας η οποία έχει σαν βάση τα ντετερμινιστικά μαθηματικά, αλλά μπορεί και διαχειρίζεται προβλήματα στοχαστικού χαρακτήρα. Για παράδειγμα, η μελέτη της κίνησης μια μετοχής, και κατά συνέπεια η ανάγκη για πρόβλεψη της τιμής της σε βάθος χρόνου, είναι ένα πρόβλημα που ανάγεται στον κλάδο της στοχαστικής ανάλυσης. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά και μόνο ντετερμινιστικές μεθόδους για την περιγραφή του παραπάνω προβλήματος, θα είναι σαν να θεωρούμε ότι η συγκεκριμένη μετοχή δεν εμπεριέχει αβεβαιότητα, και σαν αποτέλεσμα ότι για κάθε πρόβλεψη θα ήμασταν εντελώς σίγουροι. Επομένως, είναι αναγκαία η ανάπτυξη μια θεωρίας που μπορεί κάνοντας χρήση εξισώσεων, να περιγράψει τυχαίους παράγοντες που επηρεάζουν το πρόβλημα που μελετάμε, και η οποία θα είναι μαθηματικώς θεμελιωμένη.

Το πρώτο κεφάλαιο αφορά την κίνηση Brown στις πεπερασμένες διαστάσεις και διάφορες μέθοδοι προσομοίωσης της διαδικασίας.

Στη συνέχεια στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται η θεωρία στοχαστικής ολοκλήρωσης και των διαδικασιών του $Itô$.

Στα κεφάλαια 3 και 4, εισάγεται η θεωρία των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων και διαδικασιών διάχυσης.

Στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζεται το θεώρημα Girsanov και ο έλεγχος λόγου πιθανοφανειών από διαδικασίες διάχυσης.

Στο κεφάλαιο 6 αναφέρονται μέθοδοι προσομοίωσης διαδικασιών διάχυσης όπως τα σχήματα Euler, Ozaki κ.α.

Στο κεφάλαιο 7, παρατίθεται διάφορες μέθοδοι στατιστικής συμπερασματολογίας των διαδικασιών διάχυσης.

Κλείνοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή κ.Αθανάσιο Γιαννακόπουλο, για την πολύτιμη συμβολή και καθοδήγηση του σε όλη την διάρκεια της φοίτησης μου στο τμήμα. Επίσης, τον ευχαριστώ θερμά για την εκπόνηση της παρούσας εργασίας, αλλά και για την ελευθερία που μου έδωσε για την ανάπτυξη του θέματος αυτής της εργασίας. Τέλος, ευχαριστώ θερμά τον φίλο μου Γιώργο Δομαζάκη για την βοήθεια του στην συγγραφή της εργασίας με το \LaTeX .

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής για την ανάγνωση της διπλωματικής και την τιμή που μου έκανε.

Περιεχόμενα

1	Κίνηση Brown	3
1.1	Βασικές έννοιες	3
1.2	Ορισμός της κίνησης Brown	4
1.3	Η ιδιότητα Markov	7
1.4	Η Κίνηση Brown ως <i>Martingale</i>	8
1.5	Μεταβολές της κίνησης Brown	9
1.6	Προσομοίωση κίνησης Brown	13
1.6.1	Η εμβύθιση Skorohod (Skorokhod Embedding)	13
1.6.2	Η επέκταση Karhunen-Loève	14
1.7	Παράτημα	23
2	Ολοκλήρωμα Itô	25
2.1	Εισαγωγή	25
2.2	Κατασκευή Ολοκληρώματος Itô	26
2.3	Το ολοκλήρωμα <i>Itô</i> σαν στοχαστική διαδικασία	32
2.4	Διαδικασίες <i>Itô</i> και το λήμμα του <i>Itô</i>	35
2.5	Διαδικασίες <i>Itô</i> σε πολλές διαστάσεις	39
3	Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις	41
3.1	Βασικές έννοιες	41
3.2	Υπαρξη και μοναδικότητα της λύσης	42
3.3	Ασθενείς λύσεις	45
3.4	Παράρτημα	47
4	Διαδικασίες διάχυσης	49
4.1	Ιδιότητα Markov	49
4.2	Γεννήτορας διαδικασίας διάχυσης	52
4.3	Επίλυση στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων	55
4.4	Μετασχηματισμός Lamperti	57
5	Θεώρημα Cameron-Martin-Girsanov	59
5.1	Εκθετικά martingales	59
5.2	Θεώρημα Cameron-Martin-Girsanov	60
5.3	Λόγος πιθανοφανειών και διαδικασίες διάχυσης	64
6	Αριθμητική προσέγγιση διαδικασιών διάχυσης	67
6.1	Στοχαστική επέκταση Taylor	67
6.2	Σχήμα Euler	70
6.3	Σχήμα Milstein	72
6.4	Σχέση σχημάτων Euler και Milstein	74

6.5	Μέθοδος Shoji-Ozaki (Local linearization)	78
7	Στατιστική Συμπερασματολογία Διαδικασιών Διάχυσης	83
7.1	Παραμετρική εκτίμηση	83
7.2	Pseudo-Likelihood methods	89
7.2.1	Μέθοδος του Euler	89
7.2.2	Μέθοδος του Elerian	89
7.2.3	Local Linearization μέθοδος	91
7.2.4	Εφαρμογή: Σύγκριση των μεθόδων προσέγγισης της πιθανοφάνειας	92
7.3	Εφαρμογή μοντέλων σε επιτόκια	93
7.4	Παράρτημα	95

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Προσομοίωση από τροχιές τις κίνησης Brown, για διαφορετικό πλήθος όρων.	14
1.2	Προσομοίωση από τροχιές της κίνησης Brown, με μέγεθος δείγματος $n = 100$ και πλήθος όρων της βάσης $N = 60$	19
1.3	Προσομοίωση από τροχιές τις κίνησης Brown, για διαφορετικό πλήθος όρων της βάσης.	20
2.1	Κίνηση Brown στις δύο(αριστερά) και τρεις (δεξιά) διαστάσεις.	40
4.1	Παράδειγμα προσομοίωσης γεωμετρικής κίνησης Brown ($dX_t = 0.5X_t dt + 2dB_t$, $x_0 = 2$).	55
4.2	Παράδειγμα προσομοίωσης διαδικασίας Ornstein-Uhlenbeck ($dX_t = (4-2X_t)dt + 2dB_t$, $x_0 = 10$).	56
4.3	Παράδειγμα τροχίας της διαδικασίας Cox-Ingersoll-Ross ($dX_t = (5-2X_t)dt + 2\sqrt{X_t}dB_t$, $x_0 = 4$).	58
5.1	Προσομοίωση από τροχιές τις διαδικασίας $Y_t = -0.6t + B_t$, $0 \leq t \leq 1$, ως προς τις τιμές της παραγώγου Radon – Nikodym.	65
6.1	Προσεγγίσεις Euler και Milstein για την γεωμετρική κίνηση Brown.	75
6.2	Μέσο απόλυτο και το απόλυτο σφάλμα προσέγγισης του τελευταίου όρου για τις δύο μεθόδους Euler και Milstein.	76
6.3	Προσεγγίσεις Euler και Milstein για το υπερβολικό μοντέλο.	77
6.4	μέσο απόλυτο και το απόλυτο σφάλμα προσέγγισης του τελευταίου όρου για τις δύο μεθόδους Euler και Milstein.	77
6.5	Τροχιές βάσει των σχημάτων Euler και Shoji-Ozaki, για $\Delta = 0.01$ (αριστερά) και $\Delta = 0.25$ (δεξιά).	81
7.1	Εκτιμώμενες πιθανοφάνειες βάσει των μεθόδων Euler, Elerian, Ozaki και Shoji.	92
7.2	Μέσο απόλυτο σφάλμα της πιθανοφάνειας κάθε μεθόδου από την πραγματική.	93
7.3	Δεδομένα επιτοκίων για την περίοδο 07/1964-04/1989.	94
7.4	Διάστημα εμπιστοσύνης βάσει της μεθόδου του Kessler.	95

Κατάλογος Πινάκων

7.1	Εκτιμήσεις διαδικασίας Ornstein-Uhlenbeck	89
7.2	Εκτιμήσεις συντελεστών του μοντέλου CKLS από τα δεδομένα.	93
7.3	Μέτρα αξιολόγησης των προσεγγίσεων για το μοντέλο CKLS.	94

Κεφάλαιο 1

Κίνηση Brown

1.1 Βασικές έννοιες

Στην θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών συνεχούς χρόνου, αναγκαίο εργαλείο για την θεμελίωση της θεωρίας είναι η Κίνηση Brown. Η κίνηση Brown (πολλές φορές συναντάται και ως διαδικασία Wiener) κατέχει πολύ σημαντική θέση στην χρηματοοικονομικών μαθηματικών όσο και στον τομέα της φυσικής. Το όνομα της δόθηκε από τον Βρετανό βοτανολόγο Robert Brown (1827), ο οποίος ήταν ο πρώτος που παρακολούθησε στο φαινόμενο, μελετώντας την κίνηση από κόκκους σκόνης στο νερό. Τέλος, η κίνηση Brown, αποτελεί βασικό συστατικό στην θεωρία των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

Σαν αρχή θα δώσουμε μερικούς χρήσιμους ορισμούς.

Ορισμός 1.1.1 Έστω ένα χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ και (E, \mathcal{G}) ένας μετρήσιμος χώρος. Μια στοχαστική διαδικασία είναι μια οικογένεια από τυχαίες μεταβλητές $\{X(t); t \in T\}$, τέτοια ώστε για κάθε $t \in T$ η X_t είναι τυχαία μεταβλητή από τον $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ και (E, \mathcal{G}) . Το σύνολο Ω , ονομάζεται δειγματικός χώρος και το E είναι ο χώρος καταστάσεων της διαδικασίας X_t .

Όταν το T είναι κάποιο διακριτό σύνολο, λέμε ότι η στοχαστική διαδικασία X_t είναι διακριτού χρόνου. Αντίστοιχα αν το σύνολο T είναι κάποιο υποσύνολο του \mathbb{R}^d , λέμε ότι η στοχαστική διαδικασία είναι συνεχούς χρόνου.

Για κάθε $\omega \in \Omega$, η συνάρτηση $X_t(\omega) : T \rightarrow E$, ονομάζεται τροχιά (path) της διαδικασίας X_t .

Ορισμός 1.1.2 Έστω ένα χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Μια αύξουσα ακολουθία από σ -άλγεβρες \mathcal{F}_t στον χώρο Ω και $t \in T$, ονομάζεται διήθηση (filtration), αν

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$$

για κάθε $s, t \in T$, τέτοια ώστε $s \leq t$.

Ορισμός 1.1.3 Μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t, t \in T\}$, ονομάζεται martingale ως προς την διήθηση \mathcal{F}_t αν :

- i. Η X_t είναι ολοκληρώσιμη για κάθε $t \in T$
- ii. Η X_t είναι \mathcal{F}_t -μετρήσιμη για κάθε $t \in T$ (στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η διαδικασία είναι προσαρμοσμένη (adapted) ως προς την \mathcal{F}_t)
- iii. $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$, για κάθε $s, t \in T$ τέτοια ώστε $s \leq t$.

Ορισμός 1.1.4 Μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t, t \in T\}$, λέγεται ότι έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, αν οι τυχαίες μεταβλητές :

$$X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές για κάθε $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, έτσι ώστε $t_0, t_1, \dots, t_n \in T$.

Ορισμός 1.1.5 Μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t, t \in T\}$, λέγεται ότι έχει στάσιμες προσαυξήσεις, αν για κάθε $s, t \in T$, ισχύει ότι η πιθανότητα,

$$\mathbb{P}(X_{t+h} - X_{s+h})$$

να είναι σταθερή για κάθε h τέτοιο ώστε $s+h, t+h \in T$.

1.2 Ορισμός της κίνησης Brown

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζονται ορισμός και οι βασικές ιδιότητες που την χαρακτηρίζουν.

Ορισμός 1.2.1 Μια στοχαστική διαδικασία $\{B_t, t \geq 0\}$ με τιμές στο \mathbb{R} , ονομάζεται κίνηση Brown με αρχή $x \in \mathbb{R}$, αν ισχύουν τα παρακάτω :

i. $B(0) = x$

ii. (Ανεξάρτητες μεταβολές) Για κάθε $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_N$ οι τυχαίες μεταβλητές

$$B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_N} - B_{t_{N-1}},$$

είναι ανεξάρτητες.

iii. Κάθε τροχιά της κίνησης Brown είναι συνεχής συνάρτηση με πιθανότητα 1, δηλαδή για κάθε σταθερό $\omega \in \Omega$, η συνάρτηση $t \mapsto B_t$ είναι συνεχής.

iv. Για κάθε $s, t \geq 0$ και κάποιο A Borel σύνολο,

$$\mathbb{P}(B_{t+s} - B_t \in A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{x^2}{2s}\right) dx$$

,δηλαδή οι μεταβολές της κίνησης Brown κατανέμονται κανονικά.

Από τον παραπάνω ορισμό, μπορούμε να μιλήσουμε για το μέτρο που επάγει η κίνηση Brown στον χώρο $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Έτσι για μια συλλογή A_1, A_2, \dots, A_N Borel συνόλων έχουμε ότι,

$$\mathbb{P}(B_{t_1} \in A_1, B_{t_2} \in A_2, \dots, B_{t_N} \in A_N) = \int_{A_1} \int_{A_2} \dots \int_{A_N} \prod_{i=1}^N p(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, x_i) dx_1 dx_2 \dots dx_N$$

Αφού οι διαφορές $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ είναι ανεξάρτητες για κάθε $i = 1, 2, \dots, N$ έχουμε ότι,

$$\mathbb{P}(B_{t_1} - B_{t_0} \in A_1, \dots, B_{t_N} - B_{t_{N-1}} \in A_N) = \int_{A_1} \int_{A_2} \dots \int_{A_N} \prod_{i=1}^N \mathbb{P}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \in A_i) dx_1 \dots dx_N$$

όπου $B_{t_i} - B_{t_{i-1}} \sim \mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})$, με $t_0 = 0$.

Το παραπάνω μέτρο εκφράζει την πιθανότητα μια τροχιά της κίνησης Brown να βρίσκεται την χρονική στιγμή t_i στα Borel σύνολα A_i , για κάθε $i = 1, 2, \dots, N$. Κάθε τροχιά της κίνησης Brown εξαρτάται από το σημείο εκκίνησης x_0 . Όταν το σημείο εκκίνησης είναι το μηδέν τότε λέμε ότι η κίνηση Brown ονομάζεται τυπική (standard). Στο παρακάτω σχήμα μπορούμε να διακρίνουμε δέκα τροχιές μιας κίνησης Brown, η οποία έχει ως αρχή $B_0 = 1$.

Ιδιότητες κίνησης Brown

Έστω $\{B_t\}_{t \geq 0}$ μια τυπική κίνηση Brown, τότε ισχύουν τα ακόλουθα :

- i. $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$, για $s \leq t$
- ii. $\text{Cov}(B_t, B_s) = \min\{t, s\}$
- iii. $\mathbb{E}[|B_t - B_s|^2] = |t - s|$

Απόδειξη:

(i) Θεωρούμε $p(t, x, y)$ η ρ.π.π μιας κίνησης Brown B_t με μέσο y και διακύμανση t . Τότε η από κοινού ρ.π.π των B_t και B_s , με $s \leq t$ θα είναι :

$$f_{B_t, B_s}(x, y) = p(s, 0, x)p(t - s, x, y)$$

Έστω $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ τότε,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_t - B_s \in A) &= \\ &= \int_{\{(x, y): y - x \in A\}} p(s, 0, x)p(t - s, x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} p(s, 0, x) \left(\int_{y: y - x \in A} p(t - s, x, y) dy \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(s, 0, x) \left(\int_A p(t - s, x, x + u) du \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p(s, 0, x) \left(\int_A p(t - s, 0, u) du \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(s, 0, x) dx \int_A p(t - s, 0, u) du = \int_A p(t - s, 0, u) du = 1 \end{aligned}$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

(ii) Χρησιμοποιώντας την από κοινού ρ.π.π. των B_t και B_s . Υποθέτουμε ότι $0 \leq s \leq t$, τότε,

$$\begin{aligned} \text{Cov}(B_t, B_s) &= \mathbb{E}[B_t B_s] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x y p(s, 0, x) p(t - s, x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(s, 0, x) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} y p(t - s, x, y) dy \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(s, 0, x) dx = s \end{aligned}$$

αφού $\mathbb{E}_x[B_{t-s}] = x$. Ομοίως αν υποθέσουμε ότι $t \leq s$, έχουμε ότι $\text{Cov}(B_t, B_s) = t$

(iii) Έστω ότι $s \leq t$ τότε,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|B_t - B_s|^2] &= \\ &= \mathbb{E}[B_t^2] + \mathbb{E}[B_s^2] - 2\mathbb{E}[B_t B_s] = t + s - 2s = t - s \end{aligned}$$

□

Πρόταση 1.2.1 Για κάθε $0 \leq s < t$ η μεταβολή $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητη από την σ -άλγεβρα,

$$\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, 0 \leq u \leq s).$$

Απόδειξη: Έστω $r \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $0 \leq r \leq s \leq t$. Σύμφωνα με την ιδιότητα ii. από τον ορισμό της κίνησης Brown, οι μεταβολές $B_t - B_s$ και $B_r - B_0 = B_r$ είναι ανεξάρτητες. Η σ -άλγεβρα \mathcal{F}_s που παράγεται την τυχαία μεταβλητή B_r είναι,

$$\mathcal{F}_s = \sigma(B_r, 0 \leq r \leq s).$$

Συνεπώς η τυχαία μεταβλητή $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητη από τη σ -άλγεβρα $\sigma(B_u, 0 \leq u \leq s)$.

□

Παράδειγμα 1.2.1 Έστω B_t μια κίνηση Brown με τη φυσική διήθηση $\mathcal{F}_t = \sigma(B_u; u \leq t)$. Τότε για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ η διαδικασία

$$Z_t = \exp\left(\theta B_t - \frac{\theta^2 t}{2}\right)$$

είναι martingale. Έστω μια τυχαία μεταβλητή $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ τότε $\mathcal{E}\exp(X) = \exp(\sigma^2/2)$. Έτσι για $s \leq t$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_{t+s}|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}\left[e^{\theta B_{t+s} - \frac{\theta^2(t+s)}{2}}|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\left(e^{\theta B_s - \frac{\theta^2 s}{2}}\right) e^{\theta(B_{t+s}-B_s)} - \frac{\theta^2 t}{2}|\mathcal{F}_s\right] \\ &= \left(e^{\theta B_s - \frac{\theta^2 s}{2}}\right) e^{\frac{\theta^2 t}{2}} \mathbb{E}\left[e^{\theta(B_{t+s}-B_s)}|\mathcal{F}_s\right] \\ &= \left(e^{\theta B_s - \frac{\theta^2 s}{2}}\right) e^{\frac{\theta^2 t}{2}} \mathbb{E}\left[e^{\theta(B_{t+s}-B_s)}\right] \\ &= e^{\theta B_s - \frac{\theta^2 s}{2}} = Z_s \end{aligned}$$

κάνοντας χρήση της πρότασης 1.2.1 για την ανεξαρτησία της διαφοράς μια κίνησης Brown από την σ -άλγεβρα \mathcal{F}_s .

Από την πρόταση 1.2.1 και σύμφωνα με το μέτρο που επάγει η κίνηση Brown, μπορούμε να συμπεράνουμε μια χρήσιμη ιδιότητα για την δεσμευμένη μέση τιμή. Αν $0 \leq s \leq t$ και $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, 0 \leq u \leq s)$ η σ -άλγεβρα που παράγεται από την κίνηση Brown B_s μέχρι την χρονική στιγμή t , τότε,

$$\mathbb{E}[g(B_t - B_s)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[g(B_t - B_s)]$$

Συγκεκριμένα αν για την αναμενόμενη τιμή και την διακύμανση της διαφοράς $B_t - B_s$ έχουμε ότι,

$$\mathbb{E}[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s] = 0 \text{ και } \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = t - s$$

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι βάση της Πρότασης 1.2.1, η τυχαία μεταβλητή $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητη της σ -άλγεβρας \mathcal{F}_s , όχι όμως η B_t . Αντίθετα έχουμε,

$$\mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s + B_s|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_s|\mathcal{F}_s] = B_s$$

Σε αυτό το σημείο κρίνεται σκόπιμος ο υπολογισμός της χαρακτηριστικής συνάρτησης των μεταβολών της κίνησης Brown. Βάσει της χαρακτηριστικής συνάρτησης, είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε όλες τις πολυωνυμικές ροπές των μεταβολών της κίνησης Brown.

$$\phi_{B_t - B_s}(\lambda) = \mathbb{E}[\exp(i\lambda(B_t - B_s))]$$

Γνωρίζουμε ότι για $0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp(i\lambda(B_t - B_s))] &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right) \exp(i\lambda x) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{\lambda^2(t-s)}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(x - i\lambda(t-s))^2}{2(t-s)}\right) dx. \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας τις πράξεις καταλήγουμε,

$$\phi_{B_t - B_s}(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2(t-s)}{2}}.$$

Έτσι αν θέλουμε να υπολογίσουμε την τέταρτη ροπή για την διαφορά $B_t - B_s$,

$$\mathbb{E}[(B_t - B_s)^4] = \frac{d}{d\lambda^4} \phi_{B_t - B_s}(\lambda)|_{\lambda=0} = 3(t-s)^2.$$

1.3 Η ιδιότητα Markov

Σε αυτή την παράγραφο θα δείξουμε ότι η κίνηση Brown έχει την ιδιότητα Markov. Θα αρχίσουμε θυμίζοντας τον ορισμό της ιδιότητας Markov, για μια στοχαστική διαδικασία.

Ορισμός 1.3.1(Ιδιότητα Markov) : Έστω ένας χώρος μέτρου $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ και $\{X_t\}_{t \geq 0}$ μια στοχαστική διαδικασία προσαρμοσμένη ως προς διήθηση $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Η διαδικασία $\{X_t\}_{t \geq 0}$ έχει την ιδιότητα *Markov* αν για κάθε $s, t > 0$,

$$\mathbb{P}(X_{t+s} \in A | \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_{t+s} \in A | X_s), \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Ισοδύναμα, μπορούμε να πούμε να πούμε ότι μια στοχαστική διαδικασία X_t είναι μια διαδικασία Markov, αν για $s, t > 0$ και κάθε f Borel μετρήσιμη συνάρτηση, υπάρχει g Borel μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε,

$$\mathbb{E}[f(B_{t+s}) | \mathcal{F}_s] = g(X_t)$$

Στην περίπτωση που η διαδικασία που μελετάμε είναι η κίνηση Brown, ο παραπάνω ορισμός μας λέει ότι η πληροφορία της διαδικασίας μέχρι την χρονική στιγμή s δεν λαμβάνεται υπόψη. Με άλλα λόγια, η διαδικασία εξαρτάται μόνο από την πορεία της από την χρονική στιγμή s και πέρα. Πράγματι, αν $\{B_t\}_{t \geq 0}$ μια κίνηση *Brown*, τότε η διαδικασία $B_{t+s} - B_s$ είναι ανεξάρτητη της πληροφορίας \mathcal{F}_s . Από το πρόταση 1.2.1. μπορούμε να αποδείξουμε αυτόν τον ισχυρισμό.

Έστω $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, u \geq s)$, η μικρότερη σ-άλγεβρα που κάνει μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή B_u για $u \geq s$. Θεωρούμε μια συνάρτηση f τέτοια ώστε f να είναι φραγμένη. Τότε

$$\mathbb{E}[f(B_{t+s} - B_s) | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(B_{t+s} - B_s)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\pi t}\right) du$$

,αφού $B_{t+s} - B_s$ ανεξάρτητη της διήθησης \mathcal{F}_s .

Συνεπώς, αν θεωρήσουμε ότι την χρονική στιγμή s , $B_s = c$,

$$\mathbb{E}[f(B_{t+s}) | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(B_{t+s} - B_s + B_s) | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(B_{t+s} - B_s + c) | \mathcal{F}_s]$$

Παρατηρούμε ότι η διαδικασία $B_{t+s} - B_s + c$ είναι ισοδύναμη με την $B_{t+s} - B_s$, ξεκινώντας την χρονική στιγμή 0 από το σημείο c . Οπότε,

$$\mathbb{E}[f(B_{t+s} - B_s + c) | \mathcal{F}_s] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(u-c)^2}{2\pi t}\right) du = \mathbb{E}_{B_s}[f(B_t)]$$

Η ιδιότητα Markov μας λέει ότι αν γνωρίζουμε την 'πορεία' την κίνησης μέχρι κάποια χρονική στιγμή s , και δεσμεύσουμε την διαδικασία B_t , ως προς την ιστορία' μέχρι την χρονική στιγμή s , τότε το μόνο που θα πρέπει να λάβουμε υπόψη είναι η ιστορία' της διαδικασίας από την στιγμή s και μετά.

1.4 Η Κίνηση Brown ως *Martingale*

Σε αυτήν ενότητα αυτή παρουσιάζεται η κίνηση Brown ως προς τη θεωρία των martingale. Συγκεκριμένα, βάση του Θεωρήματος του Levy μπορούμε να ελέγξουμε αν μια στοχαστική διαδικασία είναι κίνηση Brown, σε σχέση με τις ιδιότητες martingale έχει.

Θεώρημα 1.4.1 Έστω B_t μια κίνηση Brown και $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, 0 \leq u \leq s)$ η σ -άλγεβρα που παράγεται από την B_t . Οι παρακάτω στοχαστικές διαδικασίες είναι martingales ως προς την διήθηση \mathcal{F}_s :

i. B_t

ii. $(B_t)^2 - t$

iii. $M_t^\lambda = \exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}\right)$

Απόδειξη: Για το (i) : Ισχύει ότι $\mathbb{E}[|B_t|] < \infty$, αφού $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ και συνεπώς το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \exp(-\frac{x^2}{2t})$ συγκλίνει. Επίσης,

$$\mathbb{E}[B_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s + B_s | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[B_s | \mathcal{F}_s] =$$

λόγω των ανεξάρτητων μεταβολών και της μετρησιμότητας $B_s \in m - \mathcal{F}_s$ προκύπτει ότι,

$$= \mathbb{E}[B_t - B_s] + B_s = B_s.$$

Συνεπώς η κίνηση Brown είναι martingale.

Για το (ii) : Αρχικά, αφού $B_t \in m - \mathcal{F}_t$, τότε και κάθε κυρτός συνδυασμός αυτής είναι \mathcal{F}_t μετρήσιμος, δηλαδή $(B_t)^2 - t \in m - \mathcal{F}_t$. Επίσης, αν $0 \leq s \leq t$ τότε,

$$\mathbb{E}[|B_t^2 - t|] \leq \mathbb{E}[|B_t^2| + t] = \mathbb{E}[|B_t^2|] + t = 2t < \infty.$$

Τέλος,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_t^2 - t | \mathcal{F}_s] &= \\ &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 - t - B_s^2 + 2B_s B_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2 | \mathcal{F}_s] - t - B_s^2 - 2B_s \mathbb{E}[B_t | \mathcal{F}_s] = \\ &= \mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] - t - B_s^2 + 2B_s^2 = (t - s) - t + B_s^2 = B_s^2 - s. \end{aligned}$$

Για το (ii), βλ. παράδειγμα 1.2.1, Εκθετικά martingales.

□

Θεώρημα 1.4.2 (Levy) Έστω $\{B_t, t \geq 0\}$ μια στοχαστική διαδικασία και $\mathcal{F}_s = \sigma(B_s, s \geq t)$ η διήθηση που παράγεται από αυτή. Η B_t είναι κίνηση Brown αν και μόνο αν :

i. $B_0 = 0$ σ.β.

ii. Οι τροχιές $t \mapsto B_t$ είναι συνεχείς συναρτήσεις ως προς τον χρόνο.

iii. Η διαδικασία B_t είναι martingale ως προς την διήθηση \mathcal{F}_s .

iv. Η διαδικασία $(B_t)^2 - t$ είναι martingale ως προς την διήθηση \mathcal{F}_s .

Απόδειξη: Βλ. παράρτημα του κεφαλαίου.

1.5 Μεταβολές της κίνησης Brown

Ορισμός 1.5.1 Έστω $\mathcal{P}_n = \{t_i\}_{i=0}^n$ μια διαμέριση του διαστήματος $[0, T]$. Ορίζουμε ως συνολική μεταβολή (total variation) μιας συνάρτησης $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ ως εξής :

$$\limsup_{\Delta t \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

και ως τετραγωνική μεταβολή

$$\limsup_{\Delta t \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (f(t_{i+1}) - f(t_i))^2.$$

Έστω $\{B_t, 0 \leq t \leq T\}$ κίνηση Brown. Θεωρούμε $\{t_i^n\}_{i=0}^n$ ακολουθία χρόνων με τιμή $t_i^n = \frac{iT}{n}$, τέτοια ώστε $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_n^n = T$. Συμβολίζουμε,

$$\Delta_i^n B := B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)$$

ως τις πρώτες μεταβολές της κίνησης Brown.

Πρόταση 1.5.1 Αν $\{B_t, 0 \leq t \leq T\}$ κίνηση Brown, τότε,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_i^n B)^2 = T \text{ στον } L^2$$

Απόδειξη: Αρχεί να δείξουμε ότι,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left\{ \left[\sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_i^n B)^2 - T \right]^2 \right\} = 0$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \left[\sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_i^n B)^2 - T \right]^2 \right\} &= \\ &= \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_i^n B)^2 - \frac{T}{n} \right)^2 \right] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E} \left[\left((\Delta_i^n B)^2 - \frac{T}{n} \right)^2 \right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[\mathbb{E}[(\Delta_i^n B)^4] - \frac{2T}{n} \mathbb{E}[(\Delta_i^n B)^2] + \frac{T^2}{n^2} \right] = n \left(\mathbb{E}[(\Delta_i^n B)^4] - \frac{2T^2}{n^2} + \frac{T^2}{n^2} \right) \\ &= \frac{3T^2}{n} - \frac{2T^2}{n} + \frac{T^2}{n} \rightarrow 0, \text{ όταν } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

καθώς $\mathbb{E}[(\Delta_i^n B)^4] = \frac{3T^2}{n^2}$, που μπορεί να βρεθεί κάνοντας χρήση της χαρακτηριστικής συνάρτησης.

□

Πρόταση 1.5.2 Αν $\{B_t, 0 \leq t \leq T\}$ κίνηση Brown, τότε η συνολική μεταβολή της στοχαστικής διαδικασίας $\{B_t, 0 \leq t \leq T\}$ είναι άπειρη σχεδόν σίγουρα.

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{P}_n = \{t_i^n\}_{i=0}^{n-1}$ μια διαμέριση του διαστήματος $[0, T]$. Για την τετραγωνική μεταβολή ισχύει ότι,

$$\sum_{i=0}^{n-1} |\Delta_i^n B|^2 \leq \left(\max_{i=0,1,\dots,n-1} |\Delta_i^n B| \right) \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta_i^n B| \quad (1.5.1)$$

Αφού οι τροχιές της κίνησης Brown είναι συνεχείς συναρτήσεις τότε,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\max_{i=0,1,\dots,n-1} |\Delta_i^n B| \right) = 0, \text{ σ.β.}$$

Επίσης από την πρόταση 1.5.1 η τετραγωνική μεταβολή είναι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_i^n B)^2 = T$$

,στον χώρο L^2 . Γνωρίζουμε ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία στον L^2 , έχει συγκλίνουσα υπακολουθία σχεδόν σίγουρα. Οπότε αν $t^{n_k} = \{t_0^n, t_1^n, \dots, t_{n_k}^n\}$ υπακολουθία της t^n τότε,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n_k-1} |\Delta_i^{n_k} B|^2 = T \text{ σ.β,}$$

Συνεπώς

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n_k-1} |\Delta_i^{n_k} B| = \infty \text{ σ.β,}$$

καθώς $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta t^{n_k} = 0$.

□

Η παραπάνω πρόταση υποδεικνύει ότι η κίνηση Brown δεν έχει πεπερασμένη συνολική μεταβολή. Με άλλα λόγια, κάθε τροχιά της **δεν** είναι συνάρτηση πεπερασμένης μεταβολής (bounded variation). Το γεγονός αυτό στέκεται εμπόδιο στην κατασκευή ενός ολοκληρώματος της μορφής :

$$I(f)(\omega) = \int_0^T f(\omega, t) dB_t$$

όπου f κάποια συνάρτηση με συγκεκριμένες ιδιότητες που θα αναφερθούν στην επόμενη παράγραφο. Κατά συνέπεια η κατασκευή ενός ολοκληρώματος *Riemann – Stieltjes* είναι αδύνατη.

Ένα ακόμη χαρακτηριστικό που έχουν οι τροχιές μιας κίνησης Brown είναι ότι είναι πουθενά παραγωγίσιμες. Αυτός ο ισχυρισμός παρουσιάζεται παρακάτω.

Παράδειγμα 1.5.1 Αν $\{B_t, 0 \leq t \leq T\}$ κίνηση Brown, τότε είναι μη παραγωγίσιμη στο $t = 0$ με πιθανότητα ένα.

Έστω η ακολουθία συνόλων

$$A_n = \left\{ \frac{|B_t|}{t} > n : t \in \left[0, \frac{1}{n^4}\right] \right\}$$

Θεωρούμε μια νέα στοχαστική διαδικασία $V_n(t) = \frac{1}{n^2} B(n^4 t)$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η V_n είναι κίνηση Brown για κάθε n . Πράγματι, $V_n(0) = B_0 = 0$, οι απεικονίσεις $t \mapsto V(t) = \frac{1}{c} B(c^2 t)$ είναι συνεχείς. Τέλος, βάση του θεωρήματος 1.4.1, αρκεί να δείξουμε ότι τα $V(t)$ και $|V(t)|^2 - t$ είναι martingales ως προς την διήθηση

$$\mathcal{G}_s = \sigma\{V(s) : 0 \leq s \leq t\} = \sigma\{B(c^2 s) : 0 \leq s \leq t\} = \sigma\{B(s) : 0 \leq s \leq c^2 t\} = \mathcal{F}_{c^2 t}$$

, όπου \mathcal{F}_t η σ-άλγεβρα που παράγεται από την B_t . Πράγματι, αν $s < t$, τότε $c^2s < c^2t$. Οπότε,

$$\mathbb{E}[V(t)|\mathcal{G}_s] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{c}B_{c^2t}|\mathcal{F}_{c^2s}\right] = \frac{1}{c}B_{c^2s} = V(s)$$

Ομοίως για την διαδικασία $(V_t)^2 - t$. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η διαδικασία V_t είναι κίνηση Brown. Οπότε,

$$\mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}\left[\frac{|B_{1/n^4}|}{1/n^4} > n\right] = \mathbb{P}\left\{\frac{|V_{1/n^4}|}{1/n^4} > n\right\} = \mathbb{P}\left[|B_1| > \frac{1}{n}\right] \rightarrow 1 \text{ καθώς } n \rightarrow \infty$$

Τέλος, από τις αριθμήσιμες τομές των συνόλων A_n ,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = 1.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι, η τιμή που θα πάρει η παράγωγος για $t = 0$ θα είναι $-\infty$ ή $+\infty$.

Το παραπάνω παράδειγμα μπορεί να επεκταθεί σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού μιας κίνησης Brown. Με άλλα λόγια, μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε τροχιά της κίνησης Brown είναι πουθενά παραγωγίσιμη. Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού δεν παρατίθεται. Όμως μπορούμε να δώσουμε το ακόλουθο επιχείρημα.

Έστω η στοχαστική διαδικασία $V_s(t) = B_{t+s} - B_s$, όπου $0 \leq s < t \leq T$ και B_t μια κίνηση Brown. Εύκολα δείχνουμε ότι και η V_t είναι κίνηση Brown. Αρχικά $V_s(0) = B_s - B_s = 0$. Θεωρούμε μια διαμέριση του διαστήματος $[0, T]$,

$$\mathcal{P}_n = 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$$

τότε για κάθε $i = 0, 1, \dots, n$ και $s < t_i$, οι μεταβολές

$$V_s(t_{i+1}) - V_s(t_i) = B_{t_{i+1}+s} - B_{t_i+s}$$

είναι ανεξάρτητες αφού οι B_{t_i} για κάθε $i = 0, 1, \dots, n$, και ακολουθούν κανονική κατανομή με μέσο μηδέν και διακύμανση $t_{i+1} - t_i$. Ως προς την συνεχεία για τις τροχιές που παράγει η $V_t(s)$, οι τροχιές $t \mapsto V_s(t)$ είναι συνεχείς ως γραμμικός συνδυασμός συνεχών συναρτήσεων. Ωστόσο, από το παράδειγμα 1.2.1 έχουμε δείξει ότι η B_t δεν είναι παραγωγίσιμη στο $t = 0$. Έτσι για κάποιο τυχόν $t \in [0, T]$ και κάποιο $s \rightarrow 0$, η τιμή της παραγώγου θα απειρίζεται, δηλαδή :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{|B_{t+s} - B_s|}{s} \rightarrow -\infty \text{ ή } +\infty.$$

Παρακάτω δίνουμε δύο χρήσιμες ιδιότητες για τις τροχιές της κίνησης Brown.

