ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS AND BUSINESS

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Σχολή Επιστημών και Τεχνολογίας της Πληροφορίας

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μέτρα πιθανότητας Gauss σε χώρους Banach και Hilbert

Ιωάννης Ρωτούς

Επιβλέπων Καθηγητής: Αθανάσιος Γιαννακόπουλος

Τριμελής Επιτροπή
Αθανάσιος Γιαννακόπουλος, Καθηγητής
Δημοσθένης Δριβαλιάρης,Επίκουρος Καθηγητής
Μιχαήλ Ζαζάνης, Καθηγητής

Αθήνα, Σεπτεμβριος 2017

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Η συγκεκριμένη πτυχιακή εργασία μελετά μέτρα πιθανότητας Gauss σε χώρους Hilbert και Banach . Αρχικά θα αναφερθούμε στο μέτρο Lebesgue και στους λόγους για τους οποίους δεν μπορούμε να εργασθούμε με αυτό στις άπειρες διαστάσεις, διότι δεν διατηρεί το αναλλοίωτο των μεταθέσεων. Στην συνέχεια θα ορίσουμε το μέτρο πιθανότητας Gauss και θα αναφερθούμε σε χαρακτηριστικά του ,όπως ισοδυναμίες , μεταθέσεις κλπ . Πρώτα όμως ας αφιερώσουμε λίγο χρόνο για να δούμε γιατί η ανάλυση και οι πιθανότητες λειτουργούν αρκετά καλά στον $\mathbb{R}^n$ και γιατί δυσκολεύουν στις άπειρες διαστάσεις (σε σχέσεις με τους χώρους Banach,Hilbert) .

• Ο $\mathbb{R}^n$ είναι ένας καλός τοπολογικός χώρος είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και τοπικά συμπαγής.
• Ο $\mathbb{R}^n$ έχει καλή αλγεβρική δομή, είναι διανυσματικός χώρος και οι μετατοπίσεις και οι κλίμακες έχουν νόημα.
• Ο $\mathbb{R}^n$ έχει έναν ¨φυσικό' χώρο μέτρο Lebesgue πάνω σε μια Borel άλγεβρα. Όπου η σημαντικότερη ιδιότητα είναι ότι το μέτρο παραμένει αναλλοίωτο ως προς τις μεταθέσεις και αυτό είναι πολύ χρήσιμο στην θεωρία της ολοκλήρωσης.

Οι χώροι Banach και Hilbert είναι πλήρης διανυσματικοί χώροι και συγκεκριμένα θα ασχοληθούμε με διαχωρίσιμους χώρους . Θα δούμε όμως ότι παρόλα αυτά είναι αδύνατο να κατασκευάσουμε σε αυτούς ένα μέτρο με τις ιδιότητες του μέτρου Lebesgue και συγκεκριμένα το αναλοίωτο ως προς τις μεταθέσεις.Θα χρειαστούμε τα ακόλουθα λήμματα.

Λήμμα 0.0.1 *(Riesz) Έστω $(X, \|\|)$ γραμμικός χώρος με νόρμα και M ένας κλειστός υπόχωρος του X. Τότε για κάθε $\nu \in (0,1)$ υπάρχει ένα $x_\nu \in S_1$ (όπου $S_1 = \{x \in X : \|x\| = 1\}$) τ.ω $\|x_\nu - m\| \geq \nu$ για κάθε $m \in M$.*

Απόδειξη: Έστω $p \in X \setminus M$ με $d := dist(p, M) = \underset{m\in M}{inf} \|p - m\| > 0$ και σταθεροποιώντας $m_0 \in M$ τ.ω $\|p - m_0\| < d/\nu$. Ορίζουμε $x_\nu = \frac{p-m_0}{\|p-m_0\|}$. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι επειδή $x_\nu \in S_1$,θα έχουμε ότι $\|x\| = 1$. Τώρα για κάθε $m \in M$ θα υπολογίζουμε

$$\|x_\nu - m\| = \left\| \frac{p - m_0}{\|p - m_0\|} - m \right\|$$

$$= \frac{1}{\|p - m_0\|} \|p - (m_0 + \|p - m_0\| m)\| \geq d/(d/\nu) = \nu$$

□

Λήμμα 0.0.2 *Έστω X ένας απειροδιάστατος γραμμικός χώρος με νόρμα. Τότε υπάρχει μια αριθμήσιμη συλλογή από ανεξάρτητες μπάλες $B(x_n, r)$ (δηλαδή $\forall i \neq j, \quad B(x_j, r) \cap B(x_i, \epsilon) = \emptyset$) μέσα στην $B(0, 1)$.*

Απόδειξη: Με την χρήση του προηγούμενου Λήμματος, για ϵ ,$0 < \epsilon < 1$, για S_n το γραμμικό span των $\{x_j : 1 \leq j \leq n\}$, με απόσταση $d(x_{n+1}, S_n)$ να είναι μεγαλύτερη του $1 - \epsilon$ και $r = \frac{1}{3}(1 - \epsilon)$ θα έχουμε ότι για $m < n$

$$\left\| \frac{2}{3} x_n - \frac{2}{3} x_m \right\| \geq \frac{2}{3} d(x_n, S_{n-1}) > \frac{2}{3}(1 - \epsilon) = 2r$$

Συνεπώς αφού η απόσταση των κέντρων τους είναι μεγαλύτερη από 2 φορές την ακτίνα τους θα έχουμε

$$B\left(\frac{2}{3}x_n, r\right) \cap B(\frac{2}{3}x_m, r) = \emptyset$$

και επίσης $B(\frac{2}{3}x_m, r) \subset B(0,1)$ διότι,

$$\left\|\frac{2}{3}x_m\right\| + r = \frac{2}{3} + r = 1 - \frac{1}{3}\epsilon < 1$$

