ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS AND BUSINESS
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
SCHOOL OF INFORMATION SCIENCES & TECHNOLOGY
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
DEPARTMENT OF STATISTICS

«Θεωρία και εφαρμογές της Βέλτιστης Στάσης για διαδικασίες Markov και διαδικασίες Itô»

"Theory and applications of Optimal Stopping for Markov processes and Itô processes"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Ράπτη Αναστασίου

Επιβλέπον μέλος ΔΕΠ: Καθηγητής Γιαννακόπουλος Αθανάσιος

Μάθημα: Διπλωματική εργασία

Αθήνα, Ιούνιος 2018

«Θεωρία και εφαρμογές της Βέλτιστης Στάσης για διαδικασίες Markov και διαδικασίες Itô»

“Theory and applications of Optimal Stopping for Markov processes and Itô processes”

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Ράπτη Αναστασίου

Επιβλέπον μέλος ΔΕΠ: Καθηγητής Γιαννακόπουλος Αθανάσιος

Μάθημα: Διπλωματική εργασία

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 15 Ιουνίου 2018

(Υπογραφή)	*(Υπογραφή)*	*(Υπογραφή)*
....	....	....
Αθανάσιος Γιαννακόπουλος Καθηγητής	Μιχαήλ Ζαζάνης Καθηγητής	Επαμεινώνδας Κυριακίδης Καθηγητής

Αθήνα, Ιούνιος 2018

(Υπογραφή)

....

ΡΑΠΤΗΣ ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ

Διπλωματούχος Στατιστικός του Τμήματος Στατιστικής του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 4

Κεφάλαιο 5

Κεφάλαιο 6

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Διαγράμματα

Ευχαριστίες

Το παρόν πόνημα αποτελεί εργασία στα πλαίσια του Μαθήματος της Διπλωματικής Άσκησης του 8ου εξαμήνου του τμήματος Στατιστικής του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών.

Καταρχήν, αισθάνομαι την υποχρέωση να ευχαριστήσω ορισμένους από τους ανθρώπους που γνώρισα, συνεργάστηκα μαζί τους και έπαιξαν πολύ σημαντικό ρόλο στην πραγματοποίησή της.

Πρώτον από όλους θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της εργασίας, **Καθηγητή κύριο Αθανάσιο Γιαννακόπουλο,** για την πολύτιμη καθοδήγηση του καθ΄ όλη την διάρκεια της συγγραφής της καθώς και για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε.

Ευχαριστίες οφείλω στον **Διδάκτορα κύριο Γεώργιο Παπαγιάννη,** για τα σημαντικά εφόδια και τις πολύτιμες γνώσεις που απέκτησα κατά την διάρκεια των πανεπιστημιακών μαθημάτων του στο Ο.Π.Α. στα προηγούμενα εξάμηνα, τα οποία συνέβαλλαν ουσιαστικά στην ολοκλήρωση της εργασίας μου.

Επίσης ιδιαίτερες ευχαριστίες θέλω να απευθύνω στον άμεσο προϊστάμενό μου **Αστυνομικό Υποδιευθυντή κύριο Πέτρο Τζεφεράκο,** για την καθοριστική του βοήθεια, ο οποίος στάθηκε σημαντικός αρωγός στην προσπάθειά μου.

Θερμές ευχαριστίες θα ήθελα να απευθύνω και στην **Αστυνόμο Β΄ κυρία Πωλίνα Φλεβάρη**, ψυχολόγο της Ελληνικής Αστυνομίας, για τις χρήσιμες συμβουλές της σχετικά με την επιμέλεια της διπλωματικής εργασίας.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω την σύζυγό μου **Σοφία Αντωνίνη**, καθώς και τα παιδιά μου, **Αντώνη** και **Λυδία**, που με υπομονή με τροφοδοτούσαν με την ηθική τους συμπαράσταση ώστε να ολοκληρώσω την εργασία.

Αναστάσιος Ράπτης

Περίληψη

Η διπλωματική αυτή θα εστιάσει στη μελέτη του προβλήματος Βέλτιστης Στάσης (Optimal Stopping problem) παρουσιάζοντας βασικά αποτελέσματα με αποδείξεις για διαδικασίες Markov σε διακριτό χρόνο και διαδικασίες Itô χρησιμοποιώντας τεχνικές από τη θεωρία των διαδικασιών Martingale, τον δυναμικό προγραμματισμό, τη θεωρία της στοχαστικής ολοκλήρωσης, και τη θεωρία των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

Θα αναπτυχθούν επίσης, αριθμητικά σχήματα για την επίλυση προβλημάτων Βέλτιστης Στάσης χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα MatLab. Θα μελετηθούν εφαρμογές από τα χρηματοοικονομικά, χρησιμοποιώντας την επαναληπτική αναδρομική μέθοδο (The Snell envelop) καθώς και το διωνυμικό μοντέλο.

Λέξεις Κλειδιά: «Βέλτιστος χρόνος Στάσης, Επιλεκτική Στάση, χρόνος Στάσης, Martingale, προσέγγιση κατά Martingale, χρόνος Markov, προσέγγιση κατά Markov, αναδρομική επαναληπτική μέθοδος, δυναμικός προγραμματισμός, διαδικασίες Itô, στοχαστικό ολοκλήρωμα, στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις, διακριτός χρόνος, συνεχής χρόνος, διωνυμικό δέντρο, Αμερικάνικα Παράγωγα, Ευρωπαϊκά Παράγωγα».

Abstract

This thesis focuses on the study of the Optimal Stopping Problem for Markov processes in discrete time as well as Itô's processes using techniques from the theory of Martingale's processes, the theory of dynamic programming, the theory of Stochastic Integration and the theory of Stochastic Differential Equations.

Furthermore, Numerical schemes will be developed in order to solve Optimal Stopping problems using the programme MatLab. Moreover, applications of Finance research will be studied using the method of backward induction (The Snell envelop) along with the binomial model.

Keywords: **"**Optimal Stopping time, Optional Stopping time, Stopping time, Martingale, Martingale approach, Markov time, Markovian approach, Snell envelop, dynamic programming, Itô's processes, Stochastic Integration, Stochastic Differential Equations, discrete time, continuous time, binomial tree, American Derivatives, European Derivatives**"**

Κεφάλαιο 1

1. Εισαγωγή

Σε αυτή την ενότητα θα αναφερθούμε σε μία σημαντική ιδιότητα των στοχαστικών ανελίξεων, τις διαδικασίες Martingale. Η ανάπτυξη τους οφείλεται στον αμερικάνο μαθηματικό **Joseph Leo Doob** (27 Φεβρουαρίου 1910 – 7 Ιουνίου 2004) το 1953.

Μία σημαντική ιδιότητα με τις διαδικασίες Martingale είναι ότι η σύγκλισή τους είναι σχεδόν πάντα «σίγουρη». Δηλαδή, αν X_n είναι Martingale με: $E(X_n^2) < M < \infty$, για κάποιο M και για κάθε n, τότε υπάρχει τυχαία μεταβλητή (X) τέτοια ώστε: $X_n \xrightarrow{n\to\infty} X$, σχεδόν βέβαια. Η (X_n) συγκλίνει κατά μέσον του τετραγώνου στην X (τετραγωνικά ολοκληρώσιμη) σχεδόν βέβαια, αυτό αποτελεί το θεώρημα Σύγκλισης Martingales (Martingales Convergence theorem).

Σύμφωνα με τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι οι διαδικασίες Martingales παρουσιάζουν πληθώρα εφαρμογών στη οικονομική θεωρία και στην Επιλεκτική Στάση (Optional Stopping).

1.1 Martingales

Ορισμοί

1.1.1 σ-άλγεβρα

Έστω Ω ένα μη κενό σύνολο. Μία κλάση υποσυνόλων f του Ω καλείται σ-άλγεβρα αν έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) $\Omega \in f$ τότε και $\emptyset \in f$.

(ii) Αν $A \in f$ τότε και $A^c \in f$.

(iii) Αν $A_1, A_2, \dots \in f$ (αριθμήσιμη οικογένεια υποσυνόλων του Ω)

τότε και $A_1\ U\ A_2\ UA_3, \dots \in f$.

- Το ζεύγος (Ω, f) καλείται μετρήσιμος χώρος.
- Η μικρότερη σ-άλγεβρα (τετριμμένη) είναι η $f = (\Omega, \emptyset)$.
- Οι σ-άλγεβρες σχετίζονται με δομές πληροφορίας.

1.1.2 Μέτρο

Έστω $(\Omega, \mathfrak{f})$, ένας μετρήσιμος χώρος. Μια συνολοσυνάρτηση

$\mu : \mathfrak{f} \rightarrow [0, \infty]$, καλείται μέτρο αν ισχύουν:

(i) $\mu(\emptyset) = 0,\ \mu(\Omega) = 1$.

(ii) αν $A_i \in \mathfrak{f},\ i \in \mathbb{N}$ και για κάθε ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων

$A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{f}$, τότε: $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

- Η τριάδα $(\Omega, \mathfrak{f}, \mu)$ καλείται χώρος μέτρου.
- Αν για $A_i \in \mathfrak{f},\ i \in \mathbb{N}$, δεν είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους τότε το μέτρο είναι υποαθροιστικό: $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.
- Η απεικόνιση: $\mu : \mathfrak{f} \rightarrow [0,1]$, καλείται μέτρο πιθανότητας αν ικανοποιεί τις παραπάνω δύο ιδιότητες.

1.1.3 Μετρήσιμη συνάρτηση (ή τυχαίο στοιχείο - random element)

Μία συνάρτηση (ξ) από ένα μετρήσιμο χώρο (Ω_1, f_1) σε έναν (Ω_2, f_2), καλείται μετρήσιμη συνάρτηση (ή τυχαίο στοιχείο) αν $\xi^{-1}(B) \in f_1$ για κάθε $B \in f_2$. Δηλαδή, επιστρέφει τα σύνολα του f_2 σε σύνολα του f_1. Το σύνολο $\xi^{-1}(B)$ συμβολίζεται και με $[\xi \in B]$ και ουσιαστικά είναι το σύνολο $\{\omega \in \Omega_1 : \xi(\omega) \in B\}$.

Αν το Ω μπορεί να θεωρηθεί ως δειγματικός χώρος, που συνδέεται με κάποιο τυχαίο πείραμα, μία μετρήσιμη συνάρτηση ξ από τον $(\Omega, \mathfrak{f})$ στον $(\mathcal{R}, B(\mathcal{R}))$ συνήθως καλείται και τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) και συμβολίζεται με X ή Y κ.ο.κ. (μερικές φορές διατηρούμε την ορολογία «μετρήσιμη συνάρτηση» χωρίς να δημιουργείται σύγχυση). Για να είναι μία συνάρτηση $X{:}\,\Omega \to \mathcal{R}$ τυχαία μεταβλητή,αποδεικνύεται ότι αρκεί να ισχύει $[X \ \leq \ x] \in \ F,$ για κάθε x.

1.1.4 Δεσμευμένη μέση τιμή

Έστω ένας χώρος πιθανότητας :$(\Omega, \mathfrak{f}, \mu)$ και X μια τυχαία μεταβλητή και $\mathscr{M}$ μια σ-άλγεβρα. Η δεσμευμένη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X ως προς την $\mathscr{M}$, είναι η τυχαία μεταβλητή $K \,:\, \Omega \ \to \ \mathcal{R}$.

- Η δεσμευμένη μέση τιμή έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) Η K είναι μετρήσιμη ως προς την $\mathscr{M}$ (K - $\mathscr{M}$ μετρήσιμη). Δηλαδή, η K είναι προσαρμοσμένη ως προς την $\mathscr{M}$, αυτό μας λέει ότι όλη η πληροφορία που αφορά την στοχαστική μεταβλητή K μέχρι την χρονική στιγμή t περιέχεται στην σ-άλγεβρα.

(ii) Ισχύει ότι: $\int_A \ Xd\mu = \int_A \ Kd\mu,$ για κάθε $A \ \in \ \mathcal{M}.$

(iii) Η δεσμευμένη μέση τιμή $E(X|\mathcal{M}) = K,$ υπάρχει πάντοτε, αρκεί να ισχύει ότι: $E[X] \ < \infty$ (πεπερασμένο).

1.1.4.1 Ιδιότητες δεσμευμένης μέσης τιμής.

Στην παρούσα υποενότητα θα παρουσιάσουμε της ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής

- Αν $\mathfrak{f}1 \subset \mathfrak{f}2$, τότε $E(E(X \mid f_1) \mid f_2\,) = \ E(E(X \mid f_2) \mid f_1) \ = \ E(X \mid f_1)$.
- Αν υποθέσουμε ότι η τ.μ. X είναι f μετρήσιμη, τότε: E(X | f) =X.

- Αν υποθέσουμε ότι η τ.μ. X είναι ανεξάρτητη ως προς την f, τότε:

$$E(X \mid f) = E[X].$$

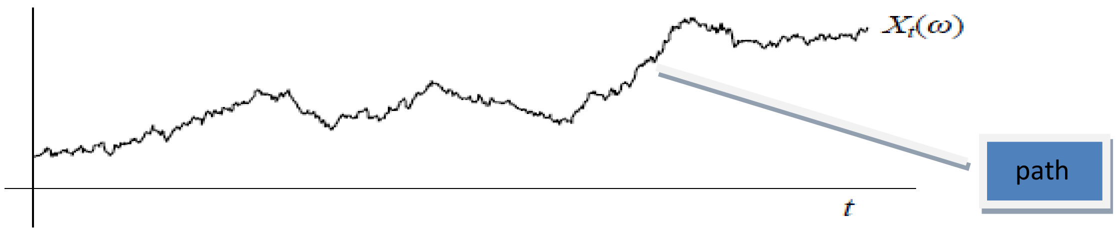
- Αν υποθέσουμε ότι η τ.μ. X και η σ-άλγεβρα $f = (\Omega, \emptyset)$,

  τότε: $E(X \mid f) = E[X]$.

- Αν $f_1 \subset f_2$ ότι η X είναι f_2-μετρήσιμη και η Y είναι f_1-μετρήσιμη, τότε: $E(X\,Y \mid f_1) = YE[X \mid f_1]$.

1.1.5 Στοχαστική διαδικασία (Ανέλιξη)

Στοχαστική ανέλιξη ή διαδικασία καλείται μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών X_t, $t \in [0, \infty)$ (συνεχής χρόνος) με $X_t: (\Omega, \mathfrak{f}, \mu) \to (\mathcal{R}^d, B(\mathcal{R}^d))$. Η X_t εκφράζει μια χρονοσειρά όπως είναι η αξία μιας μετοχής σε συνάντηση με το χρόνο.



Σχήμα 1: Στοχαστική ανέλιξη

1.1.6 Διήθηση (Filtration)

Αν θεωρήσουμε $X_1, X_2, \dots, X_n$ τυχαίες μεταβλητές, $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$. Η τυχαία μεταβλητή X_i είναι μία απεικόνιση: $X_i: \Omega \to \mathscr{R}$. Επίσης αν θεωρήσουμε τον μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathfrak{f})$. Τότε αν $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ μία συλλογή από σ-άλγεβρες, με την ιδιότητα: $f_n \subset f_{n+1}$, για κάθε n, θα ονομάζεται διήθηση (filtration). Γενικότερα η έννοια «διήθηση» αναφέρεται σε μια αυξανόμενη δομή πληροφορίας ($f_1 \subset f_2 \subset f_3 \subset f_4 \subset \dots$). Επίσης, είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι μια τυχαία μεταβλητή (στοχαστική διαδικασία) $\mathrm{X_t}$ είναι προσαρμοσμένη στη (φυσική) διήθηση f_t, αν η $\mathrm{X_t}$ είναι f_t-μετρήσιμη. Δηλαδή, όλη η πληροφορία η οποία αφορά την $\mathrm{X_t}$, περιέχεται στην σ-άλγεβρα f_t μέχρι την χρονική στιγμή t.

1.1.7 Martingales

Αν $\{\mathrm{X_n}, \mathrm{n} \in \mathbb{N}\}$ μια συλλογή από τυχαίες μεταβλητές (στοχαστική διαδικασία) και $\{\mathfrak{f}_\mathrm{n}, \mathrm{n} \in \mathbb{N}\}$ μία συλλογή από σ-άλγεβρες (διήθηση - φυσική διήθηση) και P κάποιο μέτρο πιθανότητας: $P: \mathfrak{f}_n \to [0,1], \mathfrak{f}_n \subset \mathfrak{f}$.

Θα λέμε ότι η $\{\mathrm{X_n}, \mathrm{n} \in \mathbb{N}\}$ είναι martingale ως προς το μέτρο P και την διήθηση $\{\mathfrak{f}_\mathrm{n}, \mathrm{n} \in \mathbb{N}\}$ αν:

(i) $E[|X_n|] < \infty$ για κάθε n$\in \mathbb{N}$. Η X_n είναι ολοκληρώσιμη.

(ii) Για κάθε n$\in \mathbb{N}$ η $\{\mathrm{X_n}\}$ είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση (ή φυσική διήθηση $\mathfrak{f}_t = \sigma(X_u, u \le t)$) $\{\mathfrak{f}_\mathrm{n}\}$, δηλαδή, είναι $\mathfrak{f}_t$- μετρήσιμη.

(iii) $E[X_t|\mathfrak{f}_\mathrm{s}] = X_s$, σχεδόν βέβαια με $s \le t$.

Οι παραπάνω χρόνοι μπορεί να είναι συνεχείς $t \in \mathcal{R}$ (continuous time) ή διακριτοί $t \in \mathbb{N}$ (discrete time).

Η ερμηνεία της (iii) μπορεί να δοθεί ως εξής: σε ένα δίκαιο παιχνίδι, η καλύτερη πρόβλεψη που μπορεί να προκύψει για την X_t τη χρονική στιγμή t έχοντας παρακολουθήσει την έκβαση του παιχνιδιού από τη χρονική στιγμή μηδέν μέχρι και την χρονική στιγμή s, είναι η X_s.

Η $\{\mathrm{X_n}, \mathrm{n} \in \mathbb{N}\}$ είναι μία Supermartingale αν:

(i) $E[|X_n^-|] < \infty$ για κάθε n$\in \mathbb{N}$. Η $X_n^- = \min\,(0, X)$ είναι ολοκληρώσιμη.

(ii) $E[X_t|\mathfrak{f}_s] \leq X_s$, σχεδόν βέβαια με $s \leq t$.

Στην περίπτωση αυτή το παιχνίδι θεωρείται λιγότερο δίκαιο. Και η έκβαση του παιχνιδιού μας δείχνει ότι θα έχουμε ζημία.

Η $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ είναι μία Submartingale αν:

(i) $E[|X_n^+|] < \infty$ για κάθε n$\in \mathbb{N}$. Η $X_n^+ = max\,(0, X)$ είναι ολοκληρώσιμη.

(ii) $E[X_t|\mathfrak{f}_s] \geq X_s$, σχεδόν βέβαια με $s \leq t$.

Στην περίπτωση αυτή το παιχνίδι θεωρείται λιγότερο δίκαιο. Και η έκβαση του παιχνιδιού μας δείχνει ότι θα έχουμε κέρδος.

Παράδειγμα: Αν $Y_1, Y_2, \ldots.$ μια ακολουθία ανεξάρτητων δίτιμων τυχαίων μεταβλητών με $P(Y_i = 1) = 1 - P(Y_i = -1)$ με i=1,2,3,.... Θεωρούμε την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων :

$$X_0 = 0, X_1 = Y_1, X_2 = Y_1 + Y_2, X_3 = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \cdots$$

η στοχαστική διαδικασία $\mathrm{X_i}$ η οποία είναι Martingale ονομάζεται συμμετρικός τυχαίος περίπατος γιατί σε κάθε βήμα κινείται πάνω ή κάτω κατά μία μονάδα. Υποθέτουμε ότι: $E[|X_n|] < \infty$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η $\mathrm{X_n}$ είναι ολοκληρώσιμη. Αν $f_i = \sigma(X_0, X_1, X_2, \ldots)$, είναι η μικρότερη σ - άλγεβρα, η X_n είναι f_i-μετρήσιμη.

$$E[X_{n+1}|f_n] = E[X_n + Y_{n+1}|f_n] = E\left[\underbrace{X_n|f_n}_{X_n \text{ είναι } f_i-\text{μετρήσιμη}}\right] + E\left[\underbrace{Y_{n+1}|f_n}_{Y_{n+1} \text{ ανεξάρτητη της } f_n}\right]$$
$$= X_n + E[Y_{n+1}] = X_n + 0 = X_n$$

Αν τώρα με την παράσταση: e^{aX_n}, συμβολίσουμε τον εκθετικό συμμετρικό τυχαίο περίπατο θα μπορέσουμε να υπολογίσουμε την τιμή c, για την οποία η στοχαστική διαδικασία: $S_n = c^n e^{aX_n}$, είναι Martingale.

Η S_n είναι f_i-μετρήσιμη. Επίσης ισχύει ότι:

$$E[S_{n+1}|f_n] = E[c^{n+1} e^{aX_{n+1}} |f_n] = c^{n+1} E\left[e^{a(X_n+Y_{n+1})} |f_n\right]$$
$$= c^{n+1} e^{aX_n} E[e^{aY_{n+1}} |f_n] = cS_n \frac{e^a + e^{-a}}{2} = S_n$$

$$άρα\ c = \frac{2}{e^a + e^{-a}}$$

Επίσης:

$$E[|S_n|] = E[|c^n e^{aX_n}|] = c^n E[|e^{aX_n}|] = c^n E[|e^{aX_n}|] = c^n E\left[|e^{a(Y_1+Y_2+Y_3+\cdots)}|\right]$$
$$= c^n \left(\frac{e^a + e^{-a}}{2}\right)^n = \left(\frac{2}{e^a + e^{-a}}\right)^n \left(\frac{e^a + e^{-a}}{2}\right)^n = 1 < \infty$$

Κεφάλαιο 2

2. Εισαγωγή στις έννοιες του Χρόνου Στάσης και Επιλεκτικής Στάσης

2.1 Stopping time (Χρόνος Στάσης)

Ορισμός (Discrete time): Αν θεωρήσουμε ένα χώρο πιθανοτήτων εφοδιασμένο με μία σ-άλγεβρα: $\left(\Omega, f, \left(f_n\right)_{n\geq 0}, P\right)$. Η $\left(f_n\right)_{n\geq 0}$, αποτελεί μία διήθηση, δηλαδή μια αυξανόμενη δομή πληροφορίας μέχρι και τη χρονική στιγμή n. Αν τ είναι μία τυχαία μεταβλητή η οποία αποτελεί μία απεικόνιση $\tau\colon \Omega \to \{0,1,2,\dots,\infty\}$, θα ονομάζεται Χρόνος Στάσης (stopping time) ή χρόνος διακοπής ή χρόνος Markov ως προς την διήθηση $\left(f_n\right)_{n\geq 0}$ αν $\{\tau \leq n\} \in \left(f_n\right)_{n\geq 0}$. Αν $\tau < \infty$, τότε λέμε ότι ο χρόνος Στάσης είναι πεπερασμένος σχεδόν βέβαια. Η ερμηνεία της f_n, είναι η πληροφορία που έχουμε μέχρι και τη στιγμή n.

Αν τώρα με X_n συμβολίσουμε μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών η οποία είναι προσαρμοσμένη στη διήθηση f_n, γεγονός που κάνει την X_n, f_n-μετρήσιμη για κάθε n.

Το πρόβλημα που θα προσπαθήσουμε να λύσουμε είναι να απαντήσουμε στην ερώτηση, πότε μπορούμε να δράσουμε ώστε να «βγούμε» κερδισμένοι από την απόφασή μας αυτή, δηλαδή, σε ποια χρονική στιγμή και επίσης με το μέγιστο δυνατό κέρδος. Ο χρόνος αυτός που θα αποφασίσουμε να δράσουμε αποτελεί ένα χρόνο διακοπής (stopping time).

Για παράδειγμα, αν στην κατοχή μας έχουμε ένα Αμερικάνικο Δικαίωμα Αγοράς (Call Option), το οποίο μπορούμε να το εξασκήσουμε οποιαδήποτε στιγμή μέχρι την λήξη του, με $K > 0$ τιμή εξάσκησης (strike price). Φυσικά αυτό που θα θέλαμε θα ήταν να το εξασκήσουμε την στιγμή (τ^*) που θα είναι προς όφελός μας (long position) και αν λάβουμε υπόψη την αξία του χρήματος τότε παρατηρούμε:

$$V_* = E\left[\left(e^{-(1+r)\tau^*}(X_{\tau^*} - K)^+\right)\right] = sup_{\tau>0} E\left[\left(e^{-(1+r)\tau}(X_\tau - K)^+\right)\right],$$

Όπου $(\mathrm{X_t} - \mathrm{K})^+ = \max\{\mathrm{X_t} - \mathrm{K}, 0\} = \begin{cases} \mathrm{X_t} - \mathrm{K}, & \mathrm{X_t} > K \\ 0, & \mathrm{X_t} \leq \mathrm{K} \end{cases}$.