Θεώρημα 1.5.1 Έστω $\{B_t\}_{t \geq 0}$ μια τυπική κίνηση Brown, και έστω κάποιο $a > 0$, τότε

- i. Η στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}_{t \geq 0}$ τέτοια ώστε $X_t = \frac{1}{a}B_{a^2t}$, είναι επίσης μια τυπική κίνηση Brown.
- ii. Η στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}_{t \geq 0}$ τέτοια ώστε

$$X_t = \begin{cases} 0 & , t = 0 \\ tB_{1/t} & , t > 0 \end{cases}$$

είναι επίσης μια τυπική κίνηση Brown

Απόδειξη:

(i.) Η συνέχεια των τροχιών, η ανεξαρτησία και η στασιμότητα των μεταβολών είναι αμετάβλητες ως προς την αλλαγή κλίμακας του χρόνου. Έτσι για κάποιο $s \leq t$, εύκολα δείχνουμε ότι η διαδικασία X_t ακολουθεί κανονική κατανομή, με μέσο 0 και διακύμανση $t - s$.

(ii.) Έστω το διάνυσμα των περιθωρίων της B_t , $(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$, όπου $\mathbb{E}[B_{t_i}] = 0$, $\forall i$ και για κάθε $0 < t_i < t_j$, $\text{Cov}(B_{t_i}, B_{t_j}) = t_j$. Προφανώς, η διαδικασία X_t ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο 0. Επίσης, για τις συνδιακυμάνσεις έχουμε ότι

$$\text{Cov}(X_{t+h}, X_t) = t(t+h) \text{Cov}(B_{\frac{1}{t+h}}, B_{\frac{1}{t}}) = t(t+h) \frac{1}{t+h} = t$$

Συνεπώς, όλες οι περιθωρίες $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ θα ακολουθούν την ίδια κατανομή όπως και οι περιθωρίες από την B_t . Μένει ναδειχθεί η σχεδόν βέβαιη συνέχεια μιας τροχιάς X_t . Προφανώς όταν $t > 0$ τότε η τροχιά $t \mapsto X_t$ είναι συνεχής. Έστω $t \in \mathbb{Q}$, τότε $\mathcal{L}\{X_t\} = \mathcal{L}\{B_t\}$, σ.β., δηλαδή έχουν ίδια κατανομή σ.β. . Συνεπώς,

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{Q}}} X_t = 0, \text{ σ.β.}$$

Όμως, από την σχεδόν βέβαιη συνέχεια της X_t στο $(0, \infty)$ τότε

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in \mathbb{Q}}} X_t = \lim_{t \rightarrow 0} X_t = 0, \text{ σ.β.}$$

Έτσι, η $\{X_t\}_{t \geq 0}$ έχει συνεχείς τροχιές σχεδόν βέβαια.

□

Θεώρημα 1.5.2 (Συνέχεια Holder) Έστω $0 < \varepsilon < 1/2$, $0 < T < \infty$ και B_t μια κίνηση Brown. Τότε υπάρχει τ.μ. N τέτοια ώστε για κάθε p , $\mathbb{E}[N^p] < \infty$, $p \in (0, \infty)$ και

$$|B_t(\omega) - B_s(\omega)| \leq N(\omega) |t - s|^{1/2-p}, \quad \forall t, s \in [0, T]$$

1.6 Προσομοίωση κίνησης Brown

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε με διάφορους τρόπους που μπορούμε να προσομοιώσουμε τροχιές από την κίνηση Brown. Οι μέθοδοι που θα εξετάσουμε είναι η εμβύθιση Skorohod και η επέκταση Karhunen-Loève. Η πρώτη μέθοδος αφορά, πως από έναν τυχαίο περίπατος μπορεί να προσεγγίσει μια τροχιά της κίνησης Brown. Στη δεύτερη μέθοδο, θα κάνουμε χρήση μιας οικογένεια συναρτήσεων βάσης στον L^2 .

1.6.1 Η εμβύθιση Skorohod (Skorokhod Embedding)

Η εμβύθιση Skorohod δείχνει ότι η κίνηση Brown μπορεί να εκφραστεί σαν όριο ενός τυχαίου περιπάτου, κάτω από μερικές αλλαγές. Έτσι, έστω ξ_1, ξ_2, \dots ανεξάρτητα ομοιόμορφα κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές, με $\mathbb{E}[\xi_i] = 0$ και $\mathbb{E}[\xi_i^2] = 1$, και $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$. Τότε για τους χρόνους στάσης $0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots$, υπάρχει μία κίνηση Brown B_t , τέτοια ώστε $B_{\tau_n} = S_n$ σ.β. για κάθε n . Το παρακάτω θεώρημα δείχνει αυτόν τον ισχυρισμό.

Θεώρημα 1.6.1 (Skorohod, Strassen) Έστω ξ_1, ξ_2, \dots ανεξάρτητα ομοιόμορφα κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές, με $\mathbb{E}[\xi_i] = 0$ και $\mathbb{E}[\xi_i^2] = 1$, και $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$. Τότε υπάρχει μια κίνηση Brown B_t , τέτοια ώστε

$$t^{-\frac{1}{2}} \sup_{s \leq t} |S_{[s]} - B_s| \xrightarrow{P} 0, \text{ καθώς } t \rightarrow \infty$$

όπου $[s]$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος του s , και η σύγκλιση είναι σε πιθανότητα.

Απόδειξη: Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [7].

Αξίζει να σημειωθεί ότι η σύγκλιση είναι και στον L^∞ , και κατά συνέπεια ομοιόμορφη. Το παρακάτω θεώρημα, μας δείχνει τον τρόπο που μπορεί να γίνει η προσέγγιση της κίνησης Brown από τον τυχαίο περίπατο. Το θεώρημα ονομάζεται **συναρτησιακό κεντρικό οριακό θεώρημα (functional central limit theorem)** και οφείλεται στον Donsker.

Θεώρημα 1.6.2 (Donsker) Έστω ξ_1, ξ_2, \dots ανεξάρτητα ομοιόμορφα κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές, με $\mathbb{E}[\xi_i] = 0$ και $\mathbb{E}[\xi_i^2] = 1$. Θεωρούμε το άθροισμα $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ και τη διαδικασία,

$$X_t^n = n^{-1/2} S_{[nt]}, \quad t \in [0, 1], n \in \mathbb{N}$$

Θεωρούμε επίσης μια κίνηση Brown B_t , $t \in [0, 1]$ και μια συνάρτηση $f : D[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη και συνεχής σ.β. στην τροχιά της B_t , όπου $D[0, 1]$ είναι ο χώρος των δεξιά συνεχών συναρτήσεων που έχουν αριστερά όρια. Τότε,

$$f(X^n) \xrightarrow{D} f(B)$$

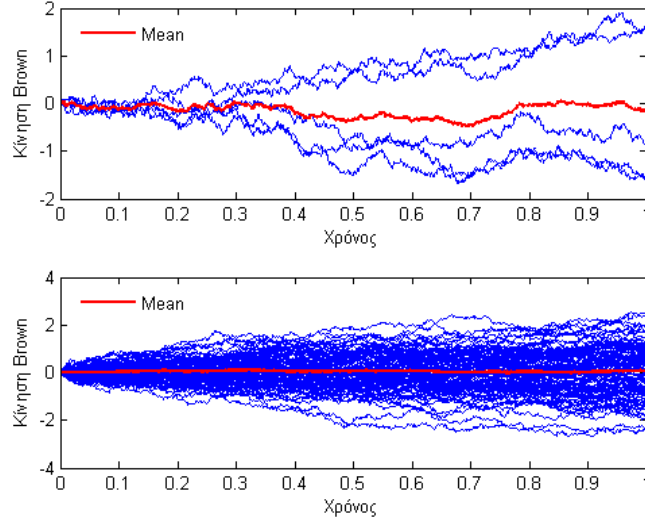
και η σύγκλιση είναι σε κατανομή.

Απόδειξη: Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [7].

Το παραπάνω θεώρημα, πέρα από την σύγκλιση κατά κατανομή του τυχαίου περιπάτου στην κίνηση Brown, δείχνει ότι καθώς $n \rightarrow \infty$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}} < x\right) \rightarrow \mathbb{P}(B_t < x)$$

Παρατηρούμε ότι αυτό το αποτέλεσμα του θεωρήματος αποτελεί μια περίπτωση του κεντρικού οριακού θεωρήματος, το οποίο υποδεικνύει ότι $S_n/\sqrt{n} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Στο παρακάτω γράφημα έχουμε προσομοιώσει διάφορες τροχιές της κίνησης Brown, καθώς και την μέση τιμή τους.



Σχήμα 1.1: Προσομοίωση από τροχιές τις κίνησης Brown, για διαφορετικό πλήθος όρων.

1.6.2 Η επέκταση Karhunen-Loève

Η Karhunen-Loève επέκταση είναι μια προσέγγιση στον χώρο L^2 , η οποία κάνει χρήση μιας ορθοκανονικής βάσης σε αυτόν και της συνάρτησης της αυτοσυσχέτισης. Σκοπός μας είναι να προσεγγίσουμε μια τροχιά της κίνησης Brown, από ένα αριθμησιμο άθροισμα συνεχών τυχαίων μεταβλητών στον L^2 . Πρώτα όμως θα δούμε πως αυτό μπορεί να επιτευχθεί γενικά για κάποια συνάρτηση f στον L^2 .

Έστω μια συνάρτηση $f \in L^2(\Omega)$, με $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. Επίσης υποθέτουμε μια ορθοκανονική βάση $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ στον L^2 . Είναι γνωστό ότι η συνάρτηση f , μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα ως προς τα στοιχεία της βάσης. Πράγματι, αν θεωρήσουμε την ακολουθία \tilde{f}_N με την μορφή,

$$\tilde{f}_N = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi_n, \text{ όπου } f_n = \int_{\Omega} f(x) \phi_n(x) dx$$

τότε η \tilde{f}_N συγκλίνει στην f στον L^2 , δηλαδή,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - \tilde{f}_N\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

Σκοπός μας είναι με ανάλογο τρόπο να προσεγγίσουμε τυχαίες μεταβλητές στον L^2 . Έστω $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή με μέσο μηδέν, και για την οποία ισχύει ότι,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \mathbb{E}[|X_{t+s} - X_t|^2] = 0 \quad (1.6.1)$$

Ορίζουμε την συνάρτηση $K : [0, T] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ με τιμή $K(t, s) = \text{Cov}(X_t, X_s)$. Η συνθήκη (1.6.1) καθιστά την $K(t, s)$ συνεχή συνάρτηση ως προς τα t και s . Ας υποθέσουμε ότι, για μια ακολουθία $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ και μια ορθοκανονική βάση $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ στον L^2 η διαδικασία $\{X_t\}$ μπορεί να γραφτεί στην μορφή,

$$X_t(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\omega) \phi_n(t), \quad t \in [0, T] \quad (1.6.2)$$

Για να εκτιμήσουμε τους συντελεστές ξ_k , αρκεί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^T X_t \phi_k(t) dt = \xi_k$.

Πράγματι,

$$\begin{aligned} \int_0^T X_t \phi_k(t) dt &= \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \phi_n(t) \right) \phi_k(t) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \left(\int_0^T \phi_n(t) \phi_k(t) dt \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \delta_{nk} = \xi_k, \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

δεδομένου ότι μπορούμε να εναλλάξουμε στο ολοκλήρωμα με το άθροισμα. Τέλος, υποθέτουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι κάθετες, δηλαδή

$$\mathbb{E}[\xi_n \xi_m] = \lambda_n \delta_{nm}, \quad \text{όπου } \lambda_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Συνεπώς η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μπορεί να γραφτεί ως,

$$\begin{aligned} K(t, s) &= \\ &= \text{Cov}(X_t, X_s) = \mathbb{E}[X_t X_s] = \mathbb{E} \left[\sum_{k,l=1}^{\infty} \xi_k \phi_k(t) \xi_l \phi_l(s) \right] = \\ &= \sum_{k,l=1}^{\infty} \mathbb{E}[\xi_k \xi_l] \phi_k(t) \phi_l(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k(t) \phi_k(s) \end{aligned}$$

Αν ισχύει η παραπάνω έκφραση για την $K(t, s)$, τότε

$$\begin{aligned} \int_0^1 K(t, s) \phi_n(s) ds &= \\ &= \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k(t) \phi_k(s) \phi_n(s) ds = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k(t) \int_0^1 \phi_k(s) \phi_n(s) ds \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k(t) \delta_{kn} = \lambda_n \phi_n(t). \end{aligned}$$

Καταλήγοντας, συμπεραίνουμε ότι για να είναι εφικτή η αναπαράσταση της διαδικασίας X_t ως προς την μορφή (1.6.2), θα πρέπει οι ακολουθίες $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ και $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ να προκύπτουν ως οι ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις (eigen functions) κάποιου ολοκληρωτικού τελεστή.

Ορίζουμε τον τελεστή $R : L^2([0, 1]) \rightarrow L^2([0, 1])$ με τιμή,

$$R(\phi) = \int_0^1 K(t, s) \phi(s) ds$$

Μπορεί ναδειχθεί ότι ο τελεστής R είναι μη-αρνητικός και self-adjoint, δηλαδή,

$$\langle R(\phi), g \rangle = \langle \phi, R(g) \rangle \quad \text{και} \quad \langle R(\phi), \phi \rangle \geq 0, \quad \forall \phi, g \in L^2([0, 1])$$

Συνεπώς, οι ιδιοτιμές του $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μη-αρνητικές. Επίσης, ο τελεστής R είναι συμπαγής, οπότε από την φασματική ανάλυση για συμπαγείς και self-adjoint τελεστές, θα ισχύει ότι ο R θα έχει το πολύ αριθμήσιμο του πλήθος ιδιοτιμές οι οποίες θα τείνουν στο μηδέν.

Τέλος το Θεώρημα του Mercer, δείχνει ότι η συνάρτηση $K(t, s)$ είναι συνεχής στο $[0, 1] \times [0, 1]$ και ότι η έκφραση,

$$K(t, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k(t) \phi_k(s)$$

επιτυγχάνεται και η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα.

Θεώρημα 1.6.3 (Mercer) Έστω X ένα κλειστό υποσύνολο του \mathbb{R}^n , και μ ένα θετικό Borel μέτρο στον X . Θεωρούμε επίσης $K : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ μια συμμετρική και συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε να ικανοποιεί τα ακόλουθα

i. Για κάθε συλλογή $\{x_i\}_{i=1}^N$ στον X και κάθε συλλογή $\{a_i\}_{i=1}^N$ στον \mathbb{R} ,

$$\sum_{i,j=1}^N a_i a_j K(x_i, x_j) \geq 0$$

ii. $\int_X \int_X K^2(t, s) d\mu(t) d\mu(s) < \infty$, για κάθε $(t, s) \in T \times T$

Τότε,

$$K(t, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k(t) \phi_k(s) \quad (1.6.3)$$

όπου η σειρά συγκλίνει απόλυτα για κάθε $(t, s) \in T \times T$, και ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του X .

Απόδειξη : Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [4], σελ. 197.

Το Θεώρημα του Mercer λέει ότι αν υπάρχει μια συνεχή συνάρτηση K στο $[0, T] \times [0, T]$ τέτοια ώστε $K \in L^2$, τότε η έκφραση (1.6.3) επιτυγχάνεται και τότε η σειρά συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα. Το αποτέλεσμα αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο, καθώς παραπάνω εκφράζοντας τη διαδικασία X_t ως ένα άθροισμα, δείξαμε ότι η $K(t, s)$ μπορεί να πάρει την έκφραση (1.6.3). Το Θεώρημα Karhunen-Loève, δείχνει ότι η μορφή της X_t ως $X_t = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \phi_n(t)$ είναι σωστή.

Θεώρημα 1.6.4 (Karhunen-Loève) Έστω μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}_{t \in [0,1]}$ τέτοια ώστε, $X_t \in L^2([0, 1])$ και $\mathbb{E}[X_t] = 0$, $\forall t \in [0, 1]$. Υποθέτουμε τη συνεχή συνάρτηση αυτοσυσχέτισης $K(t, s)$. Θεωρούμε επίσης $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ και $\{\phi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ τις ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή R που ορίσαμε παραπάνω.

Τότε,

$$X_t = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \phi_n(t), \quad t \in [0, 1] \quad (1.6.4)$$

όπου

$$\xi_n = \int_0^1 X_t \phi_n(t) dt, \quad \mathbb{E}[\xi_n] = 0, \quad \mathbb{E}[\xi_n \xi_m] = \lambda_n \delta_{nm}$$

Τέλος η σειρά συγκλίνει στην X_t στον L^2 , και ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

Απόδειξη: Αρχικά αφού $\mathbb{E}[X_t] = 0$, έπεται ότι

$$\mathbb{E}[\xi_n] = \mathbb{E}\left[\int_0^1 X_t \phi_n(t) dt\right] = \phi_n(t) \mathbb{E}[X_t] = 0$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι οι συναρτήσεις $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι κάθετες στον L^2 , οπότε : $\mathbb{E}[\xi_n \xi_m] = \lambda_n \delta_{nm}$. Πραγματικά,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\xi_n \xi_m] &= \\ \mathbb{E}\left[\int_0^1 X_t \phi_n(t) dt \int_0^1 X_s \phi_m(s) ds\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^1 \int_0^1 X_t X_s \phi_n(t) \phi_m(s) dt ds\right] \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{E}[X_t X_s] \phi_n(t) \phi_m(s) dt ds = \int_0^1 \int_0^1 K(t, s) \phi_n(t) \phi_m(s) dt ds \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 K(t, s) \phi_n(t) dt\right) \phi_m(s) ds = \int_0^1 \lambda_n \phi_n(s) \phi_m(s) ds = \lambda_n \delta_{nm}, \end{aligned}$$

καθώς ισχύει η σχέση ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων

$$\int_0^1 K(t, s)\phi_n(t)dt = \lambda_n\phi_n(s).$$

Τέλος μένει να δείξουμε ότι ισχύει η σύγκλιση στον L^2 . Έστω $S_N = \sum_{n=1}^N \lambda_n\phi_n(t)$, τότε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_t - S_N|^2] &= \\ &= \mathbb{E}[|X_t|^2] + \mathbb{E}[S_N^2] - 2\mathbb{E}[X_t S_N] = K(t, t) + \mathbb{E}\left[\sum_{k,l=1}^N \lambda_k \lambda_l \phi_k(t)\phi_l(t)\right] - 2\mathbb{E}\left[X_t \sum_{n=1}^N \lambda_n \phi_n(t)\right] = \\ &= K(t, t) + \sum_{k,l=1}^N \mathbb{E}[\lambda_k \lambda_l \phi_k(t)\phi_l(t)] - 2\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^N \int_0^1 X_t X_s \phi_n(t)\phi_n(s)ds\right] \\ &= K(t, t) + \sum_{k=1}^N \lambda_k |\phi_n(t)|^2 - 2 \sum_{k=1}^N \int_0^1 \mathbb{E}[X_t X_s] \phi_k(t)\phi_k(s)ds \\ &= K(t, t) + \sum_{k=1}^N \lambda_k |\phi_n(t)|^2 - 2 \sum_{k=1}^N \left(\int_0^1 K(t, s)\phi_k(s)ds\right) \phi_k(t) \\ &= K(t, t) + \sum_{k=1}^N \lambda_k |\phi_n(t)|^2 - 2 \sum_{k=1}^N \lambda_k |\phi_k(t)|^2 \\ &= K(t, t) - \sum_{k=1}^N \lambda_k |\phi_k(t)|^2 \rightarrow 0, \text{ καθώς } N \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Mercer.

□

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι εξαιρετικά χρήσιμο, με την έννοια ότι κάθε στοχαστική διαδικασία στον L^2 , μπορεί να αναπαρασταθεί ως προς μία ορθοκανονική βάση, κάνοντας χρήση της φασματικής ανάλυσης της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης της διαδικασίας. Παρακάτω θα εφαρμόσουμε την επέκταση Karhunen-Loève, στην περίπτωση που η διαδικασία είναι μια κίνηση Brown.

Εφαρμογή : Επέκταση Karhunen-Loève στην κίνηση Brown

Στις παραπάνω ενότητες του κεφαλαίου είδαμε ότι η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης για την κίνηση Brown είναι $K(t, s) = \mathbb{E}[X_t X_s] = \min(t, s)$. Συνεπώς το πρόβλημα ιδιοτιμών παίρνει την παρακάτω μορφή,

$$\int_0^1 \min(t, s)\phi_n(s)ds = \lambda_n\phi_n(t)$$

Από την παραπάνω σχέση θέτοντας $t = 0$ παίρνουμε $\phi_n(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Η παραπάνω σχέση γράφεται,

$$\int_0^t s\phi_n(s)ds + t \int_t^1 \phi_n(s)ds = \lambda_n\phi_n(t) \quad (1.6.5)$$

Παραγωγίζοντας την σχέση (1.6.5) ως προς t έχουμε,

$$\int_t^1 \phi_n(s)ds = \lambda_n\phi_n'(t)$$

όπου για $t = 1$ παίρνουμε ότι $\phi'_n(1) = 0$. Τέλος παραγωγίζοντας την σχέση (1.6.5) δεύτερη φορά έχουμε,

$$-\phi_n(t) = \lambda_n \phi_n''(t)$$

Επομένως για το πρόβλημα εύρεσης των ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων του τελεστή, που έχει πυρήνα την συνάρτηση αυτοσυσχέτισης της κίνησης Brown, αρκεί να λύσουμε το *Sturm – Liouville* πρόβλημα,

$$-\phi_n(t) = \lambda_n \phi_n''(t), \quad \phi_n(0) = \phi'_n(1) = 0 \quad (1.6.6)$$

Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης δίνεται,

$$\phi_n(t) = A \sin\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}\right) + B \cos\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}\right), \quad \text{όπου } A, B \text{ σταθερές}$$

Από τον περιορισμό $\phi_n(0) = 0$ παίρνουμε ότι $B = 0$. Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (1.6.6) στο διάστημα $[t, 1]$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_t^1 A \sin\left(\frac{s}{\sqrt{\lambda_n}}\right) ds &= \lambda_n \phi'_n(t) - \lambda_n \phi'_n(1) \\ \Rightarrow \sqrt{\lambda_n} A [\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right) - \cos\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}\right)] &= \sqrt{\lambda_n} A \cos\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}\right) \\ \Rightarrow \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right) = 0 &\Rightarrow \lambda_n = \frac{4}{(2n-1)^2 \pi^2}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Τέλος από την ορθοκανονικότητα της βάσης $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ θα ισχύει ότι,

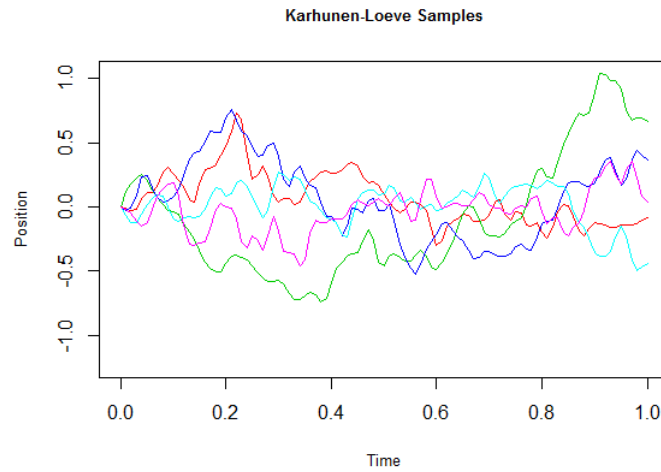
$$1 = \int_0^1 \phi_n^2(t) dt = A^2 \int_0^1 \sin^2\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda_n}}\right) dt = A^2 \int_0^1 \sin^2\left[\left(n - \frac{1}{2}\right) \pi t\right] dt = \frac{A^2}{2}$$

,οπότε $A = \sqrt{2}$. Από όλα παραπάνω τα παραπάνω συνεπάγεται ότι, αν B_t μια κίνηση Brown στο $[0,1]$ τότε,

$$B_t = \sqrt{2} \sum_n \frac{2}{(2n-1)\pi} \sin\left[\left(i - \frac{1}{2}\right) \pi t\right] \xi_n, \quad t \in [0,1] \text{ και } \xi_n \sim \mathcal{N}(0,1).$$

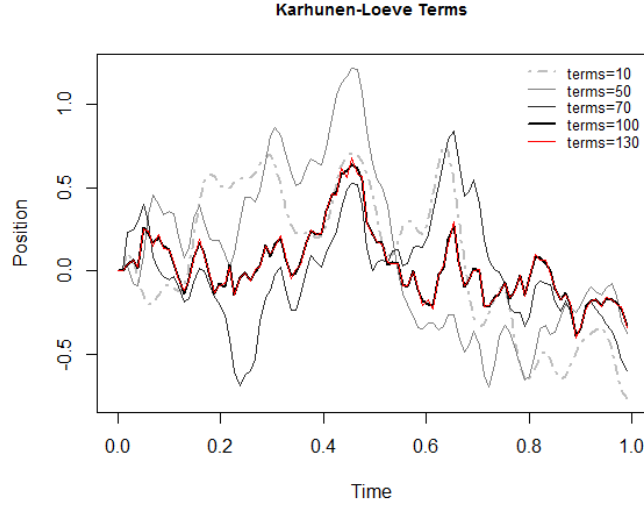
όπου $\{\xi_n\}$ ομοιόμορφα κατανομημένες κανονικές κατανομές με μέσο μηδέν και διακύμανση 1.

Παρακάτω στο παρακάτω γράφημα έχουν προσομοιωθεί πέντε τροχιές της κίνησης Brown, με την μέθοδο Karhunen-Loève :



Σχήμα 1.2: Προσομοίωση από τροχιές της κίνησης Brown, με μέγεθος δείγματος $n = 100$ και πλήθος όρων της βάσης $N = 60$.

Τέλος, για να δούμε με πιο τρόπο ο αριθμός των όρων από την βάση που επιλέγουμε επηρεάζει την επέκταση, έχουμε προσομοιώσει ένα δείγμα εκατό κανονικών τυχαίων μεταβλητών και αυξάνουμε τον πλήθος από συναρτήσεις της ορθοκανονικής βάσης που παίρνουμε.



Σχήμα 1.3: Προσομοίωση από τροχιές τις κίνησης Brown, για διαφορετικό πλήθος όρων της βάσης.

Συνδεση με την εξίσωση θερμότητας

Ένας τρόπος για να φανταστούμε πως μπορεί η Κίνηση Brown να δημιουργηθεί, είναι να κάνουμε την σύνδεση αυτής με τις μερικές διαφορικές εξισώσεις.

Έστω η εξίσωση θερμότητας¹, που περιγράφει την θερμοκρασία ενός υλικού στην θέση x για τον χρόνο t ,

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) = \frac{1}{2}\Delta_x u(t, x),$$

όπου Δ_x είναι ο τελεστής Laplace ως προς x . Παρακάτω θα ασχοληθούμε με την μονοδιάστατη περίπτωση. Έστω η παράμετρος βήματος $t \mapsto \Delta t$, $\Delta > 0$. Αν $(B_t)_{t \geq 0}$ μια τροχιά της κίνησης Brown, τότε για κάθε συνάρτηση $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})^2$ ορίζουμε την συνάρτηση $u(t, x) = \mathbb{E}[\psi(x - B_t)]$. Συνεπώς, η συνάρτηση ψ γράφεται,

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\Delta t}\right) \psi(x - z) dz$$

Θέτοντας $y = x - z$ και $dy = dz$ έχουμε ότι,

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \exp\left(-\frac{(x - y)^2}{2\Delta t}\right) \psi(y) dy$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω συνάρτηση ως προς t παίρνουμε,

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \exp\left(-\frac{(x - y)^2}{2\Delta t}\right) \psi(y) dy. \quad (1.6.7)$$

Για να περάσει η παράγωγος εντός του ολοκληρώματος, χρειαζόμαστε το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης του Lebesgue. Έστω $u = \sqrt{ty}$ και $du = \sqrt{t}dy$, τότε η συνάρτηση $u(t, x)$ γράφεται,

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\Delta}\right) \psi(x - \sqrt{t}u) du$$

¹Η εξίσωση είναι σταθμισμένη για τις ανάγκες των πράξεων.

² $C_c^\infty(\Omega) : C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$.

Για κάποιο x σταθερό, η σχέση 1.6.7 γράφεται

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2\Delta}\right) \frac{1}{h} \left(\psi(x - \sqrt{t+hu}) - \psi(x - \sqrt{tu})\right) du, \quad t > 0. \quad (1.6.8)$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής για κάποιο h μικρό υπάρχει $c \in [t, t+h]$ τέτοιο ώστε,

$$\frac{1}{h} \left(\psi(x - \sqrt{t+hu}) - \psi(x - \sqrt{tu})\right) = -u \frac{1}{2\sqrt{c}} \psi'(x - \sqrt{cu})$$

Αφού $\psi(x - \sqrt{su}) \in C^\infty$, τότε για κάθε $s \in [t, t+h]$ είναι φραγμένη. Επίσης, φραγμένη είναι και η συνάρτηση $-\frac{1}{2\sqrt{s}}$ στο ίδιο διάστημα. Ορίζοντας

$$g(x, u) := \sup_{s \in [t, t+h]} \left| -u \frac{1}{2\sqrt{c}} \psi'(x - \sqrt{su}) \right|$$

Έτσι για τυχόν h μικρό,

$$\left| \exp\left(-\frac{u^2}{2\Delta}\right) \frac{1}{h} \left(\psi(x - \sqrt{t+hu}) - \psi(x - \sqrt{tu})\right) \right| \leq \left| \exp\left(-\frac{u^2}{2\Delta}\right) g(x, u) \right|$$

Προφανώς η συνάρτηση $\exp\left(-\frac{u^2}{2\Delta}\right) g(x, u)$ είναι ολοκληρώσιμη, έτσι από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης, έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\Delta t}\right) \psi(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{(x-y)^2}{2\Delta t^2} - \frac{1}{2t}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\Delta t}\right) \psi(y) dy \end{aligned} \quad (1.6.9)$$

Ομοίως, χρησιμοποιούμε το ίδιο θεώρημα ως προς x . Έτσι έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\Delta t}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \frac{-(x-y)}{\Delta t} dy \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2\Delta t}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \left(\frac{(x-y)^2}{\Delta^2 t^2} - \frac{1}{\Delta t}\right) dy \end{aligned} \quad (1.6.10)$$

Από τις σχέσεις 1.6.9 και 1.6.10, έχουμε ότι η συνάρτηση u επιλύει την μερική διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \left(\frac{1}{2}\Delta\right) \Delta_x u(t, x).$$

Σαν τελευταίο βήμα μένει να εξετάσουμε την συνέχεια όταν $t = 0$. Για $t = 0$, $u(0, x) = \mathbb{E}[\psi(x-0)] = \psi(x)$. Έτσι για το δεξί όριο στο μηδέν έχουμε ότι,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\Delta t}\right) \psi(x-z) dz$$

Θέτοντας $u = \sqrt{t}z$ και $du = \sqrt{t}dz$ τότε

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\Delta}\right) \psi(x - \sqrt{t}u) du$$

Εφαρμόζοντας για ακόμη μια φορά το θεώρημα μονότονης σύγκλισης και δεδομένου ότι η συνάρτηση ψ είναι συνεχής παίρνουμε,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\Delta}\right) \psi(x) du \\ &= \psi(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\Delta}\right) du = \psi(x) \end{aligned}$$

Η παραπάνω σύνδεση της κίνησης Brown με τις μερικές διαφορικές εξισώσεις έγινε καθώς το αποτέλεσμα είναι ότι κάτι τελείως ντετερμινιστικό έχει άμεση σχέση με κάτι εντελώς στοχαστικού χαρακτήρα. Φυσικά η κίνηση Brown δεν αποτελεί την μοναδική στοχαστική διαδικασία που επιλύει την εξίσωση θερμότητας, καθώς η συνάρτηση $\psi \in C_c^\infty$ είναι αυθαίρετη.

1.7 Παράτημα

Απόδειξη Θεωρήματος Levy

Για την απόδειξη του θεωρήματος 1.4.2, θα χρειαστεί πρώτα να αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα Έστω $(X_t)_{t \geq 0}$ μια συνεχής στοχαστική διαδικασία προσαρμοσμένη ως προς την διήθηση \mathcal{F}_t , τέτοια ώστε $X_0 = 0$, και έστω $f \in C(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε οι f, f', f'' να είναι φραγμένες. Τότε για κάθε $0 \leq s < t$

$$\mathbb{E}[f(X_t)|\mathcal{F}_s] = X_s + \frac{1}{2} \int_s^t \mathbb{E}[f''(X_u)|\mathcal{F}_s] du$$

Απόδειξη: Έστω η διαμέριση του διαστήματος $[s, t]$, $s = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = t$. Από την προσέγγιση Taylor, έχουμε ότι,

$$f(X_t) = f(X_s) + \sum_{i=1}^n f'(X_{t_i})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n f''(X_{t_i})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2 + R_{\mathcal{P}_n}$$

όπου $R_{\mathcal{P}_n}$ το σφάλμα του αναπτύγματος Taylor. Εισάγοντας αναμενόμενες τιμές η παραπάνω σχέση γίνεται,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X_t)|\mathcal{F}_s] &= f(X_s) + \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\{\mathbb{E}[f(X_{t_i})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})|\mathcal{F}_s]\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\{\mathbb{E}[f''(X_{t_i})(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2|\mathcal{F}_{\lfloor \cdot, -\infty}\mathcal{F}_s]\} + \mathbb{E}[R_{\mathcal{P}_n}|\mathcal{F}_s] \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[f(X_t)|\mathcal{F}_s] = f(X_s) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[f''(X_{t_i})|\mathcal{F}_s](t_i - t_{i-1}) + \mathbb{E}[R_{\mathcal{P}_n}|\mathcal{F}_s]$$

Από την ιδιότητα της X_t ως συνεχής διαδικασία, μπορούμε να δείξουμε ότι $R_{\mathcal{P}_n} \rightarrow 0$ στον L^2 , καθώς $|\mathcal{P}_n| \rightarrow 0$. Συνεπώς,

$$\mathbb{E}[R_{\mathcal{P}_n}|\mathcal{F}_s] \rightarrow 0, \text{ στον } L^2 \text{ καθώς } |\mathcal{P}_n| \rightarrow 0.$$

Επίσης η συνάρτηση $u \mapsto \mathbb{E}[f''(X_u)|\mathcal{F}_s]$ είναι συνεχής σχεδόν παντού και φραγμένη. Οπότε

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[f''(X_{t_i})|\mathcal{F}_s](t_i - t_{i-1}) \rightarrow \int_s^t \mathbb{E}[f''(X_u)|\mathcal{F}_s] du, \text{ καθώς } |\mathcal{P}_n| \rightarrow 0.$$

Τέλος, επειδή f'' είναι φραγμένη συνάρτηση, από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης, προκύπτει ότι,

$$\left\| \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[f''(X_{t_i})|\mathcal{F}_s](t_i - t_{i-1}) - \int_s^t \mathbb{E}[f''(X_u)|\mathcal{F}_s] du \right\|_{L^2} \rightarrow 0.$$

□

Απόδειξη Θεωρήματος Levy: Το ευθύ προκύπτει από τον ορισμό της κίνησης Brown και από το Θεώρημα 1.4.1. Θα δείξουμε το αντίστροφο.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα που μόλις αποδείξαμε, για την συνάρτηση $f(x) = \exp(iux)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\exp(iuB_t)|\mathcal{F}_s] &= \exp(iuB_s) - \frac{1}{2}u^2 \int_s^t \mathbb{E}[\exp(iuB_v)|\mathcal{F}_s] dv \Rightarrow \\ \mathbb{E}[\exp(iu(B_t - B_s))|\mathcal{F}_s] &= 1 - \frac{1}{2}u^2 \int_s^t \mathbb{E}[\exp(iu(B_v - B_s))|\mathcal{F}_s] dv \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας ως προς t έχουμε ότι,

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E}[\exp(iu(B_t - B_s)) | \mathcal{F}_s] = -\frac{1}{2} u^2 \mathbb{E}[\exp(iu(B_t - B_s)) | \mathcal{F}_s]$$

Θέτοντας $g(t) = \mathbb{E}[\exp(iu(B_t - B_s)) | \mathcal{F}_s]$, προκύπτει η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού,

$$g'(t) = -\frac{1}{2} u^2 g(t), \text{ με αρχική τιμή } g(s) = 1.$$

Έτσι, η λύση της εξίσωσης είναι

$$g(t) = \mathbb{E}[\exp(-\frac{1}{2} u^2 (t - s))], \forall s \in [0, t]$$

Οπότε,

$$\mathbb{E}\{\mathbb{E}[\exp(iu(B_t - B_s)) | \mathcal{F}_s]\} = \mathbb{E}[\exp(iu(B_t - B_s))] = \exp\left(-\frac{1}{2} u^2 (t - s)\right)$$

Από τις ιδιότητες της κίνησης Brown συμπεραίνουμε ότι, $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$. Μένει να δείξουμε ότι οι μεταβολές είναι ανεξάρτητες. Έστω μια διαμέριση $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ του διαστήματος $[0, t]$, και το διάνυσμα $\tilde{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n) = (B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$, και $\tilde{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$. Αρχεί να δείξουμε ότι,

$$\phi_{\tilde{B}}(\tilde{u}) = \prod_{j=1}^n \phi_{B_j}(u_j)$$

,όπου ϕ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση και $B_j = B_{t_j} - B_{t_{j-1}}$. Έτσι,

$$\begin{aligned} \phi_{\tilde{B}}(\tilde{u}) &= \exp(i \langle \tilde{u}, \tilde{B} \rangle) = \mathbb{E} \left[\exp\left(i \sum_{j=1}^n u_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right) \right] = \mathbb{E} \left\{ \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^n \exp(iu_j (B_{t_j} - B_{t_{j-1}})) | \mathcal{F}_s \right] \right\} \\ &= \prod_{j=1}^n \exp\left(-\frac{1}{2} u_j^2 (t_j - t_{j-1})\right) = \prod_{j=1}^n \phi_{B_j}(u_j) \end{aligned}$$

□

Κεφάλαιο 2

Ολοκλήρωμα Itô

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε μερικά βασικά στοιχεία από την στοχαστική ανάλυση. Συγκεκριμένα θα ορίσουμε μια νέα μορφή ολοκληρώματος, αλλάζοντας το σύννηθες διαφορικό σε αυτό πάνω στην Κίνηση Brown. Το ολοκλήρωμα αυτό ονομάζεται ολοκλήρωμα Itô. Όπως θα δούμε και στα παρακάτω κεφάλαια, το ολοκλήρωμα Itô αποτελεί αναγκαίο συστατικό για την ανάπτυξη της θεωρίας των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

2.1 Εισαγωγή

Έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε το μοντέλο, βάση του οποίου χαρακτηρίζεται το μέγεθος του πληθυσμού στον χρόνο. Θεωρούμε ότι για μια χρονική στιγμή t , το μέγεθός του πληθυσμού είναι $X(t)$. Έτσι, είναι φυσικό να υποθέσουμε ότι ο ρυθμός αύξησης πληθυσμού θα περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση :

$$\frac{dX(t)}{dt} = a(t)X(t), \quad X(0) = c, \text{ σταθερά}$$

όπου $a(t)$ είναι κάποια συνάρτηση που αναπαριστά το σχετικό ρυθμό αύξησης του πληθυσμού την χρονική στιγμή t . Από την άλλη μεριά, είναι λογικό να μην έχουμε πλήρη γνώση του το σχετικού ρυθμού αύξησης του πληθυσμού. Με άλλα λόγια, η ποσότητα $a(t)$, μπορεί να επηρεάζεται από γεγονότα που είτε δεν τα γνωρίζουμε, είτε δεν μπορούμε να τα ελέγξουμε. Συνεπώς, είναι σκόπιμο να υποθέσουμε ότι ο ρυθμός $a(t)$, θα λαμβάνει υπόψη του κάποιο τυχαίο παράγοντα, δηλαδή,

$$a(t) = b(t) + \text{''θόρυβος''}$$

Συνεπώς, η αρχική διαφορική εξίσωση παίρνει την μορφή,

$$\frac{dX(t)}{dt} = (b(t) + \text{''θόρυβος''})X(t), \quad X(0) = c$$

Σαν, θόρυβο θα θεωρήσουμε μια στοχαστική διαδικασία, η οποία θα εμπεριέχει την πληροφορία της τυχαιότητας που υποθέτουμε.