□

Πρόταση 0.0.1 *Έστω X ένας απειροδιάστατος χώρος Banach . Τότε ένα Borel μέτρο (βλέπε παράρτημα για μέτρο Borel) μ στον X δεν παραμένει αναλλοίωτο στις μεταθέσεις.*

Απόδειξη: Έστω μ ένα μέτρο Borel που παραμένει αναλλοίωτο στις μεταθέσεις και απεικονίζει πεπερασμένα μέτρα σε ανοιχτές μπάλες. Από το Λήμμα 1 γνωρίζουμε ότι η μπάλα $B(0,1)$ περιέχει άπειρες αριθμήσιμες ανεξάρτητες μπάλες $\{B(x_n,\epsilon)\}_{n=1}^{\infty}$. Τότε μέσω του αναλλοίωτου των μεταθέσεων, το $\mu(B(x_n,\epsilon))$ θα είναι ίδιο για κάθε $n \in N$,$\mu(B(x_n,\epsilon)) = a$ όπου $a \in [0,\infty)$. Τώρα αν $a > 0$ θα έχουμε $\mu(B(0,1)) \geq \mu(\cup_n B(x_n,\epsilon)) = \sum \mu(B(x_n,\epsilon)) = \sum a = \infty$, από την άλλη έχουμε ότι αν $a = 0$ και γνωρίζοντας ότι ο χώρος X είναι διαχωρίσιμος μπορούμε να καλύψουμε όλο τον χώρο από ανοιχτές μπάλες με ακτίνα ϵ και να πάρουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα $\mu(X) = 0$ (τετριμμένο μέτρο).

□

Κεφάλαιο 1

Μέτρα πιθανότητας σε χώρους Hilbert

Στο κεφάλαιο αυτό θα μιλήσουμε για Gaussian μέτρα σε διαχωρίσιμους χώρους Hilbert, για το πώς μπορούμε να εξετάσουμε πότε ένα μέτρο είναι Gauss . Επίσης θα δούμε το θεώρημα Feldman-Hajek για την ισοδυναμία των μέτρων, το ολοκλήρωμα Hellinger και το θεώρημα Bochner όπου θα μας δώσει μια γενικότερη και καλύτερη εικόνα για την κατανόηση του μετασχηματισμού Fourier.

1.1 Μέτρα Gauss σε χώρους Hilbert

Αρχικά θα ξεκινήσουμε με τον ορισμό του push-forward όπου γενικότερα χρησιμοποιείται για αλλαγές μεταβλητών αλλά στην περίπτωση μας θα το χρησιμοποιούμε για να προβάλουμε τα μέτρα στον $\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ελέγχουμε αν είναι Gaussian και τα αποτελέσματα θα τα γενικεύουμε στον χώρο Hilbert.

Ορισμός 1.1.1 *(Push-forward) Έστω $(X, \mathcal{F})$ και $(Y, \mathcal{G})$ μετρήσιμοι χώροι, και $f : X \to Y$ μετρήσιμη ως προς $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ δηλαδή το $f^{-1}(F) \in \mathcal{F}$ όταν $F \in \mathcal{G}$. Για οποιοδήποτε θετικό μέτρο ή πραγματικό μέτρο μ στον $(X, \mathcal{F})$ ορίζουμε το push-forward ή την εικόνα του μέτρου του μ μέσω της f , αυτό το μέτρο θα είναι $\mu \circ f^{-1}$ στο $(Y, \mathcal{G})$ ως $\mu \circ f^{-1}(F)$:=$\mu(f^{-1}(F))$, $\forall \ \ F \in \mathcal{G}$.*

Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να δούμε ότι εάν $u \in L^1(Y, \mu \circ f^{-1})$,τότε $u \circ f \in L^1(X, \mu)$ και θα έχουμε την ακόλουθη ισότητα

$$\int_Y ud(\mu \circ f^{-1}) = \int_X (u \circ f) d\mu$$

Ορισμός 1.1.2 *Έστω H διαχωρίσιμος χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και $\mathcal{B}(H)$ σ-άλγεβρα Borel στον H. Ένα μέτρο πιθανότητα μ στον χώρο $(H, \mathcal{B}(H))$ θα λέγεται μέτρο Gauss αν για τυχόν $h \in H$, υπάρχει $m \in \mathbb{R}$, $q \geq 0$ τ.ω $\mu(x \in H; < h, x > \in A]) = N(m, q)(A)$, $\forall \ \ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, όπου $N(m, q)$ η κανονική κατανομή μέ μέσο m και διακύμανση q.*

Συνεπώς αν μ ένα μέτρο Gauss τότε θα υπάρχει ένα στοιχείο $m \in H$ τ.ω

$$< m, h > = \int_H < h, x > \mu(dx), \ \ \forall \ h \in H$$

και ένας γραμμικός συμμετρικός τελεστής Q για τον οποίο θα έχουμε

$$< Qh_1, h_2 > = \int_H (< h_1, x - m >)(< h_2, x - m >)\mu(dx), \ \ \forall \ h_1, h_2 \in H$$

και στην περίπτωση μας το m θα λέγεται μέσος και ο Q τελεστής συνδιακύμανσης.
Επίσης βλέποντας ότι για τον Q έχουμε

$$\langle Qh, h\rangle = \int_Y \langle h, x-m\rangle^2 \mu(dx) \geq 0, \quad h \in H$$