Ο χρόνος $\tau^* = inf(\tau \geq 0\colon V = V_{max})$, στον οποίο η τιμή του Δικαιώματος παίρνει την μέγιστη τιμή για πρώτη φορά, ονομάζεται χρόνος Βέλτιστης Στάσης (Optimal Stopping time) και είναι μία τυχαία μεταβλητή. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι για να καθορίσουμε ακριβώς την τιμή του θα πρέπει να περάσουμε τον χρόνο αυτό θα πρέπει για την στοχαστική μας διαδικασία να έχουμε πληροφορία μέχρι την στιγμή αυτή και δεν μας ενδιαφέρει η πληροφορία από το μέλλον.

Επιπρόσθετα, αναφέρεται ότι αν έχουμε μία στοχαστική διαδικασία X_t προσαρμοσμένη στην φυσική διήθηση $(\mathfrak{f}_n)_{n\geq 0}$, και s και t δύο χρόνοι Στάσης για τους οποίους ισχύει $s \leq t$ τότε ισχύει και $(\mathfrak{f}_s) \leq (\mathfrak{f}_t)$, αυτό το αποτέλεσμα είναι προφανές. Ένα άλλο παράδειγμα χρόνου Στάσης είναι το εξής: η πρώτη συνάντηση της στοχαστικής διαδικασίας X_t σε ένα υποσύνολο $A \in \Omega$: $T(A) = inf\ \ (n \geq 0\colon\ X_n \in A)$

και $1_{\{T(A)=n\}}X_n = \begin{cases} 1, \alpha\nu\ X_n \in A \quad \kappa\alpha\iota\ X_i \notin A\,, i = 0, \dots, n-1 \\ \qquad 0\,,\ \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma. \end{cases}$.

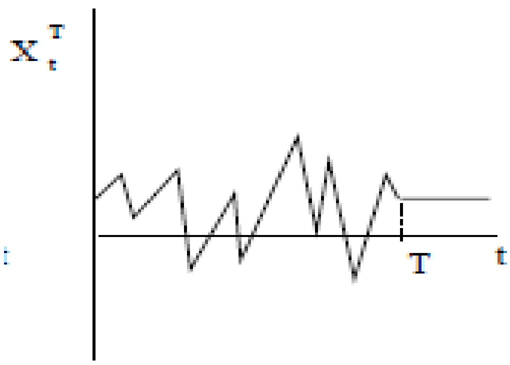
Ο $T(A) = n$, είναι χρόνος Στάσης όπως επίσης ισχύει και γενικά για τον χρόνο της n επίσκεψης της στοχαστικής διαδικασίας στο υποσύνολο A. Αλλά ο χρόνος της τελευταίας επίσκεψης δεν είναι χρόνος Στάσης γιατί δεν έχουμε πληροφορία από το μέλλον.

2.2 Optional Stopping (Επιλεκτική Στάση)

Σε αυτή την ενότητα θα εισάγουμε την έννοια της επιλεκτικής Στάσης (**Optional stopping**) και θα δούμε τι θα συμβεί σε μια στοχαστική διαδικασία η οποία είναι Martingale ή Supermartingale ή Submartingale αν την σταματήσουμε σε κάποιο χρόνο T, ο οποίος είναι χρόνος Στάσης (stopping time).

Αν θεωρήσουμε ότι T, είναι ένας χρόνος Στάσης και αποφασίζουμε να σταματήσουμε την στοχαστική διαδικασία στο χρόνο αυτό, τότε, όπως παρατηρούμε και στο παρακάτω σχήμα, παραμένει σταθερή στην τιμή X_T. Με βάση αυτό η σταματημένη διαδικασία έχει την μορφή:

$$X_t^T := X_{t^\wedge T} = \begin{cases} X_t \,, \alpha\nu \;\; t < T(\omega) \\ X_{T,} \;\; \alpha\nu \;\; t \geq T(\omega) \end{cases}.$$



Σχήμα 2: Επιλεκτική Στάση στο χρόνο T

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε και να αποδείξουμε ότι μια σταματημένη Martingale είναι επίσης Martingale και ισχύει $E[X_{n^\wedge T}] = E[X_1] = σταθερό$. Το ίδιο ισχύει και για την Supermartingale ή Submartingale διαδικασία.

Απόδειξη:

Όπου: $X_n^T := X_{n^\wedge T} = \begin{cases} X_t \,, αν \;\; n \leq T \\ X_{T,} \;\; αν \;\; n > T \end{cases}$ είναι μία σταματημένη διαδικασία

και $\alpha_n = \begin{cases} 1 \,, αν \;\; n \leq T \\ 0 \;\; αν \;\; n > T \end{cases}$ είναι μία στοχαστική διαδικασία για την οποία ισχύει $\alpha_n \in \; f_{n-1}$, άρα η α_n είναι προβλέψιμη.

Αν $n \leq T$, τότε $X_{n^\wedge T} = X_n$

Οπότε:

$$\begin{aligned} X_{n^\wedge T} - X_0 = X_n - X_0 \\ &= \alpha_n(X_n - X_{n-1}) + \alpha_{n-1}(X_{n-1} - X_{n-2}) + \alpha_n(X_n - X_{n-1}) + \cdots \\ &+ \alpha_1(X_1 - X_0) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i(X_i - X_{i-1}) = (X \;\cdot a)_n \end{aligned}$$

αν $n > T$, τότε $X_{n^\wedge T} = X_T$

Οπότε:

$$\begin{aligned} X_{n^\wedge T} - X_T = X_T - X_0 \\ &= \alpha_T(X_T - X_{T-1}) + \alpha_{T-1}(X_{T-1} - X_{T-2}) + \alpha_T(X_T - X_{T-1}) + \cdots \\ &+ \alpha_1(X_1 - X_0) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i(X_i - X_{i-1}) = (X \;\cdot a)_n \end{aligned}$$

Όπου $(X \;\cdot a)_n = Z_n$ είναι ένας μετασχηματισμός Martingale της X_n ο οποίος είναι και αυτός Martingale, γιατί $E\left[Z_n | f_{n-1}\right] = Z_{n-1}$

$$Z_n = \alpha_1(X_1 - X_0) + \cdots . + \alpha_n(X_n - X_{n-1})$$

Απόδειξη:

$$E\left[Z_{n+1}|f_n\right] = E\left[\underbrace{\alpha_1(X_1 - X_0) + \cdots. + \alpha_n(X_n - X_{n-1})}_{f_n\ \mu\varepsilon\tau\rho\acute{\eta}\sigma\iota\mu\eta} + \alpha_{n+1}(X_{n+1} - X_n)\,\middle|\, f_n\right]$$

$$= \alpha_1(X_1 - X_0) + \cdots. + \alpha_n(X_n - X_{n-1}) + E\left[\alpha_{n+1}(X_{n+1} - X_n)\,\middle|\, f_n\right]$$

$$= Z_n + \alpha_{n+1} E\left[\underbrace{(X_{n+1} - X_n)}_{\alpha\nu\varepsilon\xi\acute{\alpha}\rho\tau\eta\tau\eta\ \tau\eta\varsigma\ f_n}\,\middle|\, f_n\right] = Z_n + 0 = Z_n$$

Άρα η Z_n είναι Martingale, αν η X_n είναι Martingale. $E\left[Z_{n+1}|f_n\right] = Z_n$.

Άρα η Z_n είναι Supermartingale, αν η X_n είναι Supermartingale. $E[Z_{n+1}|f_n] \geq Z_n$.

Άρα η Z_n είναι Submartingale, αν η X_n είναι Submartingale. $E[Z_{n+1}|f_n] \geq Z_n$.

Οπότε, αφού αποδείξαμε ότι ένας μετασχηματισμός Martingale της X_n είναι και αυτός Martingale, συνεπάγεται ότι η $X_{n^\wedge T}$, είναι και αυτή Martingale. Δηλαδή ισχύει: $\mathrm{E}[\mathrm{X}_{n^\wedge T}] = \mathrm{E}[\mathrm{X}_1] =$ σταθερό.

Κεφάλαιο 3

3. Διακριτός χρόνος-Optimal Stopping (Βέλτιστη Στάση)

"Optimal Stopping Problems are concerned with the control of random sequences in gambling and statistical decision".

Richard R. Weber
May, 1975
Downing College, Cambridge.

3.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε το πρόβλημα της Βέλτιστης Στάσης (**Optimal stopping Problem**) και θα παρουσιάσουμε βασικά αποτελέσματα αυτής της θεωρίας, αρχικά στον διακριτό χρόνο και στην συνέχεια στον συνεχή χρόνο. Στον διακριτό και στον συνεχή χρόνο τα αποτελέσματα θα εξαχθούν χρησιμοποιώντας την θεωρία των Martingales (Martingale approach), καθώς και την Μαρκοβιανή προσέγγιση (Markovian approach).

Η θεωρία της Βέλτιστης Στάσης αποτελείται από ένα σύνολο από τεχνικές με τις οποίες υπολογίζουμε τον καλύτερο χρόνο, στον οποίο μπορούμε να παρέμβουμε σε μία στοχαστική διαδικασία.

Η θεωρία αυτή έχει πληθώρα εφαρμογών, με βασικότερη αυτή στην οικονομία. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η εφαρμογή της Βέλτιστης Στάσης στα Αμερικάνικα Παράγωγα (American Options) και συγκεκριμένα στα Call Options ή τα Put Options. Το πρόβλημα αυτό πραγματεύεται την εύρεση του καλύτερου χρόνου ώστε ό κάτοχος του option να «δράσει» και να αποκομίσει από την κίνηση αυτή το μέγιστο κέρδος. Ο παραπάνω χρόνος αποτελεί τυχαία μεταβλητή.

Τα προβλήματα της Βέλτιστης Στάσης είναι πολύ δημοφιλή, λόγω των πολλών εφαρμογών καθώς και τη μεγάλη τους ιστορία. Το “secretary problem”, το οποίο πρώτη φορά παρουσιάστηκε ως άρθρο, το 1960 στο επιστημονικό περιοδικό “Scientific American”. Η λύση σε αυτό το πρόβλημα «δόθηκε» λύση το 1963 από τον E. B. Dynkin, χρησιμοποιώντας την θεωρία της βέλτιστής Στάσης. Το συγκεκριμένο πρόβλημα αφορά έναν εργοδότη, ο οποίος θέλει να προσλάβει την «καλύτερη» γραμματέα, από ένα σύνολο υποψήφιων, οι οποίες προσήλθαν στην συνέντευξη για να διεκδικήσουν την συγκεκριμένη θέση. Ο εργοδότης κάθε φορά που τελειώνει την συνέντευξη με μία υποψήφια και με τις πληροφορίες που έχει αποκτήσει, μπορεί να την συγκρίνει μόνο με αυτές που έχει δει. Η κάθε υποψήφια, θα πρέπει να τονίσουμε ότι επιλέγεται τυχαία για να εξεταστεί από τον εργοδότη. Επίσης, σε κάθε συνέντευξη θα πρέπει να αποφασίζει αν θα πρέπει να προσλάβει την υποψήφια γραμματέα ή να την απορρίψει, χωρίς καμία πιθανότητα να την επαναπροσλάβει. Ο σκοπός του εργοδότη είναι να μεγιστοποιήσει την πιθανότητα να επιλέξει την καλύτερη υποψήφια ανάμεσα σε όλες, με βάση μια πολιτική επιλογής.

Ένα άλλο πρόβλημα Βέλτιστης Στάσης, είναι το Two-Armed Bandit Problem, το οποίο πρώτος το διατύπωσε ο H. Robbins το 1952. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να παρουσιαστεί και με πιο σύνθετη μορφή, ως Multy -Armed Bandit Problem. Αν θεωρήσουμε έναν παίχτη μέσα σε καζίνο, ο οποίος όταν τραβάει έναν από τους δύο βραχίονες ενός παιχνιδιού, αντιμετωπίζει ένα Two-Armed Bandit Problem. Στη συνέχεια, αυτό που θα περιμένει είναι είτε να κερδίσει είτε να μην πάρει τίποτα από το μηχάνημα. Όταν ο παίχτης τραβάει τον βραχίονα 1, αυτός είτε θα κερδίσει με πιθανότητα P_1 είτε δεν θα πάρει τίποτα με πιθανότητα $1 - P_1$. Όμοια και για τον βραχίονα 2. Αυτό που έχει να αποφασίσει ο παίχτης είναι σε ποιο χρόνο θα σταματήσει να παίζει με τον ένα βραχίονα και να συνεχίσει με τον άλλον, με σκοπό να μεγιστοποιήσει το συνολικό κέρδος. Το πρόβλημα όμως της μεγιστοποίησης μελετήθηκε αργότερα από τους J.C. Gittins & D.M. Jones.

Ένα τελευταίο πρόβλημα Βέλτιστης Στάσης που αξίζει να αναφέρουμε, είναι το sequential probability ratio test. Το 1947 ο A. Walt μελέτησε τους ελέγχους υποθέσεων με διαδοχική δειγματοληψία. Υπέθεσε αρχικά ότι αν, $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ είναι ανεξάρτητα, ομοιογενή κατανεμημένα δείγματα (i.i.d.), από μια κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας f και χρησιμοποιήσουμε τον έλεγχο στατιστικών υποθέσεων στην απλή περίπτωση θα ειδικεύσουμε την στατιστική υπόθεση: της μηδενικής υπόθεσης (null hypothesis) $H_0: f = f_0$ και της εναλλακτικής υπόθεσης (alternative hypothesis) $H_1: f = f_1$. Με τον έλεγχο αυτό θα απορρίψουμε ή οχι την μηδενική υπόθεση. Κόστη δημιουργούνται κάθε φορά που επιλέγουμε ένα δείγμα, καθώς και σε κάθε λανθασμένη τελική μας απόφαση. Αυτό που επιθυμούμε, είναι να καθορήσουμε μια μικρή πιθανότητα η οποία θα αποτελεί την μέγιστη πιθανότητα εσφαλμένης απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης καθώς και να εξάγουμε όσο το δυνατόν μικρότερα δείγματα. Η πιθανότητα αυτή είναι το επίπεδο σημαντικότητας α και εκφράζει την πιθανότητα να απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση όταν αυτή είναι αληθής. Σε αυτόν τον έλεγχο στην πραγματικότητα ενδιαφερόμαστε για τον χρόνο Στάσης (τ) στον οποίο θα πρέπει να σταματήσουμε τη δειγματοληψία καθώς και για έναν κανόνα (d), με τον οποίο θα αποφασίζουμε αν θα δεχτούμε την μηδενική υπόθεση ή την εναλλακτική. Το ζεύγος (τ, d) ονομάζεται διαδοχική διαδικασία λήψης αποφάσεων. Η επιλογή της απόφασης d, εξαρτάται από την επιλογή του χρόνου Στάσης τ ο οποίος εξαρτάται από τα δείγματα: $x_1, x_2, \ldots, x_\tau$. Ο τελευταίος συλλογισμός αποτελεί ένα πρόβλημα Βέλτιστης Στάσης με βασικό σκοπό να βρούμε τη βέλτιστη λύση:(τ^*, d^*).

3.2 Martingale approach

3.2.1 Εισαγωγή

Ας επανέλθουμε τώρα στο αρχικό μας παράδειγμα που συζητήσαμε στην ενότητα (2.1). Αν αποφασίσουμε να αντιδράσουμε μετά από χρόνο n, ο χρόνος αυτός αντίδρασής ονομάζεται χρόνος Διακοπής (μία τυχαία μεταβλητή), $\tau(n) \in T[n, N]$ τέτοιος ώστε:

$$V_{[n,N]} = E\left[X_{\tau(n)}\right] = \ sup_{\tau(n) \in T[n,N]} E[X_\tau]$$

Όπου $n = 0,1, \ldots., N$ ή $0 \leq n \leq N$. Επίσης όπου (V) η αξία του τίτλου που έχει ο κάτοχος. Ο χρόνος διακοπής ορίζεται σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$\tau(\mathrm{n}, \mathrm{N}) = \inf\{n \leq k \leq N\colon\ S_k^N = \ X_\mathrm{k}\}$$

Μια κρίσιμη ερώτηση είναι: τί πραγματεύεται το πρόβλημα της βέλτιστης Στάσης;

Το πρόβλημα της Βέλτιστης Στάσης αναζητά λύση στην ισότητα.

$$V_{[\mathrm{n,N}]} = E\left[X_{\tau(\mathrm{n})}\right] = \ sup_{\tau(\mathrm{n}) \in \mathrm{T}[\mathrm{n,N}]} E[X_\tau]$$

Μια διαισθητική ερμηνεία της λύσης είναι ότι, ο καλύτερος χρόνος που μπορούμε να δράσουμε είναι ο $\tau(\mathrm{n}, \mathrm{N})$, ώστε το κέρδος $V_{[\mathrm{n,N}]}$ από αυτή την κίνηση να είναι το μέγιστο.

Γενικά, με το Optimal Stopping problem προσπαθούμε να υπολογίσουμε τον βέλτιστο χρόνο Στάσης (Optimal Stopping time), στον οποίο επιτυγχάνεται το μέγιστο (supremum), με κύριο σκοπό να υπολογίσουμε με ακρίβεια το κέρδος $V_{[\mathrm{n,N}]}$. Στα προβλήματα βελτιστοποίησης χρησιμοποιούνται οι τεχνικές του δυναμικού προγραμματισμού (dynamic programming).

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε το πρόβλημα της Βέλτιστης Στάσης, χρησιμοποιώντας την θεωρία των Martingales.

3.2.2 The Snell envelop

Η επαναληπτική μέθοδος (The method of backward induction)

Η κατασκευή στης στοχαστικής διαδικασίας: S_k^N με $k = 0,1,\ldots\ldots,N$, είναι αυτή που θα καθορίσει την λύση. Για την κατασκευή της ακολουθία από τυχαίες μεταβλητές $(S_k^N)_{0\leq k\leq N}$, θα χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω διαδικασία γνωστή και ως Snell envelope:

$$S_k^N = X_{\mathrm{N}} \qquad \gamma\iota\alpha\ k = N$$

$$S_k^N = \max(X_k\,, E[S_{k+1}^N|\mathfrak{f}_k]) \qquad \gamma\iota\alpha\ k = N-1, N-2, \ldots, 0$$

όπου $\mathfrak{f}_k = \sigma(X_1\,, X_2\,, \ldots.\,, X_k\,)$ είναι η μικρότερη σ- άλγεβρα που παράγεται από τις τυχαίες μεταβλητές.

Αρχικά, θα πρέπει να επισημάνουμε ότι στο τέλος του χρόνου, δηλαδή στην λήξη του, ο κάτοχος του τίτλου δεν θα έχει άλλη επιλογή από το να δράσει στον χρόνο $\boldsymbol{k = N}$, σταματάει στον χρόνο αυτόν και κερδίζει - έχει απολαβές: $S_N^N = X_{\mathrm{N}}$.

Στον αμέσως προηγούμενο χρόνο $\boldsymbol{k = N-1}$, ο κάτοχος του τίτλου θα έχει δύο επιλογές: μπορεί είτε να σταματήσει οπότε θα κερδίσει $S_{N-1}^N = X_{\mathrm{N}-1}$, είτε να συνεχίσει και θα κερδίσει: $S_{N-1}^N = E[S_N^N|\mathfrak{f}_{N-1}]$, η απόφαση του αυτή εξαρτάτε από την πληροφορία την οποία περιέχεται στην σ-άλγεβρα f_{N-1} και μόνο. Η απόφασή του αν θα συνεχίσει ή θα εξασκήσει το δικαίωμα που κατέχει εξαρτάτε αν στον συγκεκριμένο χρόνο (κόμβο), εμφανίζεται: $X_{\mathrm{N}-1} < E[S_N^N|\mathfrak{f}_{N-1}]$, δηλαδή το ποσό της απολαβής που θα πάρει αφού εξασκήσει το δικαίωμα είναι μικρότερη από την τιμή του τίτλου αν το κρατούσε για μελλοντική χρήση. Οπότε σε αυτή την περίπτωση δεν τον συμφέρει να δράσει και θα συνεχίσει στο επόμενο βήμα το οποίο είναι $E[S_{k+1}^N|\mathfrak{f}_k]$. Στην περίπτωση που στον χρόνο $n = N-1$, θα εμφανίζεται: $X_{\mathrm{N}-1} \geq E[S_N^N|\mathfrak{f}_{N-1}]$, τότε ο κάτοχος του τίτλου θα δράσει, γιατί τώρα το ποσό της απολαβής θα είναι μεγαλύτερο από την τιμή του τίτλου αν το κρατούσε για να τον εξασκήσει για μελλοντική χρήση. Συνεπώς, σε αυτή την περίπτωση τον συμφέρει να σταματήσει στον χρόνο αυτό και να εξασκήσει το δικαίωμά του.

Συνεχίζοντας, για τον χρόνο $\boldsymbol{k = N-2}$, εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία μέχρι τελικά να φτάσουμε στον $\boldsymbol{k = 0}$.

Ο χρόνος στον οποίο ο κάτοχος του τίτλου θα αποφασίσει να δράσει είναι τυχαίος, και αυτό τον κάνει χρόνο Διακοπής (Stopping time). Ο Βέλτιστος χρόνος Στάσης θα προκύψει από την πληροφορία που έχουμε μέχρι τον χρόνο N και δεν θα τον ξεπερνά

- Αν, $n = 0,1, \ldots, N$ τότε θεωρούμε το

$\tau_n^N = \tau(\mathrm{n}, \mathrm{N}) = \inf\{n \leq k \leq N : S_k^N = X_{\mathrm{k}}\}$ χρόνο Διακοπής (Stopping time).

Είναι σημαντικό να επισημάνουμε, ότι η μελέτη της Βέλτιστης Στάσης πραγματοποιείται σε πεπερασμένο χρόνο (finite horizon), δηλαδή για $N < \infty$.

Γενικά, η στοχαστική διαδικασία $(S_k^N)_{0 \leq k \leq N}$, καθώς ο χρόνος Στάσης: τ_n^N καθορίζουν την λύση στο πρόβλημα της Βέλτιστης Στάσης.

Στην επόμενη ενότητα, θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε το θεώρημα στο οποίο η αναδρομική μέθοδος έχει πολύ σπουδαία συμβολή.

Θεώρημα 1

i) Θα δείξουμε ότι ο χρόνος Στάσης:

$$\tau_n^N = \mathrm{\tau(n,N)} = \inf\{n \leq k \leq N: S_k^N = X_\mathrm{k}\}$$

ο οποίος επιτυγχάνεται πάντα, είναι Βέλτιστος (Optimal Stopping time)

και η αξία του τίτλου είναι: $V_{[\mathrm{n,N}]} = V_n^N = E[S_n^N] = E\left[X_{\mathrm{\tau(n,N)}}\right]$.

ii) Αν ο τ^* είναι ο Βέλτιστος Χρόνος Στάσης, τότε ισχύει $\mathrm{\tau(n,N)} \leq \tau^*$, σχεδόν βέβαια.

iii) Επίσης, η ακολουθία: $(S_k^N)_{n\leq k\leq N}$, για όλα τα $k \in [n, N]$ είναι η μικρότερη Supermartingale, η οποία κυριαρχεί στην $(X_k^N)_{n\leq k\leq N}$.

iv) Η σταματημένη διαδικασία $\left(S_{k\wedge\mathrm{\tau(n,N)}}^N\right)_{n\leq k\leq N}$, είναι Martingale.

Απόδειξη (i)

- Εκ κατασκευής ισχύει ότι: $S_k^N = \max(X_k, E[S_{k+1}^N|\mathfrak{f}_k]) \geq E[S_{k+1}^N|\mathfrak{f}_k]$, γεγονός που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η S_{k+1}^N είναι μία Supermartingale και κατ΄ επέκταση ισχύει: $S_k^N \geq X_k$.

- Στη λήξη του χρόνου θα πρέπει πάντα να δρούμε, και θα γνωρίζουμε ακριβώς το ποσό, ως εκ τούτου, για $n = N$ ισχύει $S_n^N = X_N$. Επίσης, αν υποθέσουμε ότι οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν και για $n = N, N-1, \ldots\ldots, k$ με $k \geq 1$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για k: $S_k^N \geq E[S_\tau^N|\mathfrak{f}_k]$, για κάθε $\tau \in \mathrm{T}[k, \mathrm{N}]$,

- Θα δείξουμε ότι $S_{k-1}^N \geq E[X_\tau^N|\mathfrak{f}_{k-1}]$, για κάθε $\tau \in \mathrm{T}[k-1, \mathrm{N}]$. Αν θεωρήσουμε $\tau \in \mathrm{T}[k-1, \mathrm{N}]$, για $\tau = k-1$ ή $\tau \geq k$ τότε :

  $\bar{\tau} = max(\tau, k) = \tau \vee k = k$, τότε προκύπτει:

$$X_t = 1_{\tau = k-1} X_{t-1} + 1_{\tau \geq k} X_{\bar{\tau}}$$

- Αφού: $\bar{\tau} = max(\tau, k) \in T[k, N]$ και επειδή: $\tau \in \mathrm{T}[k, \mathrm{N}]$ ισχύει για

$$\{\tau \geq k\} = \{\tau \leq k-1\}^c \in \mathfrak{f}_{k-1}.$$

- Θα δείξουμε τώρα ότι:

$$S_n^N \geq E[X_\tau|\mathfrak{f}_n] \text{ όπου } n = k-1$$

Άρα:

$$E[X_\tau|\mathfrak{f}_{k-1}] = E[1_{\tau = k-1} X_{t-1} + 1_{\tau \geq k} X_{\bar{\tau}}|\mathfrak{f}_{k-1}]$$
$$= E[1_{\tau = k-1} X_{t-1}|\mathfrak{f}_{k-1}] + E[1_{\tau \geq k} X_{\bar{\tau}}|\mathfrak{f}_{k-1}] =$$

$$= E[\underbrace{1_{\tau = k-1} X_{t-1}}_{f_{n-1}-\mu\varepsilon\tau\rho\acute{\eta}\sigma\iota\mu\eta} | f_{k-1}] + E[1_{\tau \geq k} X_{\bar{\tau}} | f_{k-1}]$$

$$= 1_{\tau = k-1} X_{t-1} + 1_{\tau \geq k} E[X_{\bar{\tau}} | f_{k-1}] = 1_{\tau = k-1} X_{t-1}$$

$$+ 1_{\tau \geq k} E[E[X_{\bar{\tau}} | f_k] | f_{k-1}]$$

$$\leq \xrightarrow{E[X_{\bar{\tau}}|f_k] \leq S_k^N}$$

$$\xrightarrow{X_{\kappa-1} \leq S_{k-1}^N \ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ E[S_k^N | f_{k-1}] \leq S_{k-1}^N} \ \leq \ 1_{\tau = k-1} S_{k-1}^N + 1_{\tau \geq k} S_{k-1}^N$$

$$= S_{k-1}^N$$

και η απόδειξή μας ολοκληρώθηκε.