Σκοπός μας πέρα αυτού του παραδείγματος, είναι να μελετήσουμε την γενική μορφή τέτοιων εξισώσεων, όπου ο θόρυβος είναι μια τυπική κίνηση Brown. Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται **στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις** και στην περίπτωση μας έχουν την μορφή,

$$dX(t) = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \tag{2.1.1}$$

Έστω λοιπόν μια συνεχής στοχαστική διαδικασία $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση (2.1.1). Έστω

$\mathcal{P}_n = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ μια διαμέριση του $[0, T]$, τότε η παραπάνω σχέση γράφεται με διακριτό τρόπο ως,

$$X_{k+1} - X_k = b(t_k, X_k)\Delta t_k + \sigma(t_k, X_k)\Delta B_k$$

όπου $X_k = X_{t_k}$, $B_j = B_{t_k}$ και $\Delta B_k = B_{t_{k+1}} - B_{t_k}$. Κάνοντας διαδοχικές αντικαταστάσεις καταλήγουμε στην εξίσωση,

$$X_k = X_0 + \sum_{i=0}^{k-1} b(t_i, X_{t_i})\Delta t_i + \sum_{i=0}^{k-1} \sigma(t_i, X_{t_i})\Delta B_i$$

Παίρνοντας το όριο $\Delta t_i \rightarrow 0$ αν υπάρχει, τότε η παραπάνω σχέση γράφεται,

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(u, X_u)du + \int_0^t \sigma(u, X_u)dB_u$$

Παρατηρούμε ότι έχει εμφανιστεί ένα ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $t \mapsto b(t, X_t)$, ως προς το διαφορικό μίας κίνησης Brown. Φυσικά, οι πράξεις που μόλις έγιναν αποτελούν μια σκιαγράφιση, για να δειχθεί η αναγκαιότητα της αναλυτικής κατασκευής του ολοκληρώματος $It\hat{o}$ και τις ιδιότητες που το χαρακτηρίζουν, γεγονός που θα εξετασθεί στην συνέχεια του κεφαλαίου.

2.2 Κατασκευή Ολοκληρώματος $It\hat{o}$

Θα ξεκινήσουμε δίνοντας το πρόβλημα για το οποίο δεν μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα $It\hat{o}$ ως ένα Riemann-Stieltjes ολοκλήρωμα. Θεωρήσουμε $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ έναν χώρο μέτρου και B_t μια τυπική κίνηση Brown. Έστω μια συνάρτηση $f : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Σκοπός είναι να ορίσουμε το ολοκλήρωμα,

$$\int_a^b f(t, \omega)dB_t(\omega)$$

Θα αρχίσουμε χρησιμοποιώντας απλές συναρτήσεις, και έπειτα να επεκταθούμε στην πιο γενική μορφή. Έτσι, θεωρούμε μια διαμέριση του διαστήματος $[a, b]$, τέτοια ώστε μια απλή συνάρτηση ϕ να γράφεται στην μορφή,

$$\phi(t, \omega) = \sum_{i=0}^n \eta_i(\omega) \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t)$$

και ορίζουμε το ολοκλήρωμα της ϕ πάνω στις μεταβολές της κίνησης Brown ως,

$$\int_a^b \phi(t, \omega)dB_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \eta_i(\omega) [B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)] \quad (2.2.1)$$

Έστω τώρα ότι $f(t, \omega) = B_t(\omega)$, $t \in [0, T]$, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι μπορούμε να προσεγγίσουμε την f από τις απλές συναρτήσεις ϕ_1 και ϕ_2 τέτοιες ώστε,

$$\begin{aligned} \phi_1(t, \omega) &= \sum_{i=0}^{\infty} B_{t_i}(\omega) \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t) \\ \phi_2(t, \omega) &= \sum_{i=0}^{\infty} B_{t_{i+1}}(\omega) \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t) \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε ότι,

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T \phi_1(t, \omega)dB_t(\omega) \right] = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E} [B_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})] = 0$$

δεδομένου ότι οι μεταβολές της κίνησης Brown είναι ανεξάρτητες. Αντίστοιχα για την ϕ_2 ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^T \phi_2(t, \omega) dB_t(\omega) \right] &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E} [B_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E} [(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] = T \end{aligned}$$

γνωρίζοντας ότι η τετραγωνική μεταβολή της B_t ισούται με T . Παρατηρούμε ότι μπορεί και οι δύο ϕ_1 και ϕ_2 να προσεγγίζουν την f , όμως ο τρόπος με τον οποίο ορίσαμε το ολοκλήρωμα στην σχέση (2.2.1), επιτρέπει τις δύο παραπάνω αναμενόμενες τιμές να διαφέρουν. Έτσι, το παραπάνω επιχείρημα υποδεικνύει την αδυναμία να γράψουμε το ολοκλήρωμα σαν Riemann-Stieltjes, αφού η συνολική μεταβολή της κίνησης Brown είναι άπειρη.

Παρακάτω ορίζουμε μία νέα κλάση διαδικασιών, βάσει της οποίας θα κατασκευάσουμε το ολοκλήρωμα Ito και έπειτα θα προσεγγίσουμε άλλες συναρτήσεις βάσει αυτών.

Ορισμός 2.2.1 Έστω ϕ μια στοχαστική διαδικασία στο διάστημα $[a, b]$. Αν για μια διαμέριση $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b$ του διαστήματος $[a, b]$ η συνάρτηση ϕ γράφεται στην μορφή,

$$\phi(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t)$$

όπου οι $\eta_i \in m - \mathcal{F}_{t_i}$ και $\mathbb{E}[|\eta_i|^2] < \infty$, τότε η ϕ ονομάζεται διαδικασία βήματος.

Συμβολίζουμε το σύνολο των διαδικασιών βήματος με $M_{step}([a, b])$.

Ορισμός 2.2.2 Έστω ϕ μια διαδικασία βήματος στο διάστημα $[a, b]$ με τον τρόπο που ορίστηκε παραπάνω. Ορίζουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα της ϕ ως,

$$I[\phi] := \int_a^b \phi(t) dB_t = \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

Παρακάτω δίνουμε την Ισομετρία του Ito, η οποία δίνει τον τρόπο υπολογισμού της διακύμανσης ενός ολοκληρώματος Ito.

Λήμμα 2.2.1 (Ισομετρία Ito) Έστω ϕ μια διαδικασία βήματος τότε,

$$\mathbb{E} \left[\left| \int_a^b \phi(t) dB_t \right|^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_a^b |\phi(t)|^2 dt \right]$$

Απόδειξη: Θεωρούμε την διαδικασία βήματος,

$$\phi(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t)$$

και το στοχαστικό ολοκλήρωμα,

$$I[\phi] = \int_a^b \phi(t) dB_t = \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|I[\phi]|^2] &= \mathbb{E}\left[\left(\int_a^b \phi(t)dt\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} \eta_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \eta_i^2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 + \sum_{i,j} \eta_i \eta_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[\eta_i^2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] + \sum_{i,j} \mathbb{E}[\eta_i \eta_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[\eta_i^2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] + \sum_{i,j} \mathbb{E}[\eta_i \eta_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})] \mathbb{E}[B_{t_{j+1}} - B_{t_j}] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[\eta_i^2](t_{i+1} - t_i) + 0 = \mathbb{E}\left[\left(\int_a^b \phi^2(t)dt\right)\right].
\end{aligned}$$

δεδομένου ότι οι τυχαίες μεταβλητές η_i είναι ανεξάρτητες. Επίσης, χρησιμοποιήσαμε ότι οι μεταβολές $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ είναι ανεξάρτητες της σ -άλγεβρας \mathcal{F}_{t_i} και ότι $\mathbb{E}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] = t_{i+1} - t_i$. Τέλος, οι μεταβλητές η_i και $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ είναι ανεξάρτητες.

□

Λήμμα 2.2.2 Έστω δύο διαδικασίες βήματος $g_1, g_2 \in M_{step}([a, b])$ και c_1, c_2 δύο πραγματικοί αριθμοί. Τότε $c_1 g_1 + c_2 g_2 \in M_{step}([a, b])$ και

$$\int_a^b c_1 g_1 + c_2 g_2 dB_t = \int_a^b c_1 g_1 dB_t + \int_a^b c_2 g_2 dB_t$$

Στόχος τώρα, είναι να επεκτείνουμε την έννοια του στοχαστικού ολοκληρώματος, πέρα από τις διαδικασίες βήματος, στον χώρο γενικότερων στοχαστικών διαδικασιών. Παρακάτω ορίζουμε μια γενικότερη κλάση στοχαστικών διαδικασιών.

Ορισμός 2.2.3 Μια στοχαστική διαδικασία f θα λέμε ότι ανήκει στον χώρο $M^2([a, b])$, αν είναι προσαρμοσμένη ως προς την σ -άλγεβρα \mathcal{F}_t , όπου $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s; s \leq t)$, τέτοια ώστε

$$\|f\|_{M^2([a, b])} = \mathbb{E} \int_a^b |f|^2 dt < \infty$$

Είναι προφανές ότι η απεικόνιση $\|\cdot\| : M^2([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$, είναι νόρμα στον χώρο $M^2([a, b])$, και επίσης ο χώρος $M^2([a, b])$ εφοδιασμένος με αυτή την νόρμα είναι πλήρης. Έτσι για να ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα για τις στοχαστικές διαδικασίες του $M^2([a, b])$, θα πρέπει να τις προσεγγίσουμε από διαδικασίες βήματος. Το παρακάτω θεώρημα εξασφαλίζει αυτή την σύγκλιση.

Θεώρημα 2.2.1 Για κάθε στοχαστική διαδικασία f στον $M^2([a, b])$, υπάρχει ακολουθία από διαδικασίες βήματος $\{g_n\}$ τέτοιες ώστε,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_a^b |f(t) - g_n(t)|^2 dt < \infty \quad (2.2.2)$$

Απόδειξη: Θα κάνουμε την απόδειξη σε τρία βήματα. Αρχικά, θα δείξουμε ότι κάθε διαδικασία που ανήκει στον $M^2([a, b])$, μπορεί να προσεγγιστεί από μια ακολουθία φραγμένων και συνεχών στοχαστικών διαδικασιών που ανήκουν στον $M^2([a, b])$. Στο δεύτερο βήμα, θα δείξουμε ότι κάθε φραγμένη στοχαστική διαδικασία στον $M^2([a, b])$, μπορεί να προσεγγιστεί από μια ακολουθία φραγμένων και συνεχών στοχαστικών διαδικασιών που ανήκουν στον $M^2([a, b])$. Στο τελευταίο βήμα, θα δείξουμε ότι κάθε φραγμένη και συνεχής στοχαστική διαδικασία στον $M^2([a, b])$, μπορεί να προσεγγιστεί από μια ακολουθία διαδικασιών βήματος.

Από την σύνθεση των τριών παραπάνω επιχειρημάτων, εξασφαλίζεται ότι κάθε στοχαστική διαδικασία στον $M^2([a, b])$, μπορεί να προσεγγισθεί από διαδικασίες βήματος.

Βήμα 1^ο: Έστω μια στοχαστική διαδικασία f που ανήκει στον $M^2([a, b])$, τότε υπάρχει ακολουθία από φραγμένες και συνεχείς στοχαστικές διαδικασίες $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ στον $M^2([a, b])$ τέτοια ώστε,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_a^b |f(t) - \phi_n(t)|^2 dt = 0$$

Πράγματι, για κάθε n , θεωρούμε την ακολουθία, $\phi_n(t) = [-n \vee f(t)] \wedge n$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η $\{\phi_n\}$ είναι φραγμένη και ότι $\{\phi_n\} \in M^2([a, b])$, για κάθε n . Επίσης έχουμε ότι $\phi_n \rightarrow f$ καθώς $n \rightarrow \infty$. Συνεπώς, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης στον χώρο L^2 , θα ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_a^b |f(t) - \phi_n(t)|^2 dt = 0$$

Βήμα 2^ο: Έστω μια στοχαστική διαδικασία φ που ανήκει στον $M^2([a, b])$. Υπάρχει ακολουθία φραγμένων στοχαστικών διαδικασιών $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, τέτοια ώστε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_a^b |\varphi(t) - \phi_n(t)|^2 dt = 0$$

Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $\rho_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, τέτοια ώστε $\rho_n(t) = 0$ όταν $t \leq -\frac{1}{n}$ και $t \geq 0$, και $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(s) ds = 1$. Ορίζουμε σαν $\{\phi_n\}$, την συνέλιξη των ρ_n και της φ την συνάρτηση

$$\phi_n(t) = \int_a^b \rho_n(s-t) \varphi(s) ds, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.2.3)$$

Τότε για κάθε n θα ισχύει ότι $|\phi_n(t)| \leq c$. Η στοχαστική διαδικασία ϕ_n είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s; s \leq t)$, αφού η φ είναι στοχαστική διαδικασία προσαρμοσμένη στην ίδια σ-άλγεβρα. Από το ολοκλήρωμα Riemann που ορίζει η συνέλιξη (2.2.3), οι συναρτήσεις της ακολουθίας ϕ_n είναι συνεχείς για κάθε n . Τέλος, από το φραγμένης σύγκλισης έχουμε ότι,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_a^b |\varphi(t) - \phi_n(t)|^2 dt \right] = 0$$

Βήμα 3^ο: Έστω ϕ μια συνεχής και φραγμένη στοχαστική διαδικασία που ανήκει στον $M^2([a, b])$. Υπάρχει ακολουθία διαδικασιών βήματος $\{g_n\}$, τέτοια ώστε,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_a^b |\phi(t) - g_n(t)|^2 dt = 0$$

Έστω μια διαμέριση του διαστήματος $[a, b]$, $a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$. Θεωρούμε την ακολουθία $\{g_n\}$ ως,

$$g_n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi_n(t_i) \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t)$$

Η $\{g_n\}$ είναι φραγμένη ακολουθία. Συνεπώς από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης, προκύπτει ότι,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_a^b |\phi(t) - g_n(t)|^2 dt = 0$$

Συνδυάζοντας τα τρία παραπάνω βήματα, ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Συνοψίζοντας, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, για κάθε στοχαστική διαδικασία f που ανήκει στον $M^2([a, b])$, υπάρχει ακολουθία φραγμένων διαδικασιών βήματος τέτοια ώστε,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \int_a^b |f(t) - g_n(t)|^2 dt = 0$$

Έτσι μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα Ιτο, για διαδικασίες στον $M^2([a, b])$.

Ορισμός 2.2.4 Έστω μια στοχαστική διαδικασία f στον $M^2([a, b])$. Το ολοκλήρωμα Ιτο της f ορίζεται ως,

$$I[f] := \int_a^b f(t) dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n dB_t \quad (2.2.4)$$

όπου g_n είναι διαδικασία βήματος που προσεγγίζει την f στον L^2 .

Στον παραπάνω ορισμό, έχουμε ορίσει το ολοκλήρωμα Ιτο μιας στοχαστικής διαδικασίας f που ανήκει στον $M^2([a, b])$, ως το όριο του στοχαστικού ολοκληρώματος μιας ακολουθίας βήματος $\{g_n\}$, όπου η g_n προσεγγίζει την f στον L^2 . Προκειμένου να έχει νόημα ο ορισμός, χρειάζεται να δείξουμε ότι το όριο υπάρχει. Το παρακάτω θεώρημα, εξασφαλίζει την ύπαρξη του ορίου.

Θεώρημα 2.2.2 Έστω μια στοχαστική διαδικασία f στον $M^2([a, b])$ και $\{g_n\}$ μια ακολουθία διαδικασιών βήματος, η οποία προσεγγίζει την f στον L^2 . Τότε η ακολουθία $\{I(g_n)\}$ συγκλίνει στον L^2 , όπου $I(g_n) = \int_a^b g_n dB_t$.

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι ο χώρος L^2 είναι πλήρης. Συνεπώς, για να δείξουμε ότι η ακολουθία $\{I(g_n)\}$ συγκλίνει, αρκεί να δείξουμε ότι είναι Cauchy στον L^2 .

Θα δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχουν $n, m > N$ τέτοια ώστε : $\|I(g_n) - I(g_m)\|_{L^2} < \varepsilon$. Εφόσον η ακολουθία βήματος g_n προσεγγίζει την f στον L^2 , τότε για κάθε $\varepsilon^* = \varepsilon/2$ υπάρχουν $n, m > N$ τέτοια ώστε $\|g_n - f\|_{L^2} < \varepsilon^*$ και $\|g_m - f\|_{L^2} < \varepsilon^*$. Οπότε,

$$\begin{aligned} \|I(g_n) - I(g_m)\|_{L^2} &= \|I(g_n - g_m)\|_{L^2} \\ &= \|g_n - g_m\|_{M^2} = \|(g_n - f) + (f - g_m)\|_{M^2} \\ &\leq \|(g_n - f)\|_{M^2} + \|(g_m - f)\|_{M^2} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

κάνοντας χρήση της γραμμικότητας του ολοκληρώματος στον M_{step} (Λήμμα 2.2.1), και της ισομετρίας Ιτο, $\|I(g_n)\|_{L^2} = \|g_n\|_{M_{step}([a, b])}$.

□

Πόρισμα 2.2.1 (Ισομετρία Itô) Έστω $f \in M^2([a, b])$ τότε,

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_a^b f(t) dB_t \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_a^b f^2(t) dt \right]$$

Παρακάτω δείχνουμε ένα κλασσικό παράδειγμα για τον υπολογισμό ενός ολοκληρώματος Ito.

Παράδειγμα 2.2.1 Έστω B_t μια τυπική κίνηση Brown στο διάστημα $[0, T]$, όπου $B_0 = 0$. Τότε

$$\int_0^T f(t, \omega) dB_t = \frac{1}{2} B_T^2 - \frac{1}{2} T$$

όπου $f(t, \omega) = B_t(\omega)$. Θεωρούμε μια διαμέριση $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = T$, και μια ακολουθία βήματος $\{\phi_n\}$ που προσεγγίζει την f ,

$$\phi_n(t) = \sum_{j=0}^{n-1} B_j \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t), \text{ όπου } B_j = B_{t_j}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^T (\phi_n(t) - f(t))^2 dt \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (B_j - B_t)^2 dt \right] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} (t_{j+1} - t_j)^2 \rightarrow 0, \text{ καθώς } \Delta t_j \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς από το Θεώρημα 2.2.2,

$$\int_0^T B_t dB_t = \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \int_0^T \phi_n(t) dB_t = \lim_{\Delta t_j \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} B_j \Delta B_j.$$

Παρατηρούμε ότι για τις τετραγωνικές διαφορές της κίνησης Brown,

$$\begin{aligned} \Delta(B_j^2) &= B_{j+1}^2 - B_j^2 = (B_{j+1} - B_j)^2 + 2B_j(B_{j+1} - B_j) \\ &= (\Delta B_j)^2 + 2B_j(\Delta B_j). \end{aligned}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} B_T^2 &= \sum_{j=0}^{n-1} \Delta(B_j^2) = \sum_{j=0}^{n-1} [(\Delta B_j)^2 + 2B_j(\Delta B_j)] \\ &\Rightarrow \sum_{j=0}^{n-1} B_j(\Delta B_j) = \frac{1}{2} B_T^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (\Delta B_j)^2 \end{aligned}$$

Καθώς $\Delta t_j \rightarrow 0$, ο όρος $\sum_{j=0}^{n-1} (\Delta B_j)^2 \rightarrow T$, αφού είναι η τετραγωνική μεταβολή της κίνησης Brown. Επομένως,

$$\sum_{j=0}^{n-1} B_j(\Delta B_j) \rightarrow \frac{1}{2} B_T^2 - \frac{1}{2} T, \text{ στον } L^2 \text{ καθώς } \Delta t_j \rightarrow 0.$$

Ο επιπρόσθετος όρος $-\frac{1}{2}T$ δείχνει ότι το ολοκλήρωμα *Ito* δεν ταυτίζεται με τα συνηθισμένα ολοκλήρωματα. Συγκεκριμένα, αυτός ο όρος οφείλεται στον τρόπο που ορίζουμε το ολοκλήρωμα *Ito*, αλλά και στο γεγονός ότι η διαδικασία επάνω στην οποία γίνεται η ολοκλήρωση δεν είναι φραγμένης μεταβολής. Στην ενότητα 2.4, θα δούμε το Λήμμα του *Ito*, που επιτρέπει εύκολα τον υπολογισμό στοχαστικών ολοκληρωμάτων.

Θεώρημα 2.2.3 Έστω $f, g \in M^2([a, b])$ και λ_1, λ_2 δύο πραγματικοί αριθμοί. Τότε,

$$i. \int_a^b f(t)dB_t \in m - \mathcal{F}_t$$

$$ii. \mathbb{E} \left[\int_a^b f(t)dB_t \right] = 0$$

$$iii. \mathbb{E} \left[\left| \int_a^b f(t)dB_t \right|^2 \right] = \mathbb{E} \left[\int_a^b |f(t)|^2 dB_t \right]$$

$$iv. \int_a^b \lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t)dB_t = \lambda_1 \int_a^b f(t)dB_t + \lambda_2 \int_a^b g(t)dB_t$$

Απόδειξη: Οι παραπάνω ιδιότητες είναι γνωστές για διαδικασίες βήματος στον χώρο M_{step} . Συνεπώς παίρνοντας το όριο διαδικασιών βήματος μπορούμε εύκολα να κάνουμε την επέκταση στον M^2 .

□

2.3 Το ολοκλήρωμα $It\hat{o}$ σαν στοχαστική διαδικασία

Στην προηγούμενη ενότητα, ορίσαμε το ολοκλήρωμα $It\hat{o}$ και είδαμε τις ιδιότητες που το χαρακτηρίζουν. Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε το ολοκλήρωμα $It\hat{o}$, σαν μια στοχαστική διαδικασία. Έτσι θεωρούμε μια στοχαστική διαδικασία $f \in M^2([0, T])$ και κατασκευάζουμε την διαδικασία,

$$I_t[f] := \int_0^t f(t)dB_t = \int_0^T f(t)\mathbb{1}_{[0,t]}dB_t$$

Η διαδικασία I_t ονομάζεται *αόριστο ολοκλήρωμα $It\hat{o}$* .

Στην συνέχεια θα δείξουμε ότι η διαδικασία I_t είναι *martingale*. Πρώτα όμως χρειάζεται να δώσουμε τα δύο παρακάτω λήμματα.

Λήμμα 2.3.1 Έστω $f \in M^2([a, b])$ και ξ μια πραγματική φραγμένη στοχαστική διαδικασία \mathcal{F}_a μετρήσιμη, τότε $\xi f \in M^2([a, b])$ και

$$\int_a^b \xi f(t)dB_t = \xi \int_a^b f(t)dB_t$$

Λήμμα 2.3.2 Έστω $f \in M^2([a, b])$, τότε ισχύουν οι σχέσεις,

$$i. \mathbb{E} \left[\int_a^b f(t)dB_t | \mathcal{F}_a \right] = 0$$

$$ii. \mathbb{E} \left[\left| \int_a^b f(t)dB_t \right|^2 | \mathcal{F}_a \right] = \mathbb{E} \left[\int_a^b f^2(t)dB_t | \mathcal{F}_a \right] = \int_a^b \mathbb{E}[f(t) | \mathcal{F}_a] dt$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό της υπό συνθήκης μέσης τιμής, για να ικανοποιείται το (i), θα πρέπει να ισχύει,

$$\mathbb{E} \left[\mathbb{1}_A \int_a^b f(t) dB_t | \mathcal{F}_a \right] = 0, \quad \forall A \in \mathcal{F}_a$$

Επίσης από το Λήμμα 2.3.1, προκύπτει ότι,

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \int_a^b f(t) dB_t] = \mathbb{E}[\int_a^b \mathbb{1}_A f(t) dB_t]$$

Για το (ii), έστω $f \in M^2([0, T])$. Τότε για κάθε $0 \leq a < b \leq T$, $f \in M^2([a, b])$. Συνεπώς, το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(t) dB_t$ είναι καλά ορισμένο. Έτσι από τις ιδιότητες της υπό συνθήκης μέσης τιμής και της ισομετρίας του Ito, αποδεικνύεται το ζητούμενο. □

Θεώρημα 2.3.1 Έστω $f \in M^2([0, T])$, τότε το αόριστο ολοκλήρωμα $\{I_t\}_{0 \leq t \leq T}$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμο martingale ως προς την σ-άλγεβρα \mathcal{F}_t , και,

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t f(s) dB_s \right|^2 \right] \leq 4\mathbb{E} \left[\int_0^T |f(s)|^2 ds \right] \quad (2.3.1)$$

Απόδειξη: Αρχικά γνωρίζουμε ότι $\mathbb{E}[I^2(t)] < \infty$, οπότε η τυχαία μεταβλητή $\{I_t\}_{0 \leq t \leq T}$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη. Μένει να δείξουμε την ιδιότητα martingale. Έστω $0 \leq s < t \leq T$, τότε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[I_t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E} \left[\int_0^s f(u) dB_u + \int_s^t f(u) dB_u | \mathcal{F}_s \right] \\ &= \mathbb{E}[I_s | \mathcal{F}_s] + 0 = I_s \end{aligned}$$

,χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.3.2(i), δηλαδή την σχέση,

$$\mathbb{E} \left[\int_s^t f(u) dB_u | \mathcal{F}_s \right] = 0.$$

Τέλος, η απόδειξη της σχέσης (2.3.1), είναι άμεση συνέπεια από την ανισότητα του Doob στους χώρους L^p , για $p = 2$. □

Θεώρημα 2.3.2 Έστω $f \in M^2([0, T])$ τότε το αόριστο ολοκλήρωμα $\{I_t\}_{t \in [0, T]}$ έχει συνεχή μορφή, δηλαδή υπάρχει συνεχής στοχαστική διαδικασία $\{J_t\}_{t \in [0, T]}$ στον χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ τέτοια ώστε,

$$\mathbb{P} \left(J_t = \int_0^t f(t) dB_t \right) = 1, \quad \forall t \in [0, T]$$

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{P}_n = \{t_i\}_{i=1}^n$ μια διαμέριση του διαστήματος $[0, T]$. Θεωρούμε ως $\{g_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ μια διαδικασία βήματος της μορφής,

$$g_n = g_n(t) = \sum_{i=0}^n \eta_i^{(n)} \mathbb{1}_{[t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)})}, \quad g_n \in M_{step}[0, T]$$

, τέτοια ώστε $g_n \rightarrow f$ στον L^2 , καθώς $n \rightarrow \infty$. Θεωρούμε επίσης την ακολουθία $\{I_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$,

$$I_n(t) = \int_0^t g_n(u) dB_u$$

και την τυχαία μεταβλητή I_t

$$I_t = \int_0^t f(s) dB_s$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση $I_n(t)$ είναι συνεχής στο $[0, T]$, και martingale ως προς την διήθηση \mathcal{F}_t , βάσει του θεωρήματος 2.3.1.. Κατά συνέπεια, για κάθε ζεύγος $n, m \in \mathbb{N}$, οι διαφορές $\{I_n - I_m\}$ είναι martingale. Από την ανισότητα του Doob στον χώρο L^2 , $\forall \epsilon > 0$ έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} |I_n(t) - I_m(t)| \geq \epsilon \right) &\leq \frac{1}{\epsilon^2} \mathbb{E}[|I_n(T) - I_m(T)|^2] \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \mathbb{E} \left[\int_0^T |g_n(t) - g_m(t)|^2 ds \right] \rightarrow 0, \text{ καθώς } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Θέτουμε $\epsilon = 2^{-k}$, $k = 1, 2, \dots$. Μπορούμε να βρούμε υπακολουθία $\{I_{n_k}\}$, με $n_k \uparrow \infty$ τέτοια ώστε

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0, T]} |I_{n_{k+1}}(t) - I_{n_k}(t)| \geq 2^{-k} \right) \leq 2^{-k}$$

Επειδή $\sum_k 2^{-k} < \infty$, από το Λήμμα *Borel - Cantelli*, υπάρχει $\Omega_o \in \mathcal{F}$ με $\mathbb{P}(\Omega_o) = 0$, και μια τυχαία μεταβλητή $k_0(\omega)$ τέτοια ώστε,

$$\sup_{t \in [0, T]} |I_{n_k}(t, \omega) - I_{n_{k+1}}(t, \omega)| \leq \frac{1}{k^2}, \quad k \geq k_0(\omega).$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι, με πιθανότητα 1, η $\{I_{n_k}(t)\}_{k \geq 1}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, T]$ σε κάποιο όριο J_t , όπου J_t είναι συνεχής στο $[0, T]$ σχεδόν για κάθε $\omega \in \Omega$. Όμως από την υπόθεση, ότι $g_n \rightarrow f$ στον L^2 καθώς $n \rightarrow \infty$, συνεπάγεται ότι

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_{n_k}(t) = J_t = \int_0^t f(s) ds, \quad \sigma.β.$$

□

Θεώρημα 2.3.3 Έστω $f \in M^2([0, T])$ και το αόριστο ολοκλήρωμα $\{I_t\}_{t \in [0, T]}$. Τότε η τετραγωνική μεταβολή της διαδικασίας I_t δίνεται,

$$\langle I, I \rangle_t = \int_0^t |f(s)|^2 ds$$

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι η διαδικασία $M_t = I_t^2 - \langle I, I \rangle_t$ είναι συνεχής martingale διαδικασία

που μηδενίζεται στο $t = 0$. Προφανώς $M_0 = I_0^2 - \langle I, I \rangle_0$. Έστω $0 \leq s < t \leq T$ τότε,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E} \left[I_t^2 - \int_0^t |f(u)|^2 du | \mathcal{F}_s \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left(I_s^2 + \int_s^t f(u) dB_u \right)^2 - \int_0^s |f(u)|^2 du - \int_s^t |f(u)|^2 du | \mathcal{F}_s \right] \\ &= \mathbb{E}[I_s^2 | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E} \left[\left(\int_s^t f(u) dB_u \right)^2 | \mathcal{F}_s \right] + 2I_s \mathbb{E} \left[\int_s^t f(u) dB_u | \mathcal{F}_s \right] \\ &\quad - \int_0^s |f(u)|^2 du - \mathbb{E} \left[\int_s^t |f(u)|^2 du | \mathcal{F}_s \right] \\ &= I_s^2 - \int_0^s |f(u)|^2 du \end{aligned}$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα από το Λήμμα 2.3.2. □

2.4 Διαδικασίες $It\hat{o}$ και το λήμμα του $It\hat{o}$

Έχοντας ορίσει το ολοκλήρωμα Ito , από το παράδειγμα 2.2.3 είδαμε ότι,

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t, \quad t \in [0, T].$$

Ωστόσο, ο τρόπος εύρεσης ενός ολοκληρώματος $It\hat{o}$ κατευθείαν από τον ορισμό, μπορεί να καταλήξει σε αρκετά περίπλοκους υπολογισμούς. Σε αυτή την παράγραφο θα ορίσουμε μία γενικότερη κλάση στοχαστικών διαδικασιών, τις διαδικασίες $It\hat{o}$. Σημαντικό αποτέλεσμα των διαδικασιών $It\hat{o}$, είναι το Λήμμα του $It\hat{o}$, βάσει του οποίου μπορούμε να αναπαραστήσουμε με συγκεκριμένο τρόπο διαδικασίες $It\hat{o}$.

Διαδικασίες $It\hat{o}$

Έχοντας ορίσει το ολοκλήρωμα $It\hat{o}$, μπορούμε να ορίσουμε μια νέα κλάση στοχαστικών διαδικασιών, τις διαδικασίες του $It\hat{o}$. Έχουμε ήδη δει ότι,

$$\frac{1}{2} B_t^2 = \int_0^t ds + \int_0^t B_s dB_s, \quad t \in [0, T].$$

Έτσι, τίθεται, το ερώτημα αν μπορούμε να αναπαραστήσουμε στοχαστικές διαδικασίες με την παραπάνω μορφή, δηλαδή ως άθροισμα ένας ντετερμινιστικού και ενός στοχαστικού όρου.

Ορισμός 2.4.1 Έστω $(B_t)_{t \geq 0}$ μια μονοδιάστατη κίνηση Brown στον χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Μια μονοδιάστατη διαδικασία $It\hat{o}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία X_t στον χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ της μορφής,

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB_s$$

όπου οι u και v είναι συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$\int_0^t v^2(s, \omega) ds < \infty \text{ } \zeta.\beta. \text{ και } \int_0^t |u(s, \omega)| ds < \infty \text{ } \zeta.\beta.$$

Η διαδικασία γράφεται σε διαφορική μορφή

$$dX_t = udt + vdB_t, \quad X_0 = x_0.$$

Το λήμμα του Itô

Όπως είπαμε το Λήμμα του Itô, είναι ένα σημαντικό αποτέλεσμα για την θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών. Έστω B_t μια μονοδιάστατη κίνηση Brown. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι είναι μία διαδικασία Itô, αλλά και συνάρτηση $f(B_t) = \frac{1}{2}B_t^2$ είναι με την σειρά της διαδικασία Itô. Έτσι, βάσει του παρακάτω θεωρήματος, μια συνάρτηση μιας διαδικασίας Itô είναι και αυτή διαδικασία Itô, με την ίδια αναπαράσταση.