θα είναι και μή αρνητικός .Στην συνέχεια αφού δούμε πρώτα ότι ο Q είναι trace class θα δούμε ότι είναι και συνεχής τελεστής μέσω του οποίου ισχυριζόμαστε ότι είναι και φραγμένος για να μπορέσουμε στο τέλος να ισχυριστούμε ότι είναι και αυτοσυζηγής .
Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη να αναφέρουμε ότι τα μέτρα Gauss μπορούν να χαρακτηριστούν μέσω του μετασχηματισμού Fourier ή αλλιώς χαρακτηριστική συνάρτηση.

$$\hat{\mu}(h) = \int_H e^{i<h,x>} \mu(dx) = e^{i<h,m>-1/2<Qh,h>}, \quad h \in H$$

Όπου γνωρίζουμε ότι ισχύουν τα δύο ακόλουθα:

$$\hat{\mu}(0) = \mu(H)$$

$$\hat{\mu_1} = \hat{\mu_2} \Rightarrow \mu_1 = \mu_1$$

Πρόταση 1.1.1 *Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας Gauss μϵ μέσο 0 και διακύμανση Q.Τότϵ ο Q θα ϵίναι trace class .*

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε την χαρακτηριστική συνάρτηση του μ

$$\varphi(h) = \int_H e^{i<h,x>} \mu(dx) = e^{-1/2<Qh,h>}, \forall\ h \in H$$

Στην συνέχεια θα χωρίσουμε τον χώρο H σε σημεία εντός και εκτός ¨μάζας' με ακτίνα $c \geq 0$. Επίσης από την ταυτότητα του Euler έχουμε

$$e^{i<h,x>} = cos < h, x > +isin < h, x >$$

$$\int_H e^{i<h,x>} \mu(dx) = \int_H cos < h, x > \mu(dx) + i \int_H sin < h, x > \mu(dx)$$

Η ποσότητα όμως $i \int_H sin < h, x > \mu(dx) = 0$ λόγο συμμετρίας. Επίσης

$$1 - \varphi(h) = \int_H \mu(dx) + \int_H [cos < h, x > \mu(dx)] = \int_H [1 - cos < h, x >] \mu(dx)$$

$$= \int_{|x| \leq c} [1 - cos < h, x >] \mu(dx) + \int_{|x|>c} [1 - cos < h, x >] \mu(dx)$$

Το $\int_{|x|>c} [1 - cos < h, x >] \mu(dx) \leq 2\mu \{|x| > c\}$ διότι η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το $cos < h, x >$ είναι -1 συνεπώς η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το εσωτερικό του ολοκληρώματος είναι 2 και γιάυτό το λόγο θα είναι μικρότερο δυο φορές της ¨μάζας' που βρίσκεται εκτός της ¨μάζας' με ακτίνα ς.
Τώρα αρκεί να ορίσουμε την συνάρτηση $f(t) = 1 - cost - t^2/2 \leq 0$ με $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ και $f''(t) = cost - 1 < 0$ συνεπώς ισχύει ότι $1 - cost \leq t^2/2$. Άρα $\int_{|x| \leq c} [1 - cos < h, x >] \mu(dx) \leq 1/2 \int_{|x| \leq c} < h, x >^2 \mu(dx)$

$$\leq 1/2 \int_{|x| \leq c} < h, x >^2 \mu(dx) + 2\mu \{|x| > c\}$$

Όπου από τις παρατηρήσεις που είχαμε κάνει παραπάνω γνωρίζουμε ότι $< Qh, h >= \int_H < h, x >^2 \mu(dx)$. Άρα και εδώ που έχουμε περιορίσει το ολοκλήρωμα στην μπάλα με ακτίνα μικρότερη ή ίση του c θα έχουμε

$$\leq 1/2 < Q_c h, h > +2\mu\{|x| > c\}$$

Συνεπώς ο Q_c είναι και φραγμένος τελεστής. Τώρα μέσω ορθομοναδιαίας βάσης $\{e_n\}$ στο H μπορούμε να έχουμε $T_r(Q_c) = \sum_{n=1}^{\infty} < Q_c e_n, e_n >= \int_{|x|\leq c} \sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n >^2 \mu(dx)$,
το οποίο αποτέλεσμα το έχουμε λόγω της ταυτότητας του Parseval $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |< x, e_n >|^2$. Δηλαδή , $\|x\|^2 =< x, x >= \sum_{i,j}^{\infty} < x, e_j >< x, e_i >< e_j, e_i >$

$$= \sum_{i,j}^{\infty} < x, e_j >^2$$

$$\int_{|x|\leq c} \sum_{n=1}^{\infty} < x, e_n >^2 \mu(dx) = \int_{|x|\leq c} |x|^2 \mu(dx) \leq c^2$$

Άρα ο Q_c είναι trace class . Για να δείξουμε όμως τώρα ότι ο Q έχει πεπερασμένη διαγώνιο μας αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\beta > 0$ και $h \in H$ τ.ω $< Q_c h, h >\leq 1 \Rightarrow < Qh, h >\leq \beta$ δηλαδή $< Qh, h >\leq \beta < Q_c h, h > h \in H$. Τώρα από πριν γνωρίζουμε ότι

$$1 - e^{-1/2<Qh,h>} \leq 1/2 < Q_c h, h > +2\mu(\{x > c\}), \forall\ h \in H,\ c > 0$$

Τώρα βρίσκουμε $h \in H$ τ.ω $< Q_c h, h >\leq 1$, άρα θα έχουμε

$$1 - e^{-1/2<Qh,h>} \leq 1/2 + 2\mu(\{x > c\}) \Rightarrow$$

$$1/2 - 2\mu(\{x > c\}) \leq e^{-1/2<Qh,h>} \Rightarrow$$

$$e^{1/2<Qh,h>} \leq (1/2 - 2\mu(\{x > c\}))^{-1}, \quad (I)$$

Τώρα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το $\mu(\{|x| > c\}) \longrightarrow 0$, διότι όσο το $c \longrightarrow \infty$ το $\mu(\{|x| \leq c\}) \longrightarrow \mu(H) = 1$, άρα το $\mu(\{|x| > c\}) \longrightarrow 0$ ως συμπλήρωμα του παραπάνω αναγκαστικά θα πηγαίνει στο μηδέν. Στην συνέχεια λογαριθμίζοντας την (I) παράσταση θα έχουμε

$$< Qh, h >\leq -2log(1/2 - 2\mu\{|x| > c\})$$

συνεπώς το $< Qh, h >$ παίρνοντας για $\mu(\{x \in H : |x| \geq c\}) < 1/4$ θα είναι φραγμένο, άρα θα έχει πεπερασμένο άθροισμα διαγωνίου.