- Θα δείξουμε τώρα ότι:

$$S_n^N = E\left[X_{\tau(n,N)} \middle| f_n\right], \text{ για κάθε n.}$$

Επίσης ισχύει για k : $S_k^N = E\left[X_{\tau(k,N)} \middle| f_k\right]$.

Πριν ξεκινήσουμε την απόδειξη μας, γνωρίζεται ότι, για να δείξουμε ότι ισχύει η ανωτέρω ισότητα για $n = k - 1$, αρκεί να ελέγξουμε ότι, οι ανισότητες της προηγούμενης απόδειξης μετατρέπονται σε ισότητες όταν $\tau = \tau(\kappa - 1, N)$.

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k - 1$: $S_{k-1}^N = E\left[X_{\tau(k-1,N)} \middle| f_{k-1}\right]$.

$$E\left[X_{\tau(k-1,N)} \middle| f_{k-1}\right] = E\left[1_{\tau(k-1,N) = k-1} X_{t-1} + 1_{\tau(k-1,N) \geq k} X_{\tau(k,N)} \middle| f_{k-1}\right]$$

$$= E\left[1_{\tau(k-1,N) = k-1} X_{t-1} | f_{k-1}\right] + E\left[1_{\tau(k-1,N) \geq k} X_{\tau(k,N)} \middle| f_{k-1}\right] =$$

$$E[\underbrace{1_{\tau(k-1,N) = k-1} X_{t-1}}_{f_{n-1}-\mu\varepsilon\tau\rho\acute{\eta}\sigma\iota\mu\eta} | f_{k-1}] + E[1_{\tau(k-1,N) \geq k} X_{\tau(k,N)} | f_{k-1}] =$$

$$1_{\tau(k-1,N) = k-1} X_{t-1} + 1_{\tau(k-1,N) \geq k} E[X_{\bar{\tau}} | f_{k-1}] = 1_{\tau = k-1} X_{t-1} +$$

$$1_{\tau \geq k} E\left[E\left[X_{\tau(k-1,N)} \middle| f_k\right] | f_{k-1}\right] =$$

$$\xrightarrow{\tau(k-1,N) = k-1 \ \ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \ X_{\kappa-1} = S_{k-1}^N}$$

$$\xrightarrow{\tau(k-1,N) \geq k \ \ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ E[S_k^N | f_{k-1}] = S_{k-1}^N} \ = \ 1_{\tau(k-1,N) = k-1} S_{k-1}^N + 1_{\tau(k-1,N) \geq k} S_{k-1}^N =$$

S_{k-1}^N. Οπότε αποδείξαμε ότι ισχύει για $n = k - 1$.

- Επίσης θα δείξουμε ότι ό χρόνος διακοπής: $\mathrm{\tau}(n, \mathrm{N})$, αποτελεί Βέλτιστη Στάση στην $V_{[\mathrm{n,N}]} = E\left[X_{\mathrm{\tau(n)}}\right] = sup_{\mathrm{\tau(n)\in T[n,N]}} E[X_{\mathrm{\tau}}]$.

Παίρνοντας την μέση τιμή στην: $S_n^N = E\left[X_{\tau(n,N)} | \mathfrak{f}_n\right] \geq E[X_\tau | \mathfrak{f}_n]$, παρατηρούμε ότι: $E[S_n^N] \geq E\left[E[X_\tau | \mathfrak{f}_n]\right] = EX_\tau = V_{[\mathrm{n,N}]} = sup_{\mathrm{\tau(n)\in T[n,N]}} E[X_{\mathrm{\tau}}]$.

Άρα: $E[S_n^N] \geq V_{[\mathrm{n,N}]}$.

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε και το αποτέλεσμα της παραπάνω απόδειξης θα έχουμε: $E[S_n^N] = EX_{\tau(n,N)}$ από το οποίο φαίνεται ότι: $E[S_n^N] \leq V_{[\mathrm{n,N}]}$.

Οπότε από τις δύο παραπάνω ανισότητες, προκύπτει ότι:

$E[S_n^N] = V_{[\mathrm{n,N}]}$ και $E[S_n^N] = EX_{\tau(n,N)}$ άρα $V_{[\mathrm{n,N}]} = EX_{\tau(n,N)}$.

Απόδειξη (ii):

Αν στον χρόνο (τ^*) εμφανίζεται μία Βέλτιστη Στάση (Optimal Stopping time) τότε από την $V_{[\mathrm{n,N}]} = E\left[X_{\mathrm{\tau(n)}}\right] = sup_{\mathrm{\tau(n)\in T[n,N]}} E[X_{\mathrm{\tau}}]$ θα έχουμε

$\mathrm{\tau(n, N)} \leq \tau^*$ σχεδόν βέβαια.

Αν πάρουμε τ^* τότε έχουμε: $S_{\tau^*}^N = X_{\tau^*}$, σχεδόν βέβαια. Αν δεν ισχύει αυτό τότε αν χρησιμοποιήσουμε ότι $S_k^N \geq X_{\mathrm{k}}$, επίσης για όλα τα $k \in [n, N]$.

Από τον αλγόριθμο: $S_n^N = X_{\mathrm{N}}\ για\ n = N\ και\ S_k^N = \max\left(X_{\mathrm{N}}, E[S_{k+1}^N | \mathfrak{f}_k]\right)$ βγάζουμε το συμπέρασμα $S_{\tau^*}^N \geq X_{\tau^*}$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι: $X_{\tau^*} \leq S_{\tau^*}^N$ με $P\left(X_{\tau^*} \leq S_{\tau^*}^N\right) > 0$ και με τη βοήθεια, από το Optimal sampling theorem, τότε αν εφαρμόσουμε σε αυτή την μέση τιμή: $E[X_{\tau^*}] \leq E[S_{\tau^*}^N] = E[S_n^N] = V_n^N$.

Μία χρήσιμη παρατήρηση στην απόδειξη είναι ότι η ακολουθία $(S_k^N)_{n\le k\le N}$ για όλα τα $k \in [n, N]$ είναι η μικρότερη Supermartingale η οποία κυριαρχεί στην $(X_k^N)_{n\le k\le N}$.

Από αυτά συνεπάγεται ότι ή παραπάνω ανισότητα αντιβαίνει το γεγονός ότι η τ^* είναι μία Optimal Stopping time.

Οπότε οδηγούμαστε στην περίπτωση ότι: $S_{\tau^*}^N = X_{\tau^*}$, σχεδόν βέβαια, οπότε τελικά έχουμε $\tau(\mathrm{n}, \mathrm{N}) \le \tau^*$, σχεδόν βέβαια.

Απόδειξη (iii)

Από την αναδρομική επαναληπτική μέθοδο (Snell envelop), για $n = N-1, N-2, \dots, 0$, ισχύει ότι: $S_n^N = \max(X_\mathrm{n}, E[S_{n+1}^N|\mathfrak{f}_n]) \ge E[S_{n+1}^N|\mathfrak{f}_n]$, από το οποίο βγάζουμε το συμπέρασμα ότι η S_n^N είναι Supermartingale, και προκύπτει ότι $S_n^N \ge X_\mathrm{n}$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε n η S_n^N κυριαρχεί στην X_n.

Αν υποθέσουμε τώρα, ότι υπάρχει και μια άλλη Supermartingale: η S_n^* η οποία κυριαρχεί πάνω στην X_n, οπότε ο ισχυρισμός ότι $S_n^* \ge S_n^N$, μπορεί να επιβεβαιωθεί μέσω της αναδρομικής μεθόδου για: n=N, N-1, N-2,...,l.

Για $\nu = N$ τότε ο ισχυρισμός επιβεβαιώνεται από την ισότητα: $S_N^* = S_N^N$.

Υποθέτουμε ότι $S_n^* \ge S_n^N$.

Αν για $n = N, N-1, N-2, \dots, l$ με $n+1 \le l$ τότε παρατηρούμε $S_{l-1}^N \le \max(X_{\mathrm{l}-1}, E[S_l^N|\mathfrak{f}_{l-1}]) \le \max(X_{\mathrm{l}-1}, E[S_l^*|\mathfrak{f}_{l-1}]) \le S_{l-1}^*$.
Οπότε αποδείξαμε τον παραπάνω ισχυρισμό.

Απόδειξη (iv):

- Θα δείξουμε τώρα ότι μια σταματημένη διαδικασία, είναι Martingale, για κάθε $k \in [n, N-1]$, αρκεί να δείξω ότι:

$$E[S^N_{(k+1)^\wedge t^N_n}] = S^N_{(k)^\wedge t^N_n}$$

$$E[S^N_{(k+1)^\wedge t^N_n}] = E\left[\left(1_{t^N_n \le k} S^N_{(k)^\wedge t^N_n} + 1_{t^N_n \ge k+1} S^N_{(k+1)^{t^N_n}}\right) | \mathfrak{f}_k\right] =$$

$$E\left[1_{t^N_n \le k} S^N_{(k)^\wedge t^N_n} \middle| \mathfrak{f}_k\right] + E\left[\left(1_{t^N_n \ge k+1} S^N_{(k+1)^{t^N_n}}\right) | \mathfrak{f}_k\right] = E[\underbrace{1_{t^N_n \le k} S^N_{(k)^\wedge t^N_n}}_{\mathfrak{f}_k - \mu\varepsilon\tau\rho\acute{\eta}\sigma\iota\mu\eta} | \mathfrak{f}_k] +$$

$$1_{t^N_n \ge k+1} E\left[\left(S^N_{(k+1)^{t^N_n}}\right) | \mathfrak{f}_k\right] = 1_{t^N_n \le k} S^N_{(k)^\wedge t^N_n} + 1_{t^N_n \ge k+1} S^N_{(k)^\wedge t^N_n} =$$

$$\xrightarrow{\{t^N_n \ge k+1\} = \{t^N_n \le k\}^c \in \mathfrak{f}_k} S^N_{(k)^\wedge t^N_n}.$$

Όποτε αποδείξαμε αυτό που θέλαμε.

3.3 Markovian approach

Andrei Andreyevich Markov

14 June 1856 N.S. Ryazan, Russian Empire -20 July 1922 (aged 66) Petrograd, Russian SFSR

3.3.1 Εισαγωγή

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε βασικά αποτελέσματα της θεωρίας της Βέλτιστης Στάσης (Optimal Stopping theory), στο διακριτό χρόνο με βάσει τη Μαρκοβιανή προσέγγιση (Markovian Approach).

Αν πάλι, όπως και στην Martingale προσέγγιση, υπάρχει ένα χώρος πιθανότητας εφοδιασμένος με μία σ-άλγεβρα: $\left(\Omega, f, \left(f_n\right)_{n\geq 0}, \mathrm{P}_x\right)$ με P_x, $(x = X_0)$. Η $\left(f_n\right)_{n\geq 0}$ αποτελεί μία διήθηση, δηλαδή μια αυξανόμενη δομή πληροφορίας μέχρι και την χρονική στιγμή n. Επίσης, αν θωρήσουμε έναν διακριτό μετρήσιμο χώρο καταστάσεως (state space): $(E, \mathfrak{B})$, και για λόγους απλοποίησης μπορούμε να υποθέσουμε ότι $E = \mathcal{R}^d$, όπου $d \geq 1$, και $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathcal{R}^d)$ η οποία είναι μία σ-άλγεβρα Borel στον $\mathcal{R}^d$.

Ορισμός. Μία στοχαστική ακολουθία $\{X_k\}_{k \in [0,N]}$, καλείται Μαρκοβιανή αλυσίδα ομοιογενούς χρόνου ή σταθερή Μαρκοβιανή Αλυσίδα (time homogeneous Markov Chain), αν η τυχαία μεταβλητή X_k είναι προσαρμοσμένη στην $\mathfrak{f}_n$ & $\mathfrak{B}(\mathcal{R}^d)$, $(\mathfrak{f}_n / \mathfrak{B}(\mathcal{R}^d) - \mu\varepsilon\tau\rho\acute{\eta}\sigma\iota\mu\eta)$.

Η διαδικασία που ξεχνά το παρελθόν της.

Ιδιότητα Markov. Η ιδιότητα Markov με την ευρεία έννοια ερμηνεύεται με την εξίσωση:

$$P(X_{n+1} \in \mathfrak{B} | \, \mathfrak{f}_n) = P(X_{n+1} \in \mathfrak{B} | \, X_n)$$

Το αριστερό μέρος, αποτελεί την υπό συνθήκη μέση τιμή ως προς την σ-άλγεβρα που παράγεται από την τυχαία μεταβλητή δηλαδή: $\mathfrak{f}_n = \sigma(X_u, \leq u \leq n)$. (X_n $\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota$ $\mathfrak{f}_n$ $\mu\varepsilon\tau\rho\acute{\eta}\sigma\iota\mu\varepsilon\varsigma$). $X_n \subset \mathfrak{f}_n$.

Η ιδιότητα αυτή είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη ιδιότητα. Αν F: $\mathcal{R}^d \to \mathcal{R}^d$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση και είναι Borel μετρήσιμη, θα έχουμε:

$$E[F(X_{k+n}) | \mathfrak{f}_n] = E_{X_k}[F(X_k)]$$

Το αριστερό μέλος, είναι η μέση τιμή επάνω στις τροχιές της στοχαστικής διαδικασίας X, η οποία ξεκινάει από την χρονική στιγμή μηδέν 0, και «τρέχει» για χρονικό διάστημα, $k + n$.

Το δεξιό μέλος, είναι η μέση τιμή επάνω στις τροχιές της στοχαστικής διαδικασίας X, η οποία ξεκινάει από την χρονική τιμή μηδέν 0 στο σημείο X_k και «τρέχει» για χρονικό διάστημα k, παρατηρείται ότι η χρονική τιμή μηδέν 0 η οποία ξεκινάει αυτή η διαδικασία είναι η χρονική στιγμή n η οποία σταματάει η προηγούμενη διαδικασία. Σε ορισμένες περιπτώσεις το n μπορεί να είναι χρόνος Στάσης.

3.3.1.1 Ο Τελεστής Μετάβασης (The Transition Operator)

Στην υποενότητα αυτή όπως και στις επόμενες δύο θα εισάγουμε τρεις καινούριες έννοιες, οι οποίες θα μας βοηθήσουν στις αποδείξεις, στην Μαρκοβιανή προσέγγιση στον διακριτό χρόνο. Στον συνεχή χρόνο, όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο σπουδαίο ρόλο θα διαδραματίσουν κυρίως, ο Γεννήτορας Τελεστής και ο Τελεστής Μετάβασης.

Αρχικά, θα πρέπει να εξηγήσουμε ποια είναι η χρησιμότητα ενός τελεστή μετάβασης $T = T_{s,t}$, με $s, t \in$ E, ο οποίος είναι ένας πίνακας (Matrix), και μέσω μιας διαδικασίας, «παίρνει» μια συνάρτηση $F: E \to \mathcal{R}$ και την «πάει» σε μία καινούρια συνάρτηση $T_{s,t}F = \varphi$: E→ $\mathcal{R}$. Είναι μια απεικόνιση από έναν μετρικό χώρο σε έναν άλλο μετρικό χώρο.

Αν θεωρήσουμε τώρα, ότι $\{X_k\}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία Markov για την οποία ισχύει $\{X_k\}: \Omega \to E$, όπου E είναι ο χώρος καταστάσεως.

Ήδη γνωρίζουμε ότι η ιδιότητα Markov είναι η:

$$E[F(X_t)|\mathfrak{f}_s] = E[F(X_t)|X_s]$$

Ο Τελεστής $T_{s,t}F$, γράφεται ως εξής: $(T_{s,t}F)(x) = E[F(X_t)|X_s = x]$.

Οπότε, ο Τελεστής $T_{s,t}F$, περιέχει πληροφορία για την στοχαστική διαδικασία Markov.

Ιδιότητες Τελεστής Μετάβασης (Properties of the Transition Operator)

Στην υποενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε και θα αποδείξουμε, τις παρακάτω επτά ιδιότητες του Τελεστής Μετάβασης.

(i) Ο Τελεστής $T_{s,t}F$ είναι γραμμικός για κάθε $0 \leq s \leq t < \infty$.

Απόδειξη:

Αν F_1 $και$ F_2 είναι δύο φραγμένες συναρτήσεις, τότε:

$T_{s,t}(F_1 + F_2)(x) = E[\,(F_1 + F_2)(X_t)|X_s = x] =$
$E[\,(F_1)(X_t)] + \mathrm{E}[(F_2)(X_t)|X_s = x] = E[\,(F_1)(X_t)|X_s = x] + E[\,(F_1)(X_t)|X_s =$
$x] = T_{s,t}(F_1)(X) + T_{s,t}(F_1)(X)$

(ii) Ταυτοτική ιδιότητα.

Για $s = t$ τότε: $(T_{s,s}F)(\mathrm{x}) = \mathrm{E}[\mathrm{F}(\mathrm{X_s})|\mathrm{X_s} = \mathrm{x}] = \mathrm{F}(X)$. Δηλαδή: $T_{s,s} = \mathrm{I}$.

(iii) Αν $T_{r,s}$ $και$ $T_{s,t}$, είναι δύο διαφορετικοί τελεστές μετάβασης με:

$0 \leq r \leq s \leq t < 0$ τότε:

$$
\begin{aligned}
(T_{r,s}F)(\mathrm{x}) &\xrightarrow{Ιδιότητα\ του\ πύργου} \mathrm{E}[\mathrm{E}[\mathrm{F}(\mathrm{X_t})|f_s]\,|\mathrm{X_r} = \mathrm{x}] \\
&= \xrightarrow{Ιδιότητα\ Markov} \mathrm{E}[\mathrm{E}[\mathrm{F}(\mathrm{X_t})|X_s]\,|\mathrm{X_r} = \mathrm{x}] \\
&= \mathrm{E}\left[\left[\mathrm{F}\big(\mathrm{X}(T_{s,t}F)_{\mathrm{t}}\big)|X_s\right]|\mathrm{X_r} = \mathrm{x}\right] = T_{r,t}\ \varphi(x) \\
&= (T_{r,s}(T_{s,t}F))(x)\ για\ \chi \in E.
\end{aligned}
$$

(iv) Αν $F \geq 0$ τότε και $T_{s,t}F \geq 0$.

(v) $T_{s,t}I = I$.

(vi) $|T_s F| = sup_{x \in E}|[\mathrm{E}[\mathrm{F}(\mathrm{X_t})]\ |\mathrm{X_s} = \mathrm{x}]| \leq \left||F|\right| = sup_{x \in E}F(x)$.

3.3.1.2 Ο Τελεστής Μετατόπισης (The Shift Operator)

Η εισαγωγή μιας ακόμη έννοιας, αυτή του «Τελεστή Μετατόπισης» θ, είναι πολύ χρήσιμη για την θεωρία Markov.

Ορισμός. Ένας Τελεστής θ:Ω→ Ω, ονομάζετε Shift Operator, όταν για κάθε διαδικασία $\omega = (X_0, X_1, \dots., X_N)$, η οποία έχει μήκος ίση με N, δημιουργείται ένα καινούριο μονοπάτι:

$$\theta(\omega) = (X_1, X_2, \dots., X_{N-1}).$$

Η καινούρια διαδικασία έχει μήκος ίση με $N - 1$.

Γενικεύοντας την παραπάνω διαδικασία, για $\theta_k = \theta \circ \theta \circ \theta \circ \dots . \circ \theta$, k φορές τότε:

$$\theta_k(\omega) = (X_k, X_{k+1}, \dots., X_{N-k}).$$

Η διαδικασία αυτή έχει μήκος ίση με $N - k$.

Αν η X_n είναι $\mathfrak{f}_n$-μετρήσιμη τότε θα έχουμε: $(X_n \circ \theta_k)(\omega) = (X_n(\theta_k))(\omega) = X_{n+k}(\omega)$ και με την βοήθεια της ιδιότητας του Markov η παραπάνω σχέση γίνεται: $E[F(X_n \circ \theta_k)|\mathfrak{f}_n] = E_{X_k}[F(X_n)]$.

Αν τ(ω) είναι ένας χρόνος διακοπής (Markov time, $\tau(\omega) < \infty$), για την αλυσίδα ω τότε ο $\tau(\theta_k(\omega)) = \tau(\omega) - k$ είναι χρόνος Στάσης (Markov) για την Shift αλυσίδα. Οπότε $\tau = k + \tau \circ \theta_k$.

Επίσης αφού ισχύει:

$$X_{\tau(\omega)}(\omega) = X_{\tau(\theta_k(\omega))}\big(\theta_k(\omega)\big) = (X_\tau \circ \theta_k)(\omega) = (X_\tau\ (\theta_k))(\omega) = X_{\tau+k}(\omega).$$

τότε: $X_\tau \circ \theta_k = X_{\mathrm{k}+\tau \circ \theta_k}$.

3.3.1.3 Ο Γεννήτορας Τελεστής (The Generating Operator L)

Ένας άλλος Τελεστής, χρήσιμος για την αλυσίδα Markov, είναι ο Τελεστής L, ο οποίος έχει την μορφή: $L = T - I$, όπου T είναι ο Τελεστής Μετάβασης (Transition Operator).

Αν τώρα θεωρήσουμε μία συνάρτηση F η οποία είναι $\mathfrak{f}_n$-μετρήσιμη τότε

$$LF(X_n) = E[F(X_{n+1}) - F(X_n)|\mathfrak{f}_n]$$

3.4 Το πρόβλημα της Βέλτιστης Στάσης (Optimal Stopping Problem)

Αν τώρα επανέλθουμε στο πρόβλημα της Βέλτιστης Στάσης, σε διακριτό χρόνο, με προσέγγιση Markov.

Θεωρούμε ότι για κάθε $x \in E$ και X_τ^χ, αποτελεί μία στοχαστική διαδικασία, το πρόβλημα της Βέλτιστης Στάσης που έχουμε να λύσουμε είναι:

$$V(M,\chi) = sup_{\tau \in T[0,M]} E\big[G(X_\tau^\chi)\big] = E\left[G(X_{\bar{\tau}[M,x]}^\chi)\right]$$

και εξαρτάτε από την συνάρτηση V, η οποία ορίζεται ως εξής: $V: [0,N] * E \rightarrow \mathcal{R}$ με $(M,\chi) \rightarrow sup_{\tau \in T[0,M]} E\big[G(X_\tau^\chi)\big]$, και όπου $\bar{\tau}[M,x]$, είναι μία Βέλτιστη Στάση, για μία διαδικασία Markov, η οποία ξεκινάει από το x. Στην ανωτέρω σχέση αντικαταστήσαμε την γενική στοχαστική διαδικασία με την διαδικασία η οποία αναφέρεται σε στιγμιαία κατάσταση $G_n = G(X_n^\chi)$ με $n > 0$.

Επίσης, υποθέτουμε ότι χρονικός ορίζοντας: $N < \infty$, είναι πεπερασμένος (finite).

Όπως αναφέραμε και παραπάνω το πρόβλημα της Βέλτιστης Στάσης έχει τώρα απλοποιηθεί, καθώς στην προσπάθειά μας να εξηγήσουμε το πρόβλημα αυτό με βάση την προσέγγιση Markov, θεωρούμε πλέον ότι αντί για P και E θα έχουμε P_x και E_x για κάθε $x \in E$.

Πριν προχωρήσουμε στο επόμενο θεώρημα και στις αποδείξεις τους θα πρέπει να ορίσουμε την ακολουθία $S_k^M = V^{M-k}(X_k^x)$ με k ∈ [0,M], η οποία δημιουργείται με την αναδρομική επαναληπτική μέθοδο του Snell envelop, με την συνδρομή των περιοχών Συνέχειας και Στάσης.

(continuation region) : $C_\kappa = (\mathrm{x} \in \mathrm{E}, V^{M-k}(x) > G(x))$

(stopping region) : $D_\kappa = (\mathrm{x} \in \mathrm{E}, V^{M-k}(x) = G(x))$

Επίσης, θα δείξουμε ότι ο χρόνος: $\bar{\tau}(M, x) = \inf(0 \leq k \leq M,\ X_k^\chi \in D_\kappa)$ είναι Optimal Stopping time.