Θεώρημα 2.4.1 Έστω X_t μία διαδικασία Ito της μορφής,

$$dX_t = udt + vdB_t$$

και μια συνάρτηση $g(t, x) \in C^{1,2}$. Τότε αν $Y_t = g(t, X_t)$, η Y_t είναι διαδικασία Ito με τη μορφή

$$dY_t = dg(t, X_t) = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t) \cdot (dX_t)^2$$

όπου η ποσότητα $(dX_t)^2$, υπολογίζεται βάσει των κανόνων

$$(dt)^2 = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0 \text{ και } (dB_t)^2 = dt. \quad (2.4.1)$$

Βάσει των σχέσεων (2.4.1), η διαδικασία $g(t, X_t)$ γράφεται στην μορφή

$$dg(t, X_t) = \left(\frac{\partial g}{\partial t} + u \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right) dt + v \frac{\partial g}{\partial x} dB_t$$

ή αντίστοιχα

$$\begin{aligned} g(t, X_t) &= g(0, X_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) + u(s, X_s) \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) + \frac{1}{2} v^2(s, X_s) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s) \right) dt \\ &\quad + \int_0^t v(s, X_s) \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) dB_s \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις g , $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ είναι φραγμένες. Αν δείξουμε την σχέση (2.4.2) με την παραπάνω συνθήκη, τότε εξασφαλίζουμε την πιο γενική περίπτωση, προσεγγίζοντας την g με κάποια ακολουθία g_n , θεωρώντας φραγμένες ακολουθίες συναρτήσεων g_n , $\frac{\partial g_n}{\partial x}$, $\frac{\partial g_n}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 g_n}{\partial x^2}$ που συγκλίνουν ομοιόμορφα στις g , $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ σε συμπαγή υποσύνολα του $[0, \infty) \times \mathbb{R}$. Από την κατασκευή του ολοκληρώματος Itô, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις u και v είναι διαδικασίες βήματος. Για μία διαμέριση του διαστήματος $[0, T]$, $t_i^n = \frac{i \cdot T}{n}$. Έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} g(t, X_t) - g(0, X_0) &= \sum_{j=0}^{n-1} [g(t_{j+1}^n, X_{t_{j+1}^n}) - g(t_j^n, X_{t_j^n})] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} [g(t_{j+1}^n, X_{t_{j+1}^n}) - g(t_j^n, X_{t_{j+1}^n})] - \sum_{j=0}^{n-1} [g(t_j^n, X_{t_{j+1}^n}) - g(t_j^n, X_{t_j^n})] \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Στους όρους του πρώτου αθροίσματος θα χρησιμοποιήσουμε προσέγγιση κατά Taylor ως προς τον χρόνο, ενώ για τους όρους του δεύτερου αθροίσματος θα χρησιμοποιήσουμε προσέγγιση κατά Taylor ως προς την μεταβλητή X . Έτσι, υπάρχει $\bar{t}_j \in [t_j^n, t_{j+1}^n]$ τέτοιο ώστε

$$g(t_{j+1}^n, X_{t_{j+1}^n}) - g(t_j^n, X_{t_j^n}) = \frac{\partial g}{\partial t}(\bar{t}_j, X_{t_{j+1}^n}) \Delta t_j$$

όπου $\Delta t_j = t_{j+1}^n - t_j^n$. Αφού $g \in C^{1,2}$ τότε από την συνέχεια των παραγώγων της, έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial t}(\bar{t}_j, X_{t_{j+1}^n}) \Delta t_j = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) ds, \quad \sigma.β. \quad (2.4.4)$$

Αντίστοιχα, υπάρχει $\bar{X}_j \in [X_{t_j^n}, X_{t_{j+1}^n}]$ τέτοιο ώστε,

$$g(t_j^n, X_{t_{j+1}^n}) - g(t_j^n, X_{t_j^n}) = \frac{\partial g}{\partial x}(t_j^n, X_{t_j^n}) \Delta X_j + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, \bar{X}_j) \Delta X_j^2$$

,όπου $\Delta X_j = X_{t_{j+1}^n} - X_{t_j^n}$. Υποθέτοντας τις $u(s, \omega)$ και $v(s, \omega)$ είναι διαδικασίες βήματος μπορούμε να προσεγγίσουμε τις μεταβολές ΔX ως εξής,

$$\Delta X_j = u(\bar{t}_j, \omega) \Delta t_j + v(\bar{t}_j, \omega) \Delta B_j, \quad \bar{t}_j = t_j^n, \quad \Delta B_j = B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n}$$

Οπότε για την ανάπτυξη Taylor ως προς x έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} g(t_j^n, X_{t_{j+1}^n}) - g(t_j^n, X_{t_j^n}) &= \frac{\partial g}{\partial x}(t_j^n, X_{t_j^n}) u(\bar{t}_j, \omega) \Delta t_j + \frac{\partial g}{\partial x}(t_j^n, X_{t_j^n}) v(\bar{t}_j, \omega) \Delta B_j \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, \bar{X}_j) v^2(\bar{t}_j, \omega) \Delta B_j^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, \bar{X}_j) u(\bar{t}_j, \omega) \Delta t_j^2 \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, \bar{X}_j) u(\bar{t}_j, \omega) v(\bar{t}_j, \omega) \Delta t_j \Delta B_j \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Όμως

$$\mathbb{E} \left[\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, \bar{X}_j) u(\bar{t}_j, \omega) \Delta t_j^2 \right)^2 \right] \rightarrow 0, \quad \text{καθώς } \Delta t_j \rightarrow 0$$

και

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, \bar{X}_j) u(\bar{t}_j, \omega) v(\bar{t}_j, \omega) \Delta t_j \Delta B_j \right)^2 \right] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, \bar{X}_j) u(\bar{t}_j, \omega) v(\bar{t}_j, \omega) \right] (\Delta t_j)^3 \rightarrow 0, \quad \text{καθώς } \Delta t_j \rightarrow 0 \end{aligned}$$

δεδομένου ότι $\mathbb{E}[(\Delta B_j)^2] = \Delta t_j$. Έτσι για τους όρους που μένουν από την συνέχεια των παραπάνω προκύπτει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial x}(t_j^n, X_{t_j^n}) u(\bar{t}_j, \omega) \Delta t_j = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) u(s, X_s) ds \quad (2.4.6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial x}(t_j^n, X_{t_j^n}) v(\bar{t}_j, \omega) \Delta B_j = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) v(s, X_s) dB_s \quad (2.4.7)$$

Τέλος, για τον τελευταίο όρο στο άθροισμα (2.4.5) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, \bar{X}_j) v^2(\bar{t}_j, \omega) \Delta B_j^2 &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, X_{t_j^n}) v^2(t_j^n, \omega) \Delta t_j \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, X_{t_j^n}) v^2(t_j^n, \omega) (\Delta B_j^2 - \Delta t_j) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, \bar{X}_j) v^2(t_j^n, \omega) - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} u^2 \Delta B_j^2 \right) \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Καθώς $n \rightarrow +\infty$, το άθροισμα του δεύτερου όρου τείνει στο μηδέν στον L^2 , και το άθροισμα των τελευταίων όρων λόγω τις συνέχειας των παραγώγων. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.4.6), (2.4.7) και (2.4.8) στην σχέση (2.4.5) προκύπτει το ζητούμενο. \square

Στα παρακάτω παραδείγματα δείχνουμε πως βάσει του λήμματος *Ito* μπορούμε να υπολογίσουμε ολοκληρώματα *Ito*.

Παράδειγμα 2.4.1 Έστω $(B_t)_{t \geq 0}$ μια μονοδιάστατη κίνηση Brown και το ολοκλήρωμα

$$I_t = \int_0^t B_s dB_s$$

Θεωρούμε $g(t, X) = X^2$, όπου $X_t = B_t$. Η διαδικασία X_t μπορεί να γραφτεί ως διαδικασία *Ito* της μορφής $dX_t = udt + vdB_t$, για $u = 0$, $v = 1$. Έτσι, έχουμε ότι

$$dg(t, X_t) = (dB_t^2) = \frac{1}{2} dt + 2B_t dB_t \Rightarrow B_t^2 = \frac{1}{2} t + 2 \int_0^t B_s dB_s$$

Έτσι,

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t.$$

Παράδειγμα 2.4.2 Έστω $(B_t)_{t \geq 0}$ μια μονοδιάστατη κίνηση Brown και το ολοκλήρωμα

$$I_t = \int_0^t e^{-s/2 + B_s} dB_s$$

Θεωρούμε $g(t, X) = e^{-t/2 + X_t}$, όπου $X_t = B_t$. Η διαδικασία X_t μπορεί να γραφτεί ως διαδικασία *Ito* της μορφής $dX_t = udt + vdB_t$, με $u = 0$, $v = 1$. Έτσι, έχουμε ότι

$$d(e^{-t/2 + B_t}) = \left(-\frac{1}{2} e^{-t/2 + B_t} + \frac{1}{2} e^{-t/2 + B_t} \right) dt + e^{-t/2 + B_t} dB_t$$

Οπότε

$$\int_0^t e^{-s/2 + B_s} ds = e^{-t/2 + B_t} - 1.$$

2.5 Διαδικασίες Ito σε πολλές διαστάσεις

Έχοντας ορίσει την μονοδιάστατη διαδικασία Ito, μπορούμε να την γενικεύσουμε στις περισσότερες διαστάσεις, λαμβάνοντας υπόψη μία πολυδιάστατη κίνηση Brown. Πρώτα όμως χρειάζεται να ορίσουμε το πολυδιάστατο στοχαστικό ολοκλήρωμα.

Ορισμός 2.5.1 Έστω $B_t = (B_{1,t}, B_{2,t}, \dots, B_{d,t})$ μια d -διάστατη κίνηση Brown και $f = [f_{ij}]$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, d$ μια οικογένεια από $m - \mathcal{F}_t = \sigma(B_s; s \leq t)$ στοχαστικές διαδικασίες. Ορίζουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα Ito στις n -διαστάσεις ως το διάνυσμα, $I_t = (I_{1,t}, I_{2,t}, \dots, I_{n,t}) \in \mathbb{R}^n$ όπου

$$I_{i,t} = \sum_{j=1}^d \int_0^t f_{ij} dB_{j,s}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

και

$$I_t = \int_0^t f dB_s = \int_0^t \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \dots & f_{nd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_{1,s} \\ \vdots \\ dB_{n,s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^d f_{1j} dB_{j,s} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^d f_{nj} dB_{j,s} \end{pmatrix}$$

Οι ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος στις πολλές διαστάσεις μπορούν να μεταφερθούν.

Ορισμός 2.5.2 Θα λέμε ότι η στοχαστική διαδικασία X_t είναι μια μονοδιάστατη στοχαστική διαδικασία Ito αν γράφεται στη μορφή

$$X_t = x_0 + \int_0^t u(s, \omega) ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t v_j(s, \omega) dB_{j,s}$$

,όπου u και v_j είναι προσαρμοσμένες ως προς τις \mathcal{F}_t για κάθε $j = 1, 2, \dots, d$, για τις οποίες ισχύει ότι

$$\int_0^t |v_j(s, \omega)|^2 ds < \infty \text{ σ.β. } \forall j \geq d, \text{ και } \int_0^t |u(s, \omega)| ds < \infty \text{ σ.β.}$$

Αντίστοιχα κάνοντας χρήση διαφορικών

$$dX_t = u dt + \sum_{j=1}^d v_j dB_{j,s}$$

Έχοντας ορίσει το ολοκλήρωμα Ito σε πολλές διαστάσεις και την διαδικασία Ito ως προς μια κίνηση Brown στις d -διαστάσεις, μπορούμε να ορίσουμε την στοχαστική διαδικασία Ito σε πολλές διαστάσεις.

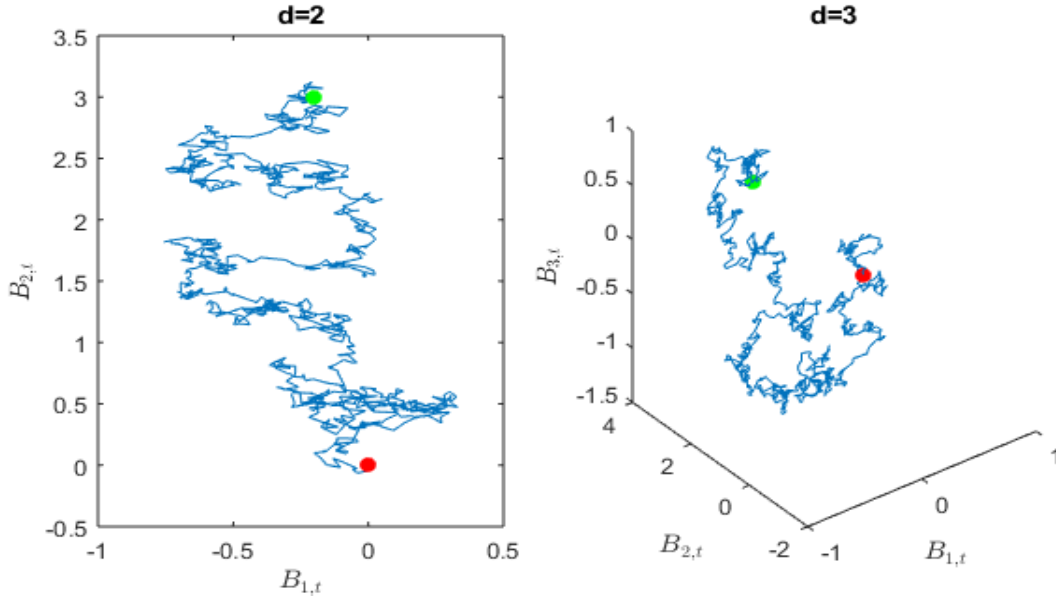
Ορισμός 2.5.3 Έστω $X_{i,t}$, $i = 1, 2, \dots, n$ μονοδιάστατες διαδικασίες Ito με τον τρόπο που ορίστηκαν παραπάνω. Ως n -διάστατη διαδικασία Ito ορίζουμε την $X_t = (X_{1,t}, X_{2,t}, \dots, X_{n,t})^T$ με τη μορφή

$$dX_t = U dt + V dB_t$$

όπου

$$X_t = \begin{pmatrix} X_{1,t} \\ \vdots \\ X_{n,t} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \dots & v_{nd} \end{pmatrix}, \quad dB_t = \begin{pmatrix} dB_{1,t} \\ \vdots \\ dB_{d,t} \end{pmatrix}$$

Το πιο απλό παράδειγμα μιας πολυδιάστατης διαδικασίας *Ito* είναι η πολυδιάστατη κίνηση Brown. Στα παρακάτω γράφημα έχουμε προσομοιώσει δύο τροχιές από την κίνηση Brown στις δύο και τρεις διαστάσεις αντίστοιχα.



Σχήμα 2.1: Κίνηση Brown στις δύο (αριστερά) και τρεις (δεξιά) διαστάσεις.

Τέλος, κλείνουμε αυτή την παράγραφο δίνοντας τον τύπο του *Ito* στην περίπτωση των πολυδιάστατων διαδικασιών *Ito*.

Θεώρημα 2.5.1 Έστω X_t μια n -διάστατη διαδικασία *Ito* με τον τρόπο που ορίστηκε παραπάνω και $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ με $g(t, x) = (g_1(t, x), g_2(t, x), \dots, g_p(t, x))$ τέτοια ώστε $g \in C^{1,2}$. Τότε η διαδικασία $U(t, \omega) = g(t, X_t)$ είναι διαδικασία *Ito* για την οποία

$$dY_t = \frac{\partial g_j}{\partial x} dt + \sum_i \frac{\partial g_j}{\partial x_i} dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial^2 g_j}{\partial x_i \partial x_k} dX_i dX_k$$

,με τους κανόνες

$$dB_i dB_k = \delta_{ik} dt, \quad dB_i dt = dt dB_i = 0 \quad dt dt = 0, \quad i \neq k.$$

Κάνοντας τις πράξεις προκύπτει ότι,

$$dY_t = \left(g_t + u g_x + \frac{1}{2} \text{trace}(v^T g_{xx} v) \right) dt + v g_x dB_t$$

συμβολίζοντας με $g_t = \frac{\partial g}{\partial t}$ και

$$g_x = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} \right) \quad \text{και} \quad [g_{xx}]_{ik} = \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_k} \right]$$

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι όμοια με αυτή που η X_t είναι μονοδιάστατη, και παραλείπεται. \square

Κεφάλαιο 3

Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με το πότε μια στοχαστική διαφορική εξίσωση έχει λύση και τι είδους λύσεις είναι αυτή. Θεωρήσουμε την παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad b(t, X_t) \in \mathbb{R}, \quad \sigma(t, X_t) \in \mathbb{R}.$$

Οι ερωτήσεις που θέτονται είναι οι εξής :

- α) Ποιες οι ιδιότητες που πρέπει να ικανοποιούνται για να υπάρχει λύση στην παραπάνω εξίσωση ;
- β) Πως μπορούμε να επιλύσουμε τέτοιες εξισώσεις ;

3.1 Βασικές έννοιες

Ξεκινάμε δίνοντας βασικές έννοιες των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων, ορίζοντας την μορφή μιας τέτοιας εξίσωσης. Μια εξίσωση της μορφής

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \tag{3.1.1}$$

ονομάζεται *στοχαστική διαφορική εξίσωση*, όπου B_t μια κίνηση Brown στον \mathbb{R}^m . και $b(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ μετρήσιμες συναρτήσεις ως προς την $\mathcal{F}_t = \sigma(B_u; u \leq t)$. Παραπάνω έχουμε δώσει τον γενικό ορισμό μιας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης, χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό

$$dX_{i,t} = b_i(t, X_t)dt + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}(t, X_t)dB_{j,t}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Ορισμός 3.1.1 Έστω δύο στοχαστικές διαδικασίες X_t και X_t^* που ικανοποιούν την εξίσωση (3.1.1). Λέμε ότι η λύση είναι ισχυρά μοναδική για οποιοσδήποτε από τις X_t και X_t^* αν ισχύει

$$\mathbb{P}(X_0 = X_0^*) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(X_t = X_t^*, \forall t \geq 0) = 1$$

3.2 Ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης

Σε αυτή την παράγραφο θα εξετάσουμε τις υποθέσεις που θα πρέπει να τεθούν για να απαντήσουμε στο ερώτημα α) που τέθηκε στην αρχή του κεφαλαίου.

Θεώρημα 3.2.1 Έστω $T > 0$ και $b(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε να ικανοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις

- i. (Συνέχεια Lipschitz) $|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq C|x - y|$, $t \in [0, T]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, C σταθερά
- ii. (Γραμμική αύξηση) $|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq D(1 + |x|)$, $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, D σταθερά

Αν x_0 μια $\mathcal{F}_0^{(m)} = \sigma(B_1(s, \cdot), \dots, B_m(s, \cdot))$; $s = 0$ μετρήσιμη και τετραγωνικά ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή, τότε η στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad t \in [0, T], \quad X_0 = x_0 \quad (3.2.1)$$

έχει ισχυρή λύση η οποία είναι μοναδική.

Πρωτού προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος, πρέπει να θυμίσουμε ένα σημαντικό αποτέλεσμα από την συναρτησιακή ανάλυση. Αυτό είναι το *θεώρημα σταθερού σημείου του Banach*. Θα ξεκινήσουμε ορίζοντας την έννοια της συστολής.

Ορισμός Έστω X ένας χώρος Banach εφοδιασμένος με μία νόρμα $\|\cdot\|_X$ και μία απεικόνιση $\mathcal{T} : X \rightarrow X$, τότε

- i. Το σημείο $x_0 \in X$ λέγεται *σταθερό σημείο* της X αν $\mathcal{T}(x_0) = x_0$
- ii. Η απεικόνιση \mathcal{T} λέγεται *συστολή* στον X αν υπάρχει $v < 1$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x, y \in X$

$$\|\mathcal{T}x - \mathcal{T}y\|_X \leq v\|x - y\|_X$$

Θεώρημα σταθερού σημείου (Banach) Έστω X ένας χώρος Banach εφοδιασμένος με την νόρμα $\|\cdot\|_X$. Μια απεικόνιση $\mathcal{T} : X \rightarrow X$ που είναι συστολή στον X . Τότε η \mathcal{T} έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.

Απόδειξη Βλ. Παράρτημα του κεφαλαίου.

Θα παρουσιάσουμε την απόδειξη του θεωρήματος 3.2.1 στην περίπτωση όπου $n = 1$ και $m = 1$. Η γενίκευση μπορεί να γίνει με ανάλογο τρόπο.

Απόδειξη θεωρήματος 3.2.1

Μοναδικότητα της λύσης. Έστω $X(t) = X(t, \omega)$ και $X^*(t) = X^*(t, \omega)$ δύο λύσεις της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (3.2.1) με αρχικές τιμές $X(0)$ και $X^*(0)$, όπου $X_1(0) = X^*(0)$. Θέτουμε $a(t, \omega) = b(t, \omega) - b^*(t, \omega)$ και $h(t, \omega) = \sigma(t, \omega) - \sigma^*(t, \omega)$. Έτσι η απόσταση των λύσεων στον L^2 είναι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_t - X_t^*|^2] &\leq \mathbb{E} \left[\left(X_0 - X_0^* + \int_0^t a(s, \omega) ds + \int_0^t h(s, \omega) dB_s \right)^2 \right] \\ &\leq 3\mathbb{E} [|X_0 - X_0^*|^2] + 3\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t a(s, \omega) ds \right)^2 \right] + 3\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t h(s, \omega) dB_s \right)^2 \right] \\ &\leq 3\mathbb{E} [|X_0 - X_0^*|^2] + 3t\mathbb{E} \left[\int_0^t a^2(s, \omega) ds \right] + 3\mathbb{E} \left[\int_0^t h^2(s, \omega) ds \right] \\ &\leq 3\mathbb{E} [|X_0 - X_0^*|^2] + 3(t+1)D \int_0^t \mathbb{E} [|X_s - X_s^*|^2] ds \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την ισομετρία του $It\hat{o}$ και την συνθήκη Lipschitz για τους συντελεστές των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων. Από την ανισότητα Gronwall, έχουμε ότι

$$\mathbb{E} \left[|X_s - X_s^*|^2 \right] \leq \mathbb{E} \left[|X_0 - X_0^*|^2 \right] \exp [3(t+1)Dt]$$

Αφού $X_0 = X_0^*$, έπεται ότι

$$\mathbb{E} \left[|X_s - X_s^*|^2 \right] \leq 0, \forall t = 0$$

Συνεπώς

$$\mathbb{E} \left[|X_s - X_s^*|^2 \right] = 0, \forall t \in [0, t].$$

Οπότε $\mathbb{P}(|X_t - X_t^*|) = 1$.

Υπαρξη λύσης. Θεωρούμε το επαναληπτικό σχήμα Picard εφαρμοσμένο στην στοχαστική περίπτωση,

$$\begin{aligned} X_t^{(0)} &= x_0 \\ X_t^{(1)} &= x_0 + \int_0^t b(s, X_s^{(0)})ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(0)})dB_s \\ &\vdots \\ X_t^{(n+1)} &= x_0 + \int_0^t b(s, X_s^{(n)})ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)})dB_s \end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχει στοχαστική διαδικασία X_t , τέτοια ώστε να είναι λύση της εξίσωσης (3.2.1), και για την οποία θα ισχύει ότι $X_t^{(n+1)} = X_t^{(n)}$, για κάθε $n \geq n^*$. Θεωρούμε τον χώρο M^2 που περιέχει εκείνες τις στοχαστικές διαδικασίες X_t τέτοιες ώστε $\mathbb{E}[\int_0^T |X_t|^2 dt] < \infty$, εφοδιασμένος με την νόρμα $\|\cdot\| : M^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$\|X_t\|_\lambda^2 := \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\lambda t} |X_t|^2 dt \right], \lambda > 0$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι ο χώρος M^2 με την παραπάνω νόρμα είναι χώρος Banach¹. Ορίζουμε έναν τελεστή $\mathcal{T} : M^2 \rightarrow M^2$, με τιμή

$$\mathcal{T}X_t = x_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

Έτσι ένα σημείο X^* στον M^2 είναι μία στοχαστική διαδικασία που θα είναι λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (2.3.2). Για να δείξουμε ότι υπάρχει λύση, αρκεί να δείξουμε ότι ο τελεστής \mathcal{T} είναι συστολή. Έστω X_1 και X_2 δύο στοιχεία του M^2 , δηλαδή οι διαδικασίες $X_{1,t}$ και $X_{2,t}$, τότε

$$\mathcal{T}X_{1,t} - \mathcal{T}X_{2,t} = \underbrace{\int_0^t (b(s, X_{1,s}) - b(s, X_{2,s}))ds}_{I_1} + \underbrace{\int_0^t (\sigma(s, X_{1,s}) - \sigma(s, X_{2,s}))dB_s}_{I_2}$$

Θα εξετάσουμε του όρους I_1 και I_2 ξεχωριστά.

Για τον όρο I_1 έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} \|I_1\|_\lambda^2 &= \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\lambda t} \left| \int_0^t (b(s, X_{1,s}) - b(s, X_{2,s}))ds \right|^2 dt \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\lambda t} \int_0^t |b(s, X_{1,s}) - b(s, X_{2,s})|^2 ds dt \right] \\ &\leq C^2 \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\lambda t} \int_0^t |X_{1,s} - X_{2,s}|^2 ds dt \right] \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

¹Χώρος Banach είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος.

αφού η συνάρτηση $b(\cdot, \cdot)$ είναι Lipschitz. Για το ολοκλήρωμα εντός της αναμενόμενης τιμής έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-\lambda t} \int_0^t |X_{1,s} - X_{2,s}|^2 ds dt &= \int_0^T e^{-\lambda t} \int_0^t H(t-s) |X_{1,s} - X_{2,s}|^2 ds dt \\ &= \int_0^T \left[\int_0^T e^{-\lambda t} e^{\lambda s} H(t-s) dt \right] e^{-\lambda s} |X_{1,s} - X_{2,s}|^2 ds \\ &= \int_0^T \left[\int_s^T e^{-\lambda t} e^{\lambda s} dt \right] e^{-\lambda s} |X_{1,s} - X_{2,s}|^2 ds \end{aligned}$$

όπου $H(u) = \begin{cases} 0, & \alpha\nu u < 0 \\ 1, & \alpha\nu u \geq 0 \end{cases}$. Έτσι η σχέση (3.2.2),

$$\begin{aligned} \|I_1\|_\lambda^2 &\leq C^2 \mathbb{E} \left[\int_0^T \left(\int_s^T e^{-\lambda t} e^{\lambda s} dt \right) e^{-\lambda s} |X_{1,s} - X_{2,s}|^2 ds \right] \\ &= C^2 \mathbb{E} \left[\int_0^T \frac{1}{\lambda} \left(1 - e^{-\lambda(T-s)} \right) e^{-\lambda s} |X_{1,s} - X_{2,s}|^2 ds \right] \\ &\leq \frac{C^2}{\lambda} \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\lambda s} |X_{1,s} - X_{2,s}|^2 ds \right] = \frac{C^2}{\lambda} \|X_1 - X_2\|_\lambda^2 \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Για το ολοκλήρωμα I_2 έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} \|I_2\|_\lambda^2 &= \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\lambda t} \left| \int_0^t (\sigma(s, X_{1,s}) - \sigma(s, X_{2,s})) dB_s \right|^2 dt \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\lambda t} \int_0^t |\sigma(s, X_{1,s}) - \sigma(s, X_{2,s})|^2 ds dt \right] \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την ισομετρία του Itô. Επίσης, από την ιδιότητα Lipschitz της συνάρτησης $\sigma(\cdot, \cdot)$ και χρησιμοποιώντας πάλι τον ίδιο μετασχηματισμό στα άκρα των ολοκληρωμάτων βάση της συνάρτησης $H(u)$, καταλήγουμε ότι

$$\|I_2\|_\lambda^2 \leq \frac{C^2}{\lambda} \|X_1 - X_2\|_\lambda^2 \quad (3.2.4)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.2.3) και (3.2.4) τις νόρμες των I_1 και I_2 παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_{X_1} - \mathcal{T}_{X_2}\|^2 &\leq v \left| \|I_1\|_\lambda^2 - \|I_2\|_\lambda^2 \right| = v \frac{2C^2}{\lambda} \left| \|I_1\|_\lambda^2 - \|I_2\|_\lambda^2 \right| \\ &= v^* \left| \|I_1\|_\lambda^2 - \|I_2\|_\lambda^2 \right| \end{aligned}$$

όπου $v^* = v \frac{2C^2}{\lambda} < 1 \Rightarrow \lambda > 2C^2$. Συνεπώς για $\lambda > 2C^2$, ο τελεστής \mathcal{T} είναι συστολή στον M^2 και από το θεώρημα σταθερού σημείου του Banach έχει μοναδικό σταθερό σημείο, που θα είναι η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (3.2.1).

□

Παρατήρηση: Οι συνθήκες που απαιτούνται για να υπάρχει μια μοναδική ισχυρή λύση είναι αναγκαίες έτσι ώστε,

- α) Η λύση X_t να μην απειρίζεται καθώς $t \rightarrow \infty$. (Γραμμική αύξηση).
- β) Να εξασφαλίζεται η μοναδικότητα της λύσης (Συνέχεια Lipschitz).

Παρακάτω δίνουμε δύο παραδείγματα στα οποία οι παραπάνω συνθήκες δεν πληρούνται.

Παράδειγμα 3.2.1 Έστω η παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = X_t^2 dt, \quad X_0 = 1$$

Έχουμε ότι $b(t, x) = x^2$, όπου δεν ικανοποιεί την συνθήκη γραμμικής αύξησης. Παρ' όλα αυτά υπάρχει μοναδική λύση

$$X_t = \frac{1}{1-t}, \quad t \in [0, 1)$$

η οποία όμως δεν καλύπτει ολόκληρο το πεδίο ορισμού του χρόνου $[0, T]$.

Παράδειγμα 3.2.2 Έστω η παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = 3X_t^{2/3} dt, \quad X_0 = 0$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $a > 0$, η συνάρτηση

$$X_t = \begin{cases} 0 & \text{αν } t \leq a \\ (t-a)^3 & \text{αν } t > a \end{cases}$$

αποτελεί λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης, όμως η συνάρτηση $b(x) = 3x^{2/3}$ δεν είναι Lipschitz.

3.3 Ασθενείς λύσεις

Οι λύσεις των εξισώσεων που ορίσαμε παραπάνω είναι ισχυρές λύσεις. Δηλαδή, γνωρίζοντας μια συγκεκριμένη τροχιά της κίνησης Brown, μια διήθηση \mathcal{F}_t και τις συναρτήσεις b και σ , δείξαμε ότι με την μέθοδο Picard εφαρμοσμένη στο στοχαστικό ανάλογο, κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις υπάρχει ισχυρή λύση.

Η ερώτηση που τίθεται είναι η εξής: Για δεδομένους τους συντελεστές b και σ , υπάρχει τριάδα $(\tilde{X}_t, \tilde{B}_t, \tilde{\mathcal{F}}_t)$ τέτοια ώστε η στοχαστική διαδικασία X_t να είναι λύση της εξίσωσης (3.2.1); Τέτοιες λύσεις ονομάζονται **ασθενείς λύσεις**.

Ορισμός 3.3.1 Λέμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης (3.2.1) έχουν την ιδιότητα της ασθενούς μοναδικότητας αν οποιεσδήποτε από τις ασθενείς λύσεις $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}, B_t, X_t)$ και $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}_t, \tilde{\mathbb{P}}, \tilde{B}_t, \tilde{X}_t)$ έχουν την ίδια κατανομή.

Λήμμα 3.3.1 Έστω οι συναρτήσεις b και σ τέτοιες ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες γραμμικής αύξησης και της συνέχειας Lipschitz. Τότε για τη στοχαστική διαφορική εξίσωση (3.2.1) υπάρχει λύση (ισχυρή ή ασθενής) η οποία έχει την συνθήκη της ασθενούς μοναδικότητας.

Η απόδειξη παραλείπεται. Παρ' όλα αυτά θα την σκιαγραφήσουμε.

Έστω $(\tilde{X}_t, \tilde{B}_t, \tilde{\mathcal{F}}_t)$ και $(X_t', B_t', \mathcal{F}_t')$ δύο ασθενείς λύσεις και X_t, Y_t δύο ισχυρές λύσεις κατασκευασμένες από τις τροχιές \tilde{B}_t, B_t' . Αρκεί να δείξουμε ότι οι διαδικασίες X_t, Y_t έχουν την ίδια κατανομή. Ορίζοντας το επαναληπτικό σχήμα Picard, οι διαδικασίες $(X_t^{(n)}, \tilde{B}_t), (Y_t^{(n)}, B_t')$ έχουν την ίδια κατανομή για κάθε k .

Περισσότερα για τις ασθενείς λύσεις δίνονται στο [15].

Παράδειγμα (Εξίσωση Tanaka) Έστω η στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = \text{sign}(X_t)dB_t, \quad X_0 = 0$$

Η συνάρτηση $b(t, x) = \text{sign}(x)$ δεν ικανοποιεί την συνέχεια Lipschitz, έτσι η παραπάνω εξίσωση δεν έχει ισχυρές λύσεις. Θα δείξουμε ότι έχει ασθενής λύση. Έστω $X_t = B_t'$ μια κίνηση Brown και $\mathcal{F}_t = \sigma(B_u'; u \leq t)$. Ορίζουμε \tilde{B}_t

$$\tilde{B}_t = \int_0^t \text{sign}(B_t')dB_t'$$

Όμως $X_t = B_t'$, οπότε η εξίσωση Tanaka γράφεται,

$$d\tilde{B}_t = \text{sign}(X_t)dX_t \Rightarrow dX_t = \text{sign}(X_t)d\tilde{B}_t$$

3.4 Παράρτημα

Θεώρημα σταθερού σημείου του Banach

Έστω (X, d) πλήρης μετρικός χώρος και $T : X \rightarrow X$ μια συστολή στον X . Τότε η T έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο.

Απόδειξη: Έστω $\{x_n\}$ μια ακολουθία στον X και επιλέγουμε κάποιο $x_0 \in X$. Θέτουμε $x_n = T^n(x_0)$. Θα δείξουμε ότι η παραπάνω ακολουθία είναι Cauchy στον X . Παρατηρούμε ότι για $n \in \mathbb{N}$ τότε

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq vd(x_n, x_{n-1}) \\ &= vd(Tx_{n-1}, Tx_{n-2}) \leq v^2d(x_{n-1}, x_{n-2}) \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε ότι, $d(x_{n+1}, x_n) \leq v^n d(x_1, x_0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Από την παραπάνω ανισότητα για κάποια m, n τέτοια ώστε $m > n$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq v^{m-1}d(x_1, x_0) + v^{m-2}d(x_1, x_0) + \cdots + v^n d(x_1, x_0) \\ &= v^n d(x_1, x_0) \frac{1 - v^{m-n}}{1 - v} \\ &\leq v^n \frac{d(x_1, x_0)}{1 - v} \end{aligned}$$

Όταν $0 < v < 1$, $v^n d(x_1, x_0) (1 - v) \rightarrow 0$, καθώς $n, m \rightarrow \infty$. Συνεπώς η ακολουθία $\{x_n\}$ είναι Cauchy στον X . Δεδομένου ότι ο (X, d) είναι πλήρης χώρος υπάρχει μοναδικό $x \in X$ τέτοιο ώστε $x_n \rightarrow x$. Έτσι,

$$\begin{aligned} d(x, Tx) &\leq d(x, x_m) + d(x_m, Tx) \\ &= d(x, x_m) + d(Tx_{m-1}, Tx) \\ &\leq d(x, x_m) + d(x_{m-1}, x) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Οπότε $d(x, Tx) \rightarrow 0$, δηλαδή $Tx = x$. Αν υπάρχει και άλλο σταθερό σημείο y , τότε

$$0 < d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq vd(x, y)$$

που είναι άτοπο, καθώς $0 < v < 1$.

□

Κεφάλαιο 4

Διαδικασίες διάχυσης

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ορίσουμε μία νέα κλάση στοχαστικών διαδικασιών, τις διαδικασίες διάχυσης. Έστω η στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad t \in [0, T], \quad X_0 = x_0$$

όπου $b(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\sigma(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε τις συνθήκες έτσι ώστε μια στοχαστική διαφορική εξίσωση να έχει ισχυρή λύση. Αυτές οι λύσεις ονομάζονται διαδικασίες διάχυσης (**diffusion processes**), η συνάρτηση b ονομάζεται *συντελεστής ταχύτητας* (*drift coefficient*) και η συνάρτηση σ ονομάζεται *συντελεστής διάχυσης* (*diffusion coefficient*).

4.1 Ιδιότητα Markov

Ορισμός 4.1.1 Μια χρονικά ομοιογενής διαδικασία διάχυσης είναι μια στοχαστική διαδικασία $X_t(\omega) : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί την εξίσωση

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad t \geq s, \quad X_s = x \quad (4.1.1)$$

όπου B_t μια κίνηση Brown στον \mathbb{R}^n και $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$, τέτοιες ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες γραμμικής αύξησης και συνέχειας Lipschitz.

Στον παραπάνω ορισμό έχουμε θεωρήσει ότι οι συντελεστές b και σ δεν εξαρτώνται από τον χρόνο αλλά μόνον από το x . Θα συμβολίζουμε την μοναδική λύση της εξίσωσης 4.1.1 ως, $X_t = X_t^{s,x}$, $t \geq s$ και $X_s = x$. Όταν $s = 0$ τότε γράφουμε $X_t^x = X_t^{0,x}$. Θα δείξουμε ότι η λύση είναι χρονικά ομοιογενής. Έστω $h > 0$,

$$\begin{aligned} X_{s+h}^{s,x} &= x + \int_s^{s+h} b(X_u^{s,x})du + \int_s^{s+h} \sigma(X_u^{s,x})dB_u \\ &= x + \int_0^h b(X_{s+v}^{s,x})dv + \int_0^h b(X_{s+v}^{s,x})d\tilde{B}_v, \quad v = s - u \end{aligned}$$

όπου $\tilde{B}_v = B_{s+v} - B_s$, $v \geq 0$. Επίσης έχουμε ότι,

$$X_h^{0,x} = x + \int_0^h b(X_v^{0,x})dv + \int_0^h b(X_v^{0,x})d\tilde{B}_v$$

Γνωρίζουμε ότι οι διαδικασίες $\{B_v\}_{v \geq 0}$ και $\{\tilde{B}_v\}_{v \geq 0}$ ακολουθούν την ίδια κατανομή. Συνεπώς από το

λήμμα 3.3.1 συνεπάγεται ότι οι διαδικασίες $\{X_{s+h}^{s,x}\}_{h \geq 0}$ και $\{X_h^{0,x}\}_{h \geq 0}$ ακολουθούν την ίδια κατανομή. Επομένως, η $\{X_t\}_{t \geq 0}$ είναι χρονικά ομοιογενής.

Συμβολίζουμε με Q^x το μέτρο πιθανότητας της διαδικασίας $\{X_t\}_{t \geq 0}$ με αρχική τιμή $X_0 = x$, και με $E^x[\cdot]$ την αναμενόμενη τιμή ως το μέτρο Q^x . Τέλος με $E[\cdot]$ συμβολίζουμε την αναμενόμενη τιμή κάτω από το μέτρο πιθανότητας της κίνησης Brown.