□

Τώρα για να δείξουμε ότι ο τελεστής της συνδιακύμανσης είναι συνεχής, αρχικά θα ορίσουμε τον τελεστή της διακύμανσης για μέσο μηδέν.

$$Q(h) := \int_H \langle h, x\rangle^2 \mu(dx)$$

και θα πάρουμε μια ακολουθία h_k να συγκλίνει στο h, μέσω της οποίας έχουμε

$$|Q(h_k) - Q(h)| = \left|\int_H \langle h_k, x\rangle^2 \mu(dx) - \int_H \langle h, x\rangle^2 \mu(dx)\right|$$

$$= \left|\int_H (\langle h_k, x\rangle^2 - \langle h, x\rangle^2)\mu(dx)\right|$$

$$\leq \int_H \left|\langle h_k, x\rangle^2 - \langle h, x\rangle^2\right| \mu(dx)$$

$$\leq \int_H |\langle h_k, x\rangle - \langle h, x\rangle| \, |\langle h_k, x\rangle + \langle h, x\rangle| \, \mu(dx)$$

$$\leq \int_H |\langle h_k - h, x\rangle| \, |\langle h_k + h, x\rangle| \, \mu(dx)$$

$$\leq \int_H \|h_k + h\| \|x\| \|h_k - h\| \|x\| \mu(dx)$$
$$= \|h_k - h\| \|h_k + h\| \int_H \|x\|^2 \mu(dx)$$
$$\leq 3 \|h\| \epsilon \int_H \|x\|^2 \mu(dx) < \infty$$

(Κάθε φραγμένος τελεστής ο οποίος είναι trace class είναι και συμπαγής τελεστής). Συνεπώς μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ο τελεστής Q είναι και αυτοσυζηγής
Στην συνέχεια θα δούμε ότι θα μπορούμε να βρίσκουμε πάντα κατανομή Gauss με μέσο m και διακύμανση Q αρκεί ο τελεστής διακύμανσης να έχει τον χαρακτηρισμό της ακόλουθης πρότασης.

Πρόταση 1.1.2 *Έστω Q θετικά ορισμένος, συμμετρικός και trace class τελεστής στον H και $m \in H$. Τότε υπάρχει ένα μέτρο Gauss στον H με μέσο m και πίνακα συνδιακύμανσης Q .*

Απόδειξη: Αρχικά θα θεωρήσουμε την ακολουθία των ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών $\{\xi_n\}$ οι οποίες κάθε μία έχουν κατανομή $N(0,1)$ στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ και θα δείξουμε ότι η

$$\xi = m + \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} \xi_j e_j, \quad (II)$$

βρίσκοντας την χαρακτηριστική της συνάρτηση ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο m και διακύμανση Q. Επίσης η (II) συγκλίνει στον $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; H)$ διότι

$$\int_H (m + \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} \xi_j e_j)^2 d\nu = \int_H m^2 d\nu + \int_H \sum_{j=1}^{\infty} (\sqrt{\lambda_j} \xi_j)^2 d\nu + \int_H 2m \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} \xi_j e_j d\nu$$

όπου $m^2 \int_H d\nu = m^2$ μία σταθερά συνεπώς θα είναι πεπερασμένη και $2m \int_H \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} \xi_j e_j d\nu = 0$ από την γραμμικότητα του ολοκληρώματος εφόσον $\int_H \xi_j d\nu = 0$. Συνεπώς αυτό που θα υπολογίσουμε θα είναι το

$$\int_H \sum_{j=1}^{\infty} (\sqrt{\lambda_j} \xi_j)^2 d\nu = \int_H (\lambda_1 \xi_1^2 + \cdots + \lambda_n \xi_n^2 + \cdots) d\nu$$

και γνωρίζοντας ότι $\int_H \xi_j^2 d\nu = 1$ μέσω της εξίσωσης $Var(\xi_j) = E(\xi_j^2) - (E(\xi_j))^2$ θα έχουμε

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j = \tau_r Q, \quad (III)$$

διότι γνωρίζουμε ότι τα $\xi_j \sim N(0,1)$, άρα και τα $\sqrt{\lambda_j} \xi_j \sim N(0, \lambda_j)$ όπου από την Πρόταση 2.2.3 γνωρίζουμε ότι το (III) θα είναι πεπερασμένο. Τελικά το (II) θα ανήκει στον $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; H)$. Τώρα ας διαλέξουμε κάποιο $h \in H$ μέσω του οποίου θα βρούμε την χαρακτηριστική εξίσωση του ξ και θα δείξουμε ότι είναι όμοια με την χαρακτηριστική εξίσωση της Gaussian.

$$\mathbb{E} e^{i<h,x>} = \mathbb{E} e^{i<h, m + \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} \xi_j e_j>} = e^{i<h,m>} \mathbb{E} e^{<h, \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j} \xi_j e_j>}$$
$$= e^{<h,m>} \lim_{n \to \infty} \mathbb{E} e^{<h, \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\lambda_j} \xi_j e_j>} = e^{<h,m>} \lim_{n \to \infty} \mathbb{E} e^{\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\lambda_j} \xi_j <h, e_j>}$$
$$= e^{<h,m> - 1/2 \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j <h, e_j>^2}.$$