Είναι ακόμη στοιχείο το οποίο το έχουμε αναλύσει σε προηγούμενη ενότητα και θα το χρειαστούμε, είναι ο Τελεστής Μετάβασης (Transition Operator), ο οποίος ορίζεται ως εξής: $TF(X) = E_x F(X)$.

Θεώρημα 2

Αν Ν < ∞, είναι ένας πεπερασμένος ορίζοντας, και αν ισχύει ότι $E_x(sup_{0\leq k\leq M}|G(X_k)|) < \infty$, για κάθε $x\epsilon E$, τότε θεωρούμε το πρόβλημα της βέλτιστης Στάσης: $V(M,\chi) = sup_{\tau\in T[0,M]}E\left[G(X_\tau^\chi)\right] = E\left[G(X_{\bar{\tau}[M,x]}^\chi)\right]$

Η συνάρτηση V^k, ικανοποιεί την σχέση: $V^k(x) = \max\,(G(x), TV^{k-1}(x))$ γνωστή και ως σχέση του **Bellman-Wald**. Με $x \in E$ και για $k \in [1, N]$ τότε $V^0(x) = G(x)$.

Επίσης, για $k \in [0, M]$ τότε $V^0(x) \geq G(x)$.

i) Ο χρόνος Στάσης $\bar{\tau}[M, x]$ αποτελεί τον βέλτιστό Χρόνο Στάσης.

ii) Η ακολουθία $S_k^M = V^{M-k}(X_k)$ με $k \in [0, M]$, είναι η μικρότερη Supermartingale η οποία κυριαρχεί στην $G(X_k^\chi)$.

iii) Η σταματημένη διαδικασία $S_{k^\wedge\tau(M,x)}^M = V^{M-k^\wedge\tau(M,x)}(X_{k^\wedge\tau(M,x)})$, είναι Martingale, για κάθε $x \in E$.

3.4.1 Σημαντική αναφορά

- Η συμβολή του δυναμικού προγραμματισμού στην λύση της Βέλτιστης Στάσης.

Πριν προχωρήσουμε στις αποδείξεις του θεωρήματος 2, θα μελετήσουμε την μεθοδολογία την οποία θα ακολουθήσουμε για να λύσουμε το πρόβλημα της βέλτιστης Στάσης. Η διαδικασία που θα χρησιμοποιηθεί παρέχεται από τον **δυναμικό προγραμματισμό**.

Αρχικά, αναφέρουμε ότι αν χρησιμοποιήσουμε μία διαδικασία Markov μπορούμε να θεωρήσουμε «αυθαίρετα», πάνω στην διαδικασία, σαν αρχική κατάσταση οποιαδήποτε θέλουμε εμείς, για να ξεκινήσουμε. Αυτή η πιθανή κατάσταση είναι η: $x \in E$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι αν διαχειριζόμαστε μία διαδικασία Markov μπορούμε να μεταφέρουμε μέσω ενός αντιγράφου της διαδικασίας που θέλουμε να υπολογίσουμε την υπό όρους πρόβλεψη, ξεκινώντας από διαφορετικό σημείο.

Η μεθοδολογία για να λύσουμε την λύσουμε το πρόβλημα της Βέλτιστης Στάσης ακολουθεί την εξής σειρά, λύνουμε πρώτα το πρόβλημα της γενικής διαδικασίας (X_k^x), και ταυτόχρονα αυτό μας δίνει λύση στο αρχικό πρόβλημα. Αυτό επιβάλλει ο Δυναμικός Προγραμματισμός. Στην ουσία λύνουμε ένα πρόβλημα.

Αν θεωρήσουμε ότι για κάθε $x \in E$ και με ορίζοντα M και μία οικογένεια διαδικασιών X_k^x, τότε θεωρούμε το πρόβλημα της Βέλτιστης Στάσης:

$$V(M,x) = sup_{\tau \in T[0,M]} E[G(X_\tau^x)] = E\left[G(X_{\bar{\tau}(M,x)}^x)\right]$$

Η ανωτέρω στοχαστική διαδικασία ξεκινάει από την κατάσταση x και τρέχει για ορίζοντα M.

Σίγουρα, το σημείο που θα πρέπει να καταλάβει, αυτός που θα ασχοληθεί με την λύση ενός τέτοιου προβλήματος είναι ότι, αν θέλει να λύσει την:

$sup_{\tau \in T[n,M]} E[G(X_{\tau}^{x})]$, αρκεί να λύσει την : $sup_{\tau' \in T[0,M-n]} E\left[E_{x_n}\left[G(X_{\tau'}^{\chi})\right]\right]$, όπως προκύπτει από την παρακάτω ισότητα.

$$\begin{aligned} sup_{\tau \in T[n,M]} E\left[G(X_{\tau}^{\chi})\right] &= sup_{\tau' \in T[0,M-n]} E\left[G(X_{\tau'+n}^{\chi})\right] \\ &= sup_{\tau' \in T[0,M-n]} E\left[E\left[G(X_{\tau'+n}^{\chi})\right] | f_n\right] \\ &= sup_{\tau' \in T[0,M-n]} E\left[E_{x_n}\left[G(X_{\tau'}^{\chi})\right]\right] \end{aligned}$$

Τώρα το αρχικό μας πρόβλημα από $[n, M]$ μειώθηκε σε $[0, M-n]$, η καινούρια διαδικασία η οποία ξεκινάει από την θέση (κατάσταση) $x_n = \chi$ την χρονική στιγμή μηδέν και η διαδικασία «τρέχει» σε ορίζοντα $M-n$.

Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι ευκολότερα μπορούμε να λύσουμε την $E_{x_n}\left[G(X_{\tau'}^{\chi})\right]$ και μετά να επιστρέψουμε στο αρχικό μας πρόβλημα απλώς θέτοντας οπού χ την κατάσταση πάνω στην στοχαστική διαδικασία που μας ενδιαφέρει. Η παραπάνω ποσότητα η οποία εκφράζει την αναμενόμενη τιμή της ποσότητας X πάνω στην στοχαστική διαδικασία G, όπου ξεκινάει από το σημείο $x = x_n$ και στον χρόνο μηδέν. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονίσουμε ότι σε αυτό το σημείο είχε φτάσει η αρχική στοχαστική διαδικασία την χρονική στιγμή $\tau' \in T\ [0, M-n]$ και τρέχει για χρόνο M-n.(ισχυρή ιδιότητα του Markov).

Χρησιμοποιώντας το παράδειγμα του κου Γιαννακόπουλου Α. (2018) μπορούμε να κατανοήσουμε καλύτερα το ανωτέρω πρόβλημα.

αξία τίτλου (ω)	: X_0	X_1	X_2	...	X_{n-1}	X_n	X_{n+1}	X_{n+2}	...	X_M
S_k^M	: S_0^M	S_1^M	S_2^M	...	S_{n-1}^M	S_n^M	S_{n+1}^M	S_{n+2}^M	...	S_M^M
χρόνος (t)	: 0	1	2	...	n-1	n	n+1	n+2	...	M

Η πρώτη γραμμή παριστάνει μια αρχική στοχαστική διαδικασία (ω) όπου ξεκινά την χρονική στιγμή μηδέν $(t = 0)$ και φτάνει μέχρι το χρόνο $(t = M)$.

Αν χρησιμοποιήσουμε τον Τελεστή Μετατόπισης (θ), ο οποίος δρα στην ανωτέρω αλυσίδα. Η καινούρια διαδικασία που θα δημιουργηθεί θ_n(ω) θα ξεκινάει από το σημείο $x = X_n$, την χρονική στιγμή μηδέν $(t = 0)$, και θα «τρέχει» για χρόνο $t = M - n$.

αξία τίτλου θ_n(ω)	:	X_n	X_{n+1}	X_{n+2}	...	X_M
S_k^{M-n}	:	S_0^{M-n}	S_1^{M-n}	S_2^{M-n}	...	S_{M-n}^{M-n}
χρόνος (t)	:	0	1	τ(0, M-n)	...	M-n

Μια σημαντική παρατήρηση που μπορούμε να εξάγουμε και από τους δύο παραπάνω πίνακες και από τις δεύτερες σειρές είναι ότι κάνοντας χρήση του Snell envelop διαπιστώνουμε ότι:

$$S_M^M(\omega) = G(X_M)$$

$$S_{M-n}^{M-n}\theta_n(\omega) = G\left(X_M(\omega)\right) = G(X_{M-n}\theta(\omega))$$

άρα: $S_M^M(\omega) = S_{M-n}^{M-n}\ \theta_n(\omega)$, οπότε παρατηρούμε ότι:

$$S_0^{M-n}\ \theta_n(\omega) = S_n^M(\omega)$$

$$S_1^{M-n}\theta_n(\omega) = S_{n+1}^M(\omega)$$

$$S_2^{M-n}\theta_n(\omega) = S_{n+2}^M(\omega)$$

...

$$S_{M-n}^{M-n}\theta_n(\omega) = S_M^M(\omega)$$

Οπότε γενικά θα ισχύει για την αναδρομική μέθοδο ότι: $S_{\kappa+n}^{M}(\omega) = S_{\kappa}^{M-n}\ \theta_n(\omega)$. Άρα τώρα είμαστε σε θέση να προβούμε στις αποδείξεις του θεωρήματος 2.

Απόδειξη (i)

Με βάσει τα παραπάνω ο χρόνος Στάσης για $0 \leq k \leq M$ γίνεται $\bar{\tau}(M, x) =$ $\inf(0 \leq k \leq M, X_k^{\chi} \in D_\kappa) = \inf(0 \leq k \leq M, V^{M-k}(x) = G(x))$ και είναι Optimal Stopping time στην περιοχή: $D_\kappa = (\text{x} \in \text{E}, V^{M-k}(x) = G(x))$.

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη θα πρέπει να αναφερθούμε στην διαδικασία του προηγούμενου κεφαλαίου, για την κατασκευή της ακολουθίας από τυχαίες μεταβλητές $(S_k^N)_{n\leq k\leq N}$, και θα χρησιμοποιήσουμε ξανά την αναδρομική επαναληπτική διαδικασία, γνωστή και ως η περιβάλλουσα του Snell (Snell envelop) :

$$S_n^N = G_{\text{N}} \qquad \gamma\iota\alpha\ n = N$$

$$S_k^N = \max\left(G_{\text{N}}, E[S_{k+1}^N | \mathfrak{f}_k]\right)$$

όπου $\mathfrak{f}_k = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_k)$ είναι η μικρότερη σ- άλγεβρα που παράγεται από τις τυχαίες μεταβλητές.

οπότε: $S_k^M = V^{M-k}(X_k)\ \ k \in [0, M]$.

Με την βοήθεια του τελεστή Shift θ θα έχουμε $\theta_n(\omega) = (X_n, X_{n+1}, \dots, X_M)$, η διαδικασία έχει μήκος ίση με $M - n$.

Με $\omega = (X_0, X_1, \dots, X_N)$, ορίζεται η διαδικασία που έχει μήκος ίσο με N.

Συγκρίνοντας την S_k^M για $k = M$ και για $k = M - n$ θα έχουμε:

$S_k^M(\omega) = S_M^M(\omega) = G(X_M(\omega))$ και $S_k^{M-n}(\theta_n(\omega)) = S_{M-n}^{M-n}(\theta_n(\omega)) =$ $G(X_{M-n}(\theta_n(\omega))) = G(X_M(\omega))$

Αρα $S_M^M(\omega) = S_{M-n}^{M-n}(\theta_n(\omega))$ οπότε για κάθε k θα έχουμε: $S_k^{M-n}(\theta_n(\omega)) = S_{k+n}^M(\omega)$.

Αν $\tau(n,M) = \inf(0 \le k \le M, X_k^\chi \in D_\kappa)$, είναι ένας χρόνος Στάσης τότε έχουμε:

$\tau(n,M) = \inf(0 \le k \le M, S_k^M(\omega) = G(X_k^M(\omega)) = n + inf\{0 \le k' \le M - n, S_{k'+n}^M(\omega) = G(X_{k'+n}^M(\omega))\} = n + inf\{0 \le k' \le M-n, S_{k'}^{M-n}(\theta_n(\omega)) = G(X_{k'}^M(\theta_n(\omega))\} = n + \tau(0, M-n)(\theta_n(\omega)) = n + \tau(0,M-n) \circ (\theta_n(\omega))$

Γνωρίζουμε ήδη από το προηγούμενο κεφάλαιο ότι:

$S_n^M(\omega) = E_\chi\left[G\left(X_{\tau(n,M)}\right)(\omega)\middle|\mathfrak{f}_n\right] = E_\chi\left[G\left(X_{\tau(0,M-n)(\theta_n(\omega))}\right)((\theta_n(\omega))\middle|\mathfrak{f}_n\right] = E_\chi G\left(X_{\tau(0,M-n)}\right) = V^{M-n}(X_n)$

Προχωρώντας χρησιμοποιώντας τις σχέσεις: $S_n^M = \max(G_M, E[S_{n+1}^M|\mathfrak{f}_n])$ και $S_n^M = V^{M-n}(X_n)$ θα αποδείξουμε ότι:

$$\begin{aligned} V^{M-n}(X_n) &= \max(G_M(X_n), E[V^{M-n-1}(X_{n+1})|\mathfrak{f}_n]) \\ &= \max(G_M(X_n), E[V^{M-n-1}(X_n) \circ (\theta_n)|\mathfrak{f}_n]) \\ &= \max(G_M(X_n), E[V^{M-n-1}(X_n) \circ (\theta_n)]) \\ &= \max(G_M(X_n), TV^{M-n-1}(X_n)) \end{aligned}$$

για κάθε $0 \le n \le M$. Η οποία ακολουθεί την: $V^k(x) = \max(G(x), TV^{k-1}(x))$ (**Bellman-Wald equation**), γνωστή και ως εξίσωση του **Bellman-Wald**. Με $x \in E$ και για $k \in [1, N]$.

Τότε εμείς μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο χρόνος Στάσης: $\bar{\tau}(M,x) = \inf(0 \le k \le M, X_k^\chi \in D_\kappa) = \inf(0 \le k \le M, V^{M-k}(x) = G(x))$, είναι Optimal Stopping time. Όπου $D_\kappa = (x \in E, V^{M-k}(x) = G(x))$.

3.4.2 Bellman-Wald equation

Ξεκινώντας από την συναρτησιακή ντετερμινιστική εξίσωση, η οποία είναι γνωστή ως εξίσωση των Bellman -Wald:

$$V^k(x) = \max\,(G(x), TV^{k-1}(x))$$

Με $x \in E$ και για $k \in [1, N]$ τότε $V^0(x) = G(x)$.

Η συγκεκριμένη εξίσωση μπορεί να γραφτεί με διαφορετική μορφή.

Εισάγουμε τον Τελεστή B, ο οποίος «παίρνει» την οποιαδήποτε συνάρτηση $F : E \rightarrow \mathbb{R}$, (η F είναι μετρήσιμη), για κάθε $x \in E$ και την μετατρέπει στην εξής μορφή: $\varphi = BF$. Τελικά η εξίσωση θα πάρει την παρακάτω μορφή.

$$\varphi(\mathrm{x}) = \mathrm{BF}(\mathrm{x}) = \max\,(G(x), TF^{k-1}(x))$$

Επομένως, η εξίσωση των Bellman-Wald αλλάζει σε:

$$V^k(x) = B^k \text{ , k} \in [1,\text{N}].$$

- Αν υποθέσουμε τώρα ότι $G(x) < TV^{k-1}(x)$, για κάθε $x \varepsilon E$

  Γνωρίζουμε ότι: $TV^{k-1}(x)$= $V^k(x)$

  Αν στην πρώτη ανισότητα αφαιρέσουμε και στα δύο μέλη την ποσότητα $V^k(x)$.

$$G(x) - V^k(x) < \underbrace{TV^{k-1}(x) - V^k(x)}_{=0} \Leftrightarrow$$

$$\max\left(TV^{k-1}(x) - V^k(x), G(x) - V^k(x)\right) = 0$$

- Αν υποθέσουμε επίσης ότι $G(x) > TV^{k-1}(x)$, για κάθε $x \varepsilon E$

  Γνωρίζουμε ότι: $G(x)$= $V^k(x)$.

Αν στην πρώτη ανισότητα αφαιρέσουμε και στα δύο μέλη την ποσότητα $V^k(x)$.

$$TV^{k-1}(x) - V^k(x) < \underbrace{G(x) - V^k(x)}_{=0} \Leftrightarrow$$

$$\max\left(TV^{k-1}(x) - V^k(x), G(x) - V^k(x)\right) = 0$$

Άρα γενικά η **Bellman-Wald equation** μετά τις παραπάνω υποθέσεις παίρνει την μορφή:

$$\max\left(TV^{k-1}(x) - V^k(x), G(x) - V^k(x)\right) = 0$$

Και λαμβάνοντας υπόψη τον Generating Operator:

L: = T – I

Η εξίσωση των Bellman-Wald γίνεται:

$$\max\left(\boldsymbol{L}V^{k-1}(x) - (V^k(x) - V^{k-1}(x)), G(x) - V^k(x)\right) = 0$$

Κεφάλαιο 4

Εφαρμογές σε προβλήματα βέλτιστης Στάσης

4.1 Εισαγωγή

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει τα προβλήματα της Βέλτιστης Στάσης έχουν πολλές εφαρμογές, όπως στα χρηματοοικονομικά, στη θεωρία των Real Options καθώς και στη διοικητική επιστήμη. Στην ενότητα αυτή θα επιχειρήσουμε να παρουσιάσουμε αριθμητικά σχήματα, για την επίλυση προβλημάτων βέλτιστης στάσης, χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα Matlab. Για το λόγο αυτό θα δούμε κυρίως εφαρμογές από το πεδίο των χρηματοοικονομικών Παραγώγων Συμβολαίων.

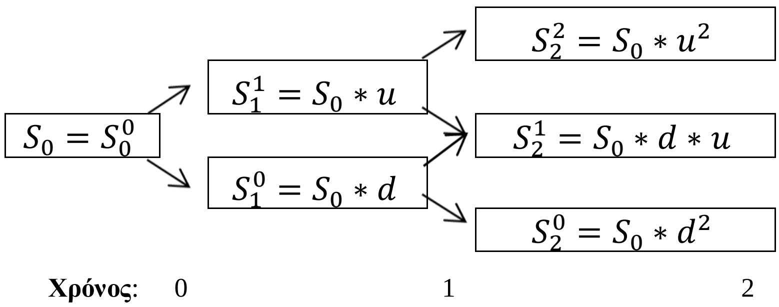
Πριν τις εφαρμογές θα αναλύσουμε το διωνυμικό μοντέλο, την δομή των διωνυμικών δέντρων (binomial trees), καθώς θα αναφερθούμε και στα Αμερικάνικα και στα Ευρωπαϊκά Παράγωγα Συμβόλαια.

4.2 Διωνυμικό μοντέλο

Η μαθηματική μορφή του διωνυμικού μοντέλου έχει την εξής μορφή:

$$S_{n+1} = H_{n+1} * S_n$$

Με τον συμβολισμό S_n παριστάνουμε την τιμή του τίτλου και H_{n+1} είναι μία ακολουθία με ανεξάρτητες και ομοιόμορφες κατανομές (i.i.d.) τ.μ.



Πολλές εφαρμογές του μοντέλου αυτού παρατηρούνται στην τιμολόγηση Παραγώγων Συμβολαίων. Βασική υπόθεση αυτού του μοντέλου είναι, ότι καθώς θα προχωράει ο χρόνος θα σχηματίζεται ένα διάγραμμα σε μορφή δέντρου, το γνωστό διωνυμικό δέντρο (binomial tree). Μία ακόμη υπόθεση είναι, ότι οι χρόνοι τον κόμβων είναι διακριτοί. Αν για παράδειγμα βρισκόμαστε στον κόμβο την χρονική στιγμή $n, (0 \leq n \leq T)$, και στην κατάσταση $j\,(0 \leq j \leq n - j \leq$ *T,* τότε στον επόμενο χρόνο *n+1* θα έχουμε δύο πιθανές καταστάσεις που θα δημιουργηθούν, η ανοδική κατάσταση $j + 1$ με πιθανότητα p που αποτελεί την πιθανότητα, η H_n να πάρει την τιμή u και η τιμή του τίτλου θα είναι:

$$S_{(n+1)}^{j+1} = d * S_n$$

και μία καθοδική κατάσταση j με πιθανότητα $q = 1 - p$ που αποτελεί την πιθανότητα η H_n να πάρει την τιμή d και η τιμή του τίτλου θα είναι:

$$S_{(n+1)}^{j} = d * S_n$$

Στο σχήμα φαίνονται όσα ακριβώς περιγράψαμε παραπάνω με χρόνους $n = 0, 1, 2$ και καταστάσεις $j = 0, 1, 2$. Γενικά θα δημιουργηθούν 2^T καταστάσεις, στο παράδειγμά μας 6 καταστάσεις οι οποίες θα είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Σε αυτό το σημείο θα εισάγουμε την έννοια του ισοδύναμου μέτρου Martingale το οποίο το συμβολίζουμε με Q. Αυτό που θα πραγματοποιήσουμε είναι μία αλλαγή μέτρου, συνεπώς αυτό που θα συμβεί είναι:

$$\mathrm{P}(H_n = u) \xrightarrow{\alpha\lambda\lambda\alpha\gamma\acute{\eta}\ \mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o\upsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\varsigma} Q\left(\frac{S_{n+1}}{S_n} = u\right) = \frac{1+r-d}{u-d} = \mathrm{q}$$

$$\mathrm{P}(H_n = d) \xrightarrow{\alpha\lambda\lambda\alpha\gamma\acute{\eta}\ \mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o\upsilon\ \pi\iota\theta\alpha\nu\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\varsigma} Q\left(\frac{S_{n+1}}{S_n} = d\right) = \frac{u-(1+r)}{u-d} = 1\text{- q}$$

Με βάσει το διωνυμικό μοντέλο μπορούμε και σύμφωνα με την αναδρομική επαναληπτικής μέθοδο, την οποία θα την αναφέρουμε αναλυτικά στην επόμενη ενότητα, μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του παραγώγου σε οποιαδήποτε χρόνο εμείς επιθυμούμε, καθώς και σε οποιαδήποτε κατάσταση.

Ο επαναληπτικός αλγόριθμος αυτός είναι ο εξής:

$$P_t^j = \begin{cases} \Phi\left(S_T^j\right) & \gamma\iota\alpha\ \ t = T \\ \dfrac{1}{1+r}\left(qP_{t+1}^{j+1} + (1-q)P_{t+1}^j\right) & \gamma\iota\alpha\ t = T-1, \dots, 0 \end{cases}$$

Όπου $\Phi\left(S_T^j\right)$, παριστάνουμε το ποσό που θα πάρουμε αν εξασκήσουμε το δικαίωμά μας και με $\frac{1}{1+r}\left(qP_{t+1}^{j+1} + (1-q)P_{t+1}^j\right)$, την αξία του τίτλου όταν δεν εξασκούμε το δικαίωμά μας την χρονική στιγμή t.

Την χρονική στιγμή $t = T$, γνωρίζουμε πάντα την τιμή του τίτλου ο οποίος θα είναι $P_T^j = \Phi\left(S_T^j\right)$.

4.3 Ιδιότητα Markov

Η ιδιότητα Markov είναι πολύ χρήσιμη στην εύρεση της καλύτερης πρόβλεψης. Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε μια στοχαστική διαδικασία και πάρουμε δύο χρόνους πάνω σε αυτή, τον χρόνο t και τον χρόνο $n \geq 0$, τότε η $S_{t+n} - S_n$ είναι μια διαδικασία η οποία δεν εξαρτάτε από τα γεγονότα που συνέβησαν πριν τον χρόνο n. Δηλαδή, μια διαδικασία που έχει την ιδιότητα Markov, μπορούμε να πούμε ότι ξεχνάει το παρελθόν της και η συμπεριφορά της μετά το χρόνο n εξαρτάτε μόνο από την τιμή της $S(n) = S_n$. Πιο αναλυτικά θα αναφερθούμε στην κίνηση Brown στον συνεχή χρόνο.

4.4 Εφαρμογή στα Χρηματοοικονομικά

4.4.1 Εισαγωγή στα Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα (Derivative Assets)

Πριν μελετήσουμε, παρουσιάσουμε και εξάγουμε συμπεράσματα από τα αριθμητικά σχήματα θα αναφερθούμε στα Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα.

Ορισμός. Τα Παράγωγα Προϊόντα είναι ένα είδος περιουσιακών στοιχείων (Συμβόλαια) των οποίων η αξία τους εξαρτάται από την αξία των υποκειμένων τίτλων.

Υπάρχουν διάφορα είδη παραγώγων συμβολαίων. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε τα Δικαιώματα Αγοράς και Πώλησης μετοχών ή μονάδων του δείκτη (Call and Put Options), τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Futures) και τα Συμβόλαια Ανταλλαγής (Swaps).