Θεώρημα 4.1.1 (Ιδιότητα Markov) Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μια φραγμένη Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε για $t, h \geq 0$

$$\mathbb{E}^x \left[f(X_{t+h}) | \mathcal{F}_t^{(m)} \right] = \mathbb{E}^{X_t} [f(X_h)]$$

Απόδειξη: Έστω $r \geq t$ τότε,

$$X_r = X_t + \int_t^r b(X_u) du + \int_t^r \sigma(X_u) dB_u$$

Ορίζουμε την συνάρτηση $F(x, t, r, \omega) = X_r^{t,x}(\omega)$, $r \geq t$, έτσι

$$X_r(\omega) = F(X_t, t, r, \omega), \quad r \geq t$$

Παρατηρούμε ότι η διαδικασία X_t είναι ανεξάρτητη της σ -άλγεβρας $\mathcal{F}_t^{(m)} = \sigma(B_{1,u}; u \leq t, B_{2,u}; u \leq t, \dots, B_{m,u}; u \leq t)$. Έτσι έχουμε ότι,

$$\mathbb{E} \left[(f(F(X_t, t, t+h, \omega))) | \mathcal{F}_t^{(m)} \right] = \mathbb{E} [(f(F(X_t, 0, h, \omega)))] \quad (4.1.2)$$

χρησιμοποιώντας την χρονική ομογένεια της διαδικασίας. Θέτουμε $g(t, \omega) = f \circ F(x, t, t+h, \omega)$. Η συνάρτηση g είναι φραγμένη και μετρήσιμη. Συνεπώς μπορεί να προσεγγιστεί από την σειρά,

$$\sum_{j=1}^m \phi_j(x) \psi(\omega)$$

Συνεπάγεται ότι η σχέση (4.1.2) γράφεται,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[g(X_t, \omega) | \mathcal{F}_t^{(m)} \right] &= \mathbb{E} \left[\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \phi_j(X_t) \psi(\omega) | \mathcal{F}_t^{(m)} \right] \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \phi_j(X_t) \mathbb{E} \left[\psi(\omega) | \mathcal{F}_t^{(m)} \right] \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \mathbb{E} \left[\phi_j(x) \psi(\omega) | \mathcal{F}_t^{(m)} \right] |_{x=X_t} \\ &= \mathbb{E} \left[g(x, \omega) | \mathcal{F}_t^{(m)} \right]_{x=X_t} = \mathbb{E} [g(x, \omega)]_{x=X_t} \end{aligned}$$

Τέλος, αφού η $\{X_t\}_{t \geq 0}$ είναι χρονικά ομοιογενής τότε,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[f(F(X_t, t, t+h, \omega)) | \mathcal{F}_t^{(m)} \right] &= \mathbb{E} [f(F(X_t, t, t+h, \omega))] \\ &= \mathbb{E} [f(F(X_t, 0, h, \omega))] = \mathbb{E}^{X_t} [f(X_h)] \end{aligned}$$

□

Ισχυρή ιδιότητα Markov

Με την ιδιότητα Markov παραπάνω δείξαμε ότι μια διαδικασία διάχυσης είναι διαδικασία Markov για κάποιον χρόνο t . Παρακάτω θα δείξουμε την ισχυρή ιδιότητα Markov για μια διαδικασία διάχυσης όταν ο χρόνος t αντικατασταθεί με έναν χρόνο στάσης $\tau(\omega)$.

Θεώρημα 4.1.2 (Ισχυρή ιδιότητα Markov) Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μια φραγμένη Borel μετρήσιμη συνάρτηση και $\tau < \infty$ σ.β. ένας χρόνος στάσης ως προς την διήθηση $\mathcal{F}_t^{(m)}$. Τότε

$$\mathbb{E}^x \left[f(X_{\tau+h}) | \mathcal{F}_\tau^{(m)} \right] = \mathbb{E}^{X_\tau} [f(X_h)], \quad \forall h \geq 0 \quad (4.1.3)$$

Απόδειξη: Θα ακολουθήσουμε την φιλοσοφία όπως στην απόδειξη για το παραπάνω θεώρημα. Έστω κάποιος $h > 0$ τότε

$$X_{\tau+h}^{\tau,x} = x + \int_\tau^{\tau+h} b(X_u^{\tau,x}) du + \int_\tau^{\tau+h} \sigma(X_u^{\tau,x}) dB_u$$

Από το πρώτο κεφάλαιο, γνωρίζουμε ότι η κίνηση Brown είναι μαρκοβιανή διαδικασία, συνεπώς για κάποιον $u \geq 0$ η διαδικασία $\tilde{B}_u = B_{\tau+u} - B_\tau$, είναι διαδικασία Markov ανεξάρτητη από την σ -άλγεβρα $\mathcal{F}_\tau^{(m)}$. Έτσι η $X_{\tau+h}^{\tau,x}$ γράφεται

$$X_{\tau+h}^{\tau,x} = x + \int_0^h b(X_{\tau+u}^{\tau,x}) du + \int_0^h \sigma(X_{\tau+u}^{\tau,x}) d\tilde{B}_u$$

Οπότε η $X_{\tau+h}^{\tau,x}$ αποτελεί ισχυρή λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$Y_h = x + \int_0^h b(Y_u) du + \int_0^h \sigma(Y_u) d\tilde{B}_u$$

Παρατηρούμε ότι η διαδικασία Y_h είναι ανεξάρτητη από την σ -άλγεβρα $\mathcal{F}_\tau^{(m)}$, ομοίως και η $X_{\tau+h}^{\tau,x}$. Από το λήμμα 3.3.1 συνεπάγεται ότι οι διαδικασίες $\{Y_h\}_{h \geq 0}$, $\{X_{\tau+h}^{\tau,x}\}_{h \geq 0}$ και $\{X_h^{0,x}\}_{h \geq 0}$ ακολουθούν την ίδια κατανομή. Ορίζουμε την συνάρτηση $F(x, t, r, \omega) = X_r^{t,x}(\omega)$, $r \geq t$. Έτσι η σχέση (4.1.3) γράφεται

$$\mathbb{E} \left[f(F(x, 0, \tau + h, \omega)) | \mathcal{F}_\tau^{(m)} \right] = \mathbb{E} [f(F(x, 0, h, \omega))]_{x=X_\tau^{0,x}}$$

Παρατηρούμε ότι η $F(x, 0, \tau + h, \omega)$ γράφεται στην μορφή

$$\begin{aligned} F(x, 0, \tau + h, \omega) &= X_{\tau+h}^{0,x}(\omega) = x + \int_0^{\tau+h} b(X_u) du + \int_0^{\tau+h} \sigma(X_u) dB_u \\ &= x + \int_0^\tau b(X_u) du + \int_0^\tau \sigma(X_u) dB_u + \int_\tau^{\tau+h} b(X_u) du + \int_\tau^{\tau+h} \sigma(X_u) dB_u \\ &= X_\tau^{0,x} + \int_\tau^{\tau+h} b(X_u) du + \int_\tau^{\tau+h} \sigma(X_u) dB_u \\ &= F(X_\tau^{0,x}, \tau, \tau + h, \omega) \end{aligned}$$

Έστω $g(x, t, r, \omega) = f \circ F(x, t, r, \omega)$. Υποθέτουμε ότι η g μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$g(x, t, r, \omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(x) \psi_j(t, r, \omega)$$

Δεδομένου ότι η διάχυση $X_{\tau+h}^{\tau,x}$ είναι ανεξάρτητη από τη σ-άλγεβρα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[g(X_{\tau}^{0,\tau}, \tau, \tau+h, \omega) | \mathcal{F}_{\tau}^{(m)} \right] &= \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(X_{\tau}^{0,\tau}) \mathbb{E} \left[\psi_j(\tau, \tau+h, \omega) | \mathcal{F}_{\tau}^{(m)} \right] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E} \left[\phi_j(X_{\tau}^{0,\tau}) \psi_j(\tau, \tau+h, \omega) | \mathcal{F}_{\tau}^{(m)} \right] = \mathbb{E} \left[g(X_{\tau}^{0,\tau}, \tau, \tau+h, \omega) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[f(X_{\tau+h}^{\tau,x}) \right]_{x=X_{\tau}^{0,x}} = \mathbb{E} \left[f(X_h^{0,x}) \right]_{x=X_{\tau}^{0,x}} = \mathbb{E} \left[f(F(x, 0, h, \omega)) \right]_{x=X_{\tau}^{0,x}}. \end{aligned}$$

□

4.2 Γεννήτορας διαδικασίας διάχυσης

Σε αυτή την παράγραφο θα εισάγουμε την έννοια του γεννήτορα μιας διαδικασίας διάχυσης. Ο γεννήτορας είναι μία απεικόνιση που συνδέει τους συντελεστές μιας διάχυσης με τις διαφορικές εξισώσεις με μερικούς παραγώγους. Επίσης, ο γεννήτορας έχει καθοριστικό ρόλο στην εύρεση της στάσιμης κατανομής μιας διάχυσης.

Ορισμός 4.2.1 Έστω $\{X_t\}$ μια χρονικά ομοιογενής διάχυση στον \mathbb{R}^n . Ορίζουμε (απειροστό) γεννήτορα \mathcal{A} της διαδικασίας X_t , ως το όριο

$$\mathcal{A}f(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}^x[f(X_t)] - f(x)}{t}, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (4.2.1)$$

Επίσης, ως $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}$ ορίζουμε το σύνολο εκείνων των $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε να υπάρχει το όριο (4.2.1). Αντίστοιχα, με $\mathcal{D}_{\mathcal{A}}(x)$ ορίζουμε το σύνολο εκείνων των $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε να υπάρχει το όριο (4.2.1) για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Λήμμα 4.2.1 Έστω $X_t = X_t^x$ μια διαδικασία Itô στον \mathbb{R}^n της μορφής

$$X_t^x(\omega) = x + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB_s$$

όπου B_s μια κίνηση Brown στον \mathbb{R}^m . Θεωρούμε μια συνάρτηση $f \in C_o^2(\mathbb{R}^n)^1$ και έναν χρόνο στάσης τ ως προς την διήθηση $\mathcal{F}_t^{(n)}$ τέτοιος ώστε $\mathbb{E}^x[\tau] < \infty$. Αν u και v φραγμένες, τότε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x[f(X_t)] &= \\ f(x) + \mathbb{E}^x \left[\int_0^{\tau} \left(\sum_i u_i(s, \omega) \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (vv)_{ij}^T(s, \omega) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) \right) ds \right] \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

όπου $\mathbb{E}^x[\cdot]$ είναι η αναμενόμενη τιμή ως προς το μέτρο της X_t ξεκινώντας από το x .

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Itô για την συνάρτηση f παίρνουμε

$$\begin{aligned} df(X) &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X) dX_i dX_j \\ &= \sum_i u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dt + \sum_i v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dB_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} v_i dB_i v_j dB_j \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

¹ $C_o^2(\Omega) := \{f \in C^2(\Omega); \Omega \text{ συμπαγές σύνολο}\}.$

όπου

$$\begin{aligned} v_i dB_i v_j dB_j &= \left(\sum_k v_{ik} dB_k \right) \left(\sum_n v_{jn} dB_n \right) \\ &= \left(\sum_k v_{ik} v_{jk} \right) dt = (vv)_{ij}^T dt \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.2.3) και (4.2.4) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} df(X_t) &= \sum_i u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dt + \sum_i v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dB_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} (uv)_{ij}^T dt \\ \Rightarrow f(X_t) &= f(x) + \int_0^t \left(\sum_i u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (vv)_{ij}^T \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j} \right) ds + \sum_{i,k} \int_0^t v_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i} dB_k \end{aligned}$$

Παίρνοντας αναμενόμενες τιμές, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x [f(X_\tau)] &= f(x) + \mathbb{E}^x \left[\int_0^\tau \left(\sum_i u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (vv)_{ij}^T \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(X) \right) ds \right] \\ &\quad + \sum_{i,k} \mathbb{E}^x \left[\int_0^\tau v_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) dB_k \right] \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Αρκεί ναδειχθεί ότι $\mathbb{E}^x \left[\int_0^\tau v_{ik} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) dB_k \right] = 0$ για κάθε i, k . Έστω g μια συνάρτηση που φράζεται από κάποιο M . Τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$\mathbb{E}^x \left[\int_0^{\min(\tau, k)} g(X_s) dB_s \right] = \mathbb{E}^x \left[\int_0^k \mathbb{1} g(X_s) dB_s \right] = 0$$

Επίσης, από την ισομετρία του *Itô* προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x \left[\left(\int_0^\tau g(X_s) dB_s - \int_0^{\min(\tau, k)} g(X_s) dB_s \right)^2 \right] \\ = \mathbb{E}^x \left[\int_{\min(\tau, k)}^\tau g^2(X_s) ds \right] \leq M^2 \mathbb{E}^x [\tau - \min(\tau, k)] \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}^x \left[\int_0^{\min(\tau, k)} g(X_s) dB_s \right] = \mathbb{E}^x \left[\int_0^\tau g(X_s) dB_s \right] = 0 \quad (4.2.6)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.2.5) και (4.2.6), προκύπτει η ζητούμενη σχέση (4.2.2). □

Από το παραπάνω λήμμα προκύπτει η παρακάτω χρήσιμη έκφραση για τον γεννήτορα της διάχυσης.

Θεώρημα 4.2.1 Έστω X_t μια ομογενής διάχυση στον \mathbb{R}^n

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$$

Αν $f \in C_o^2(\mathbb{R}^n)$ τότε, $f \in \mathcal{D}_A$ και

$$Af(x) = \sum_i b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\sigma\sigma)_{ij}^T(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \quad (4.2.7)$$

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει από το παραπάνω λήμμα για $\tau = t$ και από τον ορισμό (4.2.1). □

Παράδειγμα 5.4.1 Έστω η διαδικασία $\tilde{X}_t = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ στον \mathbb{R}^n τέτοια ώστε,

$$dX_{k,t} = r_k X_k dt + X_k \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} dB_j, \quad k \leq n$$

Τότε ο γεννήτορας της διαδικασίας θα είναι,

$$\mathcal{A}f(X) = \sum_{i=1}^n r_i X_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n X_i X_j \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \alpha_{jk} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Παράδειγμα 5.4.2 Έστω η διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck,

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t$$

Τότε ο γεννήτορας της διαδικασίας θα είναι,

$$\mathcal{A}f(x) = \mu x f' + \frac{1}{2} \sigma^2 f''$$

Ένα ακόμη σημαντικό αποτέλεσμα του απειροστού γεννήτορα είναι ο τύπος του Dunkin. Βάσει του τύπου του Dunkin, μπορούμε να υπολογίσουμε τις ροπές κάποιας διάχυσης *Itô* συναρτήσε του απειροστού τελεστή. Παρακάτω, δίνουμε το αποτέλεσμα που μόλις ισχυριστήκαμε.

Θεώρημα 4.2.2 Αν $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ και τ κάποιος χρόνος στάσης τέτοιος ώστε $\mathbb{E}^x[\tau] < \infty$, τότε

$$\mathbb{E}^x [f(X_\tau)] = f(x) + \mathbb{E}^x \left[\int_0^\tau \mathcal{A}f(X_s) ds \right] \quad (4.2.8)$$

Απόδειξη: Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.2.5) και (4.2.7), προκύπτει άμεσα το αποτέλεσμα. □

Παράδειγμα 5.4.3 Μία από της εφαρμογές του παραπάνω θεωρήματος, είναι ο υπολογισμός του αναμενόμενου χρόνου εξόδου μια κίνησης Brown από μια κλειστή μπάλα. Έστω $X_t = B_t$ μια κίνηση Brown στον \mathbb{R}^d , με αρχική τιμή $B_{t_0} = c$. Εύκολα βλέπουμε ότι ο γεννήτορας της X_t είναι ο τελεστής Laplace $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Έστω το σύνολο $K = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\|_2 \leq R\}$, $R > 0$, και ο χρόνος στάσης $\tau_j = \min(j, \tau_k)$. Τότε για την συνάρτηση $f(x) = \|x\|_2$, έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^c [f(B_{\tau_j})] &= f(c) + \mathbb{E}^c \left[\int_0^{\tau_j} \frac{1}{2} \mathcal{A}f(B_s) ds \right] \\ &= c^2 + \mathbb{E}^c \left[\int_0^{\tau_j} d ds \right] = c^2 + d \mathbb{E}^c [\tau_j] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbb{E}^c [f(B_{\tau_j})] = c^2 + d \mathbb{E}^c [\tau_j] \Rightarrow \mathbb{E}^c [\tau_j] \leq \frac{1}{d} (R^2 - c^2). \end{aligned}$$

4.3 Επίλυση στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων

Ένας από τους τρόπους για να επιλύσουμε στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις είναι κάνοντας χρήση του τύπου του Itô.

Γεωμετρική κίνηση Brown

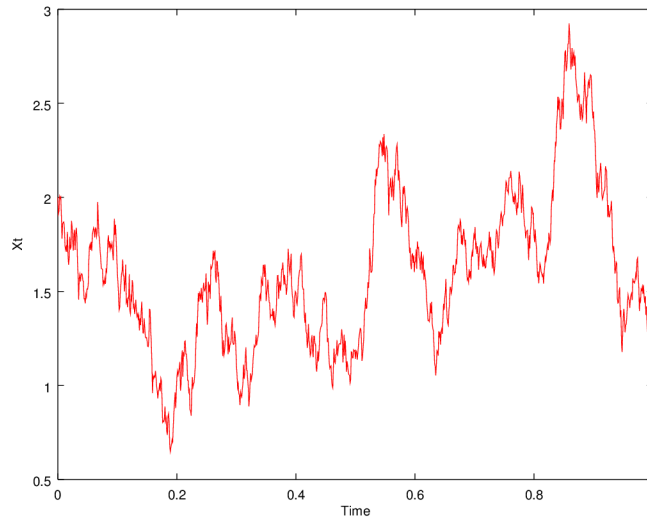
Το πρώτο μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε για την περιγραφή τιμών μετοχών, ήταν η γεωμετρική κίνηση Brown, η στοχαστική διαφορική εξίσωση της οποίας, η λύση είναι η γεωμετρική κίνηση Brown δίνεται,

$$dS_t = rS_t dt + \sigma dB_t, \quad S_0 = s.$$

Έστω $g(t, x) = \ln(x)$, $x > 0$. Από τον τύπο του Itô προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} dg(t, S_t) &= \frac{\partial g}{\partial t} dt + \frac{\partial g}{\partial x} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (dS_t)^2 \\ &= \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} (dS_t)^2 = \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} (rS_t dt + \sigma S_t dB_t)^2 \\ &= \frac{dS_t}{S_t} - \frac{\sigma^2}{2} dt \\ &\Rightarrow \frac{dS_t}{S_t} = d(\ln(S_t)) + \frac{\sigma^2}{2} dt \\ &\Rightarrow \int_0^t \frac{dS_s}{S_s} = \int_0^t d(\ln(S_s)) ds + \int_0^t \frac{\sigma^2}{2} dB_s \\ &\Rightarrow rt + \sigma B_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) + \frac{\sigma^2}{2} t \quad \Rightarrow S_t = S_0 \exp\left(r - \frac{\sigma^2}{2} t + rB_t\right) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι αν $B_t \sim \mathcal{N}(r, \sigma^2)$ τότε $\ln(S_t) \sim \mathcal{N}(rt, \sigma^2 t)$.



Σχήμα 4.1: Παράδειγμα προσομοίωσης γεωμετρικής κίνησης Brown ($dX_t = 0.5X_t dt + 2dB_t$, $x_0 = 2$).

Διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck

Το μοντέλο Ornstein-Uhlenbeck(OU) είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης

$$dX_t = (\theta_1 - \theta_2 X_t)dt + \theta_3 dB_t, \quad X_0 = x_0, \quad \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, \quad \theta_3 \in \mathbb{R}_+$$

Αρχικά χρησιμοποιήθηκε για εφαρμογές στην φυσική, και έπειτα γενικεύθηκε από τον *Vasicek* με θέμα τα επιτόκια. Όταν $\theta_2 > 0$, τότε η τιμή της διαδικασίας καθώς ο χρόνος μεγαλώνει θα τείνει στην τιμή θ_1 . Έστω $g(t, x) = x e^{\theta_2 t}$, χρησιμοποιώντας από τον τύπο του *Itô* προκύπτει η λύση της εξίσωσης θα είναι

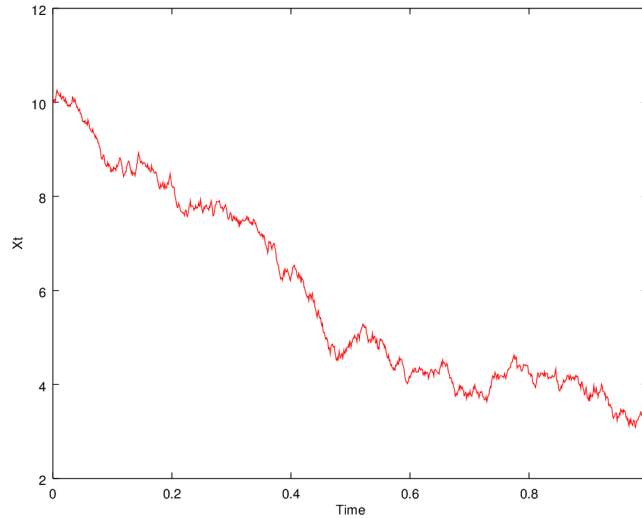
$$\begin{aligned} X_t e^{\theta_2 t} &= x_0 e^{\theta_2 \cdot 0} + \int_0^t \theta_2 X_u e^{\theta_2 u} du + \int_0^t e^{\theta_2 u} dX_u \\ &= x_0 + \int_0^t \theta_2 X_u e^{\theta_2 u} du + \int_0^t e^{\theta_2 u} [(\theta_1 - \theta_2 X_u)du + \theta_3 dB_u] \\ &= X_0 + \int_0^t \theta_1 e^{\theta_2 u} du + \int_0^t \theta_3 e^{\theta_2 u} dB_u \\ \Rightarrow X_t &= \frac{\theta_1}{\theta_2} + \left(x_0 - \frac{\theta_1}{\theta_2}\right) e^{-\theta_2 t} + \theta_3 \int_0^t e^{-\theta_2(t-u)} dB_u. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{E}_\theta [X_t | X_0 = x_0] = \frac{\theta_1}{\theta_2} + \left(x_0 - \frac{\theta_1}{\theta_2}\right) e^{-\theta_2 t}, \quad t \geq 0.$$

και εύκολα δείχνεται ότι

$$\text{Var}_\theta(X_t | X_0 = x_0) = \frac{\theta_3^2 (1 - e^{-2\theta_2 t})}{2\theta_2}, \quad t \geq 0$$



Σχήμα 4.2: Παράδειγμα προσομοίωσης διαδικασίας Ornstein-Uhlenbeck ($dX_t = (4 - 2X_t)dt + 2dB_t$, $x_0 = 10$).

4.4 Μετασχηματισμός Lamperti

Μια εφαρμογή του τύπου του Itô είναι ο μετασχηματισμός Lamperti. Έστω η παρακάτω διαφορική εξίσωση, της οποίας ο συντελεστής μεταβλητότητας εξαρτάται μόνο από τον χώρο καταστάσεων της X_t ,

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad X_0 = x_0$$

Μια στοχαστική διαφορική εξίσωση με την παραπάνω μορφή μπορεί να μετασχηματιστεί σε μία νέα, που ο συντελεστής μεταβλητότητας να είναι ίσος με τη μονάδα. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό

$$Y_t = L(X_t) = \int_{x_0}^{X_t} \frac{1}{\sigma(u)} du$$

Θα δείξουμε ότι η νέα διαδικασία Y_t επιλύει την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dY_t = b^*(t, Y_t)dt + dB_t \quad (4.4.1)$$

όπου

$$b^*(t, y) = \frac{b(t, F^{-1}(y))}{\sigma(F^{-1}(y))} - \frac{1}{2}\sigma_x(F^{-1}(y))$$

Έτσι η σχέση (4.4.1) γράφεται

$$dY_t = \left(\frac{b(t, X_t)}{\sigma(X_t)} - \frac{1}{2}\sigma_x(X_t) \right) dt + dB_t$$

Απόδειξη: Έστω $g(t, x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{\sigma(u)} du$, τότε

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{\sigma(x)}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -\frac{\sigma_x(x)}{\sigma^2(x)}$$

Εφαρμόζοντας το λήμμα του Itô έχουμε ότι

$$\begin{aligned} dg(t, X_t) &= \frac{\partial g}{\partial t} dt + \frac{\partial g}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (dX_t)^2 \\ &= \frac{1}{\sigma(X_t)} (b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t) - \frac{1}{2} \frac{\sigma_x(x)}{\sigma^2(x)} (b(t, X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t)^2 \\ &= \left(\frac{b(t, X_t)}{\sigma(X_t)} - \frac{1}{2}\sigma_x(X_t) \right) dt + dB_t \end{aligned}$$

□

Διαδικασία Cox-Ingersoll-Ross

Η διαδικασία Cox-Ingersoll-Ross (CIR), αποτελεί λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = (\mu - rX_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dB_t, \quad X_0 = 0$$

όπου $\mu, a, \sigma \in \mathbb{R}_+$. Αυτή η διαδικασία επινοήθηκε από τον Feller το 1951, με στόχο την περιγραφή της αύξησης ενός πληθυσμού. Στην συνέχεια χρησιμοποιήθηκε από τους Cox-Ingersoll-Ross το 1985 για εφαρμογές στα επιτόκια, ως μια παραλλαγή του μοντέλου Vasicek. Όπως και το μοντέλο OU, το μοντέλο CIR καθώς $t \rightarrow \infty$ η τιμή της διαδικασίας θα τείνει στον μέσο.

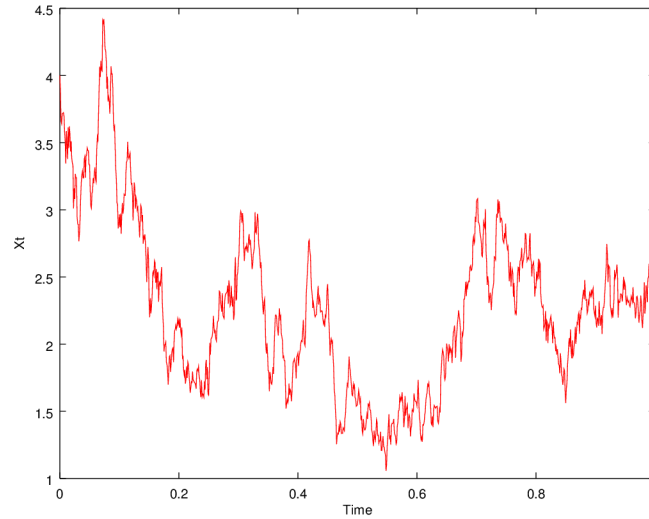
Για την επίλυση της παραπάνω εξίσωσης θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Lamperti. Έχουμε ότι

$$Y_t = L(x) = \int_0^{X_t} \frac{1}{\sigma\sqrt{u}} du = \frac{2}{\sigma}\sqrt{X_t}$$

$$b^*(X_t) = \frac{\mu - rX_t}{\sigma\sqrt{X_t}} - \frac{1}{4} \frac{\sigma}{\sqrt{X_t}} = \left(\frac{\mu}{\sigma\sqrt{X_t}} - \frac{\sigma}{4\sqrt{X_t}} \right) - \frac{r}{\sigma} \sqrt{X_t}$$

Έτσι για $\sqrt{X_t} = \frac{\sigma Y_t}{2}$ έχουμε ότι

$$dY_t = \left[\left(\frac{2\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{Y_t} - \frac{a}{2} \right] dt + dB_t$$



Σχήμα 4.3: Παράδειγμα τροχιάς της διαδικασίας Cox-Ingersoll-Ross ($dX_t = (5 - 2X_t)dt + 2\sqrt{X_t}dB_t$, $x_0 = 4$).

Κεφάλαιο 5

Θεώρημα Cameron-Martin-Girsanov

Ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα στην στοχαστική ανάλυση είναι το Θεώρημα *Girsanov*. Έστω μία διαδικασία *Itô*. Διαισθητικά το θεώρημα αυτό λέει ότι, αν αλλάξουμε τον συντελεστή ταχύτητας τότε η κατανομή της διαδικασίας θα αλλάξει σημαντικά. Το μέτρο της καινούργιας διαδικασίας που θα προκύψει θα είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο της αρχικής και η πιθανοφάνεια θα υπολογίζεται ως η παράγωγος *Radon – Nikodym* των δύο μέτρων.

5.1 Εκθετικά martingales

Έστω $(B_t)_{t \leq T}$ μια κίνηση Brown ως προς το μέτρο \mathbb{P} και την σ -άλγεβρα $\mathcal{F}_t = \sigma(B_u; u \leq t)$. Για κάποιο $\theta \in \mathbb{R}$ η διαδικασία

$$Z_\theta(t) = \exp\left(\theta B_t - \frac{\theta^2 t}{2}\right)$$

είναι martingale ως προς την διήθηση \mathcal{F}_t . Τέτοιας μορφής martingales αναπαριστούν τον λόγο πιθανοφανειών των μέτρων \mathbb{P} και \mathbb{P}_θ . Ορίζουμε την διαδικασία

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t f(s)dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t |f(s)|^2 ds\right)$$

όπου $f \in \mathcal{M}^2$.

Θεώρημα 5.1.1 (*Novikov*) Έστω $t \geq 0$ και $f \in \mathcal{M}^2$ τέτοια ώστε,

$$\mathbb{E} \left[\exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t |f(s)|^2 ds\right) \right] < \infty \quad (5.1.1)$$

Τότε $\mathbb{E}[Z_t] = 1, \forall t$ και η διαδικασία Z_t είναι martingale.

Η σχέση (5.1.1) ονομάζεται *συνθήκη Novikov* και θα αναφερθούμε σε αυτή στην συνέχεια.

Απόδειξη: Θα δείξουμε την απόδειξη στην περίπτωση που η συνάρτηση f είναι ντετερμινιστική και συνεχής συνάρτηση ως προς το t . Γνωρίζουμε ότι για κάθε $s < t$ ισχύει

$$\int_s^t f(u)dB_u \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^t |f(u)|^2 du\right)$$

και ότι η τυχαία μεταβλητή $\int_s^t f(u)dB_u$ είναι ανεξάρτητη της σ -άλγεβρας $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u; u \leq s)$. Αρχικά θα δείξουμε ότι η Z_t είναι martingale.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\exp \left(\int_0^t f(u)dB_u \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] &= \exp \left(\int_0^s f(u)dB_u \right) \mathbb{E} \left[\exp \left(\int_s^t f(u)dB_u \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= \exp \left(\int_0^s f(u)dB_u \right) \mathbb{E} \left[\exp \left(\int_s^t f(u)dB_u \right) \right] \\ &= \exp \left(\int_0^s f(u)dB_u \right) \exp \left(\frac{1}{2} \int_s^t |f(u)|^2 du \right) \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την ιδιότητα ότι αν $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ τότε $\mathbb{E}e^X = e^{\sigma^2/2}$. Έτσι, πολλαπλασιάζοντας την τελευταία σχέση με το $\exp(\frac{1}{2} \int_0^s |f(u)|^2 du)$, προκύπτει ότι

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\int_0^t f(u)dB_u - \frac{1}{2} \int_0^t |f(u)|^2 du \right) \middle| \mathcal{F}_s \right] = \exp \left(\int_0^s f(u)dB_u - \frac{1}{2} \int_0^s |f(u)|^2 du \right)$$

Για να δείξουμε ότι $\mathbb{E}Z_t = 1$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Z_t &= \mathbb{E} \left[\left(\int_0^t f(u)dB_u - \frac{1}{2} \int_0^t |f(u)|^2 du \right) \right] \\ &= \exp \left(-\frac{1}{2} \int_0^t |f(u)|^2 du \right) \mathbb{E} \left[\exp \left(\int_0^t f(u)dB_u \right) \right] = 1 \end{aligned}$$

□

5.2 Θεώρημα Cameron-Martin-Girsanov

Έστω ένα χώρος μέτρου $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ και μία διήθηση $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$. Για κάποιο $T > 0$ θεωρούμε ένα νέο μέτρο πιθανότητας \mathbb{Q} και μια σ -άλγεβρα \mathcal{F}_T . Θα λέμε ότι το μέτρο \mathbb{Q} είναι *απόλυτα συνεχές* ως προς το μέτρο $\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_T}$ και συμβολίζουμε με $\mathbb{P} \ll \mathbb{Q}$ αν

$$\mathbb{P}(K) = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}(K) = 0, \quad \forall K \in \mathcal{F}_T$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Radon-Nikodym, υπάρχει μια \mathcal{F}_T -μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή $M_T(\omega) \geq 0$ τέτοια ώστε

$$d\mathbb{Q}(\omega) = M_T(\omega)d\mathbb{P}(\omega), \quad \text{στην } \sigma\text{-άλγεβρα } \{\mathcal{F}_t\}_{t \leq T}$$

Η τυχαία μεταβλητή M_T ονομάζεται *παράγωγος Radon-Nikodym*.

Λήμμα 5.2.1 Έστω δύο μέτρα πιθανότητας \mathbb{Q} και \mathbb{P} και η διήθηση $\{\mathcal{F}_t\}_{t \leq T}$, τέτοια ώστε $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_T}$. Έστω επίσης η παράγωγος Radon-Nikodym $Z_T = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ πάνω στην σ -άλγεβρα \mathcal{F}_T . Τότε $\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t} \ll \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}$, $t \in [0, T]$ και η τυχαία μεταβλητή

$$M_t := \frac{d(\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_t})}{d(\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t})}$$

είναι martingale ως προς την διήθηση \mathcal{F}_t και το μέτρο \mathbb{P} .

Απόδειξη: Αφού $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ στην σ -άλγεβρα \mathcal{F}_T , και $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_T$ για κάθε $t \in [0, T]$, τότε και $\mathbb{Q} \ll \mathbb{P}$ στην σ -άλγεβρα \mathcal{F}_t . Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η Z_t είναι martingale. Έστω κάποιο σύνολο $G \in \mathcal{F}_t$ όπου $t \in [0, T]$, τότε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_P [\mathbb{1}_F \mathbb{E}_P [M_T | \mathcal{F}_t]] &= \mathbb{E}_P [\mathbb{E}_P [M_T \mathbb{1}_G | \mathcal{F}_t]] \\ &= \mathbb{E}_P [M_T \mathbb{1}_G] = \mathbb{E}_Q [\mathbb{1}_G] = \mathbb{E}_P [M_t \mathbb{1}_G]\end{aligned}$$

Αφού το παραπάνω ισχύει για κάθε $K \in \mathcal{F}_t$ έπεται ότι $\mathbb{E}_P [M_T | \mathcal{F}_t] = M_t$ ως προς το μέτρο $\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}$.

□

Θεώρημα 5.2.1 (Girsanov I) Έστω $X_t \in \mathbb{R}^n$ μια διαδικασία Itô της μορφής

$$dX_t = b(t, \omega)dt + dB_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad Y_0 = 0$$

όπου $b \in L^2([0, T]; \mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη Novikou (5.1.1) και B_t μια n -διάστατη κίνηση Brown, με την διήθηση $\mathcal{F}_t^{(n)}$. Θεωρούμε την διαδικασία

$$M_t = \exp \left(- \int_0^t b(s, \omega) dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t b^2(s, \omega) ds \right), \quad 0 \leq t \leq T$$

Ορίζουμε ένα μέτρο \mathbb{Q} ως προς την $\mathcal{F}_t^{(n)}$ ως

$$d\mathbb{Q}(\omega) = M_t(\omega)d\mathbb{P}(\omega)$$

Τότε το \mathbb{Q} είναι μέτρο πιθανότητας ως προς την διήθηση $\mathcal{F}_t^{(n)}$ και η διαδικασία Q_t είναι κίνηση Brown ως προς το μέτρο \mathbb{Q} .

Απόδειξη: Αφού η συνάρτηση b ικανοποιεί την συνθήκη Novikou τότε η διαδικασία M_t είναι martingale ως προς την διήθηση $\mathcal{F}_t^{(n)}$ και το μέτρο \mathbb{P} . Έτσι

$$\mathbb{Q}(\Omega) = \mathbb{E}_\Omega[1] = \int_\Omega d\mathbb{Q}(\omega) = \int_\Omega M_t(\omega)d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}_P[M_t] = 1$$

χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα από το θεώρημα 5.1.1. Για να δείξουμε ότι η X_t είναι κίνηση Brown κάτω από το μέτρο \mathbb{Q} , θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα χαρακτηρισμού της κίνησης Brown ως martingale. Αρκεί να δείξουμε ότι

- i. Η X_t είναι martingale κάτω από τον μέτρο \mathbb{Q} .
- ii. $\langle X_{i,t}, X_{j,t} \rangle = \delta_{ij}t$ είναι martingale κάτω από το μέτρο \mathbb{Q} .

Για το i.: Θέτουμε $K_t = M_t X_t$ όπου $K_t \in \mathbb{R}^n$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Itô έχουμε ότι

$$dK_{i,t} = M_t dX_{i,t} + dM_t X_{i,t} + dM_t dX_{i,t} \quad (5.2.1)$$

χρησιμοποιώντας τον τύπο του Ito για ολοκλήρωση κατά μέρη. Εύκολα δείχνουμε ότι

$$dM_t = -M_t \left(\sum_{i=1}^n b_i(t) dB_{i,t} \right)$$

Έτσι η σχέση 5.2.1 γίνεται

$$\begin{aligned}dK_{i,t} &= M_t(b_i(t)dt + dB_{i,t}) - X_{i,t}M_t \left(\sum_{i=1}^n b_i(t)dB_{i,t} \right) - dB_{i,t}M_t \left(\sum_{i=1}^n b_i(t)dB_{i,t} \right) \\ &= M_t \left(dB_{i,t} - X_{i,t} \sum_{i=1}^n b_i(t)dB_{i,t} \right) = M_t \gamma_i^{(j)} dB_{i,t}\end{aligned}$$

όπου $\gamma_i^{(j)} = (\gamma_i^{(1)}(t), \dots, \gamma_i^{(n)}(t))$ και

$$\gamma_i^{(j)} = \begin{cases} -X_{i,t}b_i(t) & , \text{αν } i \neq j \\ 1 - X_{i,t}b_i(t) & , \text{αν } i = j \end{cases}$$

Επίσης αφού η διαδικασία M_t είναι martingale τότε για κάθε φραγμένη συνάρτηση $f \in m - \mathcal{F}_t^{(n)}$ και για $t \leq T$ θα ισχύει ότι

$$\mathbb{E}_P[fM_T] = \mathbb{E}_P[\mathbb{E}_P[f|\mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}_P[f\mathbb{E}_P[M_T|\mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}_P[fM_t] \quad (5.2.2)$$

Έτσι από τον κανόνα του Bayes και τη σχέση 5.2.2 έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_Q[X_{i,t}|\mathcal{F}_s] = \frac{\mathbb{E}_P[M_t X_{i,t}|\mathcal{F}_s]}{\mathbb{E}_P[M_t|\mathcal{F}_s]} = \frac{\mathbb{E}_P[K_{i,t}|\mathcal{F}_s]}{M_s} = \frac{K_{i,s}}{M_s} = X_{i,s}$$

Συνεπώς η διαδικασία X_t είναι martingale ως προς το μέτρο \mathbb{Q} .