Επειδή γνωρίζουμε ότι η ροπογεννήτρια μιας $z \sim N(\mu, \sigma^2)$ είναι

$$\phi_z(t) = \mathbb{E}(e^{tz}) = e^{tz + \sigma^2 t^2 / 2}$$

και επειδή $to \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\lambda_j} \xi_j < h, e_j >$ έχει μηδενικό μέσο αρκεί να βρούμε την διακύμανση

$$\mathbb{E}[(\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\lambda_j} \xi_j < h, e_j >)(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} \xi_i < h, e_i >)] = \sum_{i,j}^{n} \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} < h, e_j >< h, e_i > \mathbb{E}(\xi_j \xi_i)$$

$$= \sum_{i,j}^{n} \sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j} < h, e_j >< h, e_i > \delta_{i,j}$$

$$= \sum_{i}^{n} \lambda_i < h, e_i >^2 .$$

Συνεπώς έχουμε παρόμοια χαρακτηριστική συνάρτηση με της $N(m, Q)$. Άρα το ξ είναι Gaussian με μέσο $\mathbb{E}\xi = m$ και συνδιακύμανση

$$< Cov(\xi)x, y >= \mathbb{E}\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\lambda_j}\xi_j < e_j, x > \sum_{i}^{n} \sqrt{\lambda_{i=1}}\xi_i < e_i, y >=$$

$$= \sum_{i}^{n} \lambda_i < e_i, x >< e_i, y >=< Qx, y >$$

Τέλος παρατηρούμε ότι το ξ έχει την ζητούμενη Gaussian κατανομή με τους αντίστοιχους μέσους m και Q.

□

1.2 Θεώρημα Feldman-Hajek

Στην συνέχεια αφού μιλήσαμε για την κατασκευή του μέτρου Gauss στον χώρο Hilbert θα είναι ενδιαφέρον να δούμε και πότε δύο μέτρα θα είναι ισοδύναμα (δηλαδή αν το δούμε από διαφορετική προσέγγιση, πόσο θα πρέπει να μετακινήσουμε την μια κατανομή ως προς την άλλη για να ταυτίζονται) είτε ιδιόμορφα.

Στο μέτρο Lebesgue είχαμε ότι για να είναι δύο μέτρα πιθανότητας μ και ν ισοδύναμα σε έναν χώρο $(E, \mathcal{M})$ θα έπρεπε να έχουμε ότι $\mu << \nu$ και $\nu << \mu$ δηλαδή το ένα ως προς το άλλο να είναι απόλυτα συνεχή. Αυτό επιτυγχάνεται αν το $\mu(\Gamma) = 0, \ \ \forall \Gamma \in \mathcal{M}$ τ.ω $\nu(\Gamma) = 0$ και να ισχύει και το ανάποδο για το ν.Αντίθετα στις περιπτώσεις όπου ισχύει ότι $(A \cap B) = \emptyset$ και $\mu(A) = 1$ ενώ $\nu(A) = 0$, $(\nu(B) = 1, \mu(B) = 0)$ τότε τα δύο αυτά μέτρα θα λέγονται ιδιόμορφα. Στην συνέχεια θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα Hellinger το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη των ακόλουθων θεωρημάτων.

Πρόταση 1.2.1 *Έστω δύο μέτρα πιθανότητας μ, ν στον χώρο $(E, \mathcal{M})$ με ολοκλήρωμα Hellinger*

$$H(\mu, \nu) := \int_E (\frac{d\mu}{d\lambda}\frac{d\nu}{d\lambda})^{1/2} d\lambda$$

όπου το λ είναι ένα μέτρο απόλυτα συνεχές ως προς τα μ, ν $(\mu << \lambda, \nu << \lambda)$. Ισχύουν εξής τρεις ιδιότητες
$(i) 0 \leq H(\mu, \nu) \leq 1$
$(ii) H(\mu, \nu) = 0$ αν και μόνο αν $\ \mu \perp \nu$
(iii) Έστω $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}$ μία σ-άλγεβρα και $H_{\mathcal{G}}(\mu, \nu)$ το ολοκλήρωμα Hellinger των μ,ν περιορισμένα στην $\mathcal{G}$, τότε θα έχουμε ότι $H_{\mathcal{G}}(\mu, \nu) > H(\mu, \nu)$).

Απόδειξη: Την πρώτη ιδιότητα την παίρνουμε από την ανισότητα Cauchy-Schwartz

$$\int_E (\frac{d\mu}{d\lambda}\frac{d\nu}{d\lambda})^{1/2} d\lambda \leq (\int_E \frac{d\nu}{d\lambda} d\lambda)^{1/2} (\int_E \frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda)^{1/2} \leq 1$$

Για την τρίτη ιδιότητα θεωρούμε τον χώρο πιθανότητας $(E, \mathbb{E}, \lambda)$ και περιορίζουμε τα μ, ν στην $\mathbb{G}$ και θα γράφουμε την κατανομή τους ως $\mathbb{E}_\lambda(\frac{d\mu}{d\nu}|\mathcal{G}))$ και $\mathbb{E}_\lambda(\frac{d\nu}{d\lambda}|\mathcal{G})$

$$H_{\mathcal{G}}(\mu, \nu) = \int_E [\mathbb{E}_\lambda(\frac{d\mu}{d\lambda}|\mathcal{G})\mathbb{E}_\lambda(\frac{d\nu}{d\lambda}|\mathcal{G})]^{1/2} d\lambda.$$