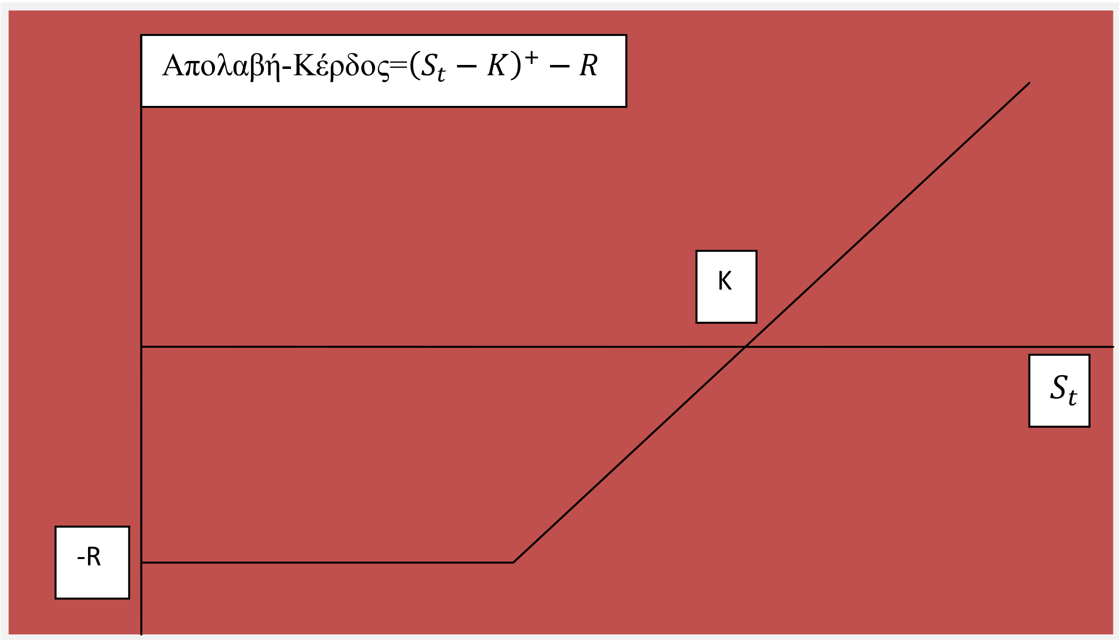
Σχετικά με δικαιώματα, είναι ότι ο κάτοχος τους μπορεί να απαιτήσει την εκπλήρωση ενός συγκεκριμένου μεγέθους συμβολαίου κατά την διάρκεια μιας προκαθορισμένης χρονικής περιόδου σε μια προκαθορισμένη τιμή εξάσκησης.

4.4.1.1 Ευρωπαϊκά Παράγωγα (European Options)

- **Αγορά Ευρωπαϊκού Δικαιώματος Αγοράς**

Σε ένα Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Αγοράς **(European Call Option),** με χρόνο ωρίμανσης (Τ) και τιμή εξάσκησης (Κ). Ο κάτοχος (αγοραστής) του δικαιώματος έχει το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση, να απαιτήσει (long position) την εκπλήρωση από τον πωλητή ο οποίος έχει αρνητική στάση (short position) και ο οποίος έχει την υποχρέωση να εκπληρώσει το συμβόλαιο εάν του ζητηθεί, στον χρόνο ωρίμανσης (Τ) και με τιμή εξάσκησης (Κ). Ο επενδυτής (holder) θα ασκήσει το δικαίωμα αγοράς του, πληρώνοντας ένα αντίτιμό (R) μόνο όταν η αξία του υποκειμένου προϊόντος S_T είναι μεγαλύτερη από την τιμή της εξάσκησης (K). Η απόδοση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς στην ωρίμανση του είναι πάντα θετικό και είναι ίσο με:

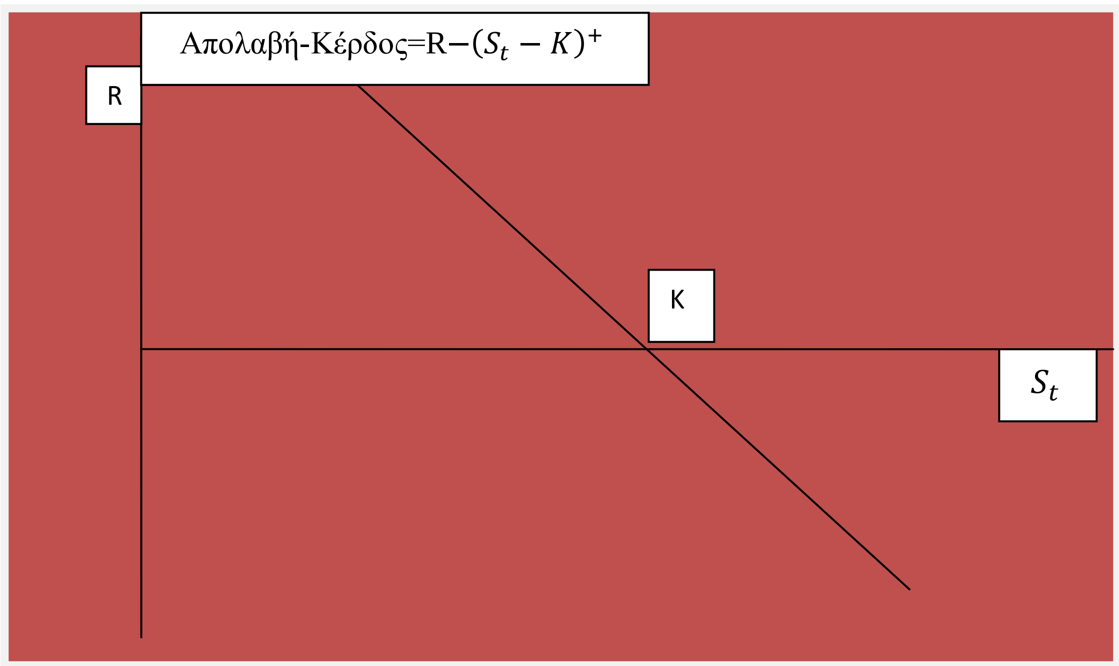
$$(S_t - K)^+ = max\{S_t - K, 0\} = \begin{cases} S_t - K, & S_t > K \\ 0, & S_t \leq K \end{cases}$$



- **Πώληση Ευρωπαϊκού Δικαιώματος Αγοράς**

Σε ένα Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Αγοράς **(European Call Option)** με χρόνο ωρίμανσης (Τ) και τιμή εξάσκησης (Κ). Ο κάτοχος (πωλητής) του δικαιώματος, έχει το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση να απαιτήσει (long position), την εκπλήρωση από τον αγοραστή, ο οποίος έχει αρνητική στάση (short position) και ο οποίος έχει την υποχρέωση να εκπληρώσει το συμβόλαιο εάν του ζητηθεί στον χρόνο ωρίμανσης (Τ) και με τιμή εξάσκησης (Κ). Ο επενδυτής θα ασκήσει το δικαίωμα πώλησής του, λαμβάνοντας ένα αντίτιμό (R), μόνο όταν η αξία του υποκειμένου προϊόντος S_T είναι μεγαλύτερη από την τιμή της εξάσκησης (Κ). Η απόδοση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης στην ωρίμανση του είναι πάντα θετική και είναι ίσο με:

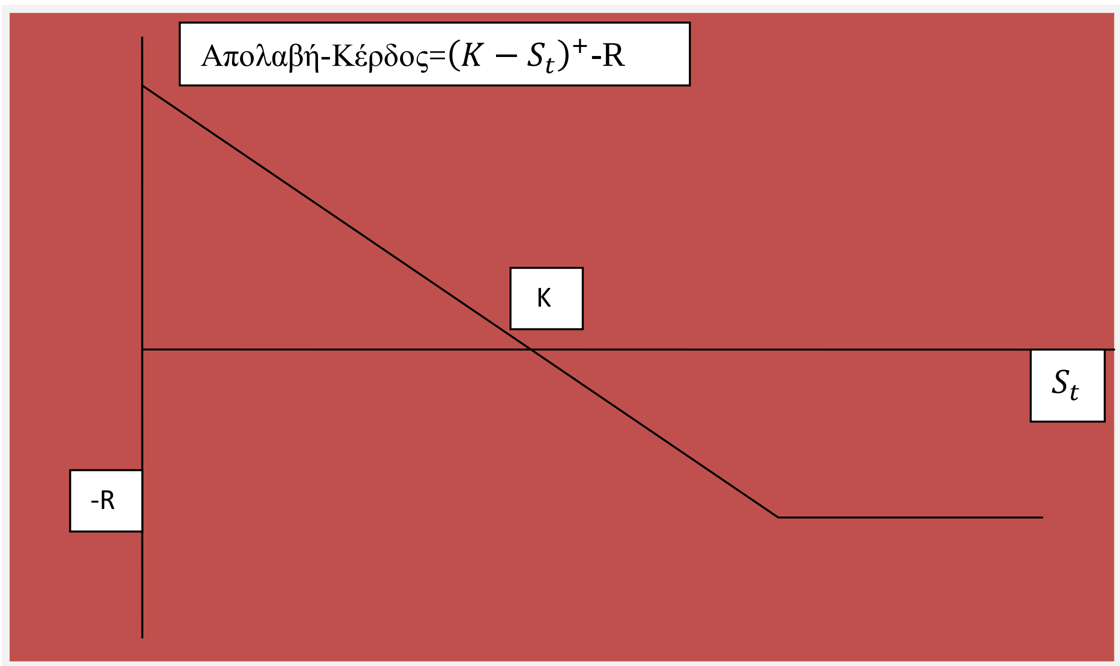
$$-(S_t - K)^+ = -max\{S_t - K, 0\} = \begin{cases} K - S_t, S_t > K \\ 0, \quad X_t \leq K \end{cases}$$



- **Αγορά Ευρωπαϊκού Δικαιώματος Πώλησης**

Σε ένα Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Πώλησης **(European Put Option),** με χρόνο ωρίμανσης (T) και τιμή εξάσκησης (K). Ο κάτοχος (αγοραστής) του δικαιώματος έχει το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση να απαιτήσει (long position) την εκπλήρωση από τον πωλητή, ο οποίος έχει αρνητική στάση (short position) και ο οποίος έχει την υποχρέωση να εκπληρώσει το συμβόλαιο εάν του ζητηθεί στον χρόνο ωρίμανσης (T) και με τιμή εξάσκησης (K). Ο επενδυτής (holder) θα ασκήσει το δικαίωμα αγοράς του πληρώνοντας ένα αντίτιμό (R) μόνο όταν η αξία του υποκειμένου προϊόντος S_T, είναι μικρότερη από την τιμή της εξάσκησης (K). Η απόδοση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς στην ωρίμανση του είναι πάντα θετικό και είναι ίσο με:

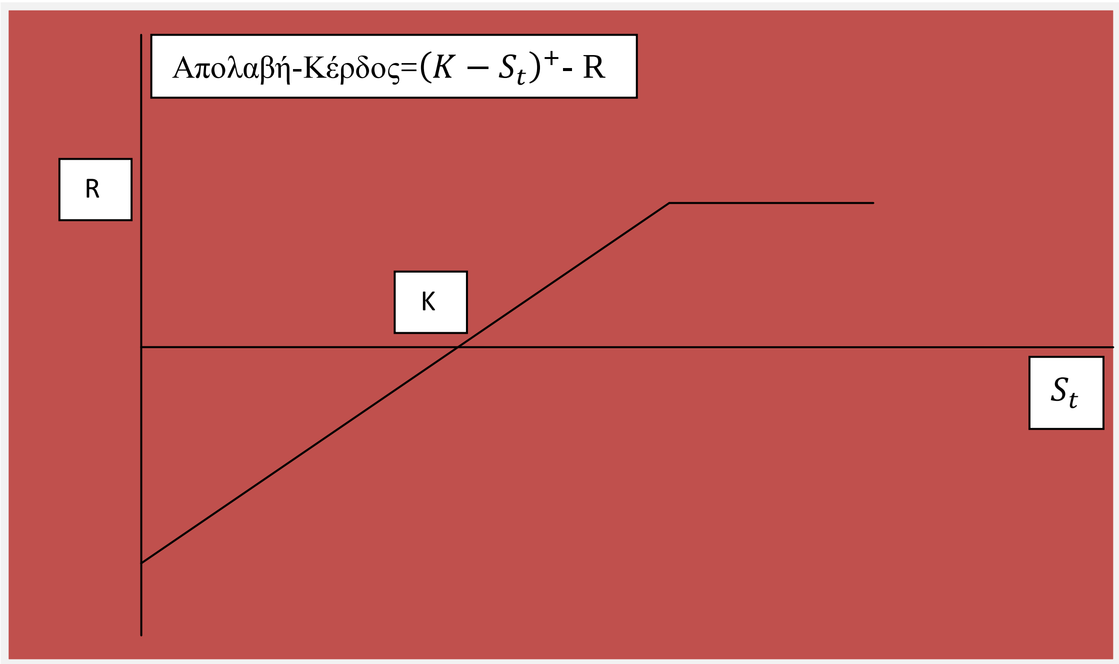
$$(K - S_t)^+ = max\{K - S_t, 0\} = \begin{cases} K - S_t, K > S_t \\ 0, \quad\quad K \le S_t \end{cases}$$



- **Πώληση Ευρωπαϊκού Δικαιώματος Πώλησης**

Σε ένα Ευρωπαϊκό Δικαίωμα Πωλητής **(European Put Option)** με χρόνο ωρίμανσης (T) και τιμή εξάσκησης (K). Ο κάτοχος (πωλητής) του δικαιώματος έχει το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση να απαιτήσει (long position) την εκπλήρωση από τον αγοραστή, ο οποίος έχει αρνητική στάση (short position) και ο οποίος έχει την υποχρέωση να εκπληρώσει το συμβόλαιο, εάν του ζητηθεί στον χρόνο ωρίμανσης (T) και με τιμή εξάσκησης (K). Ο επενδυτής θα ασκήσει το δικαίωμα πώλησης του λαμβάνοντας ένα αντίτιμό (R) μόνο όταν η αξία του υποκειμένου προϊόντος S_T είναι μικρότερη από την τιμή της εξάσκησης (K). Η απόδοση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης στην ωρίμανση του είναι πάντα θετικό και είναι ίσο με:

$$-(K - S_t)^+ = -max\{K - S_t, 0\} = \begin{cases} S_t - K, K > S_t \\ 0, \quad\quad K \leq S_t \end{cases}$$



4.4.1.2 Αμερικάνικα Παράγωγα (American Options)

Αμερικάνικό Δικαίωμα Αγοράς (**American Call Options**) είναι ένα Παράγωγο προϊόν και διαφέρει από το Ευρωπαϊκό παράγωγό, στο γεγονός ότι ο κάτοχός (holder), του δικαιώματος, με χρόνο ωρίμανσης (Τ) και τιμή εξάσκησης (Κ), έχει το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση να απαιτήσει-εξασκήσει (long position) την εκπλήρωση από τον πωλητή, ο οποίος έχει αρνητική στάση (short position) και ο οποίος έχει την υποχρέωση να εκπληρώσει το συμβόλαιο εάν του ζητηθεί σε οποιοδήποτε χρόνο μέχρι τον χρόνο ωρίμανσης (Τ) και με τιμή εξάσκησης (Κ). Ο επενδυτής (holder) θα ασκήσει το δικαίωμα αγοράς του πληρώνοντας ένα αντίτιμό (R) μόνο όταν η αξία του υποκειμένου προϊόντος S_T είναι μεγαλύτερη από την τιμή της εξάσκησης (Κ).

Η βασική διαφορά με τα Ευρωπαϊκά Παράγωγα είναι ότι αυτά επιτρέπονται να εξασκηθούν μόνο κατά την λήξη τους.

Αυτό που θα πρέπει να τονίσουμε, είναι ότι η τιμολόγηση των Αμερικανικών Παραγώγων είναι πιο δύσκολή από αυτή των Ευρωπαϊκών. Επίσης, είναι σημαντικό να επισημάνουμε, ότι ο χρόνος στον οποίο θα επιλέξει ο κάτοχος του Αμερικάνικου Παραγώγου να εξασκήσει το δικαίωμα του είναι ένας τυχαίος χρόνος. Η επιλογή του χρόνου αυτού, δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος από τον χρόνο στον οποίο ο κάτοχος του Παραγώγου έχει πληροφορίες. Ο χρόνος αυτός αποτελεί ένα χρόνος Στάσης (Stopping time).

Το κυρίαρχο ερώτημα στην μελέτη μας είναι, σε πιο χρόνο συμφέρει τον κάτοχο του Παραγώγου να εξασκήσει το δικαίωμα του, η απάντηση είναι στον χρόνο που θα του αποφέρει μεγαλύτερο κέρδος. Ο χρόνος αυτός αποτελεί τον Βέλτιστο χρόνο (Optimal time).

Το Αμερικάνικο Παράγωγο είναι πιο ακριβό από ένα Ευρωπαϊκό Παράγωγο λόγω της ευελιξίας του να εξασκηθεί σε οποιοδήποτε χρόνο πριν τη λήξη του και γιατί αποφέρει μεγαλύτερο κέρδος στον κάτοχό του.

Οπότε χρησιμοποιώντας τις τεχνικές του δυναμικού προγραμματισμού, όπως τις αναφέραμε αναλυτικά στο θεωρητικό μέρος, μπορούμε να συνεχίσουμε στην παρουσίαση του αριθμητικού μέρους αυτού σε εφαρμογές στα Αμερικάνικα Χρηματοοικονομικά προϊόντα Παράγωγα.

4.4.2 Εφαρμογή στα Αμερικάνικα Παράγωγα με μηδενική απόδοση του βέβαιου τίτλου με την χρήση του προγράμματος MatLab.

Αν θελήσουμε να τιμολογήσουμε ένα Αμερικάνικο Παράγωγο (American Put Option) με τιμή εξάσκησης: K = 10, και με υποκείμενο προϊόν μία μετοχή. Αν υποθέσουμε ότι η αξία της μετοχής σήμερα (t = 0) είναι: $S_0 = 10$. Η συγκεκριμένη μετοχή παρουσιάζει μεταβολή σε διακριτό χρόνο στην άνοδο κατά u = 1,05 ή κατά την κάθοδο d = 0,95. Η απόδοση του τίτλου είναι ίση με r = 0. Επίσης θεωρούμε ότι ο χρονικός ορίζοντας είναι T = 3, δηλαδή το δικαίωμα αγοράς λήγει την χρονική στιγμή T = 3.

Εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε τις ουδέτερες από τον κίνδυνο πιθανότητες

$P_u = 0{,}5$ και $P_d = 0{,}5$.

Η τεχνική εύρεσης της Βέλτιστης Στάσης όπως αναλυτικά παρουσιάστηκε σε προηγούμενη ενότητα θα βασιστεί στον αναδρομικό επαναληπτικό σχήμα.

Η μετοχή τις χρονικές στιγμές (t = 0, 1, 2, 3) μπορεί να πάρει τις εξής πιθανές τιμές.

Αν χρησιμοποιήσουμε αυτές τις τιμές, στο πρόγραμμα Matlab και σύμφωνα με τον αλγόριθμο ο οποίος παρατίθεται στο παράρτημα Α, εντολή 1, θα προκύψει ο παρακάτω πίνακας, των πιθανών τιμών των μετοχών. Στο πρόγραμμα MatLab, την τιμή της μετοχής την συμβολίσαμε με το γράμμα (w).

κατάσταση (j)	j=0	j=1	j=2	j=3	χρόνος(t)
	10.00000	0.00000	0.00000	0.00000	t=0
	9.50000	10.50000	0.00000	0.00000	t=1
	9.02500	9.97500	11.02500	0.00000	t=2
	8.57375	9.47625	10.47375	11.57625	t=3

Πινάκας: τιμές των μετοχών

Οι απολαβές που θα λάμβανε ο επενδυτή, αν αποφάσιζε να εξασκήσει το δικαίωμά του θα δίνεται από τον τύπο:

$$\Phi_t^j = \Phi\left(W_t^j\right)$$

$$\Phi(w_t) = (K - w_t)^+ = max\{K - w_t, 0\} = \begin{cases} K - w_t, K > w_t \\ 0 \qquad\quad , K \leq w_t \end{cases}$$

Οι απολαβές που θα λάμβανε ο επενδυτής, σε διάφορες χρονικές στιγμές, αν αποφάσιζε να εξασκήσει το Δικαίωμά του θα ήταν:

κατάσταση(j)	j=0	j=1	j=2	j=3	χρόνος(t)
	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	t=0
	0.50000	0.00000	0.00000	0.00000	t=1
	0.97500	0.02500	0.00000	0.00000	t=2
	1.42625	0.52375	0.00000	0.00000	t=3

Πίνακας: Απολαβές επενδύτη.

Ο τελευταίος πίνακας του output, αντιπροσωπεύει τις τιμές του συμβολαίου και εμφανίζονται, βάση της αναδρομικής σχέσης.

$$P_t^j = \max(\Phi_t^j, 0{,}5P_{t+1}^{j+1} + 0{,}5P_{t+1}^j)$$

$$P_3^j = \Phi_3^j$$

κατάσταση(j)	j=0	j=1	j=2	j=3	χρόνος(t)
	0.37469	0.00000	0.00000	0.00000	t=0
	0.61844	0.13094	0.00000	0.00000	t=1
	0.97500	0.26187	0.00000	0.00000	t=2
	1.42625	0.52375	0.00000	0.00000	t=3

Στον χρόνο $\boldsymbol{t} = \mathbf{3}$, παρατηρούμε ότι από την τελική συνθήκη:

$$P_3^j = \Phi_3^j$$

στις διάφορες καταστάσεις (j), οι τιμές των συμβολαίων θα είναι ίσες με τις απολαβές.

Στην κατάσταση $\boldsymbol{j} = \mathbf{0}$, θα έχουμε: $P_3^0 = \Phi_3^0 = 1.42625$.

Στην κατάσταση $\boldsymbol{j} = \mathbf{1}$, θα έχουμε: $P_3^1 = \Phi_3^1 = 0.52375$.

Στην κατάσταση $\boldsymbol{j} = \mathbf{2}$, θα έχουμε: $P_3^2 = \Phi_3^2 = 0$.

Στην κατάσταση $\boldsymbol{j} = \mathbf{3}$, θα έχουμε: $P_3^3 = \Phi_3^3 = 0$.

Στον χρόνο $\boldsymbol{t} = \mathbf{2}$, παρατηρούμε:

Στην κατάσταση $\boldsymbol{j} = \mathbf{0}$, θα έχουμε:

$P_2^0 = \max(\Phi_2^0, 0.5P_3^0 + 0.5P_3^1) = \max(\Phi_2^0, 0.5\Phi_3^1 + 0.5\Phi_3^0)$

$= \max(0.97500{,}0.5\Phi_3^1 + 0.5\Phi_3^0) =$

$= \max(0.97500{,}0.5 * 1.42625 + 0.5 * 0.52375)$

$= \max(0.97500{,}0{,}97500) = 0.97500$

<u>Παρατηρούμε ότι στον χρόνο $t = 2$ και στην κατάσταση $j = 0$, ισχύει ότι $\boldsymbol{\Phi_2^0 = P_2^0}$, αυτό σημαίνει ότι, το ποσό της απολαβής που θα πάρει ο επενδυτής, αν το εξασκήσει άμεσα θα είναι ίσο με την αξία που θα έχει το Δικαίωμα, αν δεν το εξασκήσει αυτή την στιγμή και το αφήσει για μελλοντική ενέργεια. Ο χρόνος $\boldsymbol{t = 2}$ και η κατάσταση $j = 0$, είναι ο πρώτος χρόνος στο οποίο συμβαίνει αυτό και ο χρόνος αυτός αποτελεί την **Βέλτιστη Στάση**, οπότε ο επενδυτής θα εξασκήσει το δικαίωμά του στον χρόνο αυτόν.</u>

Στην κατάσταση $\boldsymbol{j = 1}$, θα έχουμε:

$P_2^1 = \max(\Phi_2^1, 0.5P_3^1 + 0.5P_3^2) = \max(\Phi_2^1, 0.5\Phi_3^1 + 0.5\Phi_3^2)$

$= \max(0.02500{,}0.5 * 0.52375 + 0.5 * 0)$

$= \max(0.02500{,}0.26187) = 0.26187$

Παρατηρούμε ότι στον χρόνο $t = 2$ και στην κατάσταση $j = 1$, ισχύει ότι $\Phi_2^1 < P_2^1$, αυτό σημαίνει ότι το ποσό της απολαβής που θα πάρει ο επενδυτής αν το εξασκήσει άμεσα θα είναι μικρότερο από την αξία που θα έχει το Δικαίωμα αν δεν το εξασκήσει αυτή την στιγμή και το αφήσει για μελλοντική ενέργεια. Άρα αυτό που θα αποφασίσει θα είναι να το εξασκήσει σε μελλοντικό χρόνο.

Στην κατάσταση $\boldsymbol{j = 2}$, θα έχουμε: $P_2^2 = \Phi_3^2 = 0$

$P_2^2 = \max(\Phi_2^2, 0.5P_3^3 + 0.5P_3^2) = \max(\Phi_2^1, 0.5\Phi_3^3 + 0.5\Phi_3^2)$

$= \max(0, 0.5 * 0 + 0.5 * 0) = \max(0, 0) = 0$

Παρατηρούμε ότι στον χρόνο $t = 2$ και στην κατάσταση $j = 2$, ισχύει ότι $\Phi_2^2 = P_2^2$, αυτό σημαίνει ότι η το ποσό της απολαβής που θα πάρει ο επενδυτής αν το εξασκήσει άμεσα θα είναι ίσο με την αξία που θα έχει το Δικαίωμα, αν δεν το εξασκήσει αυτή την στιγμή και το αφήσει για μελλοντική ενέργεια. Αλλά η αξία αυτή θα είναι μηδέν. Άρα αυτό που θα αποφασίσει θα είναι να το εξασκήσει σε μελλοντικό χρόνο.