Για να δείξουμε το ii. ακολουθούμε την ίδια μεθοδολογία χρησιμοποιώντας την συνάρτηση $K_{ij}(t) = M_t(B_{i,t}B_{j,t} - \delta_{ij}t)$.

□

Παρατήρηση: Το θεώρημα 5.2.1 δείχνει ότι αν για τα Borel σύνολα $G_1, G_2, \dots, G_k \in \mathbb{R}^n$ και για τους χρόνους $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq T$ τότε

$$\mathbb{Q}[X_{t_1} \in G_1, \dots, X_{t_k} \in G_k] = \mathbb{P}[B_{t_1} \in G_1, \dots, B_{t_k} \in G_k]$$

Παράδειγμα 5.1.1 Έστω η παρακάτω διαδικασία Itô

$$dX_t = \mu dt + dB_t, X_0 = x \quad (5.2.3)$$

όπου $\mu \in \mathbb{R}$ και B_t μια κίνηση Brown. Η διαδικασία M_t θα είναι

$$\begin{aligned} M_t &= \exp\left(-\int_0^t \mu dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \mu^2 ds\right) \\ &= \exp\left(-\mu \int_0^t dB_s - \frac{1}{2} \mu^2 \int_0^t ds\right) \\ &= \exp\left(-\mu B_t - \frac{1}{2} \mu^2 t\right) \end{aligned}$$

Το μέτρο \mathbb{Q} παίρνει την μορφή

$$d\mathbb{Q}(\omega) = \exp\left(-\mu B_t - \frac{1}{2} \mu^2 t\right) d\mathbb{P}(\omega)$$

Η λύση της εξίσωσης (5.2.3) είναι η διαδικασία $X_t = x + \mu t + B_t$. Η αναμενόμενη τιμή της διαδικασίας κάτω από το μέτρο \mathbb{P} δίνεται $\mathbb{E}_P[X_t] = x + \mu t$. Από το θεώρημα 5.2.1 έχουμε ότι η αναμενόμενη τιμή κάτω από το μέτρο \mathbb{Q} θα είναι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q[X_t] &= \int_{\Omega} X_t d\mathbb{Q} = \int_{\Omega} X_t dM_t \mathbb{P} = \int_{\Omega} (x + \mu t + B_t) \exp\left(-\mu B_t - \frac{1}{2} \mu^2 t\right) d\mathbb{P} \\ &= \int_{\mathbb{R}} (x + \mu t + s) \exp\left(-\mu s - \frac{1}{2} \mu^2 t\right) (\sqrt{2\pi t})^{-1} \exp\left(-\frac{s^2}{2t}\right) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} (x + \mu t + s) (\sqrt{2\pi t})^{-1} \exp\left(-\frac{(s + \mu t)^2}{2t}\right) ds \\ &= x + \mu t + \int_{\mathbb{R}} (s + \mu t - \mu t) (\sqrt{2\pi t})^{-1} \exp\left(-\frac{(s + \mu t)^2}{2t}\right) ds \\ &= x + \mu t - \mu t = x \end{aligned}$$

Θεώρημα 5.2.2 (*Girsanov II*) Έστω $X_t \in \mathbb{R}^n$ μια διαδικασία Itô της μορφής

$$dX_t = b(t, \omega)dt + \sigma(t, \omega)dB_t, \quad t \leq T \quad (5.2.4)$$

όπου $B_t \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$ και $\sigma \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο διανύσματα από n και m τετραγωνικά ολοκληρώσιμες στοχαστικές διαδικασίες $u_t = (u_{1,t}, \dots, u_{n,t})$ και $a_t = (a_{1,t}, \dots, a_{m,t})$ τέτοιες ώστε να ικανοποιούν την συνθήκη Novikou και

$$\sigma(t, \omega)u(t, \omega) = b(t, \omega) - a(t, \omega) \quad (5.2.5)$$

Θεωρούμε την διαδικασία

$$M_t = \exp\left(-\int_0^t u(s, \omega)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t u^2(s, \omega)ds\right), \quad 0 \leq t \leq T$$

και το μέτρο \mathbb{Q} τέτοιο ώστε $d\mathbb{Q}(\omega) = M_t d\mathbb{P}(\omega)$ ως προς την σ -άλγεβρα $\mathcal{F}_t^{(n)}$. Τότε το μέτρο \mathbb{Q} είναι μέτρο πιθανότητας στην $\mathcal{F}_t^{(n)}$ και η διαδικασία

$$\hat{B}_t := \int_0^t u(s, \omega)ds + B_t, \quad t \leq T \quad (5.2.6)$$

είναι martingale ως προς το μέτρο \mathbb{Q} και η διαδικασία X_t γράφεται στη μορφή

$$dX_t = a(t, \omega)dt + \sigma(t, \omega)dB_t$$

Απόδειξη: Από το θεώρημα 5.2.1 συνεπάγεται ότι το \mathbb{Q} είναι μέτρο πιθανότητας ως προς την σ -άλγεβρα $\mathcal{F}_t^{(n)}$ και ότι η διαδικασία \hat{B}_t είναι κίνηση Brown ως προς το μέτρο \mathbb{Q} . Συνδυάζοντας τις σχέσεις (5.2.6) και (5.2.4) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} dX_t &= b(t, \omega)dt + \sigma(t, \omega)(d\hat{B}_t - u(t, \omega)) \\ &= (b(t, \omega) - \sigma(t, \omega)u(t, \omega))dt + \sigma(t, \omega)d\hat{B}_t \\ &= a(t, \omega)dt + \sigma(t, \omega)d\hat{B}_t \end{aligned}$$

□

Παρατηρήσεις

i. Αν $n = m$ τότε το διάνυσμα u παίρνει την μορφή

$$u(t, \omega) = \sigma^{-1}(t, \omega)(b(t, \omega) - a(t, \omega)).$$

ii. Συνήθως η επιλογή του διανύσματος $a(t, \omega)$ επιλέγεται ως $a = 0$ και η διαδικασία X_t παίρνει την μορφή

$$dX_t = \sigma(t, \omega)d\hat{B}_t$$

Παράδειγμα 5.1.2 Έστω μια διαδικασία Itô, $Y_t = \begin{bmatrix} Y_{1,t} \\ Y_{2,t} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε

$$dY_t = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} dB_t, \quad B_t = \begin{bmatrix} B_{1,t} \\ B_{2,t} \end{bmatrix}$$

Επιλέγουμε $a(t, \omega) = 0$. Έτσι η σχέση (5.2.5) γίνεται

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

με λύση $u_1 = 3$ και $u_2 = -1$. Επίσης το martingale M_t υπολογίζεται

$$M_T = \exp(-3B_{1,T} + B_{2,T} - 5T)$$

και το νέο μέτρο στην σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_T^{(2)}$ θα είναι

$$d\mathbb{Q}(\omega) = \exp(-3B_{1,T} + B_{2,T} - 5T)d\mathbb{P}(\omega)$$

και

$$\hat{B}_t = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} dt + dB_t, \quad dY_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} d\hat{B}_t$$

5.3 Λόγος πιθανοφανειών και διαδικασίες διάχυσης

Σε αυτή την παράγραφο θα δείξουμε μία εφαρμογή του θεωρήματος *Girsanov*. Ήδη έχουμε δείξει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό το θεώρημα για να αφαιρέσουμε το *drift* από μια διαδικασία διάχυσης, και με την επιλογή ενός κατάλληλου μέτρου να την μετασχηματίσουμε σε μια κίνηση Brown. Ωστόσο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το παραπάνω θεώρημα και για να κάνουμε συμπερασματολογία για μία στοχαστική διαδικασία, έχοντας ως στόχο να φτιάξουμε την πιθανοφάνεια της κατανομής της διαδικασίας.

Έστω οι παρακάτω τρεις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις

$$dX_t = b_1(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad X_0^{(1)}, \quad t \leq T \quad (5.3.1)$$

$$dX_t = b_2(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad X_0^{(2)}, \quad t \leq T \quad (5.3.2)$$

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t, \quad X_0, \quad t \leq T \quad (5.3.3)$$

με τα αντίστοιχα $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ και \mathbb{P} μέτρα πιθανότητας για κάθε μία λύση των παραπάνω εξισώσεων.

Θεώρημα 5.3.1 Έστω οι παραπάνω στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις και τα αντίστοιχα μέτρα πιθανότητας. Έστω ο περιορισμός¹, αν για $A > 0$

$$xb_i(x) + \sigma^2(x) \leq A(1 + x^2), \quad i = 1, 2.$$

Θεωρούμε επίσης τρεις σ.π.π. των τυχαίων μεταβλητών $X_0^{(1)}, X_0^{(2)}$ και X_0 , f_1, f_2 και f αντίστοιχα. Τότε τα μέτρα $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ και \mathbb{P} είναι ισοδύναμα και η αντίστοιχος Radon – Nikodym παράγωγοι είναι

$$\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}}(X) = \frac{f_1(X_0)}{f(X_0)} \exp \left[\int_0^T \frac{b_1(X_t)}{\sigma^2(X_t)} dX_t - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{b_1^2(X_t)}{\sigma^2(X_t)} dt \right] \quad (5.3.4)$$

και

$$\frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}_1}(X) = \frac{f_2(X_0)}{f_1(X_0)} \exp \left[\int_0^T \frac{b_2(X_t) - b_1(X_t)}{\sigma^2(X_t)} dX_t - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{b_2^2(X_t) - b_1^2(X_t)}{\sigma^2(X_t)} dt \right] \quad (5.3.5)$$

Για την απόδειξη, βλ. [10] Ch.7.

Για να καταλάβουμε πως το παραπάνω θεώρημα εκφράζει των λόγο πιθανοφανειών δίνουμε το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 5.1.3 Έστω $B_t, t \in [0, 1]$ μια κίνηση Brown και οι παρακάτω διαδικασίες

$$X_t = \sigma B_t, \quad \sigma > 0$$

¹Κάθε άλλος περιορισμός για εξασφάλιση των λύσεων των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων μπορεί να τον αντικαταστήσει.

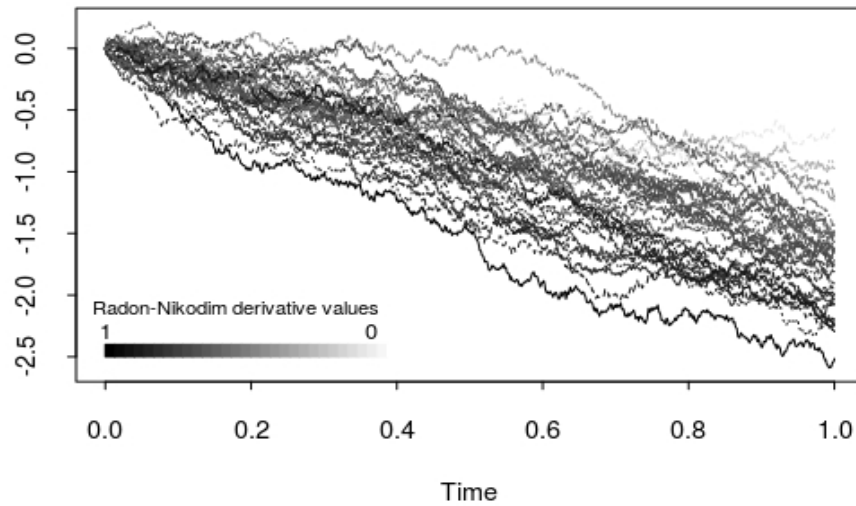
και

$$Y_t = \mu t + \sigma B_t, \quad \mu < 0, \quad \sigma > 0$$

Εφαρμόζοντας την σχέση 5.3.5 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}_1}(Y) &= \exp \left[\int_0^1 \frac{0 - \mu^2}{\sigma^2} dY_s - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{0 - \mu^2}{\sigma^2} ds \right] \\ &= \exp \left[-\frac{\mu}{\sigma^2} \int_0^1 \mu ds + \int_0^1 \sigma dB_s + \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right] \\ &= \exp \left[-\frac{\mu B_1}{\sigma} - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \right] \end{aligned}$$

Φυσικά όπως είναι αναμενόμενο, θα παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα αν εφαρμόσουμε το θεώρημα 5.2.2. Παρακάτω έχουμε προσομοιώσει είκοσι τροχιές από την διαδικασία Y_t με παραμέτρους $\mu = -0.6$ και $\sigma = 1$, χρωματίζοντας με πιο σκούρο χρώμα εκείνες τις τροχιές που είναι πιθανότερο να παρατηρηθούν από μια κίνηση Brown με κλίση.



Σχήμα 5.1: Προσομοίωση από τροχιές τις διαδικασίας $Y_t = -0.6t + B_t$, $0 \leq t \leq 1$, ως προς τις τιμές της παραγωγού *Radon - Nikodym*.

Κεφάλαιο 6

Αριθμητική προσέγγιση διαδικασιών διάχυσης

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε πως μπορούμε να προσεγγίσουμε/προσομοιώσουμε τροχιές από διαδικασίες διάχυσης. Οι αριθμητικές προσεγγίσεις των διαχύσεων είναι εξαιρετικά σημαντικές, καθώς βάσει αυτών μπορούμε να προβούμε σε στατιστική συμπερασματολογία για την εκτίμηση πιθανοφανειών και των συντελεστών μιας διάχυσης.

6.1 Στοχαστική επέκταση Taylor

Σε αυτή την παράγραφο, στόχος είναι να γενικεύσουμε την προσέγγιση του Taylor, γενικεύοντας τη, στο στοχαστικό της ανάλογο για τις διαδικασίες $It\hat{o}$. Αυτές του τύπου οι προσεγγίσεις αποτελούν βασικό συστατικό για την στοχαστική αριθμητική ανάλυση.

Θα αρχίσουμε υπενθυμίζοντας την θεωρία. Έστω $(X_t)_{t \leq T}$ η λύση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης,

$$\frac{d}{dt}X_t = b(X_t)$$

με αρχική τιμή $X_{t_0} = x_0$ και $t \in [t_0, T]$. Η παραπάνω εξίσωση γράφεται με μορφή ολοκληρωμάτων,

$$X_t = x_0 + \int_{t_0}^t b(X_s) ds \quad (6.1.1)$$

Από εδώ και στο εξής θα υποθέτουμε ότι $b \in C^\infty(\mathbb{R})$ και ότι ικανοποιεί την συνθήκη γραμμικής αύξησης. Έστω κάποια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1$. Τότε από τον κανόνα αλυσίδας προκύπτει ότι,

$$\frac{d}{dt}f(X_t) = b(X_t) \frac{\partial}{\partial x} f(X_t),$$

Ορίζουμε τον τελεστή $\mathcal{L} : C^1(\mathbb{R}) \rightarrow C^1(\mathbb{R})$ ως

$$\mathcal{L} = b \frac{\partial}{\partial x} \quad (6.1.2)$$

Συνεπώς, η συνάρτηση f γράφεται

$$f(X_t) = f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t \mathcal{L}f(X_s) ds, \text{ για κάθε } t \in [t_0, T]. \quad (6.1.3)$$

Αν υποθέσουμε ότι $f(x) = x$, τότε $\mathcal{L}f = b$, $\mathcal{L}^2 f = b, \dots$ και

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t b(X_s) ds$$

Αν τώρα εφαρμόσουμε την σχέση 6.1.3 για την συνάρτηση $f = b$ στο παραπάνω ολοκλήρωμα, τότε η παραπάνω σχέση γίνεται,

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t_0} + \int_{t_0}^t \left(b(X_{t_0}) + \int_{t_0}^s \mathcal{L}f(X_z) \right) dz ds \\ &= X_{t_0} + b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \mathcal{L}b(X_z) dz ds \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας πάλι την σχέση 6.1.3 για την συνάρτηση $f = \mathcal{L}b$, η παραπάνω σχέση παίρνει την μορφή,

$$X_t = X_{t_0} + b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + \mathcal{L}b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dz ds + R_3$$

όπου

$$R_3 = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^u \mathcal{L}^2 b(X_u) du dz ds, \quad t \in [t_0, t].$$

Γενικότερα, αν $f \in C^{r+1}(\mathbb{R})$, τότε η γενική μορφή του τύπου του Taylor θα είναι,

$$f(X_t) = f(X_{t_0}) + \sum_{i=1}^r \frac{(t-t_0)^i}{i} \mathcal{L}^i f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^{s_2} \mathcal{L}^{r+1} f(X_{s_1}) ds_1 \dots ds_{r+1}$$

για κάθε $t \in [t_0, T]$ και $r = 1, 2, 3, \dots$.

Μέχρι στιγμής έχουμε υπενθυμίσει την επέκταση Taylor για λείες συναρτήσεις. Προκειμένου να επεκτείνουμε αυτήν την ιδέα στις διαδικασίες $It\hat{o}$, πρέπει να λάβουμε υπόψη τις προσαυξήσεις της διαδικασίας. Κάτι τέτοιο γίνεται εφικτό μέσω του Λήμματος του $It\hat{o}$. Αυτή η νέου τύπου προσέγγιση ονομάζεται $It\hat{o}$ -Taylor επέκταση. Έστω η διαδικασία (X_t) σε μία διάσταση, η οποία αποτελεί λύση της αντίστοιχης στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης, της μορφής

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t b(X_s) ds + \int_{t_0}^t \sigma(X_s) dB_s, \quad t \in [t_0, T].$$

Οι συνθήκες που απαιτούμε για τις συναρτήσεις b, σ είναι $b, \sigma \in C^\infty$ και ότι ικανοποιούν την συνθήκη γραμμικής αύξησης. Έτσι για κάθε $f \in C^2$, η εφαρμογή του Λήμματος του $It\hat{o}$ δίνει

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t \left(b(X_s) \frac{\partial}{\partial x} f(X_s) + \frac{1}{2} \sigma^2(X_s) \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(X_s) \right) ds + \int_{t_0}^t b(X_s) \frac{\partial}{\partial x} f(X_s) dB_s \\ &= f(X_{t_0}) + \int_{t_0}^t \mathcal{L}^0 f(X_s) ds + \int_{t_0}^t \mathcal{L}^1 f(X_s) dB_s, \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

θεωρώντας τους τελεστές

$$\mathcal{L}^0 = b \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

¹ και

$$\mathcal{L}^1 = \sigma \frac{\partial}{\partial x}$$

¹ Αξίζει να σημειωθεί ότι ο τελεστής \mathcal{L}^0 , είναι ουσιαστικά ο απειροστός γεννήτορας της διαδικασίας.

Στην περίπτωση που $f(x) = x$, τότε $\mathcal{L}^0 f = b$ και $\mathcal{L}^1 f = \sigma$, η εξίσωση 6.1.4 παίρνει την μορφή,

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t b(X_s) ds + \int_{t_0}^t \sigma(X_s) dB_s.$$

Ομοίως όπως και στην ντετερμινιστική περίπτωση, αν θέσουμε $f = b$ και $f = \sigma$, τότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται,

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t_0} + \int_{t_0}^t \left(b(X_{t_0}) + \int_{t_0}^s \mathcal{L}^0 b(X_z) dz + \int_{t_0}^s \mathcal{L}^1 b(X_z) dB_z \right) ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t \left(\sigma(X_{t_0}) + \int_{t_0}^s \mathcal{L}^0 \sigma(X_z) dz + \int_{t_0}^s \mathcal{L}^1 \sigma(X_z) dB_z \right) dB_s \\ &= X_{t_0} + b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + \sigma(X_{t_0}) \int_{t_0}^t dB_s + R \end{aligned} \quad (6.1.5)$$

με υπόλοιπο

$$\begin{aligned} R &= \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \mathcal{L}^0 b(X_z) dz ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \mathcal{L}^1 b(X_z) dB_z ds \\ &\quad + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \mathcal{L}^0 \sigma(X_z) dz dB_s + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \mathcal{L}^1 \sigma(X_z) dB_z dB_s. \end{aligned}$$

Τέλος, αν εφαρμόσουμε 6.1.4 για την συνάρτηση $f = \mathcal{L}^1 b$ στην εξίσωση 6.1, τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} X_t &= X_{t_0} + b(X_{t_0}) \int_{t_0}^t ds + \sigma(X_{t_0}) \int_{t_0}^t dB_s \\ &\quad + \mathcal{L}^1 \sigma(X_{t_0}) \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dB_z dB_s + \bar{R}, \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

όπου

$$\bar{R} = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \mathcal{L}^0 b(X_z) dz ds + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \mathcal{L}^1 b(X_z) dB_z ds \quad (6.1.7)$$

$$+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \mathcal{L}^0 \sigma(X_z) dz dB_s + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^z \mathcal{L}^0 \mathcal{L}^1 \sigma(X_u) du dB_z dB_s \quad (6.1.8)$$

$$+ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s \int_{t_0}^z \mathcal{L}^0 \mathcal{L}^1 \sigma(X_u) dB_u dB_z dB_s \quad (6.1.9)$$

Όπως τονίστηκε στην αρχή της παραγράφου, αυτή η ανάλυση έγινε για να κατασκευαστεί ένα εργαλείο που θα έχει σαν στόχο την αριθμητική ανάλυση των διαδικασιών που μελετούνται. Έστω οι ποσότητες,

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_{i+1} - t_i \text{ και} \\ \Delta B_t &= B_{t_{i+1}} - B_{t_i}, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Αν από την σχέση 6.1.6 λάβουμε υπόψη μας μόνο τους τρεις πρώτους όρους της προσέγγισης, τότε έχουμε το επαναληπτικό σχήμα,

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + b(X_{t_i}) \Delta t + \sigma(X_{t_i}) \Delta B_t$$

Η παραπάνω επαναληπτική μέθοδος ονομάζεται *Euler-Maruyama μέθοδος*.

Επιπροσθέτως, αν επιλέξουμε λάβουμε υπόψη μας μόνο τους όρους $\mathcal{O}(\Delta t)$ της προσέγγισης, τότε η σχέση 6.1.6 γίνεται,

$$X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + b(X_{t_i}) \Delta t + \sigma(X_{t_i}) \Delta B_t + \frac{1}{2} b(X_{t_i}) b_x(X_{t_i}) [(\Delta B_t)^2 - \Delta t]$$

Η παραπάνω επαναληπτική μέθοδος ονομάζεται *Milstein* μέθοδος. Το παραπάνω αποτέλεσμα προκύπτει από τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dB_z dB_s$. Πράγματι, από το λήμμα του *Itô* έχουμε,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^s dB_z dB_s &= \int_{t_0}^t [B_s - B_{t_0}] dB_s \\ &= \int_{t_0}^t B_s dB_s - \int_{t_0}^t B_{t_0} dB_s \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t [dB_s^2 - dt] - \int_{t_0}^t B_{t_0} dB_s \\ &= \frac{1}{2} [B_t^2 - B_{t_0}^2 - \Delta t] - B_{t_0} [B_t - B_{t_0}], \end{aligned}$$

δεδομένου ότι $dB_t^2 = 2B_t dB_t + dt$. Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε και άλλες προσεγγίσεις εισάγοντας περισσότερους όρους στην επέκταση Ito-Taylor. Ωστόσο, κάτι τέτοιο απαιτεί πράξεις και στον υπολογισμό δεν είναι εύκολο.

Στην συνέχεια του κεφαλαίου, μελετούμε πιο προσεκτικά τις δύο παραπάνω μεθόδους, καθώς και άλλες προσεγγίσεις διαδικασιών διάχυσης.

Οι μέθοδοι που θα παρουσιάσουμε διαφέρουν ανάλογα με τον τρόπο που προσεγγίζουν την τροχιά της εκάστοτε διαδικασίας.

6.2 Σχήμα Euler

Μία από τις πιο γνωστές μεθόδους για την προσέγγιση τροχιών είναι η μέθοδος του *Euler*, που είναι γνωστή για τις προσεγγίσεις στις ντετερμινιστικές διαφορικές εξισώσεις. Έστω $\{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$ μια λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad X_{t_0} = x \quad (6.2.1)$$

Θεωρούμε $\mathcal{P}_n = \{t_i\}_{i=0}^N$ μια διαμέριση του διαστήματος $[0, T]$. Ορίζουμε το σχήμα του *Euler* για την διαδικασία X_t ως την διακριτοποίηση \tilde{X}_t

$$\tilde{X}_{t_{i+1}} - \tilde{X}_{t_i} = b(t_i, \tilde{X}_{t_i})\Delta t_i + \sigma(t_i, \tilde{X}_{t_i})\Delta B_i, \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \quad (6.2.2)$$

όπου $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ και $\Delta B_i = B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$

Η συνεχής επέκταση της προσέγγισης \tilde{X}_t στο διάστημα $[t_n, t_{n+1})$ είναι

$$\tilde{X}_t = X_{t_n} + \int_{t_n}^t b(u, \tilde{X}_u)du + \int_{t_n}^t \sigma(u, \tilde{X}_u)dB_u, \quad t \in [t_n, t_{n+1})$$

Θεώρημα 6.2.1 Έστω X_1 και X_2 δύο *Euler* προσεγγίσεις της στοχαστικής διαδικασίας $X_t : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, που ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση 6.2.1, με συντελεστές που να ικανοποιούν τις συνθήκες *Lipschitz* και γραμμικής αύξησης. Θεωρούμε δύο διαμερίσεις του διαστήματος $[0, T]$, $\{t_{1,i}\}_{i=0}^{N_1}$ και $\{t_{2,i}\}_{i=0}^{N_2}$ όπου $t_{1,0} = t_{2,0} = 0$ και $t_{N_1} = t_{N_2} = T$. Ορίζουμε την ποσότητα

$$\Delta t_{max} = \max\left\{ \max_{0 \leq i \leq N_1} (t_{1,i+1} - t_{2,i}), \max_{0 \leq i \leq N_2} (t_{2,i+1} - t_{2,i}) \right\}$$

Αν υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε

$$\mathbb{E} [(X_{1,0})^2 + (X_{2,0})^2] \leq C \text{ και } \mathbb{E} [(X_{1,0} - X_{2,0})^2] \leq C \Delta t_{max}$$

τότε υπάρχει σταθερά K τέτοια ώστε

$$\max\{\mathbb{E} [(X_{1,t})^2], \mathbb{E} [(X_{2,t})^2]\} \leq KT, \quad t < T$$

και

$$\mathbb{E} [(X_{1,t} - X_{1,t})^2] \leq K\Delta t_{max}, \quad t < T \quad (6.2.3)$$

Θα δείξουμε την απόδειξη για την ανισότητα 6.2.3.

Απόδειξη: Η διαφορά των προσεγγίσεων $X_{1,t}$ και $X_{2,t}$ δίνεται

$$X_{1,t} - X_{2,t} = (X_{1,0} - X_{2,0}) + \int_0^t \Delta\sigma^*(s)ds + \int_0^t \Delta\sigma^*(s)dB_s$$

όπου $\Delta b^*(u) = b(u_1, X_{1,u}) - b(u_2, X_{2,u})$ και $\Delta\sigma^*(u) = \sigma(u, X_{1,u}) - \sigma(u_2, X_{2,u})$. Για την διαφορά $\Delta b^*(s)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \Delta b^*(t) &= b(t_{1,n}, X_{1,t_{1,n}}) - b(t_{2,n}, X_{2,t_{2,n}}) = \underbrace{b(t_{1,n}, X_{1,t_{1,n}}) - b(t, X_{1,t})}_{I_1} + \\ &\quad + \underbrace{b(t, X_{1,t}) - b(t, X_{2,t})}_{I_2} + \underbrace{b(t, X_{2,t}) - b(t_{2,n}, X_{2,t_{2,n}})}_{I_3} \end{aligned}$$

όπου $t \in [t_{2,n}, t_{2,n+1}) \cap [t_{1,n}, t_{1,n+1})$. Για τον όρο I_1 χρησιμοποιώντας την συνέχεια Lipschitz και την συνθήκη γραμμικής αύξησης, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |I_1| &= |b(t_{1,n}, X_{1,t_{1,n}}) - b(t, X_{1,t})| \\ &\leq |b(t_{1,n}, X_{1,t_{1,n}}) - b(t, X_{1,t_{1,n}})| + |b(t, X_{1,t_{1,n}}) - b(t, X_{1,t})| \\ &\leq C(1 + |X_{1,t_{1,n}}|)|t - t_{1,n}|^{1/2} + C|X_{1,t_{1,n}} - X_{1,t}| \end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} |X_{1,t_{1,n}} - X_{1,t}| &\leq |b(t_{1,n}, X_{1,t_{1,n}})(t - t_{1,n}) + \sigma(t_{1,n}, X_{1,t_{1,n}})(B_t - B_{t_{1,n}})| \\ &\leq C(1 + |X_{1,t_{1,n}}|) [|t - t_{1,n}| + |B_t - B_{t_{1,n}}|] \end{aligned}$$

Συνεπάγεται ότι

$$|I_1| \leq C(1 + |X_{1,t_{1,n}}|) [|B_t - B_{t_{1,n}}| + |t - t_{1,n}|^{1/2}]$$

Με παρόμοιο μεθοδολογία μπορούμε να δείξουμε ότι

$$|I_2| \leq C|X_{1,t} - X_{2,t}|$$

$$I_3 \leq C(1 + |X_{2,t_{2,n}}|) [|B_t - B_{t_{2,n}}| + |t - t_{2,n}|^{1/2}]$$

Έτσι

$$\begin{aligned} |\Delta b(t)|^2 &\leq (|I_1| + |I_2| + |I_3|)^2 \\ &\leq C_2\{|X_{1,t} - X_{2,t}|^2 + (1 + |X_{1,t_{1,n}}|) [|B_t - B_{t_{1,n}}| + |t - t_{1,n}|^{1/2}] \\ &\quad + (1 + |X_{2,t_{2,n}}|) [|B_t - B_{t_{2,n}}| + |t - t_{2,n}|^{1/2}]\} \end{aligned}$$

Παίρνοντας αναμενόμενες τιμές έχουμε ότι

$$\mathbb{E} [|\Delta b(t)|^2] \leq C [\mathbb{E} [|X_{1,t} - X_{2,t}|^2] + \Delta t_{max}]$$

Αντίστοιχα να την ποσότητα $\mathbb{E} [|\Delta\sigma^*(t)|^2]$ μπορούμε να την φράξουμε με

$$\mathbb{E} [|\Delta\sigma^*(t)|^2] \leq C [\mathbb{E} [|X_{1,t} - X_{2,t}|^2] + \Delta t_{max}]$$

Ορίζουμε μια διαμέριση του διαστήματος $[0, T]$, $\{t_h\}_{h=0}^N$ τέτοια ώστε $\{t_h\} = \{t_{1,n}\} \cup \{t_{2,n}\}$, $\forall h = 0, 1, \dots, N$. Έτσι

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|X_{1,t} - X_{2,t}|^2] &\leq \mathbb{E} \left[\left(X_{1,0} - X_{2,0} \int_0^t \Delta b(u) du + \int_0^t \Delta\sigma^*(u) dB_u \right)^2 \right] \\ &\leq 3\mathbb{E} [|X_{1,t} - X_{2,t}|^2] + 3\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \Delta b(u) du \right)^2 \right] + 3\mathbb{E} \left[\left(\int_0^t \Delta\sigma^*(u) dB_u \right)^2 \right] \\ &\leq 3C\Delta t_{max} + 3t \int_0^t \mathbb{E} [(\Delta b(u))^2] du + 3 \int_0^t \mathbb{E} [(\Delta\sigma^*(u))^2] du \\ &\leq C \left[\Delta t_{max} + \int_0^t \mathbb{E} [|X_{1,u} - X_{2,u}|^2] du \right] \end{aligned}$$

Αν $f(x, y) = \mathbb{E} [|x - y|^2]$. Για $x = X_{1,t}$ και $y = X_{2,t}$ χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Gronwall έχουμε ότι

$$\mathbb{E} [|X_{1,t} - X_{2,t}|^2] \leq \Delta t_{max} C e^{Ct}$$

□

Παρατήρηση: Η μέθοδος του Euler έχει βαθμό ισχυρής σύγκλισης (*string order of convergence*) $1/2$. Δηλαδή στον χώρο L^2 θα ισχύει ότι

$$\|X_{1,t} - X_{2,t}\|_{L^2} = \sqrt{\mathbb{E} [|X_{1,t} - X_{2,t}|^2]} = \mathcal{O}(\sqrt{\Delta t})$$

Επίσης μπορεί ναδειχθεί ότι το σχήμα του Euler έχει τάξης 1 ασθενής σύγκλιση, δηλαδή

$$\|X_{1,t} - X_{2,t}\|_{L^2} = \sqrt{\mathbb{E} [|X_{1,t} - X_{2,t}|^2]} = \mathcal{O}(\Delta t)$$

Παράδειγμα 6.1.1 Έστω το μοντέλο Ornstein-Uhlenbeck

$$dX_t = (\theta_1 - \theta_2 X_t) dt + \theta_3 dB_t, \quad X_0 = x$$

Για μία διαμέριση του διαστήματος $[0, T]$ η προσέγγιση Euler είναι

$$X_{i+1} = X_i + (\theta_1 - \theta_2 X_i) \Delta t_i + \theta_3 \Delta B_i, \quad X_0 = x \quad (6.2.4)$$

όπου $X_i = X_{t_i}$, $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ και $\Delta B_i = B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \sim \mathcal{N}(0, \Delta t_i)$. Έτσι η σχέση (6.2.4) γράφεται

$$X_{i+1} = X_i + (\theta_1 - \theta_2 X_i) \Delta t_i + \theta_3 \sqrt{\Delta t_i} Z, \quad X_0 = x, \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

6.3 Σχήμα Milstein

Μια άλλη μέθοδος προσέγγισης είναι η μέθοδος του *Milstein*. Η ιδέα της προσέγγισης είναι να χρησιμοποιήσουμε το λήμμα του Itô και τις παραγώγους των συντελεστών της стоχαστικής διαφορικής εξίσωσης για να αυξήσουμε τον βαθμό σύγκλισης της προσέγγισης.

Έστω η ομογενής стоχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t, \quad X_0 = x$$

όπου οι συντελεστές δεν είναι άμεσα εξαρτώμενοι από το χρόνο. Έστω $\Delta t > 0$ τότε έχουμε την ολοκληρωτική μορφή

$$X_{t+\Delta t} = X_t + \int_t^{t+\Delta t} b(u)du + \int_t^{t+\Delta t} \sigma(u)dB_u \quad (6.3.1)$$

Εφαρμόζουμε τον τύπο του *Itô* για κάθε μια από τις συναρτήσεις b και σ .

$$db(X_t) = \left(\frac{\partial b(u)}{\partial t} b(u) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b(u)}{\partial t^2} \sigma^2(u) \right) dt + \frac{\partial b(u)}{\partial u} \sigma(u) dB_u$$

$$d\sigma(X_t) = \left(\frac{\partial \sigma(u)}{\partial t} b(u) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma(u)}{\partial u^2} \sigma^2(u) \right) dt + \frac{\partial \sigma(u)}{\partial u} \sigma(u) dB_u$$

Για κάποιο $s \in (t, t + \Delta t)$

$$b(X_s) = b(X_t) + \int_t^s \left(\frac{\partial b(u)}{\partial t} b(u) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b(u)}{\partial t^2} \sigma^2(u) \right) du + \int_t^s \frac{\partial b(u)}{\partial u} \sigma(u) dB_u \quad (6.3.2)$$

$$\sigma(X_s) = \sigma(X_t) + \int_t^s \left(\frac{\partial \sigma(u)}{\partial t} b(u) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma(u)}{\partial u^2} \sigma^2(u) \right) du + \int_t^s \frac{\partial \sigma(u)}{\partial u} \sigma(u) dB_u \quad (6.3.3)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (6.3.1), (6.3.2) και (6.3.3) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} X_{t+\Delta t} = X_t + \int_t^{t+\Delta t} & \left(b(X_t) + \int_t^s \left(\frac{\partial b(u)}{\partial t} b(u) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 b(u)}{\partial t^2} \sigma^2(u) \right) du + \int_t^s \frac{\partial b(u)}{\partial u} \sigma(u) dB_u \right) ds \\ & + \int_t^{t+\Delta t} \left(\sigma(X_t) + \int_t^s \left(\frac{\partial \sigma(u)}{\partial t} b(u) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma(u)}{\partial u^2} \sigma^2(u) \right) du + \int_t^s \frac{\partial \sigma(u)}{\partial u} \sigma(u) dB_u \right) dB_s \end{aligned}$$

,κάνοντας τις απλοποιήσεις $duds = 0$, $dudB_s = 0$ και $dB_u dB_s$ προκύπτει ότι

$$X_{t+\Delta t} = X_t + b(X_t) \int_t^{t+\Delta t} ds + \sigma(X_t) \int_t^{t+\Delta t} db_s + \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} \int_t^s \frac{\partial \sigma(u)}{\partial u} dB_u dB_s}_I \quad (6.3.4)$$

Για τον υπολογισμό του όρου I θα χρησιμοποιήσουμε το σχήμα του *Eyler*. Έτσι έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\Delta t} \int_t^s \frac{\partial \sigma(u)}{\partial u} \sigma(u) dB_u dB_s & \approx \frac{\partial \sigma(u)}{\partial u} \int_t^{t+\Delta t} \int_t^s dB_u dB_s \\ & = \frac{\partial \sigma(u)}{\partial u} \sigma(u) \int_t^{t+\Delta t} (B_s - B_t) dB_s \\ & = \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma(u)}{\partial u} \sigma(u) \left[(B_{t+\Delta t} - B_t)^2 - \Delta t \right] \\ & = \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma(u)}{\partial u} \sigma(u) \left[(\Delta B_t)^2 - \Delta t \right] \end{aligned}$$

Συνεπώς η σχέση (6.3.4) παίρνει τη μορφή

$$X_{t+\Delta t} = X_t + b(X_t)\Delta t + \sigma(X_t)\sqrt{\Delta t}Z + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma(u)}{\partial u} \Big|_{u=X_t} \sigma(X_t)\Delta t [Z^2 - 1], \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

αφού $\Delta B_t \equiv \sqrt{\Delta t}Z \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$.