Παίρνοντας την ποσότητα

$$\frac{d(H(\mu, \nu))}{d(H_{\mathcal{G}}(\mu, \nu))} = \frac{(\frac{d\mu}{d\lambda})^{1/2}}{\mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\frac{d\mu}{d\lambda}|\mathcal{G})^{1/2}} \frac{(\frac{d\nu}{d\lambda})^{1/2}}{\mathbb{E}_{\mathcal{G}}(\frac{d\nu}{d\lambda}|\mathcal{G})^{1/2}}$$

Σε αυτό το σημείο θα εφαρμόσουμε την ανισότητα

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

για $a, b \in \mathbb{R}$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{d\mu}{d\lambda}}{\mathbb{E}_\lambda(\frac{d\mu}{d\lambda}|\mathcal{G})} + \frac{\frac{d\nu}{d\lambda}}{\mathbb{E}_\lambda(\frac{d\nu}{d\lambda}|\mathcal{G})}\right)$$

Τώρα ολοκληρώνοντας και τα δύο μέρη με $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{G})$

$$\frac{\mathbb{E}((\frac{d\mu}{d\lambda})^{1/2}(\frac{d\nu}{d\lambda})^{1/2}|\mathcal{G})}{\mathbb{E}(\mathbb{E}_\lambda(\frac{d\mu}{d\lambda}|\mathcal{G})^{1/2}\mathbb{E}_\lambda(\frac{d\nu}{d\lambda}|\mathcal{G})^{1/2}|\mathcal{G})}$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbb{E}(\frac{d\mu}{d\lambda}|\mathcal{G})}{\mathbb{E}(\mathbb{E}_\lambda(\frac{d\mu}{d\lambda}|\mathcal{G})|\mathcal{G})} + \frac{\mathbb{E}(\frac{d\nu}{d\lambda}|\mathcal{G})}{\mathbb{E}(\mathbb{E}_\lambda(\frac{d\nu}{d\lambda}|\mathcal{G})|\mathcal{G})}\right)$$

Το οποίο οδηγεί στην

$$\mathbb{E}_\lambda(\frac{d\mu}{d\lambda}|\mathcal{G})^{1/2}\mathbb{E}_\lambda(\frac{d\nu}{d\lambda}|\mathcal{G})^{1/2} \geq \mathbb{E}_\lambda((\frac{d\mu}{d\lambda})^{1/2}(\frac{d\nu}{d\lambda})^{1/2}|\mathcal{G})$$

Συνεπώς από την προηγούμενη πρόταση μπορούμε να δούμε ότι για να έχουμε ισοδυναμία των μέτρων θα πρέπει αναγκαστικά να γνωρίζουμε ότι $H(\mu,\nu) > 0$ και έστω $\mu = \times_{k=1}^{\infty}\mu_k, \quad \nu = \times_{k=1}^{\infty}\nu_k$ όπου μ_k η προβολή του μέτρου πιθανότητας στον $\mathbb{R}$. Τότε $\prod_{k=1}^{\infty} H(\mu_k,\nu_k) = \prod_{k=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}}(\frac{d\mu_k}{d\nu_k})^{1/2}d\nu_k$

Πρόταση 1.2.2 *Αν $\prod_{k=1}^{\infty} H(\mu_k,\nu_k) > 0$ τότε τα μέτρα μ και ν είναι απόλυτα συνεχή και θα ισχύει ότι η ακολουθία*

$$f_N(x) = \prod_{k=1}^{N}\frac{d\mu_k}{d\nu_k}(x_k), \quad x = \{x_k\} \in \mathbb{R}^\infty, N \in \mathbb{N}$$

θα συγκλίνει στον $L^1(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}),\nu)$ στο $\frac{d\mu}{d\nu}$

(Η απόδειξη παρατίθεται στο [1] Proposition 2.21)

Θεώρημα 1.2.1 *Τα επόμενα αποτελέσματα είναι ισοδύναμα .*
(i) Τα μέτρα Gauss μ και ν $N(m_1,Q)$ και $N(m_2,Q)$ θα είναι είτε κάθετα είτε ισοδύναμα.
(ii) θα είναι ισοδύναμα αν και μόνο αν $m_1 - m_2 \in Q^{1/2}(H)$.Επίσης θα έχουμε την παράγωγο Radon-Nikodym

$$\frac{d\mu}{d\nu}(x) = exp\left\{(< Q^{-1/2}(m_1 - m_2), Q^{-1/2}(x - m_1 >) - \frac{1}{2}\left|Q^{-1/2}(m_1 - m_2)\right|\right\}$$

ν σχεδόν παντού, $x \in H$

Απόδειξη: Ας δούμε αρχικά τα ακόλουθα αποτελέσματα για την τυχαία μεταβλητή (όπου $Q^{-1/2}$ ψευδοαντίστροφος του $Q^{1/2}$ βλέπε παράρτημα)
$< Q^{-1/2}(m_1 - m_2), Q^{-1/2}(x - m_2) >$,όπου $x \in H$ θα αναδιατάξουμε την έκφραση παρατηρώντας ότι :

$$m_1 - m_2 = \sum_{j=1}^{\infty} < (m_1 - m_2), e_j > e_j$$

$$x - m_2 = \sum_{i=1}^{\infty} < x - m_2, e_i > e_i$$

Συνεπώς

$$Q^{-1/2}(m_1 - m_2) = \sum_{\lambda_j \neq 0} < m_1 - m_2, e_j > Q^{-1/2}e_j = \sum_{\lambda_j \neq 0} < m_1 - m_2, e_j > e_j\lambda^{-1/2}$$

$$Q^{-1/2}(x-m_2)=\sum_{\lambda_i\neq 0}<x-m_2,e_i>Q^{-1/2}e_i=\sum_{\lambda_i\neq 0}<x-m_2,e_i>e_i\lambda^{-1/2}$$