Στον χρόνο $\boldsymbol{t = 1}$, παρατηρούμε:

Στην κατάσταση $\boldsymbol{j = 0}$, θα έχουμε:

$$
\begin{aligned}
P_1^0 = \max(\Phi_1^0, 0.5P_2^0 + 0.5P_2^1) = \\
&= \max(0.50000{,}0.5 * 0.97500 \quad + 0.5 * \ 0.26187 \ ) \\
&= \max(0.50000{,}0.61844) = 0.61844
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι στον χρόνο $t = 1$ και στην κατάσταση $j = 0$, ισχύει ότι $\Phi_1^0 < \ P_1^0$, αυτό σημαίνει ότι το ποσό της απολαβής που θα πάρει ο επενδυτής αν το εξασκήσει άμεσα θα είναι μικρότερο από την αξία που θα έχει το Δικαίωμα αν δεν το εξασκήσει αυτή την στιγμή και το αφήσει για μελλοντική ενέργεια. Άρα αυτό που θα αποφασίσει θα είναι να το εξασκήσει σε μελλοντικό χρόνο.

Στην κατάσταση $\boldsymbol{j = 1}$, θα έχουμε:

$$
\begin{aligned}
P_1^1 &= \max(\Phi_1^1, 0.5P_2^1 + 0.5P_2^2) = \max(0, 0.5 * 0 + 0.5 * 0.26187 \ \ ) \\
&= \max(0{,}0.13094) = 0.13094
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι στον χρόνο $t = 1$ και στην κατάσταση $j = 1$, ισχύει ότι $\Phi_1^1 < \ P_1^1$, αυτό σημαίνει ότι το ποσό της απολαβής που θα πάρει ο επενδυτής αν το εξασκήσει άμεσα θα είναι μικρότερο από την αξία που θα έχει το δικαίωμα αν δεν το εξασκήσει αυτή την στιγμή και το αφήσει για μελλοντική ενέργεια. Άρα αυτό που θα αποφασίσει θα είναι να το εξασκήσει σε μελλοντικό χρόνο.

Στον χρόνο $\boldsymbol{t = 0}$, παρατηρούμε:

Στην κατάσταση $\boldsymbol{j = 0}$, θα έχουμε:

$$P_0^0 = \max(\Phi_0^0, 0.5P_1^0 + 0.5P_1^1) = \max(0, 0.5 * 0.61844 \ + 0.5 * \ 0.13094 \ )$$
$$= \max(0, 0.37469) = 0.37469$$

Παρατηρούμε ότι στον χρόνο $t = 0$, ισχύει ότι $\Phi_0^0 < \ P_0^0$, αυτό σημαίνει ότι το ποσό της απολαβής που θα πάρει ο επενδυτής, αν το εξασκήσει άμεσα θα είναι μικρότερο από την αξία που θα έχει το Δικαίωμα, αν δεν το εξασκήσει αυτή την στιγμή και το αφήσει για μελλοντική ενέργεια. Άρα αυτό που θα αποφασίσει θα είναι να το εξασκήσει σε μελλοντικό χρόνο.

4.4.3 Εφαρμογή στα Αμερικάνικα Παράγωγα με θετική απόδοση του βέβαιου τίτλου με την χρήση του προγράμματος MatLab.

Αν θελήσουμε να τιμολογήσουμε ένα Αμερικάνικο Παράγωγο (American Put Option), με τιμή εξάσκησης: K = 10, και με υποκείμενο προϊόν μία μετοχή. Αν υποθέσουμε ότι η αξία της μετοχής σήμερα (t = 0) είναι: $S_0 = 10$. Η συγκεκριμένη μετοχή παρουσιάζει μεταβολή σε διακριτό χρόνο στην άνοδο κατά u = 1,05 ή κατά την κάθοδο d = 0,95. Η απόδοση του τίτλου είναι ίση με: r = 0.03 Επίσης θεωρούμε ότι ο χρονικός ορίζοντας είναι T = 3, δηλαδή το δικαίωμα αγοράς λήγει την χρονική στιγμή T = 3.

Εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε τις ουδέτερες από τον κίνδυνο πιθανότητες

$P_u = 0{,}6$ και $P_d = 0{,}4$.

Στην συγκεκριμένη εφαρμογή θα εφαρμόσουμε ξανά την τεχνική εύρεσης της Βέλτιστης Στάσης που θα βασιστεί πάλι στο αναδρομικό επαναληπτικό σχήμα.

Η μετοχή τις χρονικές στιγμές $(t = 0, 1, 2, 3)$ μπορεί να πάρει τις εξής πιθανές τιμές.

Αν χρησιμοποιήσουμε αυτές τις τιμές στο πρόγραμμα Matlab και σύμφωνα με το με τον αλγόριθμο ο οποίος παρατίθεται στο παράρτημα Α, εντολή 1, θα προκύψει ο παρακάτω πίνακας των πιθανών τιμών των μετοχών. Στο πρόγραμμα την τιμή της μετοχής τη συμβολίσαμε με το γράμμα (w).

κατάσταση (j)	j=0	j=1	j=2	j=3	χρόνος(t)
	10.00000	0.00000	0.00000	0.00000	t=0
	9.50000	10.50000	0.00000	0.00000	t=1
	9.02500	9.97500	11.02500	0.00000	t=2
	8.57375	9.47625	10.47375	11.57625	t=3

Πινάκας: τιμές των μετοχών

Οι απολαβές αν αποφάσιζε ο επενδυτής να εξασκήσει το δικαίωμά του θα δίνεται από τον τύπο:

$$\Phi_t^j = \Phi(W_t^j)$$

$$\Phi(w_t) = (K - w_t)^+ = max\{K - w_t, 0\} = \begin{cases} K - w_t, K > w_t \\ 0 \quad\quad\quad , K \leq w_t \end{cases}$$

Οι απολαβές που θα λάμβανε ο επενδυτής σε διάφορες χρονικές στιγμές, αν αποφάσιζε να εξασκήσει το Δικαίωμά του θα ήταν:

κατάσταση(j)	j=0	j=1	j=2	j=3	χρόνος(t)
	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	t=0
	0.50000	0.00000	0.00000	0.00000	t=1
	0.97500	0.02500	0.00000	0.00000	t=2
	1.42625	0.52375	0.00000	0.00000	t=3

Πίνακας: Απολαβές επενδύτη.

Ο τελευταίος πίνακας του output, αντιπροσωπεύει τις τιμές του συμβολαίου και εμφανίζονται βάσει του αναδρομικής σχέσης.

$$P_t^j = \max(\Phi_t^j, 0{,}6P_{t+1}^{j+1} + 0{,}4P_{t+1}^j)$$

$$P_3^j = \Phi_3^j$$

κατάσταση(j)	j=0	j=1	j=2	j=3	χρόνος(t)
	0.11243	0.00000	0.00000	0.00000	t=0
	0.50000	0.01975	0.00000	0.00000	t=1
	0.97500	0.10170	0.00000	0.00000	t=2
	1.42625	0.52375	0.00000	0.00000	t=3

Στον χρόνο $\boldsymbol{t} = \mathbf{3}$, παρατηρούμε ότι από την τελική συνθήκη:

$$P_3^j = \Phi_3^j$$

στις διάφορες καταστάσεις (j) οι τιμές των Συμβολαίων θα είναι ίσες με τις απολαβές.

Στην κατάσταση $\boldsymbol{j} = \mathbf{0}$, θα έχουμε: $P_3^0 = \Phi_3^0 = 1.42625$.

Στην κατάσταση $\boldsymbol{j} = \mathbf{1}$, θα έχουμε: $P_3^1 = \Phi_3^1 = 0.52375$.

Στην κατάσταση $\boldsymbol{j} = \mathbf{2}$, θα έχουμε: $P_3^2 = \Phi_3^2 = 0$.

Στην κατάσταση $\boldsymbol{j} = \mathbf{3}$, θα έχουμε: $P_3^3 = \Phi_3^3 = 0$.

Στον χρόνο $\boldsymbol{t} = \mathbf{2}$, παρατηρούμε:

Στην κατάσταση $\boldsymbol{j} = \mathbf{0}$, θα έχουμε:

$$P_2^0 = \max\left(\Phi_2^0, \frac{1}{1.03}(0.4P_3^0 + 0.6P_3^1)\right) = \max\left(\Phi_2^0, \frac{1}{1.03}(0.8\Phi_3^1 + 0.2\Phi_3^0)\right) =$$

$$= \max\left(0.97500, \frac{1}{1.03}(0.8 * 0.52375 + 0.2 * 1.42625)\right)$$

$$= \max(0.97500, 0.6837) = 0.97500$$

Παρατηρούμε ότι στον χρόνο $t = 2$ και στην κατάσταση $j = 0$, ισχύει ότι $\Phi_2^0 = P_2^0$,δηλαδή τώρα δεν αποτελεί την Βέλτιστη Στάση, γιατί δεν συμβαίνει για πρώτη φορά!

Στην κατάσταση $\boldsymbol{j} = \mathbf{1}$, θα έχουμε:

$$P_2^1 = \max\left(\Phi_2^1, \frac{1}{1.03}(0.8P_3^2 + 0.2P_3^1)\right) = \max\left(\Phi_2^1, \frac{1}{1.03}(0.8\Phi_3^2 + 0.2\Phi_3^1)\right) =$$

$$= \max\left(0.02500, \frac{1}{1.03}(0.8 * 0 + 0.2 * 0.52375)\right)$$

$$= \max(0.02500, 0.10170) = 0.10170$$

Παρατηρούμε ότι στον χρόνο $t = 2$ και στην κατάσταση $j = 1$, ισχύει ότι $\Phi_2^1 < P_2^1$, αυτό σημαίνει ότι το ποσό της απολαβής που θα πάρει ο επενδυτής αν το εξασκήσει άμεσα θα είναι μικρότερο από την αξία που θα έχει το Δικαίωμα αν δεν το εξασκήσει αυτή την στιγμή και το αφήσει για μελλοντική ενέργεια. Άρα αυτό που θα αποφασίσει θα είναι να το εξασκήσει σε μελλοντικό χρόνο.

Στην κατάσταση **j=2,** θα έχουμε: $P_2^2 = \Phi_3^2 = 0$.

$$P_2^2 = \max\left(\Phi_2^2, \frac{1}{1.03}(0.8P_3^3 + 0.2P_3^2)\right) = \max\left(\Phi_2^2, \frac{1}{1.03}(0.8\Phi_3^3 + 0.2\Phi_3^2)\right) =$$

$$= \max\left(0, \frac{1}{1.03}(0.8 * 0 + 0.2 * 0)\right) = \max(0,0) = 0$$

Παρατηρούμε ότι στον χρόνο $t = 2$ και στην κατάσταση $j = 2$, ισχύει ότι $\Phi_2^2 = P_2^2$ αυτό σημαίνει ότι το ποσό της απολαβής που θα πάρει ο επενδυτής αν το εξασκήσει άμεσα θα είναι ίση με την αξία που θα έχει το Δικαίωμα αν δεν το εξασκήσει αυτή την στιγμή και το αφήσει για μελλοντική ενέργεια. Αλλά η αξία αυτή θα είναι μηδέν. Άρα αυτό που θα αποφασίσει θα είναι να το εξασκήσει σε μελλοντικό χρόνο.

Στον χρόνο $\boldsymbol{t} = \mathbf{1}$ παρατηρούμε:

Στην κατάσταση $\boldsymbol{j} = \mathbf{0}$ θα έχουμε:

$$P_1^0 = \max\left(\Phi_1^0, \frac{1}{1.03}(0.8P_2^1 + 0.2P_2^0)\right)$$

$$= \max\left(0.50000 \quad , \frac{1}{1.03}(0.8 * 0.10170 + 0.2 * 0.97500)\right)$$

$$= \max(0.50000, 0.0848) = 0.50000$$

Παρατηρούμε ότι στον χρόνο $t = 1$ και στην κατάσταση $j = 0$, ισχύει ότι $\boldsymbol{\Phi_1^0 = P_1^0}$, αυτό σημαίνει ότι το ποσό της απολαβής που θα πάρει ο επενδυτής αν το εξασκήσει άμεσα θα είναι ίση με την αξία που θα έχει το Δικαίωμα αν δεν το εξασκήσει αυτή την στιγμή και το αφήσει για μελλοντική ενέργεια. Ο χρόνος $\boldsymbol{t = 1}$, και η κατάσταση $j = 0$, είναι ο πρώτος χρόνος στο οποίο συμβαίνει αυτό και ο χρόνος αυτός αποτελεί την **Βέλτιστη Στάση**, οπότε ο επενδυτής θα εξασκήσει το δικαίωμά του στον χρόνο αυτόν.

Στην κατάσταση $\boldsymbol{j = 1}$, θα έχουμε:

$$
\begin{aligned}
P_1^1 = \max\left(\Phi_1^1, \frac{1}{1.03}(0.8P_2^2 + 0.2P_2^1)\right) \\
&= \max\left(0\ , \frac{1}{1.03}(0.8 * 0 + 0.2 * 0.10170)\right) = \max(0{,}0.01975) \\
&= 0.01975
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι στον χρόνο $t = 1$ και στην κατάσταση $j = 1$, ισχύει ότι $\Phi_1^1 < P_1^1$, αυτό σημαίνει ότι το ποσό της απολαβής που θα πάρει ο επενδυτής αν το εξασκήσει άμεσα θα είναι μικρότερο από την αξία που θα έχει το δικαίωμα αν δεν το εξασκήσει αυτή την στιγμή και το αφήσει για μελλοντική ενέργεια. Άρα αυτό που θα αποφασίσει θα είναι να το εξασκήσει σε μελλοντικό χρόνο.

Στον χρόνο $\boldsymbol{t = 0}$, παρατηρούμε:

Στην κατάσταση $\boldsymbol{j = 0}$, θα έχουμε:

$$
\begin{aligned}
P_0^0 = \max\left(\Phi_0^0, \frac{1}{1.03}(0.8P_1^1 + 0.2P_1^0)\right) \\
&= \max\left(0\ , \frac{1}{1.03}(0.8 * 0.01975 + 0.2 * 0.5)\right) = \max(0{,}0.11243) \\
&= 0.11243
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι στον χρόνο $t = 0$, ισχύει ότι $\Phi_0^0 < P_0^0$, αυτό σημαίνει ότι το ποσό της απολαβής που θα πάρει ο επενδυτής αν το εξασκήσει άμεσα θα είναι μικρότερη από την αξία που θα έχει το δικαίωμα αν δεν το εξασκήσει αυτή την στιγμή και το αφήσει για μελλοντική ενέργεια. Άρα αυτό που θα αποφασίσει θα είναι να το εξασκήσει σε μελλοντικό χρόνο.

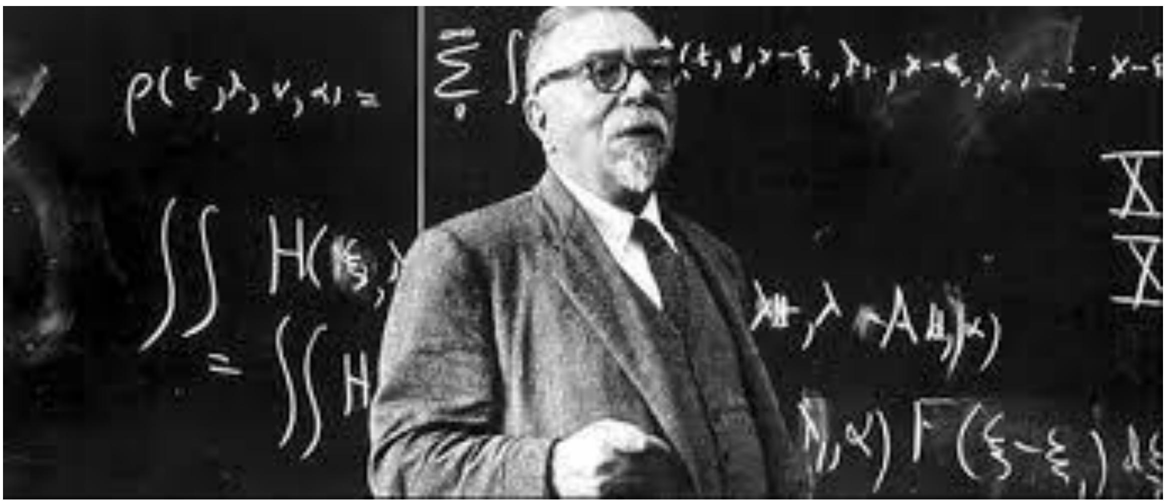
Κεφάλαιο 5

5. Συνεχής χρόνος

5.1 Εισαγωγή

Στη συγκεκριμένη ενότητα θα μελετήσουμε τη Βέλτιστη Στάση σε διαδικασίες Itô, αυτές οι διαδικασίες παρουσιάζουν πληθώρα εφαρμογών σε πολλά πεδία, όπως είναι αυτό των χρηματοοικονομικών μαθηματικών, σε συνεχή χρόνο. Αρχικά, θα αναλύσουμε την κίνηση Brown, όπου αποτελεί μία από τις σημαντικότερες στοχαστικές διαδικασίες, εκτός από αυτή την ονομασία μπορούμε να την συναντήσουμε και σαν διαδικασία Wiener. Επίσης, θα μελετήσουμε την συμβολή του στοχαστικού ολοκληρώματος Itô στην «αδυναμία» της διαδικασίας Wiener.

5.2 Η κίνηση Brown (Διαδικασία Wiener)



Norbert Wiener (November 26, 1894 – March 18, 1964)

Η κίνηση Brown μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει πολλά φυσικά φαινόμενα. Έχει πάρει το όνομά της, από τον Άγγλο βοτανολόγο Robert Brown, ο οποίος πρώτος περιέγραψε (1827), την «τυχαία» κίνηση ενός μικρού σωματιδίου μέσα σε ένα υγρό ή αέριο. Αργότερα, ο Γερμανός φυσικός Albert Einstein έδειξε (1905), ότι η κίνηση αυτή μπορεί να ερμηνευθεί θεωρώντας ότι το σωματίδιο «βομβαρδίζεται» από τα μόρια του υγρού ή του αερίου και για αυτό κινείται με τυχαίο τρόπο στο χώρο. Τέλος, ο Αμερικανός μαθηματικός Norbert Wiener, όρισε αυστηρά και μελέτησε σε βάθος (1918) την ανέλιξη αυτή, αποδεικνύοντας πολλές ιδιότητές της (για αυτό και η ανέλιξη είναι γνωστή και ως διαδικασία Wiener - Wiener Process).

- **Ορισμός: Η κίνηση Brown ή διαδικασία Wiener**, είναι μία στοχαστική διαδικασία (ανέλιξη) $\{B_t, t \geq 0\}$, η οποία παίρνει τιμές στον $\mathbb{R}$ και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

i. Αν $t_i \leq t_{i+1} \leq t_{i+2}$, τότε οι τυχαίες μεταβλητές:

$B(t_{i+2}) - B(t_{i+1})$, $B(t_{i+1}) - B(t_i)$, είναι ανεξάρτητες.

ii. Αν $s, t \geq 0$, τότε:

$$(B_{s+t} - B_s \in A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-|x|^2}{2t}}$$

όπου A είναι ένα σύνολο Borel, οι μεταβολές τις κίνησης Brown είναι κατανεμημένες με την κανονική κατανομή.

$$\mathrm{B(s+t)} - \mathrm{B(s)} \sim \mathrm{N}(0, t).$$

iii. Οι τροχιές τις κίνησης Brown είναι συνεχείς με πιθανότητα 1 (σχεδόν βέβαια). Η $t \rightarrow B_t$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Οι τρείς αυτές ιδιότητες ορίζουν αυστηρά μία και μοναδική κίνηση Brown.

- **Μέτρο Wiener:** από τις ιδιότητες ii και iii δημιουργώ τις από κοινού πιθανότητες, δηλαδή, τις ιδιότητες του μέτρου μ.

$\mu(B(t1) \in A1 \ldots \ldots . B(tn) \in An)) = \int_{A1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \int_{An} p\,(t1,0,x1)p(t2 - t1, x1, x2) \ldots \ldots . p(tn - tn - 1, xn - 1, xn)dx1dx2 \ldots \ldots \ldots . dxn$

$$\text{Όπου: } p(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2pt}} e^{\frac{-|x-y|^2}{2t}}$$

Η ποσότητα αυτή μας δίνει την πιθανότητα η στοχαστική διαδικασία τις χρονικές στιγμές t_n να βρίσκονται στα υποσύνολα An ∈ B(R).

Πριν αναφερθούμε στις παρακάτω ιδιότητες της κίνησης Brown, παρατηρούμε ότι, αν $\{Bt, t \geq 0\}$, είναι μία στοχαστική ανέλιξη και συνεχής συνάρτηση του t η οποία δεν κάνει άλματα. Επίσης, δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη (μη διαφορίσιμη) σχεδόν παντού.

5.2.1 Ιδιότητες της κίνησης Brown

i. Η τετραγωνική μεταβολή στο διάστημα [0,t] είναι ίση με t.

$$SUP_{p \in P} \sum_{i=0}^{n} |W_{(t_i+1)} - W_{(t_i)}|^2 = t$$

<u>Απόδειξη:</u>

- $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_i W)^2 = t$, όπου $\Delta_i W = W_{(t_{i+1})} - W_{(t_i)}$ και $t_i = \frac{\iota t}{n}$

Η διαμέριση του διαστήματος $[0, t]$.

Αρκεί να δείξω ότι:

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\!\!\left[\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta_i W)^2 - t\right]\!\!\right]^2 = 0$$

Η σύγκληση είναι σύγκληση κατά L^2 .

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\!\!\left[\sum_{i=0}^{n-1}(\Delta_i W)^2 - t\right]\!\!\right]^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} E\left[\!\!\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left((\Delta_i W)^2 - \frac{t}{n}\right)^2\right]\!\!\right]$$

$$\xrightarrow{\lambda\acute{o}\gamma\omega\ \tau\eta\varsigma\ \alpha\nu\varepsilon\xi\alpha\rho\tau\eta\sigma\acute{\iota}\alpha\varsigma} \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} E\left[\!\!\left[\left((\Delta_i W)^2 - \frac{t}{n}\right)^2\right]\!\!\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} E\left[\!\!\left[\left((\Delta_i W)^2 - \frac{t}{n}\right)^2\right]\!\!\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left\{E[(\Delta_i W)^4] - \frac{2t}{n}E[(\Delta_i W)^2]\right.$$

$$\left. + \frac{t^2}{n^2}\right\} \xrightarrow{\iota\delta\iota\acute{o}\tau\eta\tau\varepsilon\varsigma\ \kappa\acute{\iota}\nu\eta\sigma\eta\varsigma\ Brown} \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\left\{\frac{3t^2}{n^2} - \frac{2t^2}{n^2} + \frac{t^2}{n^2}\right\} = \lim_{n\to\infty}\frac{2t^2}{n^2}$$

$$= 0$$

ii. Η μεταβολή της κίνησης Brown είναι άπειρη.

$$SUP_{p\in P}\sum_{i=0}^{n}|W_{(t_i+1)-}W_{(t_i)}| \quad = \infty$$

με $P = \{(t_i) \in [0,t], i = (1,2,3,\ldots,n)\}$

<u>Απόδειξη:</u>

(Γιατί η Wt έχει άπειρη μεταβολή;) Αν $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, μία διαμέριση του $\{W_t, t \geq 0\}$, με ίσα διαστήματα: t/n.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} |(\Delta_i W)|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} |(\Delta_i W)|\ |(\Delta_i W)|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \max_{i\in\{0,1,2,..m\}} |(\Delta_i W)| \sum_{n=0}^{n-1} |(\Delta_i W)|$$

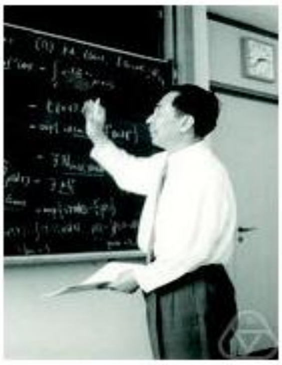
Η $t \to W_{(t_i)}$ είναι συνεχής σχεδόν βέβαια, οπότε:

$$\lim_{n\to\infty} \max_{i\in\{0,1,2,..m\}} |(\Delta_i W)| = 0$$

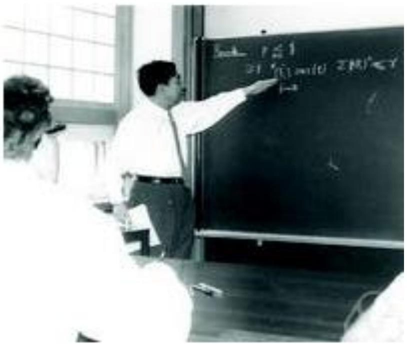
Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι: $t \leq 0 * k$, το οποίο είναι συμβατό μόνο όταν $k = \infty$, άρα:

$$\sum_{n=0}^{n-1} |(\Delta_i W)| = \infty$$

5.3 Στοχαστικό Ολοκλήρωμα Itô



K. Ito
(1967)



K. Ito
(1970)

Kiyosi Itô (September 7, 1915 – 10 November 2008)

"Ever since I was a student, I have been attracted to the fact that statistical laws reside in seemingly random phenomena. Although I knew that probability theory was a means of describing such phenomena, I was not satisfied with contemporary papers or works on probability theory, since they did not clearly define the random variable, the basic element of probability theory. At that time, few mathematicians regarded probability theory as an authentic mathematical field, in the same strict sense that they regarded differential and integral calculus. With clear definition of real numbers formulated at the end of the 19th century, differential and integral calculus had developed into an authentic mathematical system. When I was a student, there were few researchers in probability; among the few were Kolmogorov of Russia, and Paul Levy of France"

Το γεγονός ότι η μεταβολή της κίνησης Brown είναι άπειρη, δημιουργεί ορισμένα προβλήματα. Το σημαντικότερο από αυτά είναι ότι, δεν μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα $\int f(s,\omega)dW$ μιας συνάρτησης πάνω σε μία κίνηση Brown σαν ένα ολοκλήρωμα Riemann – Stieljes.