Μπορεί να δεχθεί ότι αν η συνάρτηση b είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχείς παραγώγους, τότε η μέθοδος Milstein έχει ισχυρή σύγκλιση τάξης 1.

Παράδειγμα(Διαδικασία Cox-Ingersoll-Ross) Έστω η στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = (\mu - rX_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dB_t, \quad X_0 = x$$

όπου $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{R}_+$. Για μία διαμέριση $\{t_i\}_{i=0}^{N-1}$ του διαστήματος $[0, T]$, η προσέγγιση Milstein έχει τη μορφή

$$X_{i+1} = X_i + (\mu - rX_i)(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{X_i(t_{i+1} - t_i)}Z + \frac{\sigma}{4}(t_{i+1} - t_i)(Z^2 - 1)$$

,όπου $X_i = X_{t_i}$, $X_0 = x$, $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

6.4 Σχέση σχημάτων Euler και Milstein

Έστω η παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad X_0 = x \quad (6.4.1)$$

Στην παραπάνω παράγραφο είδαμε ότι η μέθοδος Milstein είναι το σχήμα

$$X_{i+1} = X_i + b(t_i, X_i)\Delta t + \sigma(X_i)\sqrt{\Delta t}Z + \frac{1}{2}\sigma_x(X_i)\Delta t(Z^2 - 1), \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Έστω ο μετασχηματισμός $y = F(x)$ και η αντίστροφη $x = G(y)$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο του Itô για την συνάρτηση F έχουμε ότι

$$dY_t = \left(F'(X_t)b(t, X_t) + \frac{1}{2}F''\sigma(X_t) \right) dt + F'(X_t)\sigma(X_t)dB_t \quad (6.4.2)$$

Θέτουμε τον μετασχηματισμό Lamperti της F

$$F'(x) = \frac{1}{\sigma(x)} \text{ και } F''(x) = -\frac{\sigma_x(x)}{\sigma^2(x)}$$

Συνθέτοντας την σχέση 6.4.2 με τον μετασχηματισμό Lamperti έχουμε ότι

$$dY_t = \left(\frac{b(t, X_t)}{\sigma(X_t)} - \frac{1}{2}\sigma_x(X_t) \right) dt + dB_t \quad (6.4.3)$$

Προσεγγίζοντας την διαδικασία Y_t με το σχήμα Euler έχουμε ότι

$$Y_{i+1} - Y_i = \left(\frac{b(t_i, X_i)}{\sigma(X_i)} - \frac{1}{2}\sigma_x(X_i) \right) \Delta t_i + \sqrt{\Delta t}Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1) \quad (6.4.4)$$

Έστω $\Delta Y > 0$, θα υπολογίσουμε την σειρά Taylor της συνάρτησης G

$$G(Y_i + \Delta Y) = G(Y_i) + G'(Y_i)\Delta Y + \frac{1}{2}G''(Y_i)(\Delta Y)^2 + \mathcal{O}(\Delta Y^3) \quad (6.4.5)$$

Παρατηρούμε ότι

$$G'(y) = \frac{dG(y)}{dy} = \frac{dF^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{F'(G(y))} = \sigma(G(y))$$

και

$$G''(y) = G'(y)\sigma_x(G(y)) = \sigma(G(y))\sigma_x(G(y))$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (6.4.5) και (6.4.4) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} G(Y_i + \Delta Y) - G(Y_i) &= \sigma(G(X_i)) \left[\left(\frac{b(t_i, X_i)}{\sigma(X_i)} - \frac{1}{2} \sigma_x(X_i) \right) \Delta t_i + \sqrt{\Delta t} Z \right] \\ &+ \frac{1}{2} \sigma(X_i) \sigma_x(X_i) \left[\left(\frac{b(t_i, X_i)}{\sigma(X_i)} - \frac{1}{2} \sigma_x(X_i) \right) \Delta t_i + \sqrt{\Delta t} Z \right]^2 + \mathcal{O}(\Delta Y^3) \\ &= b(t_i, X_i) \Delta t + \frac{1}{2} \sigma(X_i) \sigma_x(X_i) \Delta t (Z^2 - 1) + \sigma(X_i) \sqrt{\Delta t} Z + \mathcal{O}(\Delta t^{\frac{3}{2}}) \end{aligned}$$

Συνεπώς οι προσεγγίσεις Milstein και Euler, περιέχουν στον ίδιο βαθμό τον όρο Δt . Έτσι, αν F ο μετασχηματισμός Lamperti μιας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης, τότε είναι προτιμότερο να επιλέξουμε την προσέγγιση Euler. Ωστόσο, η μέθοδος Euler, κατά εφαρμογή μπορεί να μην είναι αποτελεσματική και να απειρίζονται οι τιμές των προσεγγίσεων.

Αντίστοιχα, μπορούμε να ορίσουμε και άλλες προσεγγίσεις μεγαλύτερης σύγκλισης από ότι οι Euler και Milstein χρησιμοποιώντας περισσότερους όρους στην Itô-Taylor επέκταση.

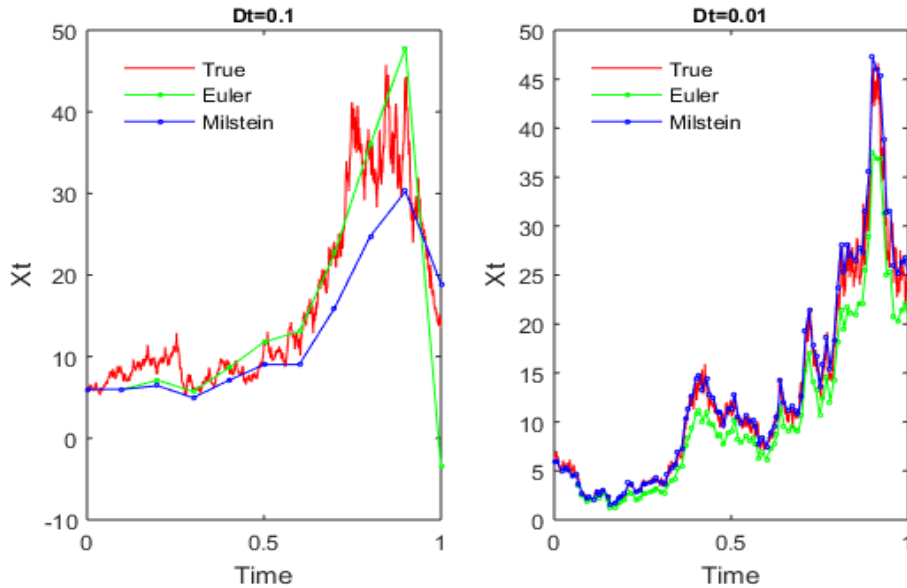
Εφαρμογές

Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιάσουμε δύο παράδειγμα σύγκρισης των δύο παραπάνω μεθόδων, ως προς το βήμα της προσομοίωσης από τις μεθόδους αλλά και το πόσο αποτελεσματικές είναι.

Έστω η παρακάτω στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = \theta_1 X_t dt + \theta_2 X_t dB_t, \quad X_0 = x_0.$$

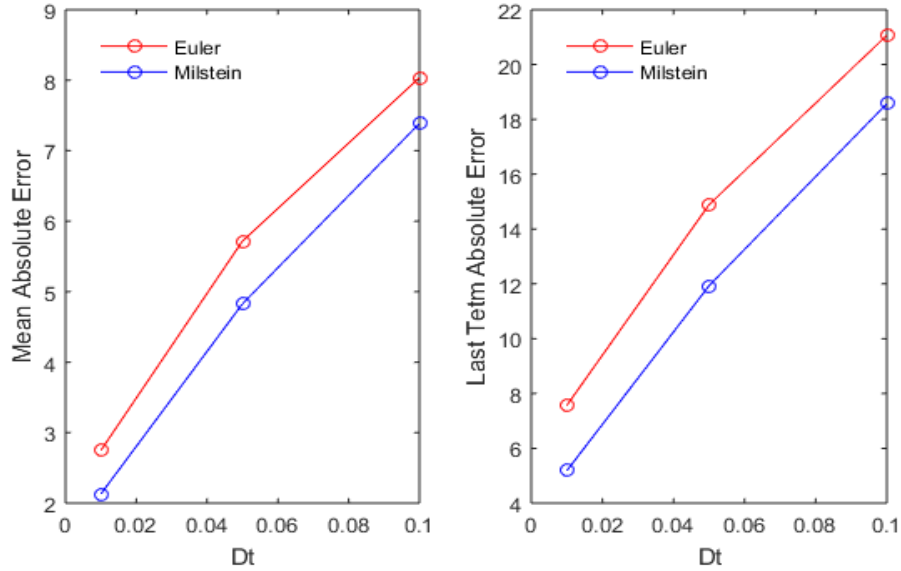
Για το παραπάνω μοντέλο χρησιμοποιούμε τις προσεγγίσεις Euler και Milstein, με αρχικές τιμές $(\theta_1, \theta_2 = 1.5, 2)$, $x_0 = 6$ και για τα βήματα προσέγγισης $\Delta t = 0.10, 0.01$ στο διάστημα $[0, 1]$. Στο παρακάτω γράφημα έχουμε φαινόνται οι προσεγγίσεις για την εκάστοτε περίπτωση.



Σχήμα 6.1: Προσεγγίσεις Euler και Milstein για την γεωμετρική κίνηση Brown.

Παρατηρούμε ότι το σχήμα Milstein προσεγγίζει καλύτερα την αληθινή τροχιά της διαδικασίας. Ωστόσο,

κάτι τέτοιο δεν είναι δόκιμο να αποφασιστεί από μόνο μία προσομοίωση. Έτσι, στο παρακάτω γράφημα έχουμε υπολογίσει το μέσο απόλυτο και το απόλυτο σφάλμα προσέγγισης του τελευταίου όρου για τις δύο μεθόδους για 500 επαναλήψεις.

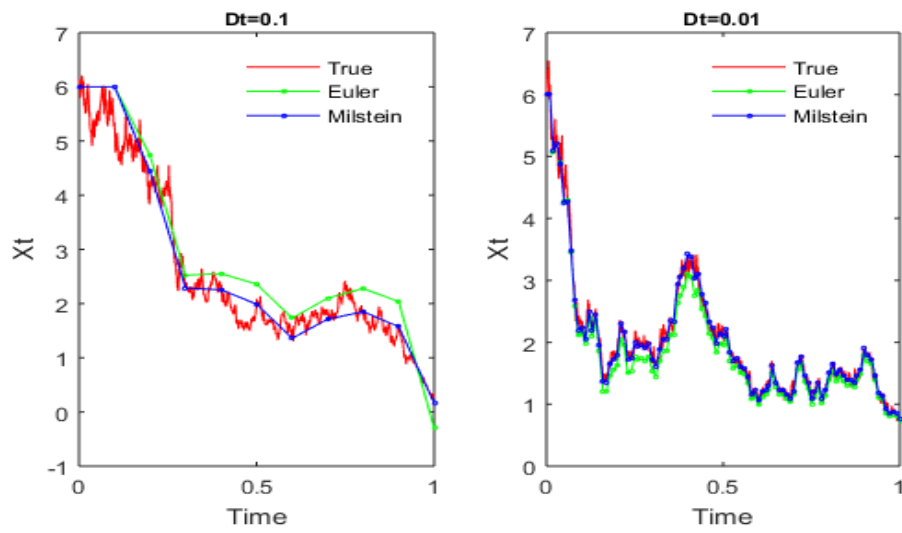


Σχήμα 6.2: Μέσο απόλυτο και το απόλυτο σφάλμα προσέγγισης του τελευταίου όρου για τις δύο μεθόδους Euler και Milstein.

Με όμοιο τρόπο, κάνουμε τα ίδια βήματα για το Hyperbolic μοντέλο. Η αντίστοιχη стоχαστική διαφορική εξίσωση είναι,

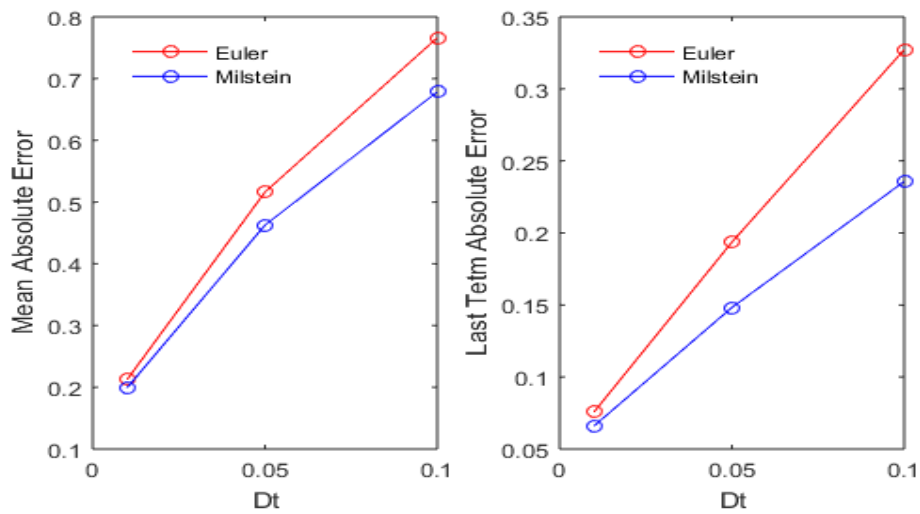
$$dX_t = -2X_t dt + \sqrt{1 + X_t^2} dB_t, \quad X_0 = 6$$

Σε σχέση με το προηγούμενο παράδειγμα παρατηρούμε ότι η παράγωγος του συντελεστή μεταβλητότητας είναι περισσότερο 'περίπλοκη' από την αντίστοιχη της γεωμετρικής κίνησης Brown. Αναμένουμε, λοιπόν το σχήμα Milstein να παρουσιάσει ακόμα καλύτερη συμπεριφορά από ότι πριν. Το παρακάτω γράφημα φαίνεται μια πρώτη προσομοίωση της τροχιάς.



Σχήμα 6.3: Προσεγγίσεις Euler και Milstein για το υπερβολικό μοντέλο.

Τέλος, στο παρακάτω γράφημα έχουμε σχεδιάσει τα σφάλματα των προσεγγίσεων.



Σχήμα 6.4: μέσο απόλυτο και το απόλυτο σφάλμα προσέγγισης του τελευταίου όρου για τις δύο μεθόδους Euler και Milstein.

Μέθοδος KPS

Προκειμένου να αυξήσουμε την τάξη της ισχυρής σύγκλισης, μπορούμε να συμπεριλάβουμε ανώτερης τάξης όρους στην επέκταση *Itô – Taylor*. Συνεπώς, η μέθοδος KPS (συχνά αναφέρεται σαν Milstein-2 μέθοδος) έχει την δυνατότητα να αντιστοιχεί σε $\gamma = 1.5$ ισχυρή τάξη σύγκλισης.

$$\begin{aligned} Y_{i+1} &= Y_i + b\Delta t + \sigma\Delta B_t + \frac{1}{2}\sigma\sigma_x [(\Delta B_t)^2 - \Delta t] \\ &+ \sigma b_x \Delta U_t + \frac{1}{2} \left[bb_x + \frac{1}{2}\sigma^2 b_{xx} \right] \Delta t^2 \\ &+ \left[b\sigma_x + \frac{1}{2}\sigma\sigma_{xx} \right] (\Delta B_t \Delta t - \Delta U_t) \\ &+ \frac{1}{2}\sigma(\sigma\sigma_x)_x \left[\frac{1}{3}(\Delta B_t)^2 - \Delta t \right] \Delta B_t \end{aligned}$$

όπου

$$\Delta U_t = \int_{t_0}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^s dB_s ds$$

Σαν πρώτο σχόλιο, εύκολα βλέπουμε ότι $\Delta U_t \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{3}\Delta t^3)$, και $\mathbb{E}[\Delta U_t \Delta W_t] = \frac{1}{2}\Delta t^2$. Ωστόσο, το παραπάνω σχήμα απαιτεί τον υπολογισμό παραγώγων και του όρου ΔU_t . Αντίστοιχα, μπορούν να κατασκευαστούν και άλλα σχήματα επιτυγχάνοντας ισχυρή σύγκλιση τάξης $\gamma = 2$.

6.5 Μέθοδος Shoji-Ozaki (Local linearization)

Μια άλλη μέθοδος προσομοίωσης διαδικασιών διάχυσης είναι η μέθοδος Shoji-Ozaki ή αλλιώς Local linearization. Σε αντίθεση με τις δύο προηγούμενες μεθόδους, στη μέθοδο Shoji-Ozaki η βασική ιδέα είναι ότι μία στοχαστική διαφορική εξίσωση μπορεί να προσεγγιστεί τοπικά από μία γραμμική στοχαστική διαφορική εξίσωση, η οποία είναι εύκολο να λυθεί. Τέλος, η μέθοδος local linearization είναι αριθμητικά περισσότερο ευσταθής από ότι το σχήμα του Euler, το οποίο μπορεί εύκολα να παρουσιάσει προβλήματα για μεγάλες τιμές του drift.

Έστω η παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση σε μία διάσταση

$$dX_t = b(t, X_t)dt + g(X_t)dB_t \quad (6.5.1)$$

όπου $b \in C^{1,2}$, $g \in C^1$ και B_t μια κίνηση Brown. Θεωρούμε μία συνάρτηση $\phi \in C^1$ τέτοια ώστε $g \frac{d\phi}{dx} = \sigma$, με σ σταθερό και ορίζουμε μια διαδικασία $Y_t = \phi(X_t)$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του *Itô* με την διαδικασία Y_t έχουμε ότι

$$dY_t = \left(b \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{g^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) dt + \sigma dB_t \quad (6.5.2)$$

Έχουμε στόχο να προσεγγίσουμε το drift της εξίσωσης (6.5.2), δηλαδή μια εξίσωση με σταθερό συντελεστή διάχυσης της μορφής

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma dB_t, \quad b \in C^{1,2} \text{ και } \sigma \text{ σταθερό.} \quad (6.5.3)$$

Εκφράζοντας την διαδικασία $b(t, X_t)$ με τον τύπο του *Itô* έχουμε ότι

$$db = \left(\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{\partial b}{\partial t} \right) dt + \frac{\partial b}{\partial x} dx \quad (6.5.4)$$

Για να προσεγγίσουμε την διαδικασία $b(t, X_t)$ θεωρούμε κάποιο $\epsilon > 0$, για το οποίο οι ποσότητες $\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}$, $\frac{\partial b}{\partial x}$ και $\frac{\partial b}{\partial t}$ είναι σταθερές για $t \in [s, s + \epsilon)$. Έτσι από τη σχέση 6.5.4 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
b(s, X_s) - b(t, X_t) &= \left(\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + \frac{\partial b}{\partial t} \right) (t - s) + \frac{\partial b}{\partial x} (X_t - X_s) \\
\Rightarrow b(t, X_t) &= \underbrace{\left(\frac{\partial b}{\partial x} (s, X_s) \right)}_{L_s} X_t + \underbrace{\left(\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} (s, X_s) + \frac{\partial b}{\partial t} (s, X_s) \right)}_{M_s} t \\
&\quad + \underbrace{\left[b(s, X_s) - \frac{\partial b}{\partial x} (s, X_s) X_s - \left(\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} (s, X_s) + \frac{\partial b}{\partial t} (s, X_s) \right) s \right]}_{N_s} \\
\Rightarrow b(t, X_t) &= L_s X_t + M_s t + N_s
\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}
L_s &= \frac{\partial b}{\partial x} (s, X_s) \\
M_s &= \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} (s, X_s) + \frac{\partial b}{\partial t} (s, X_s) \\
N_s &= b(s, X_s) - \frac{\partial b}{\partial x} (s, X_s) X_s - \left(\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} (s, X_s) + \frac{\partial b}{\partial t} (s, X_s) \right) s
\end{aligned}$$

Έτσι η εξίσωση (6.5.3) για $t \in [s, s + \epsilon]$ γίνεται

$$dX_t = (L_s X_t + M_s t + N_s) dt + \sigma dB_t \quad (6.5.5)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Girsanov II, με συνάρτηση $\alpha(t, X_t) = L_s X_t$ η σχέση (6.5.5) παίρνει τη μορφή,

$$dX_t = L_s X_t dt + \sigma d\tilde{B}_t \quad (6.5.6)$$

όπου

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_t &= B_t + \int_s^t h(u) du \\
h(u) &= \frac{1}{\sigma} (M_s u + N_s)
\end{aligned}$$

Θέτοντας $Y_t = e^{-L_s t} X_t$, η εξίσωση (6.5.5) μπορεί να λυθεί ως,

$$\begin{aligned}
Y_t &= Y_s + \sigma \int_s^t e^{-L_s u} d\tilde{B}_u \\
&= Y_s + \int_s^t (M_s u + N_s) e^{-L_s u} du + \sigma \int_s^t e^{-L_s u} dB_u
\end{aligned} \quad (6.5.7)$$

Κάνοντας τις πράξεις, βρίσκουμε ότι η διαδικασία X_t γράφεται ως,

$$X_t | X_s = X_s + \frac{b(s, X_s)}{L_s} \left(e^{L_s(t-s)} - 1 \right) + \frac{M_s}{L_s^2} \left[\left(e^{L_s(t-s)} - 1 \right) - L_s(t-s) \right] + \sigma \int_s^t e^{L_s(t-u)} dB_u \quad (6.5.8)$$

όπου,

$$\begin{aligned}
L_s &= \frac{\partial b}{\partial x} (s, X_s) \\
M_s &= \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} (s, X_s) + \frac{\partial b}{\partial t} (s, X_s)
\end{aligned}$$

Τέλος, από την εξίσωση (6.5.8) μπορεί με μερικές πράξεις ναδειχθεί ότι

$$\text{Var}_s(X_t) = \text{Var}(X_t|X_s) = \sigma^2 \left(\frac{e^{2L_s(t-s)} - 1}{2L_s} \right)$$

Για την παραπάνω μέθοδο μπορεί ναδειχθεί ότι το μέσο απόλυτο και τετραγωνικό σφάλμα για μία πρόβλεψη μπροστά είναι τάξης $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ και $\mathcal{O}(\Delta t^3)$. Το σφάλμα μετριέται σαν η απόσταση από της αρχικής εξίσωση (6.5.1) με την προσέγγιση (6.5.8).

Για να συγκρίνουμε αυτή τη μέθοδο με το σχήμα του Euler μπορούμε να δούμε την διακύμανση της διαδικασίας κάτω από την προσέγγιση. Έτσι η εξίσωση (6.5.3) με την Euler προσέγγιση θα είναι

$$X_t = X_s + f(s, X_s)(t-s) + \sigma \int_s^t dB_u$$

όπου

$$\text{Var}_s(X_t) = \sigma^2(t-s)$$

Παρατηρούμε ότι οι διακυμάνσεις των δύο μεθόδων είναι διαφορετικές, πράγμα που οφείλεται στο γεγονός ότι η μέθοδος local linearization λαμβάνει υπόψη της την κατάσταση στο X_s και προφανώς λαμβάνεται υπόψη η στοχαστικότητα της διαδικασίας από το λήμμα του Itô.

Παράδειγμα 6.4.1 Έστω η παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = -X_t^3 dt + \sigma dB_t, \quad \sigma > 0$$

Τότε για Shoji-Ozaki μέθοδο έχουμε ότι

$$\begin{aligned} L_s &= -3X_s^2 \\ M_s &= -6\frac{\sigma^2}{2}X_s^2 \end{aligned}$$

Έτσι, η προσέγγιση με την μέθοδο Shoji-Ozaki θα είναι,

$$\begin{aligned} X_{sh,t} &= X_s + \frac{1}{3}X_s \left(e^{3X_s^2(t-s)} - 1 \right) - \frac{\sigma^2}{3X_s^2} \left(\left(e^{3X_s^2(t-s)} - 1 \right) + 3X_s^2 \right) \\ &\quad + \sigma \int_s^t e^{-3X_s^2(t-u)} dB_u \end{aligned}$$

και με διακύμανση

$$\text{Var}_{sh}(X_t) = \sigma^2 \left(\frac{e^{-6X_s^2(t-s)} - 1}{-6X_s^2} \right)$$

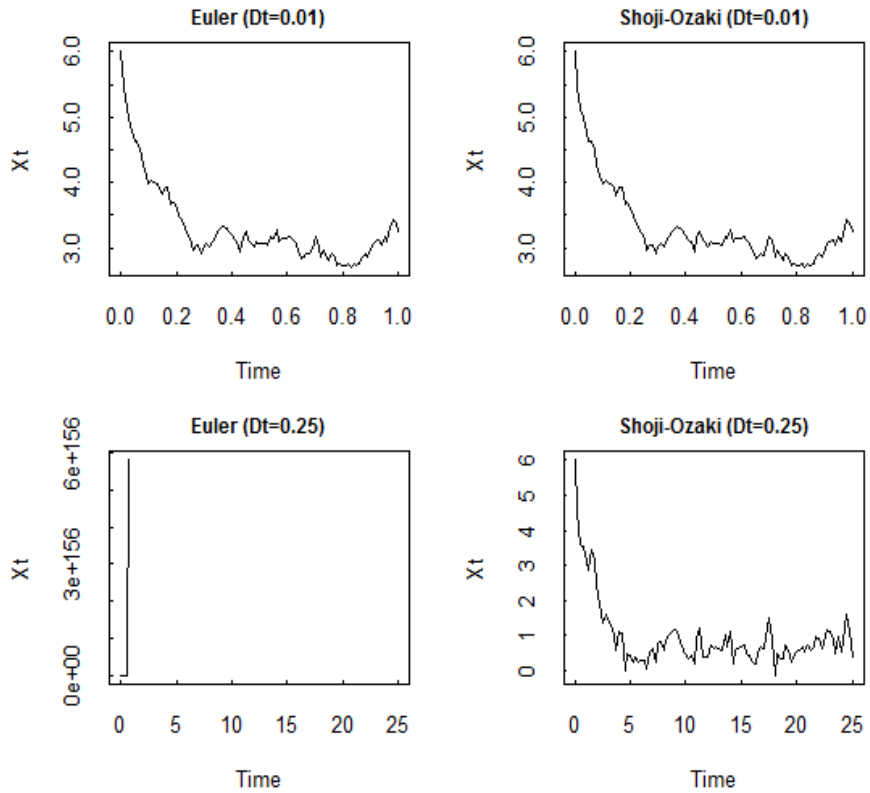
Αντίστοιχα η εκτίμηση Euler θα είναι

$$X_{eul,t} = X_s - X_s^3(t-s) + \sigma \int_s^t dB_u$$

με διακύμανση

$$\text{Var}_{eul}(X_t) = \sigma(t-s)$$

Παράδειγμα 6.4.2 Έστω η εξίσωση $dX_t = (5 - 11X_t + 6X_t^2 - X_t^3)dt + dB_t$, $X_0 = 6$. Με στόχο να παρατηρήσουμε το μειονέκτημα του σχήματος Euler, θα προσομοιώσουμε τροχιές βάσει των μεθόδων Euler και Shoji-Ozaki, για τα βήματα $\Delta = 0.01$ και $\Delta = 0.25$. Στο παρακάτω γράφημα δίνονται το γράφημα της κάθε τροχιάς.



Σχήμα 6.5: Τροχιές βάσει των σχημάτων Euler και Shoji-Ozaki, για $\Delta = 0.01$ (αριστερά) και $\Delta = 0.25$ (δεξιά).

Από το παραπάνω γράφημα παρατηρούμε ότι, η μέθοδος του Euler είναι εύαίσθητη απειρίζοντας τις τιμές της προσομοιωμένης διαδικασίας, όταν το βήμα της προσομοίωσης δεν είναι επαρκές.

Προσομοίωση βάσει της πυκνότητας μετάβασης

Μέχρι στιγμής, όλοι οι μέθοδοι που έχουν αναφερθεί κάνουν χρήση της διακριτοποίησης της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης. Ωστόσο, στα μοντέλα που έχουμε παρουσιάσει σε διάφορα παραδείγματα, η πυκνότητα μετάβασης (*transition density*) είναι γνωστή. Έτσι, αν X_t μια διαδικασία διάχυσης, τότε αν έχουμε γνώση των τιμών της για κάποιο χρόνο $s \leq t$, μπορούμε να προσομοιώσουμε δείγμα από την γνωστή κατανομή της διαδικασίας. Σαν αποτέλεσμα, η εφαρμογή της μεθόδου μέγιστης πιθανοφάνειας για την εκτίμηση των παραμέτρων της διάχυσης είναι εφικτή, γεγονός που θα αναφερθούμε στο παρακάτω κεφάλαιο.

Έστω η γνωστή πυκνότητα μιας διαδικασίας $(X_t)_{t \geq t_0}$, $p_\theta(\Delta, y|x) = \mathbb{P}(X_{t+\Delta} \in y | X_t = x)$, με δοθέν $X_{t_0} = x_0$. Τότε για $i = 1, 2, \dots, N$, η επόμενη προσομοιωμένη τιμή της διαδικασίας θα είναι η τυχαία μεταβλητή: $X_{t_i} = \xi \sim F(X_{t_{i-1}}; \theta, \Delta)$.

Έστω για παράδειγμα η διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck η οποία αποτελεί λύση της εξίσωσης

$$dX_t = (\theta_1 - \theta_2 X_t)dt + \theta_3 dB_t, \quad X_0 = x_0.$$

Από τα παραπάνω κεφάλαια γνωρίζουμε ότι η πυκνότητα μετάβασης της διαδικασίας είναι κανονική με μέσο και διακύμανση,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t | X_0 = x_0] &= \frac{\theta_1}{\theta_2} + \left(x_0 - \frac{\theta_1}{\theta_2} e^{-\theta_2 t} \right) \\ \text{Var}[X_t | X_0 = x_0] &= \frac{\theta_3^2 (1 - e^{-2\theta_2 t})}{2\theta_2}. \end{aligned}$$

Η συγκεκριμένη περίπτωση είναι αρκετά απλή για επιτευχθεί, καθώς υπάρχουν πολλοί μέθοδοι προσομοιώσεις από την κανονική κατανομή. Σε άλλες περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα το μοντέλο CKLS χρειάζεται να προσομοιώσουμε από μη-κεντρική X^2 κατανομή. Προφανώς, όσο μπορούν να αλλάζουν οι συντελεστές τις στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης, τόσο ποικίλουν και οι κατανομές, κάτι το οποίο αποτελεί και μειονέκτημα της μεθόδου.

Κεφάλαιο 7

Στατιστική Συμπερασματολογία Διαδικασιών Διάχυσης

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε διάφορους τρόπους για να εκτιμήσουμε τους συντελεστές μιας διάχυσης $It\delta$. Πολλές φορές έχουμε στην κατοχή μας ένα δείγμα από κάποια διαδικασία και ενδιαφερόμαστε να προβούμε σε στατιστική συμπερασματολογία, όπως για παράδειγμα να προσαρμόσουμε ένα μοντέλο στα δεδομένα και βάσει αυτού να προβούμε σε εκτίμηση σφαλμάτων των συντελεστών ή σε προβλέψεις.

Οι τρόποι να κάνουμε είναι διάφοροι. Μερικοί από αυτούς είναι η παραμετρική εκτίμηση, κάνοντας χρήση της πυκνότητας μετάβασης της στοχαστικής διαδικασίας και της πιθανοφάνειας αυτής, ή η μη-παραμετρική εκτίμηση χρησιμοποιώντας *kernels* για την εκτίμηση του νόμου της διαδικασίας. Προφανώς η παραμετρική μέθοδος προϋποθέτει την γνώση της στάσιμης κατανομής. Κάτι τέτοιο δεν είναι πάντα εύκολο να βρεθεί και να υπολογιστεί κάθε φορά σε κλειστή μορφή.

7.1 Παραμετρική εκτίμηση

Έστω $\{X_t^{x_0}\}$ μια διαδικασία διάχυσης που αποτελεί λύση της παρακάτω ομογενούς στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \quad t \geq s, \quad X_0 = x_0 \quad (7.1.1)$$

Στην παράγραφο 4.1 είδαμε ότι μία διάχυση είναι μια διαδικασία Markov. Ωστόσο μπορεί να είναι ή όχι εργοδική. Έστω $\pi(\cdot)$ η πυκνότητα της στάσιμης κατανομής της διάχυσης. Αν για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση h ισχύει ότι

$$\frac{1}{T} \int_0^T h(X_t)dt \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\pi(x)dx = \mathbb{E}[h(z)]$$

τότε η διαδικασία X_t έχει εργοδικές ιδιότητες. Σε περίπτωση που η στάσιμη κατανομή υπάρχει τότε μπορεί να δειχθεί ότι εκφράζεται βάσει του μέτρου ταχύτητας (*speed measure*) και του μέτρου κλίμακας (*scale measure*).

Ως μέτρα κλίμακας και ταχύτητας ορίζουμε αντίστοιχα τις συναρτήσεις

$$s(x) = \int_{x_0}^x \exp \left\{ \frac{b(u)}{\sigma^2(u)} du \right\}, \quad m(x) = \frac{1}{\sigma^2(x)s(x)}$$

Έστω ότι η διάχυση που μας ενδιαφέρει περιγράφεται από την εξίσωση

$$dX_t = b(\vartheta, X_t)dt + \sigma(\vartheta, X_t)dB_t, \quad X_0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (7.1.2)$$

όπου ϑ είναι μια παράμετρος που ανήκει σε έναν χώρο $\Theta \subset \mathbb{R}^N$.

Για την αναπαράσταση της στάσιμης κατανομής της διαδικασίας διάχυσης, δίνουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 7.1.1 Έστω μια διαδικασία διάχυσης $X_t^{x_0}$ η οποία είναι λύση της εξίσωσης (7.1.2) και ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} m(\vartheta, x) dx < \infty$$

και

$$\int_0^x s(\vartheta, u) du \rightarrow \pm\infty, \text{ καθώς } x \rightarrow \pm\infty$$

Τότε η διαδικασία X_t είναι εργοδική και έχει στάσιμη κατανομή, η οποία δίνεται

$$\pi(x) = \frac{m(\vartheta, x)}{M(\vartheta)}$$

όπου M τέτοιο ώστε η συνάρτηση π να είναι σ.π.π..

Παράδειγμα 7.1.1 (Διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck)

Έστω η παρακάτω διαδικασία OU

$$dX_t = -(aX_t - b)dt + \sigma dB_t, \quad X_0, \quad t \geq 0$$

όπου $a < 0$. Τότε μπορεί να εύκολα δείχνεται ότι

$$f(x) = \sqrt{\frac{a}{\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(ax-b)^2}{a\sigma^2}\right\}$$

Πριν προχωρήσουμε στην εκτίμηση των συντελεστών με βάση την μέθοδο μείζοντος πιθανοφάνειας, ένας τρόπος να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους (τουλάχιστον όσους περιέχονται στον συντελεστή διάχυσης) από ένα δοθέν δείγμα είναι από την τετραγωνική μεταβολή της διαδικασίας. Έτσι για μία διαδικασία $\{X_t\}_{t \geq 0}$ η τετραγωνική μεταβολή της διαδικασίας δίνεται

$$\langle X, X \rangle_t := \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{t_k \leq t} (X_{t_{k+1}} - X_{t_k})^2 = \int_0^t \sigma(\vartheta, X_s) ds \quad (7.1.3)$$

Το παραπάνω όριο είναι όριο σε πιθανότητα κάτω από το μέτρο \mathbb{P}_ϑ . Στην περίπτωση που ο συντελεστής είναι σταθερός $\sigma(\vartheta, X_t) = \sigma$, τότε η παραπάνω σύγκλιση γίνεται σχεδόν βέβαια και τότε παραπάνω σχέση παίρνει την μορφή

$$\langle X, X \rangle_t = \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{t_k \leq t} (X_{t_{k+1}} - X_{t_k})^2 = \sigma^2 t, \quad \sigma.β.$$

Πρόταση 7.1.1 Έστω μια σειρά από ισαπέχοντες παρατηρήσεις $\{X_i\}_{i=0}^N$ από την стоχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = b(\vartheta, X_t)dt + \sigma dB_t, \quad 0 \leq t \leq T$$

με βήμα $\Delta t = \Delta$ και $N\Delta = T$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $b(\vartheta, \cdot)$ είναι φραγμένη και ορίζουμε την ποσότητα

$$\hat{\sigma}_N^2 = \frac{1}{N\Delta} \sum_{i=0}^{N-1} (X_{i+1} - X_i)^2 \quad (7.1.4)$$

Τότε

$$|\mathbb{E}\hat{\sigma}_N^2 - \sigma^2| \leq C(\Delta + \Delta^{1/2}) \quad (7.1.5)$$

και

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\mathbb{E}\hat{\sigma}_N^2 - \sigma^2| = 0 \quad (7.1.6)$$

Απόδειξη: Έστω κάποιος $i \leq N-1$ τότε

$$X_{i+1} - X_i = \int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta} b(\vartheta, X_s) ds + \sigma \Delta B_i \quad (7.1.7)$$

όπου $\Delta B_i \sim \mathcal{N}(0, \Delta)$. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (7.1.4) και (7.1.7) προκύπτει ότι

$$\hat{\sigma}_N^2 = \sigma^2 \frac{1}{N\Delta} \sum_{i=0}^{N-1} (\Delta B_i)^2 + \frac{2}{N\Delta} \sum_{i=0}^{N-1} I_i M_i + \frac{1}{N\Delta} \sum_{i=0}^{N-1} I_i^2$$

όπου

$$I_i = \int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta} b(\vartheta, X_s) ds \quad \text{και} \quad M_i = \sigma \Delta B_i$$

Εφόσον η b είναι φραγμένη τότε υπάρχει C τέτοιο ώστε $|b(\vartheta, X_t)| \leq C$, για κάθε t . Επίσης, γνωρίζουμε ότι $\mathbb{E}\Delta B_i = \Delta$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Swartz έχουμε ότι

$$\mathbb{E}I_i^2 \leq \Delta \int_{i\Delta}^{(i+1)\Delta} \mathbb{E}b^2(\vartheta, X_s) ds \leq C\Delta^2$$

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}\hat{\sigma}_N^2 - \sigma_N^2| &\leq \frac{1}{\Delta} \mathbb{E}I_i^2 + \frac{2}{\Delta} \mathbb{E}[I_i M_i] \\ &\leq C\Delta + \frac{C}{\Delta} \left(\frac{1}{\Delta^{\frac{1}{2}}} \mathbb{E}I_i^2 + \Delta^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}M_i^2 \right) \\ &\leq C \left(\Delta + \Delta^{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

Παίρνοντας το όριο $N \rightarrow \infty$ προκύπτει η σχέση (7.1.6). □

Από εδώ και στη εξής θεωρούμε ότι ο συντελεστής διάχυσης είναι σταθερός. Η ιδέα της παραμετρικής εκτίμησης, ως μέθοδος εκτίμησης των παραμέτρων είναι μεγιστοποιώντας την πιθανοφάνεια της διαδικασίας.