όπου $Qe_i=\lambda_i e_i$ με λ ιδιοτιμή του Q και e_i μία ορθοκανονική βάση (Shauder όπου θα αναφερθεί στο Appendix) ιδιοδιανυσμάτων στον H.

$$<Q^{-1/2}(m_1-m_2),Q^{-1/2}(x-m_2)>=\sum_{i,j}^{\infty}<x-m_2><m_1-m_2><e_i,e_j>\lambda_i^{-1/2}\lambda_j^{-1/2}=$$

$$\sum_{i,j}^{\infty}<x-m_2><m_1-m_2>\delta_{i,j}\lambda_i^{-1/2}\lambda_j^{-1/2}=$$

$$=\sum_{i}^{\infty}<x-m_2><m_1-m_2>\lambda_i^{-1}$$

όπου

$$\sum_{i}^{\infty}<m_1-m_2,e_i>^2\lambda_i^{-2}\int_H<x-m_2,e_j>^2\nu(dx)=$$

$$\sum_{i}^{\infty}<m_1-m_2,e_i>^2\lambda_i^{-2}<Qe_i,e_i>=$$

$$\sum_{i}^{\infty}<m_1-m_2,e_i>^2\lambda_i^{-1}=$$

$$\left|Q^{-1/2}(m_1-m_2)\right|^2<\infty$$

Συνεπώς θα συγκλίνει στον $L^2(H,\mathcal{B}(\mathcal{H}),\nu)$
Τώρα έστω δύο μέτρα Gauss μ και ν όπου $\mu\sim N(m_1,Q)$,$\nu\sim N(m_2,Q)$, θα έχουμε

$$d\mu=\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\lambda}}L(dx)$$

$$d\nu=\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}e^{-\frac{(x-m_2)^2}{2\lambda}}L(dx)$$

όπου το L είναι το μέτρο Lebesgue για το οποίο τα άλλα δύο μέτρα είναι απόλυτα συνεχή.

$$\frac{d\mu_n}{d\nu_n}=\frac{(d\mu_n/dL)}{(d\nu_n/dL)}=e^{\frac{-1}{2\lambda}[(x-m_1)^2-(x-m_2)^2]}=\cdots=e^{[<\frac{(m_1-m_2)}{\sqrt{\lambda}},\frac{(x-m_2)}{\sqrt{\lambda}}>]-\frac{1}{2}\left|\frac{(m_1-m_2)}{\lambda}\right|^2}$$

Επίσης μπορούμε να δούμε ότι κάθε διαχωρίσιμο χώρο Hilbert H μπορεί να τον δει κάποιος σαν τον L^2 και ως σύνολο *Borel* στον $\mathbb{R}^\infty$ και με τα μέτρα γινόμενο

$$\mu=\times_{k=1}^{\infty}\mu_k,\qquad \nu=\times_{k=1}^{\infty}\nu_k$$

όπου για την προβολή στην k διάσταση θα ισχύουν τα ακόλουθα

$$\mu_k=N(m_{1k},\lambda_k),\quad \nu=N(m_{2k},\lambda_k)$$

$$H(\mu_k,\nu_k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_k}}\int_{\mathbb{R}^\infty}e^{\frac{-(x-m_{1k})^2}{4\lambda_k}-\frac{(x-m_{2k})^2}{4\lambda_k}}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_k}}\int_{\mathbb{R}^\infty}e^{\frac{-1}{4\lambda_k}(2x^2-2x(m_{1k}+m_{2k})+m_{1k}^2+m_{2k}^2)}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_k}}\int_{\mathbb{R}^\infty}e^{\frac{-1}{4\lambda_k}(2(x-\frac{m_{1k}+m_{2k}}{2})^2-\frac{(m_{1k}+m_{2k})^2}{2}+m_{1k}^2+m_{2k}^2)}dx$$

$$=e^{\frac{-(m_{1k}-m_{2k})^2}{8\lambda_k}}\int_{\mathbb{R}^\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_k}}e^{\frac{(x-\frac{(m_{1k}+m_{2k})}{2})^2}{2\lambda_k}}dx$$

$$e^{\frac{-(m_{1k}-m_{2k})^2}{8\lambda_k}}, \quad k \in N$$

Άρα θα έχουμε $\prod_{n=1}^{\infty} H(\mu_k,\nu_k) > 0$ αν και μόνο αν $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m_{1k}-m_{2k})^2}{\lambda_k} < \infty$ Δηλαδή αν $m_1 - m_2 \in Q^{1/2}(H)$ και εφαρμόζοντας την προηγούμενη πρόταση έχουμε το ζητούμενο.

□

Τώρα μπορούμε να γενικεύσουμε και για μέτρα τα οποία έχουν διαφορετικούς τελεστές διακύμανσης.

Θεώρημα 1.2.2 *(Feldman-Hajek) (i) Τα μέτρα Gauss $\mu = N(m_1,Q_1), \nu = N(m_2,Q_2)$ θα είναι είτε ισοδύναμα είτε ιδιόμορφα.*
(ii) Τα μέτρα θα είναι ισοδύναμα αν και μόνο αν:
(1) $Q_1^{1/2}(H) = Q_2^{1/2}(H) =: H_0$
(2) $m_1 - m_2 \in H_0$
(3) *Ο τελεστής* $(Q_1^{-1/2}Q_2^{1/2})(Q_1^{-1/2}Q_2^{1/2})^* - I$ *είναι* $Hilbert - Schmidt$.