Παράδειγμα:Αν η τιμή μιας μετοχής περιγράφεται από την στοχαστική διαδικασία $\{W_t, t \geq 0\}$, η οποία είναι μια κίνηση Brown, αν $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, είναι οι χρονικές στιγμές που μπορώ να κάνω τις αγοροπωλησίες των μετοχών, και Θ η ποσότητα των μετοχών που θα κατέχει ο επενδυτής, τότε η αξία (συνολικός πλούτος) είναι:

$$V_T = \theta_0(W_{t1} - W_{t0}) + \theta_1(W_{t2} - W_{t1}) + \ldots\ldots + \theta_{n-1}(W_t - W_{t-1})$$

f_0 f_1 f_{tn-1} :FILTRATION

Στο $\lim_{n\to\infty} V_t = \int_0^T \theta dW(t)$, δεν ορίζεται το ολοκλήρωμα Riemann - Stieljes γιατί έχουμε άπειρες μεταβολές.

Το στοχαστικό ολοκλήρωμα του Itô δίνει λύση στο παραπάνω πρόβλημα.

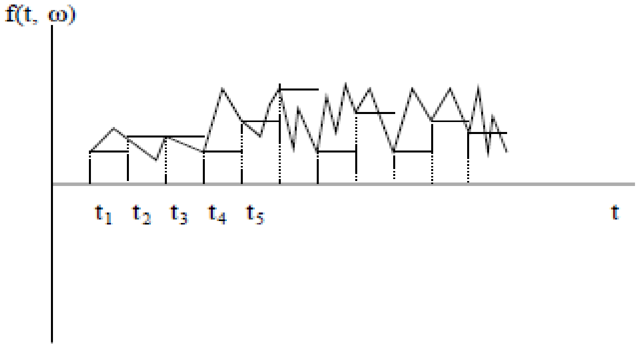
5.3.1 Ορισμός ολοκληρώματος Ito

Αν θεωρήσουμε μία συνάρτηση $\mathfrak{f}: (0,\infty) * \Omega \to \mathcal{R}$, πάνω σε μία κίνηση Brown $\{W_t, t \geq 0\}$, η οποία ξεκινάει από το 0. Σκοπός μας είναι να ορίσουμε το ολοκλήρωμα $\int f(t,\omega)dWt(\omega)$ επάνω στις μεταβολές τις κίνησης Brown. Αν $(\Omega, \mathfrak{f}, P)$, ένας χώρος πιθανοτήτων και $\mathfrak{f}t = \sigma(\{W_u, u \leq t\})$. Η f είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση της κίνησης Brown.

Για να ορίσω το ολοκλήρωμα Itô θεωρώ: $t_0 < t_1 < \cdots < t_{n,}$ μία διαμέριση του $\{W_t, t \geq 0\}$,, στο $[0,T]$ με $t_i \subset [0,\mathrm{T}]$ και προσεγγίζουμε την συνάρτηση: $f(t_i,\omega) \approx \sum_{i=0}^{n-1} f\big(t_{i,}\omega\big)\mathbf{1}_{[(t_i)-(ti+1))}(t)$. (σχήμα).

Η Στοχαστική ανέλιξη αυτή θα καλείται απλή γιατί: 1) είναι f_t –προσαρμοσμένη, 2)Είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη και 3) είναι σταθερή σε κάθε χρονικό διάστημα $[(t_i),(t_i+1)]$.

Η προσέγγιση της $f(t_i,\omega)$, η οποία αποικίζεται με την παχιά γραμμή στο σχήμα γίνεται με την λεπτή γραμμή.



Σχήμα 3:Προσέγγηση της $f(t_i,\omega)$

έστω ότι υπάρχει $f(t_i,\omega)$, τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε:

$$[(f(t_i,\omega)_n - f(t_i,\omega))^2] \xrightarrow{n\to\infty} \xrightarrow{f(t_i,\omega)_n \to f(t_i,\omega)\ \sigma\tau\eta\nu\ L^2} 0$$

Έστω $(\Omega, \mathfrak{f}, P)$, ένας χώρος μέτρου. Θα συμβολίσουμε με $L^2(\mu)$ το σύνολο των συναρτήσεων $\mathfrak{f}: \Omega \to \mathcal{R}$, οι οποίες είναι μετρήσιμες ως προς την σ-άλγεβρα f, για την οποία ισχύει:

$$||f(t_i,\omega)||_{L^2} = \int_{\Omega} |f(t_i,\omega)|^2 d\mu < \infty$$

Τώρα θα δούμε την έννοια της σύγκλησης μια ακολουθίας στον L^2.

Έστω f_n μία ακολουθία του $L^2(\mu)$. Θα λέμε ότι η ακολουθία f_n συγκλίνει στην f∈ $L^2(\mu)$, αν $||f_n - f||_{L^2} \to 0$, δηλαδή αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n > N$ ισχύει:

$$||f_n - f_m||_{L^2} < \varepsilon$$

Δηλαδή: $\int_\Omega |f(\omega)_n - f(\omega)|^2 d\mu(\omega) < \varepsilon$.

Η ακολουθία fn ϵ $L^2(\mu)$, ονομάζεται Cauchy αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε:$||f_n - f_m||_{L^2} < \varepsilon,$ για $n, m > N.$

Τότε το ολοκλήρωμα Itô μπορεί να οριστεί σαν όριο στον L^2.

$$\int_0^T f(t_{i,}\omega) dW(t)\,(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_{i,}\omega)[W_{(t_i+1)} - W_{(t_i)}](\omega)$$

Ουσιαστικά, το Ολοκλήρωμα Itô εκφράζει το εμβαδόν κάτω από την $f(t_i,\omega)$ η οποία παρουσιάζει συνεχείς διαδρομές. Το γεγονός αυτό προκύπτει ότι η κίνηση Brown παρουσιάζει συνεχείς διαδρομές.

Για να οριστεί καλύτερα το ολοκλήρωμα Ito θα πρέπει ναι ισχύουν οι προϋποθέσεις:

i. Η τιμή της συνάρτησης f την χρονική στιγμή t θα πρέπει να εξαρτάται από τις τιμές του B_t, για $s \leq t$, αλλά όχι για $s \geq t$, δηλαδή η συνάρτηση f θα πρέπει να είναι προσαρμοσμένη στην δομή πληροφορίας που σχετίζεται με την κίνηση Brown.

ii. Για να ορίζεται το όριο της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων, και κατά συνέπια και το ολοκλήρωμα του Itô για μια προσαρμοσμένη διαδικασία f, η διαδικασία αυτή θα πρέπει να ικανοποιεί και την έξτρα ιδιότητα: $E\left[\int_0^T |f(t,\omega)|^2 dt < \infty\right]$

Οι διαδικασίες που ικανοποιούν αυτή τη συνθήκη θα λέμε ότι απαρτίζουν το σύνολο $L^2([0,T])$.

c. Το όριο λαμβάνεται κατά L^2 έννοια και όχι σημειακά για κάθε ω.

d. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε και άλλα στοχαστικά ολοκληρώματα: $\int_a^b f(t,\omega)dX_t$,για γενικές στοχαστικές διαδικασίες X_t.

Μια στοχαστική διαδικασία f είναι διαδικασία βήματος και η οποία μπορεί να γραφεί στην μορφή:

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j)\mathbf{1}_{[(t_i)-(ti+1))}(t)$$

για κάποια διαμέριση: $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leq b$, του διαστήματος $[a,b]$ όπου $f(t_j)$ τυχαίες μεταβλητές οι οποίες είναι: $\mathfrak{f}_{t_j}$$-μετρήσιμες$ και τετραγωνικά ολοκληρώσιμες: $E\left[(f_j)^2\right] < \infty$.

Αν ορίσουμε την f ως διαδικασία βήματος (step processes), με τη μορφή της παραπάνω εξίσωσης τότε το στοχαστικό ολοκλήρωμα της ως προς την κίνηση Brown ορίζεται ως:

$$I\left(f_{step}(t)\right) = \int_a^b f(t)dW(t) = \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j)[W_{(t_j+1)}\text{-}W_{(t_j)}]$$

Επίσης Μπορούμε να θεωρήσουμε μια ακολουθία διαμερίσεων του διαστήματος που γίνονται όλο και πιο λεπτές καθώς το: $n \to \infty$ και συνεπώς μπορούμε να πάρουμε μια ακολουθία Βήματος $f_{step,n}$.

Αn f_{step} μία διαδικασία βήματος ισχύει η ιδιότητα της ισομετρίας του Itô (η απόδειξη παρατίθεται παρακάτω).

$$E\left[|I\left(f_{step}(t)\right)|^2\right] := E\left[|\int_a^b \left(f_{step}(t)\right)dWt|^2\right] = E\left[\int_a^b |\left(f_{step}(t)\right)|^2 dt\right]$$

Μία στοχαστική ανέλιξη f λέμε ότι ανήκει στο χώρο $L^2([\alpha,b])$ αν είναι προσαρμοσμένη στη διήθηση $f_t = \sigma(W_s, s \leq t)$, και ικανοποιεί την συνθήκη: $||f(t\ \ )||_{L^2[\alpha,b]} = \int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty$.

Αν f∈ στο χώρο $L^2([\alpha,b])$. Το Ολοκλήρωμα Itô της f ορίζεται ως εξής:

$$I(f_{step}) \coloneqq \int_a^b f_{step}(t)dt = \lim_{n\to\infty} I\left(f_{step,n}(t)\right) := \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left(f_{step,n}(t)\right) dW(t)$$

Για να έχει νόημα ο παραπάνω ορισμός θα πρέπει να δείξουμε ότι η ακολουθία $I\left(f_{step,n}(t)\right) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left(f_{step,n}(t)\right) dW(t)$, συγκλίνει.

<u>Απόδειξη</u>

Από την ιδιότητα της πληρότητας του χώρου L^2 (χώρος Hilbert), αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία: $\xi_n = I\left(f_{step,n}(t)\right)$ είναι μία ακολουθία Cauchy, δηλαδή ισχύει:

$$||\xi_n - \xi_m||_{L^2[\alpha,b]} := E[|\xi_n - \xi_m|^2] \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$$

Για να δείξουμε ότι την ιδιότητα Cauchy για την ακολουθία ξn, θα θεωρήσουμε ότι η ακολουθία $f_{step,n}(t)$ προσεγγίζει κατά L^2 την $f_{step.}$ Δηλαδή:

$$\lim_{n\to\infty} E \int_a^b \left(f_{step}(t) - f_{step,n}(t)\right) d(t) = 0$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της ισομετρίας του Itô για τις διαδικασίες βήματος θα έχουμε:

$$E\left[\left|\int_a^b \left(f_{step,n}(t)\right) dWt\right|^2\right] = E\left[\int_a^b \left|\left(f_{step,n}(t)\right)\right|^2 dt\right]$$

Η ιδιότητα αυτή συνδέει, την μέση τιμή του τετραγώνου του στοχαστικού ολοκληρώματος Itô μιας διαδικασίας βήματος, με την μέση τιμή του ολοκληρώματος Riemann του τετραγώνου.

Χρησιμοποιώντας και την ιδιότητα της γραμμικότητας του Itô για τις διαδικασίες Itô έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&E[|\xi_n - \xi_m|^2]| \ : \\
&\qquad = E\left[|\int_{\alpha}^{b} f_{step,n}(t)\, dW \ - \int_{\alpha}^{b} f_{step,m} \ (t) dW|^2 \right] \\
&\qquad = ιδιότητα\ γραμμικότητας\ του\ Ito \\
&\qquad = E\ \left[|\int_{\alpha}^{b} (f_{step,n}(t) \ - f_{step,m}(t)) dW|^2 \right] \\
&\qquad = ιδιότητα\ ισομετρίας\ του\ Ito \\
&\qquad = E\ \left[\int_{\alpha}^{b} |(f_{step,n}(t) \ - f_{step,m}(t))|^2 dt \right] \\
&\qquad = E\ \left[\int_{\alpha}^{b} |(f_{step,n}(t) \ - f_{step}(t) + f_{step}(t) - f_{step,m}(t))|^2 dt \right] \\
&\qquad \leq (τριγωνική\ ιδιότητα)\ \ E\ \left[\int_{\alpha}^{b} |(f_{step,n}(t) \ - f_{step}(t))|^2 dt \right] \\
&\qquad + E\ \left[\int_{\alpha}^{b} |(f_{step,m}(t) \ - f_{step}(t))|^2 dt \right]
\end{aligned}
$$

θα θεωρήσουμε ότι η ακολουθία προσεγγίζει κατά L^2 την $f_{step.}$ το δεξιό μέρος της εξίσωσης τείνει στο 0 καθώς .Αρα:

$$
||\xi_n - \xi_m||_{L^2[\alpha,b]} := E[|\xi_n - \xi_m|^2] \ \xrightarrow{n,m\to\infty} 0
$$

5.3.2 Ιδιότητες του ολοκληρώματος Ito

Το ολοκλήρωμα Itô έχει τις εξής ιδιότητες:

1. Είναι γραμμικό, δηλαδή για δύο στοχαστικές διαδικασίες f_1 και f_2 με λ_1 και $\lambda_1 \in \mathcal{R}$ ισχύει:

$$I(\lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2) = \int_a^b (\lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2) dW_t = \int_a^b (\lambda_1 f_1) dW_t + \int_a^b (\lambda_2 f_2) dW_t = \lambda_1 \int_a^b (f_1) dW_t + \lambda_2 \int_a^b (f_2) dW_t = \lambda_1 I(f_1) + \lambda_2 I(f_2)$$

2. Η πρώτη ροπή της τυχαίας μεταβλητής:

$$\xi_n := \int_a^b f d\, W_t = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)[W_{(t_i+1)} - W_{(t_i)}]$$

ικανοποιεί την σχέση: $E\left[\int_a^b f dW_t\right] = 0$.

<u>Απόδειξη</u>

Η τιμή της συνάρτησης f την χρονική στιγμή t θα πρέπει να εξαρτάτε από τις τιμές του B_t για $s \leq t$ αλλά όχι για $s \geq t$, δηλαδή, η συνάρτηση f θα πρέπει να είναι προσαρμοσμένη στην δομή πληροφορίας που σχετίζεται με την κίνηση Brown. Δηλαδή η f είναι: $f_t - \mu\varepsilon\tau\rho\acute{\eta}\sigma\iota\mu\eta$.

Οπότε:

$$E[\xi_n] = E\left[\int_a^b f dW_t\right] = E\left[\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)[W_{(t_i+1)}-W_{(t_i)}]\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\left[E\left[f(t_i)[W_{(t_i+1)}-W_{(t_i)}]\right]\right] \xrightarrow{f_t\ \mu\varepsilon\tau\rho\acute{\eta}\sigma\iota\mu\eta} \sum_{i=1}^{n-1}\left[E\left[E\left[f(t_i)[W_{(t_i+1)}-W_{(t_i)}]\right] \mid f_t\right]\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\left[E\left[f(t_i)[\, E[W_{(t_i+1)}-W_{(t_i)}] \mid f_t]\right]\right] = 0$$

Αν τώρα $\lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi$, στον χώρο L^2 μπορώ να δείξω ότι: $E[\xi] = 0$.

- Αφού $\xi_n \to \xi$ στο L^2 τότε:

$$|\xi_n - \xi|_{L^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow |\xi_n - \xi|_{L^1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \overset{\sigma.\beta.}{\Longrightarrow} 0 = \lim_{n\to\infty} E\,[\xi_n] = E \lim_{n\to\infty}[\xi_n] = E[\xi]$$

3. Η δεύτερη ροπή της τυχαίας μεταβλητής είναι:

$$\xi_n \coloneqq \int_a^b f d\, W_t = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)[W_{(t_i+1)}-W_{(t_i)}]$$

ικανοποιεί την σχέση:$E\left[|\int_a^b \big(f(t)\big)\, dWt|^2\right] = E\left[\int_a^b |(f(t))|^2 dt\right]$ (Ισομετρία του Itô).

<u>Απόδειξη:</u>

$$E[|\xi_n|^2] = E\left[|\int_a^b \big(f(t)\big)\, dWt|^2\right] = E\left[\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)^2[W_{(t_i+1)}-W_{(t_i)}]^2\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\left[E\{f(t_i)^2[W_{(t_i+1)}-W_{(t_i)}]^2\}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\{[Ef(t)^2]\, E\left[[W_{(t_i+1)}-W_{(t_i)}]^2\right]\}$$

$$\xrightarrow{I\delta\iota\acute{o}\tau\eta\tau\alpha\ \kappa\acute{\iota}\nu\eta\sigma\eta\varsigma\ Brown} \sum_{i=1}^{n-1}\{[Ef(t)^2]\,(t_{i+1}-t_i)\}$$

Οπότε:

$$E[|\xi|^2] = \lim_{n\to\infty} E[|\xi_n|^2] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \{[Ef(t)^2]\,(t_{i+1} - t_i)\} \xrightarrow{Riemann} \int_a^b |f|^2 dt$$

5.3.3 Διαδικασίες Itô – Ο Τύπος του Itô

Μια διαδικασία Itô είναι μια στοχαστική διαδικασία X_t της μορφής:
$X_\tau = X_0 + \int_0^t f(s,\omega)ds + \int_0^t g(s,\omega)dW_s$, όπου f, s ικανοποιούν

τις συνθήκες: $\int_0^t f(s,\omega)ds < \infty$ $και$ $\int_0^t g(s,\omega)^2 ds < \infty$, σχεδόν βέβαια.

Η διαφορική στοχαστική εξίσωση έχει μορφή η οποία είναι:

$$dX_\tau = f dt + g d\, W_t.$$

.

<u>Ο Τύπος του Itô</u>

- Αν θεωρήσουμε την στοχαστική διαδικασία $\{W_{(t)}\}_{t\geq 0}$ και $f: [0,T] * \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ τότε οποιαδήποτε συνάρτηση της X_t της μορφής $f(t, W_t)$, με την X_t προσαρμοσμένη στην f και $f \in C^{1,2}$.

$$X(t+\Delta t) = f\big(t+\Delta t, W(t+\Delta t)\big) = f\big(t+\Delta t, W(t) + W(\Delta t)\big)$$
$$\approx (ανάπτυγμα\ Taylor)\ f\big(t+W(t)\big) + \frac{df(t+W(t))}{dt}$$
$$+ \frac{df}{dx}\big(t+W(t)\big)\Delta W(t) + \frac{d^2 f}{2dx^2}\big(t+W(t)\big)W(t)^2 + \cdots$$

$X(t) - X(0) = X(t_n) - X(t_{n-1}) + X(t_{n-1}) + \cdots \ldots \ldots \ldots .. + X(t_i) - X(t_0) =$
$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{df(t_i, W(t_i))}{dt} (t_{i+1} - t_i) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{df}{dx} (t_i, W(t_i)) (W(t_i) - W(t_i)) +$
$\frac{d^2 f}{2dx^2} (t_i, W(t_i)) (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2$
$\xrightarrow{n \to \infty \;\; \sigma\tau o\nu \;\; L^2} \int_0^t \frac{df}{dt} \left((t, W(t)) + \frac{d^2 f}{dt^2} (t, W(t)) \right) + \int_0^t \frac{df}{dx} (x, W(t)) dW(t).$

Παράδειγμα

- Αν $Yt = f(t, X_t)$ και $f \in C^{1,2}$, το οποίο σημάνει ότι η f έχει συνεχή πρώτη Παράγωγο, ως προς την πρώτη μεταβλητή και έχει συνεχή δεύτερη Παράγωγο, ως προς τη δεύτερη μεταβλητή. Αν εφαρμόσουμε το ανάπτυγμα Taylor μέχρι 2^{η} τάξης. $f: [0, T] * \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$.

$$dY_t = \frac{df}{dt} dt + \frac{df}{dx} dX_t + \frac{d^2 f}{2x^2} (dX_t)^2$$

- Αν $f(t, x) = \frac{x^2}{2}$, τότε $X_t = W_t \;\; \kappa\alpha\iota \; Y_t = f(X_t)$

$$\begin{aligned}
Y_t = \frac{W^2(T)}{2} &= Y(T) - Y(0) \\
&= \int_0^T \left(\frac{df}{dt} dt + \frac{d^2 f}{2x^2} (dt)^2 \right) (t, W(t)) dt \\
&+ \int_0^T \frac{df}{dx} (t, W(t)) dW_t \\
&= \int_0^T \frac{1}{2} dt + \int_0^T (W(t)) dW_t = \frac{T}{2} + \int_0^T (W(t)) dW_t \\
&\Rightarrow \int_0^T (W(t)) dW_t = \frac{W^2(T)}{2} + \frac{T}{2}
\end{aligned}$$

5.4 Το πρόβλημα της Βέλτιστης Στάσης στο συνεχή χρόνο

(Optimal Stopping Problem)

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε το πρόβλημα Βέλτιστης Στάσης στον συνεχή χρόνο. Όπως θα παρατηρήσουμε στην συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε εργαλεία που είδη αναφέραμε και στον διακριτό χρόνο. Μερικά από αυτά είναι, ο Generator Operator L και ο δυναμικός προγραμματισμός. Επίσης, η θεωρεία της περιβάλλουσας του Snell (Snell envelop), μπορεί να γενικευτεί στην περίπτωση που ο χρόνος είναι συνεχής. Οι στοχαστικές διαδικασίες που θα αναφερθούμε, θα είναι διαδικασίες Markov.

Στην συνέχεια, θα διατυπώσουμε ένα πρόβλημα Βέλτιστης Στάσης για την εύρεση της βέλτιστης αξίας ενός Αμερικάνικου Put Option, το οποίο σχετίζεται με την διαδικασία Markov σε συνεχή χρόνο, σε ένα ευρύτερο χώρο κατάστασης: $E = \mathbb{R}$.

Όπως γνωρίζουμε ήδη από το λήμμα του Ito και χρησιμοποιώντας την κίνηση Brown θα δημιουργήσουμε ένα δυναμικό - εξελικτικό μοντέλο, γνωστό ως γεωμετρική κίνηση Brown στο συνεχή χρόνο.

Αν χρησιμοποιήσουμε όριο με $n \to \infty$, θα μπορούσαμε να δοκιμάσουμε

$$\ln \frac{X(t)}{X(0)} = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)(t) + \sigma\, W(t)$$

Έστω ότι το μοντέλο είναι: $X(t) = f(t, x) = X(0) \exp\left(\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma\, W(t)\right)$

με $f \in C^{1,2}$ και $\frac{df}{dx}$ καθώς και η $\frac{d^2 f}{dx^2}$, είναι συνεχής συναρτήσεις.

Από το λήμμα του Itô θα έχουμε

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \left(\frac{df}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}\right)\big(X, W(X)\big)dX + \int_0^t \left(\frac{df}{dx}\right)\big(X, W(X)\big)dW(X) =$$

$$X(0) + \int_0^t \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) f\big(X, W(X)\big)dX + \int_0^t \sigma\, f\big(X, W(X)\big)dW(X) = X(0) +$$

$$\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)\int_0^t f\big(X, W(X)\big)dX + \sigma\int_0^t f\big(X, W(X)\big)dW(X) \textit{ για κάθε } t \geq 0.$$

$$X(t+h) = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)\int_0^{t+h} f\big(X, W(X)\big)dX + \sigma\int_0^{t+h} f\big(X, W(X)\big)dW(X)$$

Επομένως,

$$X(t+h) - X(t) = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)\int_t^{t+h} f\big(X, W(X)\big)dX + \sigma\int_t^{t+h} f\big(X, W(X)\big)dW(X)$$

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε το όριο καθώς $h \to 0$, η παραπάνω σχέση παίρνει την εξής μορφή:

$$\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)X(t)h + \sigma X(t)(W(t+h) - W(t))$$

$$X(t+h) - X(t) = (\mu)X(t)h + \sigma\sqrt{h}Z_t\, , Z_t \sim N(0,1)$$

Η μορφή αυτή αποτελεί την Γεωμετρική κίνηση Brown.

$$\Delta X(t) = X(t+h) - X(t)$$

Όταν όμως $h \to 0$, τότε $\Delta X(t) \to dX(t)$

Οπότε η τελική μορφή του μοντέλου θα είναι

$$dX(t) = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) X(t)dt + \sigma X(t)dW(t), \ X(0)=x$$

Μεταβολή της τιμής t.t+h

Μέση τιμή

Διακύμανση

Μία βασική εφαρμογή είναι η εξής, αν υποθέσουμε ότι ένας επενδυτής κατέχει ένα κεφάλαιο του οποίου η αξία του είναι $X(t)$, η οποία μπορεί να μοντελοποιηθεί σύμφωνα με την γεωμετρική κίνηση Brown.