Έτσι θεωρούμε μια σειρά ανεξάρτητων παρατηρήσεων $\{X_i\}_{i=0}^N$, από μια διάχυση $\{X_t\}_{t \leq T}$, όπου $X_i = X_{i\Delta}$ με $N\Delta = T$. Συμβολίζουμε με \mathbb{P}_X το μέτρο της διαδικασίας X_t . Από το θεώρημα Girsanov, το μέτρο \mathbb{P}_X είναι απόλυτα συνεχές με το μέτρο της κίνησης Brown \mathbb{P}_W , έχοντας πυκνότητα η οποία δίνεται από την παράγωγο Radon-Nikodym

$$\frac{d\mathbb{P}_X}{d\mathbb{P}_W} = \exp \left(\int_0^T \frac{b(\vartheta, X_s)}{\sigma^2(X_s)} dX_s - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{b^2(\vartheta, X_s)}{\sigma^2(X_s)} ds \right) =: L(\vartheta, X_t; t \in [0, T]) \quad (7.1.8)$$

Πράγματι, αν θεωρήσουμε την διακριτοποίηση από την μέθοδο του Euler, τότε η στοχαστική διαφορική εξίσωση παίρνει την μορφή

$$\Delta X_i = b(\vartheta, X_i) \Delta t_i + \Delta B_i$$

όπου $X_i = X_{i\Delta t}$, $\Delta X_i = X_{i+1} - X_i$ και $\Delta B_i = \sqrt{\Delta t} z$, $z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Θα βρούμε την παράγωγο Radon-Nikodym βάσει του μέτρου την διακριτοποιημένης διαδικασίας $\{X_i\}$ ως προς το μέτρο την διακριτής κίνησης Brown. Έτσι, ο λόγος αυτός θα είναι ουσιαστικά ο λόγος των δύο πυκνοτήτων των δύο διαδικασιών. Για το μέτρο την κίνησης Brown έχουμε ότι

$$P_{W,N} = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \exp \left\{ -\frac{(\Delta B_i)^2}{2\Delta t} \right\} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \right)^N \exp \left\{ -\frac{1}{2\Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} (\Delta B_i)^2 \right\} \quad (7.1.9)$$

Για την πυκνότητα την διαδικασίας $\{X_i\}$, γνωρίζουμε ότι $X_{i+1} \sim \mathcal{N}(X_i + b(\vartheta, X_i)\Delta, \Delta)$. Συνεπώς, η σ.π.π θα δίνεται

$$P_{X,N} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \right)^N \exp \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2\Delta t} (\Delta X_i)^2 + \frac{1}{2} b^2(\vartheta, X_i)\Delta t - b(\vartheta, X_i)\Delta t \right)^2 \right\} \quad (7.1.10)$$

Από τον λόγο των 7.1.9 και 7.1.10 προκύπτει ότι

$$\frac{d\mathbb{P}_X}{d\mathbb{P}_W} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} b^2(\vartheta, X_i)\Delta t + \sum_{i=0}^{N-1} b(\vartheta, X_i)\Delta t \right\} \quad (7.1.11)$$

Παίρνοντας τον όριο $N \rightarrow \infty$ και για Δt σταθερό, προκύπτει η παράγωγος Radon-Nikodym 7.1.8. Συνεπώς, οι παράμετροι που περιέχονται στον συντελεστή ταχύτητας της διαδικασίας διάχυσης υπολογίζονται από τον εκτιμητή

$$\hat{\vartheta} = \arg \max_{\vartheta \in \Theta} L(\vartheta, X_t; t \in [0, T])$$

Ο MLE¹ εκτιμητής είναι ασυμπτωτικά αμερόληπτος και συγκλίνει στην αληθινή τιμή της παραμέτρου ϑ_0 . Αν οι παράμετροι που πρέπει να εκτιμηθούν είναι οι $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_N)$, τότε ο εκτιμητής MLE, προκύπτει επιλύοντας το σύστημα

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

Παράδειγμα 7.1.1 (Διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck) Έστω η διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck της μορφής

$$dX_t = -\vartheta X_t dt + dB_t, \quad X_0 \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2\vartheta}\right)$$

Η λογαριθμική πιθανοφάνεια δίνεται από τη σχέση

$$\log L = -\vartheta \int_0^T X_t dX_t - \frac{\vartheta^2}{2} \int_0^T X_t^2 dt$$

Έτσι παραγωγίζοντας και επιλύοντας ως προς ϑ , έχουμε ότι

$$\hat{\vartheta} = -\frac{\int_0^T X_t dX_t}{\int_0^T X_t^2 dt} \quad (7.1.12)$$

Συνεπώς, για κάποιες διακριτές παρατηρήσεις $\{X_i\}_{i=0}^N$, όπου $X_i = X_{i\Delta t}$, $\Delta X_i = X_{i+1} - X_i$, ο παραπάνω εκτιμητής παίρνει την μορφή

$$\hat{\vartheta} = -\frac{\sum_{i=0}^{N-1} X_i \Delta X_i}{\sum_{i=0}^{N-1} X_i^2 \Delta t} \quad (7.1.13)$$

Ο παραπάνω εκτιμητής γίνεται ασυμπτωτικά αμερόληπτος καθώς $N \rightarrow \infty$ και όταν το βήμα Δt είναι σταθερό. Ωστόσο ο υπολογισμός του εκτιμητή με τον παραπάνω τρόπο δεν είναι ο βέλτιστος, καθώς απαιτεί την προσέγγιση δύο ολοκληρωμάτων, κάτι που μπορεί να αποφευχθεί κάνοντας χρήση του τύπου του Itô. Έτσι, για το ολοκλήρωμα του αριθμητή έχουμε

$$\int_0^t X_s dX_s = -\vartheta \int_0^t X_s ds + \int_0^t X_s dB_s \quad (7.1.14)$$

Από το λήμμα του Itô για την συνάρτηση $g(x) = \frac{x^2}{2}$ προκύπτει ότι

$$dg(X_t) = -\vartheta X_t^2 dt + \frac{1}{2} dt + X_t dB_t$$

¹MLE : Εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας.

Από τις παραπάνω δύο σχέσεις η εξίσωση 7.1.14 γίνεται

$$\int_0^t X_s dX_s = \frac{X_t^2 - X_0^2 - t}{2}$$

Καταλήγουμε ότι ο εκτιμητής 7.1.12 θα πάρει την μορφή

$$\hat{\vartheta} = -\frac{X_T^2 - X_0^2 - T}{2 \int_0^T X_t^2 dt} \quad (7.1.15)$$

Τέλος, μπορεί ναδειχθεί ότι ο MLE εκτιμητής συγκλίνει στην αληθινή τιμή ϑ και ότι ασυμπτωτικά

$$\sqrt{T} (\hat{\vartheta} - \vartheta) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

όπου

$$\sigma^2 = \mathbb{E}_{\vartheta_0} \left[\left(\frac{\partial b}{\partial \vartheta} \right) \right]^{-1} \quad (7.1.16)$$

με $\mathbb{E}_{\vartheta_0}[\cdot]$ να συμβολίζει την αναμενόμενη τιμή της διαδικασίας X_t υπολογισμένη στην τιμή ϑ_0 .

Θα δείξουμε ότι για την διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck, ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας $\hat{\vartheta}$, καθώς το μέγεθος του δείγματος 'μεγαλώνει' και το βήμα είναι σταθερό, ότι συγκλίνει στην αληθινή τιμή ϑ_0 .

Θεώρημα 7.1.2 Έστω η διαδικασία

$$dX_t = -aX_t dt + dB_t, \quad X_0 \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2a}\right)$$

και \hat{a} ο MLE εκτιμητής από την σχέση 7.1.12. Τότε

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt{T} |\hat{a} - a| = \mathcal{N}(0, 2a)$$

που το όριο είναι σε κατανομή.

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι

$$\hat{a} = -\frac{\int_0^T X_t dX_t}{\int_0^T X_t^2 dt} = a - \frac{\int_0^T X_t dB_t}{\int_0^T X_t^2 dt}$$

έτσι

$$\hat{a} - a = \frac{\int_0^T X_t dB_t}{\int_0^T X_t^2 dt} = -\frac{1}{\sqrt{T}} \frac{T^{-\frac{1}{2}} \int_0^T X_t dB_t}{T^{-1} \int_0^T X_t^2 dt}$$

Ο αριθμητής είναι μια αλλαγή κλίμακας ως προς τον χρόνο. Συνεπώς η παραπάνω ποσότητα έχει κατανομή

$$\hat{a} - a = -\frac{1}{\sqrt{T}} \frac{B\left(T^{-1} \int_0^T X_t dB_t\right)}{T^{-1} \int_0^T X_t^2 dt}$$

όπου με $B(\cdot)$ συμβολίζουμε το μέτρο της κίνησης Brown. Δεδομένου ότι η διαδικασία OU είναι στάσιμη τότε

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_t^2 dt = \mathbb{E}[X_t^2] = \frac{1}{2a} \quad (7.1.17)$$

Έστω $Y \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2a})$, χρησιμοποιώντας την συνέχεια Hölder της κίνησης Brown για κάποιο $\varepsilon > 0$ τότε σ.β. έχουμε ότι

$$\left| \frac{1}{\sqrt{X_t}} \int_0^T X_t^2 dt - Y \right| = \left| B \left(\frac{1}{X_t} \int_0^T X_t^2 dt \right) - B \left(\frac{1}{2a} \right) \right| \leq C \left| \frac{1}{T} \int_0^T X_t^2 dt - \frac{1}{2a} \right|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση 7.1.17 καταλήγουμε ότι

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X_t^2 dB_t = \mathcal{N} \left(0, \frac{1}{2a} \right) \quad (7.1.18)$$

όπου το όριο σε κατανομή. Συνδυάζοντας τις σχέσεις 7.1.17 και 7.1.18 με το θεώρημα Slutsky², προκύπτει ότι

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt{T} |\hat{a} - a| = \mathcal{N}(0, 2a)$$

□

Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να γενικευθεί, κάτω από τις παρακάτω υποθέσεις.

Υπόθεση I. Για κάθε $k > 0$, όλες οι ροπές τάξης k υπάρχουν και

$$\sup_t \mathbb{E}|X_t^k| < \infty$$

Υπόθεση II. Οι συντελεστές και οι παράγωγοι τους ως προς το ϑ της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης που περιγράφει η διαδικασία διάχυσης, είναι λείοι ως προς x .

Οι παραπάνω δύο υποθέσεις εξασφαλίζουν την σύγκλιση και την ύπαρξη του πίνακα πληροφορίας του Fisher 7.1.16 που θα υπάρξει όταν οι διαστάσεις είναι περισσότερες από μία.

Παράδειγμα 7.1.2 (Διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck) Έστω η διαδικασία ΟΥ

$$dX_t = (\vartheta_1 - \vartheta_2 X_t) dt + \vartheta dB_t, \quad X_0 = x_0$$

όπου $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \mathbb{R}$ και $\vartheta_3 \in \mathbb{R}_+$. Για $\vartheta_2 > 0$ η διαδικασία είναι εργοδική. Από τα παραπάνω κεφάλαια γνωρίζουμε ότι, η δεσμευμένη πυκνότητα της διαδικασίας είναι κανονική κατανομή με μέσο και διακύμανση

$$\mathbb{E}_\vartheta [X_t | X_0 = x_0] = \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} + (x_0 - \frac{\vartheta_1}{\vartheta_2}) e^{-\vartheta_2 t}, \quad t \geq 0$$

$$\text{Var}_\vartheta(X_t | X_0 = x_0) = \frac{\vartheta_3^2 (1 - e^{-2\vartheta_2 t})}{2\vartheta_2}, \quad t \geq 0$$

Για την λογαριθμική πιθανοφάνεια έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \ell_n(\vartheta) &= \log L_n(\vartheta) = \sum_{i=0}^{n-1} \ell_i(\vartheta) + \log(p_\vartheta(x_0)) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \log(p_\vartheta(X_{i+1}, \Delta t | X_i)) + \log(p_\vartheta(x_0)) \end{aligned}$$

Έστω οι τιμές $\vartheta = (\vartheta_1 = 3, \vartheta_2 = 0.5, \vartheta_3 = 2)$ Προσομοιώνουμε μία τροχιά με αυτές τιμές, με μέγεθος δείγματος $N = 1000$ και βήμα $\Delta = 1$. Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων και τα αντίστοιχα διαστήματα εμπιστοσύνης δίνονται

²Για το θεώρημα του Slutsky, βλ. Παράρτημα

	Εκτίμηση	Τυπικό σφάλμα
ϑ_1	3.7645	0.3118
ϑ_2	0.6543	0.0520
ϑ_3	2.6962	0.0817
$-2 \log \mathcal{L}$	4241.856	

Πίνακας 7.1: Εκτιμήσεις διαδικασίας Ornstein-Uhlenbeck

Στην συγκεκριμένη περίπτωση που η διαδικασία είναι η Ornstein-Uhlenbeck και για $\vartheta_1 = 0$, τότε η εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας για την παράμετρο ϑ_2 δίνεται σε κλειστή μορφή

$$\vartheta_2 = -\frac{1}{\Delta} \log \left(\frac{\sum_{i=0}^{n-1} X_{i+1} X_i}{\sum_{i=0}^{n-1} X_i^2} \right), \Delta \text{ σταθερό}$$

όπου πρέπει $\sum_{i=0}^{n-1} X_{i+1} X_i > 0$ για να είναι καλά ορισμένος ο εκτιμητής. Μπορεί ναδειχθεί ότι ο παραπάνω εκτιμητής είναι συνεπής και ασυμπτωτικά κανονικός.

7.2 Pseudo-Likelihood methods

Στην παραπάνω ενότητα δώσαμε σημαντικό βάρος στην μέθοδο εκτίμησης των συντελεστών μια διαδικασίας διάχυσης, συγκεκριμένα την διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck, μέσω του άμεσου υπολογισμού της πιθανοφάνειας. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε μεθόδους οι οποίες δεν προσεγγίζουν την πυκνότητα μεταβάσεων, αλλά την τροχιά της διαδικασίας. Οι μέθοδοι αυτές ονομάζονται *pseudo-likelihood methods*.

7.2.1 Μέθοδος του Euler

Σαν αρχή θα παρουσιάσουμε την μέθοδο του Euler. Έστω η στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = b(X_t; \theta)dt + \sigma(X_t; \theta)dB_t, X_0 = x_0.$$

Αν οι συντελεστές της παραπάνω εξίσωσης είναι σταθεροί στο διάστημα $[t, t + \Delta t]$, τότε έχουμε δει ότι από το σχήμα του Euler προκύπτει η προσέγγιση

$$X_{t+\Delta t} = X_t + b(X_t; \theta)\Delta t + \sigma(X_t; \theta)\Delta B_t$$

και τότε οι μεταβολές $X_{t+\Delta t} - X_t$ ακολουθούν κανονική κατανομή μέσο $b(X_t; \theta)\Delta t$ και διακύμανση $\sigma^2(X_t; \theta)\Delta t$. Κατά συνέπεια η πυκνότητα μετάβασης από την κατάσταση x στην y εντός χρόνου t , θα είναι

$$f_\theta(t, y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t \sigma^2(x; \theta)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(y-x-b(x; \theta)t)^2}{t \sigma^2(x; \theta)} \right\}.$$

Η παραπάνω μέθοδος χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή ως προς την εφαρμογή της, καθώς για μεγάλες τιμές του βήματος Δt , οι εκτιμητές είναι μεροληπτικοί.

7.2.2 Μέθοδος του Elerian

Όπως γνωρίζουμε η μέθοδος διακριτοποίησης του Euler έχει ισχυρή τάξη σύγκλισης $\gamma = 0.5$. Στόχος είναι χρησιμοποιώντας την προσέγγιση Milstein να αυξήσουμε τον βαθμό σύγκλισης, με στόχο να προσεγγίσουμε καλύτερα την πιθανοφάνεια μιας διαδικασίας διάχυσης. Έστω το παρακάτω σχήμα Euler,

$$x_{t+1} = x_t + b(x_t, t; \theta)\Delta t + \sigma(x_t, t; \theta)\Delta B_t, \Delta B_t \sim \mathcal{N}(0, \Delta t).$$

Εύκολα, διαπιστώνουμε ότι η πυκνότητα μετάβασης θα δίνεται, $x_{t+i} \sim \mathcal{N}(b(x_t, t; \theta)\Delta t, \sigma(x_t, t; \theta)\Delta B_t)$. Στην συνέχεια της παραγράφου, θα ασχοληθούμε με την εύρεση της πυκνότητας μετάβασης θεωρώντας το σχήμα Milstein,

$$x_{t+1} = x_t + b(x_t, t; \theta)\Delta t + \sigma(x_t, t; \theta)\Delta B_t + \frac{1}{2}\sigma(x_t, t; \theta)\sigma_x(x_t, t; \theta)[(\Delta B_t)^2 - \Delta t] \quad (7.2.1)$$

Στο παρακάτω θεώρημα αποδεικνύεται ότι, η ζητούμενη πυκνότητα είναι μη-κεντρική \mathcal{X}^2 .

Θεώρημα 7.2.1 Έστω η стоχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = b(x_t, t; \theta)dt + \sigma(x_t, t; \theta)dB_t, \quad \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$$

όπου $b(\cdot, \cdot; \theta), \sigma(\cdot, \cdot; \theta) : [0, \infty] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$. Αν οι συνθήκες Lipschitz και γραμμικής αύξησης των συντελεστών ικανοποιούνται, τότε η πυκνότητα μετάβασης βάσει του σχήματος 7.2.1 δίνεται,

$$f(x_{t+1}|x_t) = \frac{\exp(-\lambda/2)}{|A|\sqrt{2\pi}} z_{t+1}^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{z_{t+1}}{2}\right) \cosh(\sqrt{\lambda z_{t+1}})$$

όπου

$$\begin{aligned} z_{t+1} &= \frac{x_{t+1} - B}{A}, \quad z_{t+1} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \lambda &= \frac{1}{\Delta t(\sigma_x)^2}, \quad \sigma_x \neq 0 \\ A &= \frac{\sigma\sigma_x\Delta t}{2} \\ B &= -\frac{\sigma}{2\sigma_x} + x_t + b\Delta t - \frac{\sigma\sigma_x\Delta t}{2}, \quad \sigma_x \neq 0 \end{aligned}$$

Απόδειξη: Από το σχήμα Milstein έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= x_t + b(x_t, t; \theta)\Delta t + \sigma(x_t, t; \theta)\Delta B_t + \frac{1}{2}b(x_t, t; \theta)b_x(x_t, t; \theta)[(\Delta B_t)^2 - \Delta t] \\ &= A(U + \delta)^2 + B = Az + B \end{aligned}$$

όπου $U \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $\delta = \frac{1}{b_x\sqrt{\Delta t}}$ και $z = (U + \delta)^2$. Συνεπώς, $z \sim \mathcal{X}^2(\delta^2)$. Θέτοντας $\lambda = \delta^2$, η πυκνότητα της τ.μ. z δίνεται

$$f_Z(z) = \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{(\lambda+z)}{2}\right\} \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{-\frac{1}{4}} I_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda z})$$

όπου $I_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda z}) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cosh(x)$. Από τον αντίστροφο μετασχηματισμό της σχέσης $x_{t+1} = Az + B$, η ζητούμενη πυκνότητα μετάβασης δίνεται,

$$\begin{aligned} f(x_{t+1}|x_t) &= \frac{1}{|A|} f_Z\left(\frac{x_{t+1} - B}{A}\right) \\ &= \frac{1}{|A|\sqrt{2\pi}} \left(\frac{x_{t+1} - B}{A}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{(A\lambda + x_{t+1} - B)}{2A}\right\} \cosh\left\{\sqrt{\frac{\lambda(x_{t+1} - B)}{A}}\right\}. \end{aligned}$$

□

7.2.3 Local Linearization μέθοδος

Στην παράγραφο 6.5 αναφέραμε μία μέθοδο προσέγγισης διαδικασιών διάχυσης, βάσει της οποίας μια διαδικασία διάχυσης μπορεί να προσεγγιστεί τοπικά από μια άλλη γραμμική στοχαστική διαφορική εξίσωση, η οποία είναι πιο εύκολο να μεταχειριστεί. Πιο συγκεκριμένα, αν η αρχική εξίσωση που μας ενδιαφέρει είναι η

$$dX_t = b(X_t; \theta)dt + \sigma(X_t; \theta)dB_t.$$

Τότε για κάποιο βήμα $\Delta t > 0$, η δεσμευμένη τιμή γράφεται σαν,

$$X_{t+\Delta t} = A(X_t)X_t + B(X_t)Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

όπου

$$A(X_t) = 1 + \frac{b(t, X_t)}{L_t X_t} (e^{L_t \Delta t} - 1) + \frac{M_t}{L_t^2 X_t} [(e^{L_t \Delta t} - 1) - L_t \Delta t], \text{ και}$$

$$B(X_t) = \sigma \sqrt{\frac{e^{2L_t \Delta t} - 1}{2L_t}}$$

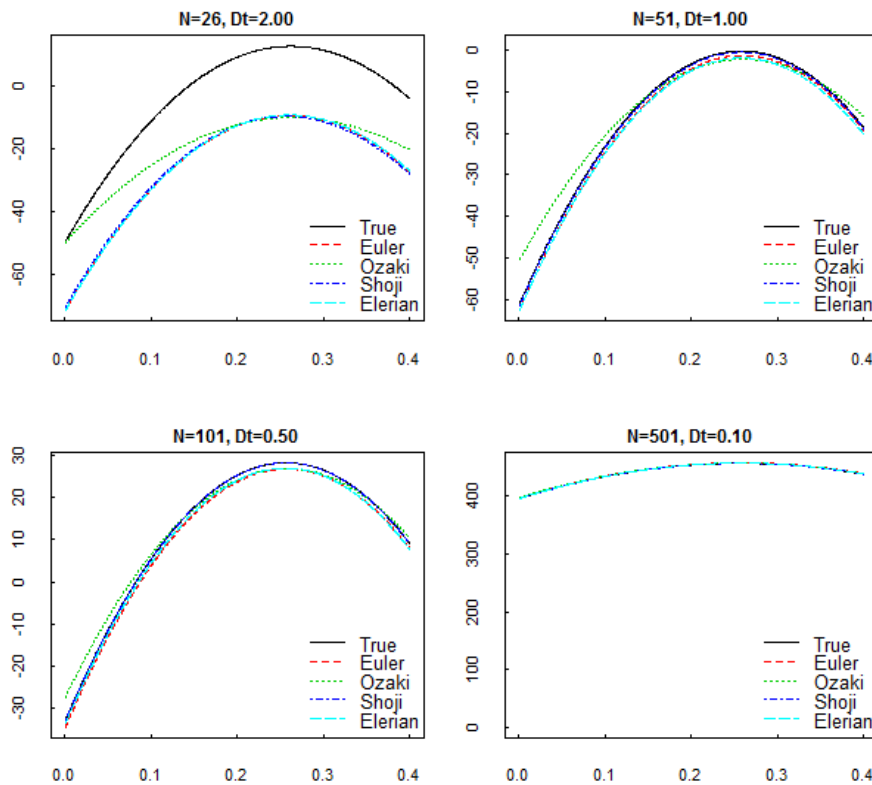
Τέλος, εύκολα βλέπουμε ότι $X_{t+\Delta t}|X_t = x \sim \mathcal{N}(A(X_t)X_t, B^2(X_t))$. Προφανώς, το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου απέναντι στις δύο προηγούμενες είναι ότι δεν χρειάζεται ο υπολογισμός της Ito-Taylor προσέγγισης, και κατά συνέπεια το υπολογιστικό κόστος είναι μικρότερο.

7.2.4 Εφαρμογή: Σύγκριση των μεθόδων προσέγγισης της πιθανοφάνειας

Σε αυτή την παράγραφο θα συγκρίνουμε τις παραπάνω μεθόδους για την προσέγγιση την πιθανοφάνειας, για την διάχυση Cox-Ingersoll-Ross. Η εξίσωση που θα μελετήσουμε είναι η παρακάτω,

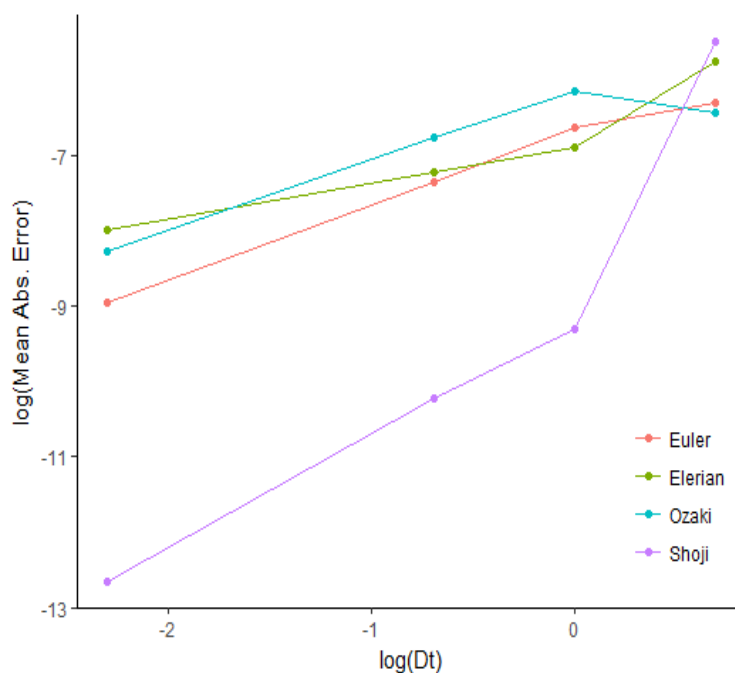
$$dX_t = (0.8 - 0.4X_t)dt + \sqrt{0.05X_t}dB_t, \quad X_0 = 1$$

Αρχικά, προσομοιώνουμε μια τροχιά από την παραπάνω διαδικασία μήκους $N = 50.000$ με βήμα $\Delta_t = 0.001$. Έπειτα για τις μεθόδους Euler, Elerian, Ozaki και Shoji εκτιμούμε την πιθανοφάνεια καθώς και το μέσο απόλυτο σφάλμα. Τα βήματα των προσεγγίσεων που επιλέγουμε είναι $\Delta = 0.1, 0.5, 1, 2$. Την παραπάνω μεθοδολογία την επαναλαμβάνουμε για 500 επαναλήψεις. Στο παρακάτω γράφημα φαίνονται οι προσεγγίσεις για την πιθανοφάνεια.



Σχήμα 7.1: Εκτιμώμενες πιθανοφάνειες βάσει των μεθόδων Euler, Elerian, Ozaki και Shoji.

Παρατηρούμε ότι η μέθοδος που 'συμπεριφέρεται' καλύτερα είναι η μέθοδος Shoji. Στο γράφημα που ακολουθεί απεικονίζουμε το μέσο απόλυτο σφάλμα της πιθανοφάνειας κάθε μεθόδου από την πραγματική.



Σχήμα 7.2: Μέσο απόλυτο σφάλμα της πιθανοφάνειας κάθε μεθόδου από την πραγματική.

7.3 Εφαρμογή μοντέλων σε επιτόκια

Σε αυτή την παράγραφο, θα εφαρμόσουμε όλα όσα πλέον γνωρίζουμε για την στατιστική συμπερασματολογία των διαδικασιών που μελετάμε. Θα δουλέψουμε με μια σειρά από δεδομένα επιτοκίων³ για το διάστημα 07/1964-04/1989. Τα διαθέσιμα δεδομένα δίνονται στο παρακάτω γράφημα.

Δεδομένου ότι τα δεδομένα αφορούν επιτόκια, το μοντέλο που θα εφαρμόσουμε θα είναι της οικογένειας CKLS της μορφής,

$$dX_t = (\theta_1 + \theta_2 X_t)dt + \theta_3 X_t^{\theta_4} dB_t$$

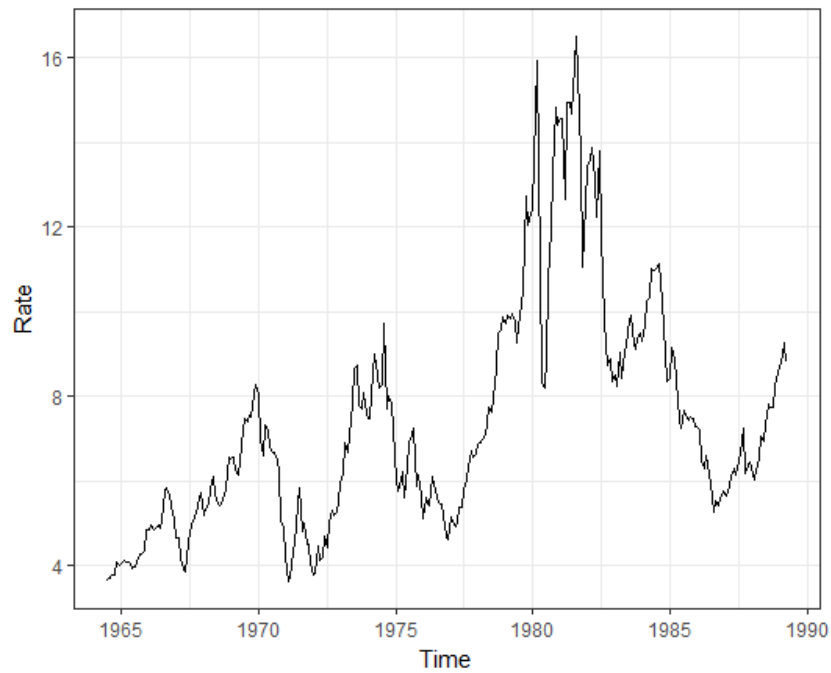
Οι μέθοδοι εκτίμησης των συντελεστών που θα χρησιμοποιήσουμε είναι οι: Euler, Ozaki, Shoji και Kessler. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων από τις προσομιώσεις του μοντέλου βάσει της κάθε μεθόδου εκτίμησης.

	Euler	Kessler	Ozaki	Shoji
θ_1	0.9029	2.2556	2.2061	2.1775
θ_2	0.0184	-0.2747	-0.2666	-0.2618
θ_3	-0.0312	0.1269	0.1275	0.1325
θ_4	1.5710	1.3579	1.3519	1.3394

Πίνακας 7.2: Εκτιμήσεις συντελεστών του μοντέλου CKLS από τα δεδομένα.

Στον επόμενο πίνακα δίνονται κάποια μέτρα από τις εφαρμογές του μοντέλου.

³Τα δεδομένα βρέθηκαν από την πηγή: *McCulloch, J.H. and Kwon, H.C. (1993). U.S. term structure data, 1947-1991, Ohio State Working Paper 93-6, Ohio State University, Columbus*

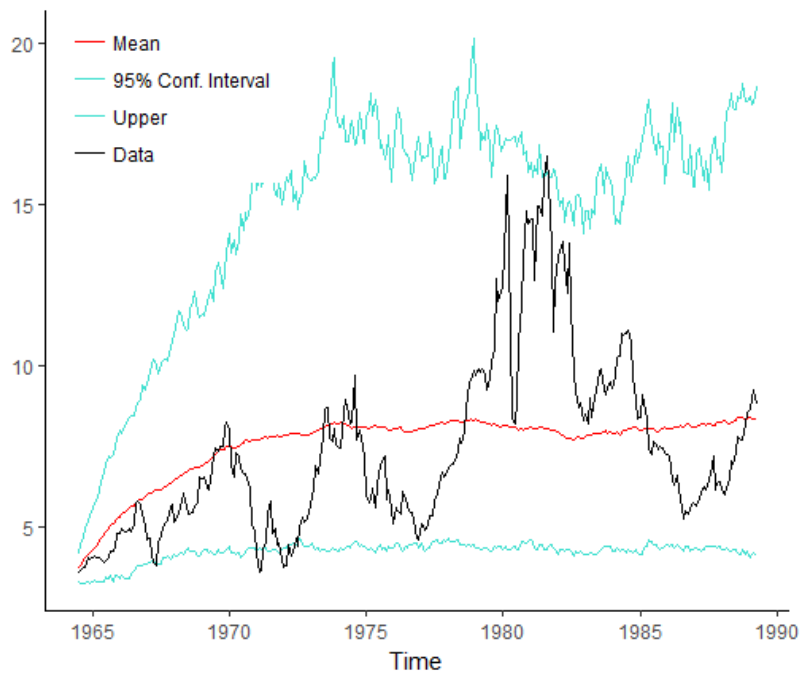


Σχήμα 7.3: Δεδομένα επιτοκίων για την περίοδο 07/1964-04/1989.

	$\log(\mathcal{L})$	AIC	BIC
Euler	0	8.0000	11.39419
Kessler	-219.0875	446.1750	449.56914
Ozaki	-219.1521	446.3042	449.69841
Shoji	-219.2231	446.4463	449.84046

Πίνακας 7.3: Μέτρα αξιολόγησης των προσεγγίσεων για το μοντέλο CKLS.

Από τα παραπάνω αποτελέσματα επιλέγουμε σαν βέλτιστη προσέγγιση την μέθοδο του Kessler. Έτσι, στο παρακάτω γράφημα φαίνεται το 95% διάστημα εμπιστοσύνης καθώς και ο αντίστοιχος μέσος.



Σχήμα 7.4: Διάστημα εμπιστοσύνης βάσει της μεθόδου του Kessler.

7.4 Παράρτημα

Θεώρημα Slutsky: Έστω $\{X_n\}$ και $\{Y_n\}$ δύο ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών, τέτοιες ώστε η $\{X_n\}$ συγκλίνει σε κατανομή σε μία τυχαία μεταβλητή X και η $\{Y_n\}$ να συγκλίνει σε κάποια σταθερά $c \neq 0$. Τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n^{-1} X_n = c^{-1} X$$

και το όριο είναι όριο σε κατανομή.

Βιβλιογραφία

- [1] Z. Brzezniak and T. Zastawniak, *Basic Stochastic Processes*, Springer, 1999.
- [2] J. Carlsson, K. Moon, A. Szepessy, R. Tompone and G. Zouraris, *Stochastic Differential Equations: Models and Numerics*, 2010.
- [3] R. Durrett, *Stochastic calculus-A practical approach*, CRC Press, 1996.
- [4] Elerian, O. *A note on the existence of a closed form conditional density for the Milstein scheme*, Working Paper, Nuffield College, Oxford University, 1998.
- [5] I.Gohberg, S. Goldberg, M. Kaashoek, *Basic classes of linear operators*, Springer, 2003.
- [6] D. Higham, *An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations*, SIAM Review 2001.
- [7] Iacus Stefano M., *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations With R Examples*, Springer 2008.
- [8] O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, Springer, 1997.
- [9] P.E. Kloeden, E. Platen, H. Schurz, *Numerical solution of SDE through computer experiments*, Springer, 2003.
- [10] Kutoyants, Y. *Statistical Inference for Ergodic Diffusion Processes*, Springer-Verlag, London 2004.
- [11] R. Lipster, A. Shiriyayev, *Statistics of Random Processes*, Volume 1, Springer-Verlag, 1997.
- [12] X.Mao, *Stochastic Differential Equations and Applications*, Horwood Series in Mathematics and Applications Horwood Publishing Chichester 1997.
- [13] B.Oksendal, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, 5th Edition, Springer 1997.
- [14] Ozaki, T. *A local linearization approach to nonlinear filtering*, *Int. J. Control*, 1993.
- [15] G. Pavliotis, *Stochastic Processes and Applications*, Springer, 2014.
- [16] Stroock, D.W., Varadhan, *Multidimensional Diffusion Processes*, Springer-Verlag, 1979.
- [17] Α. Γιαννακόπουλος, *Στοχαστική ανάλυση και εφαρμογές στην χρηματοοικονομική*, ΤΟΜΟΣ Ι, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 2003.