Ο επενδυτής μπορεί να αποφασίζει να πουλήσει το κεφάλαιο που κατέχει στον χρόνο Στάσης (Stopping time) $\tau \geq 0$ και θα πάρει απολαβή : $G(t) = e^{-rt}(X(\tau) - K)$.

Εισάγοντας και το πρόβλημα της βέλτιστης Στάσης, ο Βέλτιστος χρόνος στον οποίο θα αποφασίσει να πουλήσει ο επενδυτής το κεφάλαιο, είναι ο (τ^*) και μπορούμε να τον υπολογίσουμε λύνοντας την εξίσωση :

$$G(\tau^*) = sup_{\tau \in [0,T]} \, (e^{-r\tau}(X(\tau) - K).$$

Όπου $G(\tau^*)$, αποτελεί την Βέλτιστη απολαβή που θα πάρει ο επενδυτής αν αποφασίσει να πουλήσει το κεφάλαιο στον χρόνο (τ^*).

5.4.1 Ο Γεννήτορας Τελεστής (The Generator L)

Τον συγκεκριμένο τελεστή τον είχαμε συναντήσει και στο διακριτό χρόνο.

Στον συνεχή χρόνο, ο Γεννήτορας Τελεστής ορίζεται ως εξής:

$$(L\varphi)(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(E_x\big[\varphi\big(X(h)\big)\big] - \varphi(\chi)\Big)\,\gamma\iota\alpha\ x \in E$$

Ο συγκεκριμένος Τελεστής, υπάρχει πάντα και απεικονίζει τη μέση τιμή της συνάρτησης φ, κατά μήκος της στοχαστικής διαδικασίας Markov.

Αν τώρα για κάθε $\varphi \in C^2$, δηλαδή είναι δύο φορές παραγωγίσιμες, και με χώρο καταστάσεως: $E = \mathbb{R}^d$, τότε η διαδικασία:

$$M(t) = \varphi\big(X(t)\big) - \int_0^t L\varphi\big(X(s)\big)ds$$

Είναι Martingale και αν η (τ) είναι ένας φραγμένος χρόνος Στάσης τότε:

$$\varphi\big(X(t)\big) = f(x) - E_x\left[\int_0^t L\varphi\big(X(s)\big)ds\right]$$

(Παράδειγμα)

Εδώ μπορούμε να αναφερθούμε ξανά στην κίνηση Brown $W(t), t \geq 0$, με χώρο καταστάσεως: $E = \mathbb{R}$, ο Γεννήτορας Τελεστής γίνεται:

$$L\varphi(x) = \frac{1}{2}\,\frac{d^2}{dx^2}\varphi(\chi)$$

Στην περίπτωση που έχουμε πολυδιάστατο χώρο καταστάσεως της κίνησης Brown

$\mathrm{W(t)} = (\mathrm{W_1(t)}, \ldots\ldots, \mathrm{W_d(t)})$, με χώρο καταστάσεως: $E = \mathbb{R}^d$, η οποία ικανοποιεί την ισχυρή ιδιότητα του Markov.

$$L\varphi(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\frac{d^2}{dx_i^2}\varphi(\chi) = \frac{1}{2}\Delta\varphi(\chi)$$

Μετά την αναφορά και στον γεννήτορα τελεστή, θα επισημάνουμε ορισμένα σημεία στο Optimal Stopping Problem ξεκινώντας πάλι από την αρχή.

Αν θεωρήσουμε πάλι μια στοχαστική διαδικασία Markov $X = (X_t)$, με $t \geq 0$, και με χώρο καταστάσεως: $E = \mathbb{R}^d$, με $d \geq 1$, η οποία ικανοποιεί την ισχυρή ιδιότητα του Markov, αυτό ερμηνεύεται ως εξής, ότι η (X_t), είναι δεξιά και αριστερά συνεχής από το χρόνο Στάσης.

Αν χρησιμοποιήσουμε τη μετρήσιμη συνάρτηση $G: E \to \mathbb{R}$, και θεωρούμε το Πρόβλημα Βέλτιστης Στάσης: $V(x) = sup_\tau\big(E_x G(X_\tau)\big)$, το supremum λαμβάνεται πάνω σε όλους του χρόνους Στάσης (τ), και $X_0 = x$ πάνω στην P_x για κάθε $x \in E$.

Ο τρόπος εύρεσης της βέλτιστης λύσης στην παραπάνω εξίσωσης, ακολουθεί την εξής διαδικασία. Το πρόβλημα που παρατηρούμε στη εξίσωση $V(x) = sup_\tau\big(E_x G(X_\tau)\big)$, λύνεται με τον ίδιο τρόπο αν βρούμε μία μικρότερη superharmonic συνάρτηση $\bar{V}$:$E \to \mathbb{R}$, η οποία πρέπει να είναι ίδια με την (V), η οποία κυριαρχεί στην συνάρτηση απολαβής (G).

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, ο χρόνος εισόδου τ_D στην στοχαστική διαδικασία $X = (X_t)$, στην περιοχή Στάσης D=$\{x \in E: \bar{V} = G\}$ είναι βέλτιστος. Η C=$\{x \in E: \bar{V} > G\}$ αποτελεί την περιοχή συνέχειας (continuation region).

Στο σημείο αυτό παρατηρούμε, όπως και στον διακριτό χρόνο, αντίστοιχα και σε αυτή την ενότητα, η λύση στο πρόβλημα της Βέλτιστης Στάσης, θα επέλθει μέσω των $\bar{V}$ και C, τα οποία είναι άγνωστα και θα πρέπει να καθοριστούν, λύνοντας το παρακάτω πρόβλημα.

$$L_X\bar{V} \leq 0 \ (\bar{V}\ \ ελάχιστο)$$

$$\bar{V} \geq G\ (\bar{V} > G\ στην\ περιοχή\ \text{C και}\ \bar{V} = G\ στην\ περιοχή\ \text{D})$$

Προσδιορίζοντας ότι $\bar{V} = V$, παρατηρούμε ότι: $V(x) = E_x G(X_{\tau_D})$ για κάθε x$\in E$.

Ο χρόνος εισόδου τ_D στην στοχαστική διαδικασία $X = (X_t)$, είναι: $\tau_D = \inf(t \geq 0: X_t \in D)$ ή $\tau_C = \inf(t \geq 0: X_t \notin C)$ είναι χρόνος Βέλτιστης Στάσης (Optimal Stopping time.)

$$L_X V = 0 \; για \; κάθε \; X \in C$$

$$V|_D = G|_D$$

Για λόγους απλότητας, θεωρούμε ότι η περιοχή συνέχειας C ίση με (c, ∞) και η περιοχή Στάσης D ίση με $(-\infty, c]$, όπου $c \in E$ είναι σημείο Βέλτιστης Στάσης. Επίσης αναφέρουμε ότι η συνάρτηση V είναι διαφορίσιμη στο σημείο b, δηλαδή :

$$V'(b) = G'(b) \; \textit{(Smooth fit)}$$

5.5 Παράδειγμα με το Αμερικάνικο Παράγωγο (American Option)

Στην ενότητα αυτή παρατίθεται παράδειγμα ενός Αμερικάνικου Παραγώγου στον συνεχή χρόνο. Αν θεωρήσουμε ότι κατέχουμε ένα Αμερικάνικο Δικαίωμα Πώλησης (American Put Option) και ορίζοντας είναι άπειρος ($N = \infty$).

Η αξία του Αμερικάνικου Δικαιώματος Πώλησης δίνεται από την σχέση:

$$V(x) = E_x\left[e^{-r\tau^*}\big(K - X(\tau^*)\big)^+\right] = sup_{\tau>0}\, E_x\left[e^{-r\tau}\big(K - X(\tau)\big)^+\right]$$

Αν αποφασίσουμε να εξασκήσουμε το Παράγωγο την χρονική στιγμή t θα έχουμε απολαβές σύμφωνα με την ισότητα : $G(X) = e^{-rt}\big(K - X(t)\big)^+$.

Στο συνεχή χρόνο το διωνυμικό μοντέλο, μπορεί να παρασταθεί μέσω της κίνησης Brown, ως διαδικασία Itô.

Το διωνυμικό μοντέλο στο συνεχές όριο γνωρίζουμε ότι: $ln(X_t) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$. Επίσης γνωρίζουμε ότι $W_t \sim N(0, t)$, άρα συμπεραίνουμε: $ln(X_t) = \mu t + \sigma W_t$.

$$dX_t = d\big(ln(X_t)\big) = \mu dt + \sigma dW_t$$

Παρατηρούμε ότι X(t)=exp(X_t) και επειδή η συνάρτηση g(t,x)= exp(x) είναι $C^{1,2}$, από τον τύπο του Itô, βγάζουμε το συμπέρασμα ότι αφού η $X(t)$ είναι διαδικασία Itô, τότε και η X_t είναι διαδικασία Itô. Οπότε, παρατηρούμε ότι:

$$dg(\mathrm{t}, X_t) = g_x(t, X_t)dX_t + \frac{g_{xx}(t, X_t)(dX_t)^2}{2} = g(t, X_t)dX_t + \frac{g(t, X_t)(dX_t)^2}{2}$$

Με $g_t = 0 \; \kappa\alpha\iota \; g_x = g_{xx} = \exp(x) = g$.

Επίσης: $dX_t = \mu dt + \sigma dW_t$

$$(dX_t)^2 = \mu^2 dt^2 + 2\mu\sigma dt dW_t + \sigma^2 (dW_t)^2 = \sigma^2 dt$$

Άρα

$$dg(\mathrm{t}, X_t) = g(t, X_t)\mu dt + g(t, X_t)\sigma dW_t + \frac{g(t, X_t)(dW_t)^2}{2}$$

$$dX(t) = (\mu + \frac{\sigma^2}{2})X(t)dt + \sigma X(t)dW_t$$

Η γεωμετρική κίνηση Brown συμβολίζεται με: $(X_t)_{t\geq 0}$ και ο Χρόνος Στάσης με (τ).

Με $(W_t)_{t\geq 0}$ παριστάνουμε την κίνηση Brown η οποία ξεκινάει από την χρονική στιγμή μηδέν 0. Με $r > 0$ συμβολίζουμε το επιτόκιο, K είναι η τιμή εξάσκησης του Παραγώγου και σ είναι τυπική απόκλιση.

$$dX(t) = rX(t)dt + \sigma X(t)dW_t$$

Η παραπάνω εξίσωση κάτω από τη P_x , έχει λύση την

$$X_t = X_0 \exp\left((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\right)$$

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε τον γεννήτορα τελεστή L η στοχαστική διαδικασία θα πάρει την μορφή:

$$L_X\varphi(t,x) = \frac{d}{dt}\varphi(t,x) + \mu x\frac{d}{dt}\varphi(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2\frac{d^2}{dx^2}\varphi(t,x)$$

η οποία έχει λύση στην περιοχή $S = [0,\infty)$.

Σκοπός του προβλήματος Βέλτιστης Στάσης (Optimal Stopping Problem) είναι να υπολογίσουμε την αξία (V) και να βρούμε τον Βέλτιστο χρόνο (τ^*) εξάσκησης του Παραγώγου.

Ξεκινώντας, υποθέτουμε ότι υπάρχει μια συνεχή περιοχή: $C = [0,\infty)x[0,c]$, το c θα το καθορίσουμε στην συνέχεια. Σημαντικό είναι να ειπωθεί ότι, από τις σχέσεις που μας δίνουν την αξία V(x) καθώς και τη λύση X_t που προκύπτει από τη στοχαστική διαδικασία, δηλαδή, τη γεωμετρική κίνηση Brown, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι όσο ποιο κοντά παίρνει το X τιμές στο μηδέν (0) τόσο πιο μικρή θα είναι η πιθανότητα να αυξηθεί το κέρδος στην συνέχεια. Το c έχει οριστεί έτσι ώστε $c \in (0,K)$, άρα ο χρόνος Στάσης (Optimal Stopping) είναι:

$\tau_c = \inf\,(t \geq 0: X_t \leq c)$ είναι βέλτιστος.

Βασιζόμενοι στην ισχυρή ιδιότητα του Markov, οδηγούμαστε στο ακόλουθο πρόβλημα, με την άγνωστη τιμή της αξίας και την άγνωστη τιμή c.

Χρησιμοποιώντας την σχέση :

$$L_X\varphi(t,x) = \frac{d}{dt}\varphi(t,x) + \mu x\frac{d}{dt}\varphi(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2\frac{d^2}{dx^2}\varphi(t,x)$$

Και την $L_X = rV \quad για \quad x > c$, οδηγούμαστε στην :

$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 V''(x) + rxV'(x) - rV'(x) = 0\,, x \in (c, \infty)$ (Cauchy-Euler)

V(x) > $(K - x)^+$ για $x > c$

V(x) = $(K - x)^+$ για $x = c$ $V'(x) = -1$ για $x = c$ ($smooth\ fit$: $V'(c) = G'(c)$)

$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 V''(x) + rxV'(x) - rV'(x) < 0\,, x \in (0, c)$

V(x) = $(K - x)^+$ για $0 < x < c$

Τώρα, θα ψάξουμε να βρούμε λύση της: $V(x) = x^p$ για $x \in (c, \infty)$, με την βοήθεια της $\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 V''(x) + rxV'(x) - rV'(x) = 0$

παρατηρούμε ότι:

$$p^2 - \left(1 - \frac{2r}{\sigma^2}\right)p - \frac{2r}{\sigma^2} = 0$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει δύο λύσεις:

$$p_1 = 1 \quad και \quad p_2 = -\frac{2r}{\sigma^2}$$

Οπότε η γενική λύση της εξίσωσης έχει την μορφή:

$$V(x) = C_1 x + C_2 x^{-2r/\sigma^2}$$

Όπου $C_1\ και\ C_2$ είναι σταθερες οι οποίες θα πρέπει να υπολογιστούν.

Από τις δύο λύσεις αποδεκτή είναι η $p_2 = -\frac{2r}{\sigma^2}$ αφού $\lim_{x\to\infty} V(x) = 0$ και $V(x) \le K$, άρα $C_1 = 0$ για όλα τα $x > 0$.

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε της δύο σχέσεις:

V(x) = $(K - x)^+$ για $x = c$ $V'(x) = -1$ για $x = c$ (smooth fit)

Οι λύσεις από αυτό το σύστημα θα μας δώσουν τους αγνώστους C_2 και c.

$$C_2 = \frac{\sigma^2}{2r}(\frac{K}{1+\sigma^2/2r})$$

$$\text{c}=\frac{K}{1+\sigma^2/2r}$$

Οπότε η αξία του Αμερικάνικου Παραγώγου θα είναι

$$V(x) = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{2r}\left(\frac{K}{1+\sigma^2/2r}\right)x^{-2r/\sigma^2} & \alpha\nu \quad x \in [c,\infty) \\ K - x & \alpha\nu \quad x \in (0,c] \end{cases}$$

Εδώ σε αυτό το σημείο θα πρέπει να τονίσουμε ότι η βέλτιστη τιμή της V είναι η πρώτη φορά (τ) στον οποίο $X(\tau) \leq c = \frac{K}{1+\sigma^2/2r}$, δηλαδή:

$\tau_c = \inf{(t \geq 0 \colon X_t \leq c)}$.

Σημαντική σημείωση σε όλα αυτά που αναφέραμε παραπάνω, είναι ότι η V είναι (C^2) δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,c) \cup (c,\infty)$ και είναι (C^1) είναι μόνο μία φορά παραγωγίσημη μόνο στο συμείο $x = c$. Επίσης, η V είναι κυρτή στο διάστημα $(0,\infty)$.

Κεφάλαιο 6

Συμπεράσματα και Προτάσεις για μελλοντική εργασία

Με την παρούσα μελέτη διαπιστώσαμε το πλήθος των εφαρμογών της θεωρίας της βέλτιστης στάσης. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί, η εφαρμογή της παραπάνω θεωρίας στα χρηματοοικονομικά, όπως εκτενώς αναφερθήκαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Επίσης, ευρεία εφαρμογή των προβλημάτων της βέλτιστης στάσης εμφανίζονται και στην επιχειρησιακή έρευνα (Operational Researching) η οποία αποτελεί το βασικό εργαλείο του σύγχρονου management καθώς και στον χώρο των Εμπράγματων Δικαιωμάτων (Real Option).

Ειδικότερα, αυτό που παρατηρήσαμε στο διακριτό χρόνο, για να μπορέσουμε να λύσουμε ένα πρόβλημα βέλτιστης στάσης, η βαθιά γνώση των στοχαστικών μαθηματικών είναι επιβεβλημένη, θα πρέπει να συνδυάσουμε τις γνώσεις από τις διαδικασίες Martingales και να έχουμε κατανοήσει την έννοια της διήθησης πάνω σε μια στοχαστική διαδικασία. Επίσης, η κατασκευή της στοχαστικής διαδικασίας S_k^N με $k = 0,1, \ldots\ldots, N$, είναι αυτή που θα καθόρισε την λύση, στην Μαρκοβιανή προσέγγιση, η οποία για την κατασκευή της ακολουθία από τυχαίες μεταβλητές $(S_k^N)_{0\leq k\leq N}$, χρησιμοποιήσαμε την διαδικασία γνωστή ως αναδρομική επαναληπτική μέθοδο. Η περιβάλλουσα του Snell (Snell envelope), όπως μπορούμε να την διατυπώσουμε αλλιώς, είναι χρήσιμη και στην Μαρκοβιανή προσέγγιση στον διακριτό χρόνο αλλά και στον συνεχή χρόνο.

Στη Μαρκοβιανή προσέγγιση, αυτό που θα πρέπει επίσης να επισημάνουμε είναι η συμβολή των τελεστών, όπως του Τελεστή Μετάβασης (T), αλλά κυρίως του Γεννήτορα (L), στον υπολογισμό της βέλτιστης λύσης, τόσο στον διακριτό όσο και στον συνεχή χρόνο. Κύρια ιδέα στην εύρεση του βέλτιστού χρόνου ήταν να λύσουμε το αρχικό πρόβλημα βελτιστοποίησης απλοποιώντας αυτό, μέσω μιας διαδικασίας με την οποία στο αρχικό μας πρόβλημα $[n, M]$ μειώθηκε σε $[0, M -$

$n]$. Η καινούρια διαδικασία η οποία ξεκινάει από την θέση (κατάσταση) $x_n = X$ την χρονική στιγμή μηδέν και η διαδικασία «τρέχει» σε ορίζοντα $M - n$.

Το συμπέρασμα που προκύπτει, είναι ότι ευκολότερα μπορούμε να λύσουμε την $E_{x_n}\left[G(X_{\tau'}^{\chi})\right]$, και μετά να επιστρέψουμε στο αρχικό μας πρόβλημα απλώς θέτοντας οπού χ την κατάσταση πάνω στην στοχαστική διαδικασία που μας ενδιαφέρει. Φυσικά, όλη η παραπάνω διαδικασία που εφαρμόσαμε, είναι γνωστή ως δυναμικός προγραμματισμός (dynamic programming approach).

Πριν προχωρήσουμε στις εφαρμογές της βέλτιστης στάσης στα χρηματοοικονομικά, αναφέρεται ότι στο συνεχή χρόνο μελετήσαμε την βέλτιστη στάση σε διαδικασίες Itô, αυτές οι διαδικασίες παρουσιάζουν πληθώρα εφαρμογών σε πολλά πεδία, όπως είναι αυτό των χρηματοοικονομικών μαθηματικών, επίσης αναφέραμε πως οι διαδικασίες Itô λύνουν το πρόβλημα της κίνησης Brown.

Εφαρμόσαμε το πρόβλημα της βέλτιστης στάσης στον διακριτό χρόνο, στα Αμερικάνικα Παράγωγα Συμβόλαια, με μηδενική και θετική απόδοση του βέβαιου τίτλου και υπολογίσαμε με αριθμητικά σχήματα τον βέλτιστο χρόνο για να εξασκήσει ο επενδυτής το Δικαίωμα του, με τη χρήση του προγράμματος MatLab. Επίσης στο συνεχή χρόνο αναλύσαμε διεξοδικά μέσα από ένα παράδειγμα τον τρόπο υπολογισμού του χρόνου Βέλτιστης Στάσης ενός Αμερικάνικου παραγώγου.

Τέλος, στην παράγραφο αυτή, θα τονιστεί κυρίως η συμβολή που θα μπορούσε να έχει η θεωρία της βέλτιστης στάσης σε περιοχές που δεν έχει εφαρμοστεί σχεδόν καθόλου. Ένα τέτοιο πεδίο, αποτελεί και η ασφάλεια στον κυβερνοχώρο (Cyber Security). Η χρησιμοποίησή της στο περιβάλλον αυτό, ίσως συμβάλει στην πρόληψη των εγκλημάτων στον κυβερνοχώρο (Cybercrime) και τελικώς να αποτελέσει ένα καινούριο πεδίο εκτενής εφαρμογής και επιστημονικής έρευνας.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Εντολές Προγράμματος Matlab.

Εντολή 1

Δημιουργία διωνυμικού δέντρου (binomial tree)

```
function [w] =binomtree (u,d,m,s)

for i=1:m
   for j=1:i
      w(i,j)=s*u^(j-1)*d^(i-j);
   end
end
end
```

binomtree: είναι η συνάρτηση που μπορούμε να παράγουμε το διωνυμικό δέντρο.

u,d: η μεταβολή (απόδοση) που παρουσιάζει η μετοχή στην άνοδο και στην κάθοδο.

m: είναι ο χρόνος που ξεκινάει από το 1.

s: είναι η αρχική τιμή της μετοχής.

w: είναι ο διαγώνιος πίνακας με τις πιθανές τιμές της μετοχής .

Εντολή 2

Υπολογισμός τιμής Αμερικάνικου Παραγώγου

```
function [p,c,w] = americanputprice(u,d,m,s,r,k)

[w] = binomtree(u,d,m,s);

rr=(1+r)^(-1);

pp=(1+r-d)/(u-d);

for j=1:m

    p(m,j)=max(k-w(m,j),0);

    c(m,j)=max(k-w(m,j),0);

end

for i=m:-1:3

    for j=1:i-1

        cc=max(k-w(i-1,j),0);

        c(i-1,j)=max(k-w(i-1,j),0);

        p(i-1,j)=max(cc,rr*(pp*p(i,j+1)+(1-pp)*p(i,j)));

    end

end
```

americanputprice: είναι η συνάρτηση που μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή του Put option.

binomtree: είναι η συνάρτηση που μπορούμε να παράγουμε το διωνυμικό δέντρο.

rr:προεξοφλητικός παράγοντας.

pp:η πιθανότητα που παρουσιάζει στην ανοδική κατάσταση. Με 0<pp<1.

1-pp: η πιθανότητα που παρουσιάζει στην ανοδική κατάσταση.

c: είναι οι απολαβές του επενδυτή.

p: η τιμή του Put Option σε διάφορες χρονικές στιγμές και σε διάφορες καταστάσεις.

i=m:-1:3: στην συγκεκριμένη εντολή δείχνουμε ότι ξεκινάμε από τη χρονική στιγμή μηδέν και τρέχουμε μέχρι την χρονική στιγμή τρία.

Βιβλιογραφία – References

[1] Αθανάσιος Ν. Γιαννακόπουλος. (2003). *Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική. Τόμος I: Εισαγωγή στην Στοχαστική Ανάλυση*. .Πανεπιστημιακές σημειώσεις.

[2] Αθανάσιος Ν. Γιαννακόπουλος. (2011). *Εισαγωγή στα Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά*. Πανεπιστημιακές σημειώσεις.

[3] Αθανάσιος Ν. Γιαννακόπουλος. (2012). *Εισαγωγή στην Θεωρία Μέτρου, την Θεωρία της ολοκλήρωσης με εφαρμογές στην Θεωρία Πιθανοτήτων*. Πανεπιστημιακές σημειώσεις.

[4] Athanasius N. Yannacopoulos. (2017). Hold your horses. Optimal Stopping for (sophisticated) managers. 14o Summer School. Athens.

[5] Alex Cox. (2009). *Optimal Stopping and Applications*.

[6] Γ. Κουμούλλης & Σ Νεγρεπόντης. (2005). *Θεωρία Μέτρου*. Συμμετρία. Αθήνα.

[7] Γεωργίου Γρ. Ρούσσα. (1992). *Θεωρία Πιθανοτήτων*. Ζήτη. Θεσσαλονίκη.

[8] Damien Lamberton. (2009). *Optimal Stopping and American options*. Ljubljana Summer School on Financial Mathematics. France.

[9] Goran Peskig & Albert Shiryaev (2006). *Optimal Stopping and Free-Boundary Problems*. Birkhäuser Verlag.

[10] John C. Hull. (2009). *Options, Futures and other Derivatives*. (Seven edition). Pearson Education, Inc., Upper Saddle River, New Jersey.

[11] Καλπανίζου Σοφία. (2002). *Στοιχεία Μετροθεωρίας Πιθανοτήτων.* Ζήτη. Θεσσαλονίκη.

[12] Μιχαήλ Μπούτσικας. (2005). *Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα. (Εισαγωγή στη στοχαστική χρηματοοικονομική ανάλυση)*. Πανεπιστημιακές σημειώσεις. Πειραιάς.

[13] Mike Ludkovski. (2009). *A Sumulation Approach to Optimal Stopping Under Partial Information*. Department of Statistics and Applied Probability. University of California.

[14] Richard R. Weber (1975). *The theory of Optimal Stopping.* Downing College. Cambridge.