Απόδειξη:

Βήμα 1ο

Έστω $N(m_1,Q_1)$ και $N(m_2,Q_2)$ μή ιδιόμορφα για κάποια $m_1, m_2 \in H$. Τότε θα δείξουμε τις ι-διότητες (i) και (ii). Αφού υποθέσαμε ότι δεν είναι ιδιόμορφα τότε ακόμα και μετακινημένα κατά m_1 , $N(0,Q_1)$ και $N(m_2-m_1,Q_2)$ δεν θα είναι κάθετα. Τότε ακόμα και τα

$$N(0,2Q_1) = N(0,Q_1) * N(0,Q_1)$$

και

$$N(0,2Q_2) = N(m_2-m_1,Q_2) * N(m_1-m_2,Q_2)$$

δεν θα είναι ιδιόμορφα (βλέπε Παράρτημα για συνέλιξη).
Στην συνέχεια χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε μηδενικούς μέσους. Επίσης γνωρίζουμε ότι $Q_1^{1/2}(H) = Q_2^{1/2}(H)$ αν και μόνο αν για σταθερές $c \le C$ έχουμε

$$c\,|Q_1 x| \le |Q_1 x| \le C\,|Q_2 x|\,, \quad x \in H$$

Έστω τώρα ότι $Q_1^{1/2}(H) \neq Q_2^{1/2}(H)$, δηλαδή δεν υπάρχει C τ.ω $\forall x \quad \left|Q_1^{1/2}x\right| \le C\left|Q_2^{1/2}x\right| \Rightarrow$ $\forall n \;\; \exists x_n \in H$ τ.ω $\frac{\left|Q_1^{1/2}x_n\right|}{\left|Q_2^{1/2}x_n\right|} > n$ ή $\frac{\left|Q_2^{1/2}x_n\right|}{\left|Q_1^{1/2}x_n\right|} > n$
(δηλαδή όσο πλησιάζει η ακολουθία στο Ker του κάθε τελεστή θα απειρίζεται το πηλίκο.)
Τώρα σε έναν μετρήσιμο χώρο $(H, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ θα ορίσουμε την τ.μ.

$$\xi_n(x) = \frac{< x, a_n >}{\left|Q_1^{1/2}a_n\right|}, \quad n \in \mathbb{N}$$

για την οποία επειδή έχουμε ότι $\int_H \xi_n^2 \mu(dx) = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \int_H \xi_n^2 \nu(dx) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\left|Q_1^{1/2}a_n\right|}{\left|Q_2^{1/2}a_n\right|} \right) = 0$$

τότε μπορούμε να βρούμε ακολουθίες $\gamma_k \to \infty$ και $\nu_k \to \infty$ τ.ω

$$\mu(\left\{ x : \lim_{k\to\infty} |\gamma_k \xi_{k_n}(x)| = \infty \right\}) = 1$$

$$\nu(\left\{ x : \lim_{k\to\infty} |\gamma_k \xi_{k_n}(x)| = 0 \right\}) = 1$$

Συνεπώς τα μ και ν είναι κάθετα, άρα αποδεικνύεται το (i).
Στην συνέχεια για να αποδείξουμε το (iii) θα υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $Q_1^{1/2}(H) = Q_2^{1/2}(H) = H_0$ και $\bar{H}_0 = H$ (διότι το $\bar{H}_0$ ουσιαστικά είναι το support του μέτρου). Έστω R ό τελεστής που ορίσαμε στο (iii) και $Q_1 e_j = \lambda_j e_j$ όπου τα λ_j,e_j ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα του Q_1. Επίσης μπορούμε να δούμε ότι ο τελεστής R μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω της βάσης $\{e_j\}$ και ενός πίνακα $\{r_{ij}\}$.

$$r_{ij} =< Re_i, e_j >=< Q_1^{-1/2} Q_2^{1/2} (Q_1^{-1/2} Q_2^{1/2})^* e_i, e_j >$$

τώρα επειδή $e_j \in H_0$, $Q_2^{1/2}(Q_1^{-1/2}Q_2^{1/2})^* \in H_0$, $Q_1^{-1/2} e_j = \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}}$ θα έχουμε

$$< Q_2^{1/2}(Q_2^{1/2})^*(Q_1^{-1/2})^* e_i, \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}} >$$

$$< Q_2^{1/2} Q_2^{1/2} \frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}, \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}} >=< Q_2 \frac{e_i}{\sqrt{\lambda_i}}, \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}} >= \frac{< Q_2 e_i, e_j >}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}}, \quad i, j \in \mathbb{N}$$

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι το $R - I$ είναι Hilbert-Schmit τελεστής δηλαδή ότι

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} (r_{ij} - \delta_{ij})^2 < \infty \quad (I)$$

Ακόμα έχουμε το $\xi_j = \frac{<x,e_j>}{\sqrt{\lambda_j}}, \quad j \in \mathbb{N}, \ x \in H$ όπου είναι η προβολή στην j συνιστώσα και για την οποία θα έχουμε

$$\int_H \xi_j \mu(dx) = 0, \qquad \int_H \xi_i \xi_j \mu(dx) = \delta_{ij}, \ i, j \in \mathbb{N}$$

$$\int_H \xi_j \nu(dx) = 0, \qquad \int_H \xi_i \xi_j \nu(dx) = r_{ij}, \ i, j \in \mathbb{N}$$

όπου

$$\int_H \xi_i(x)\xi_i(x)\mu(dx) = \int_H \frac{\langle x, e_i \rangle}{\sqrt{\lambda_i}} \frac{\langle x, e_j \rangle}{\sqrt{\lambda_j}} \mu(dx) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}} \int_H \langle x, e_i \rangle \langle x, e_j \rangle \mu(dx) = \frac{\langle Q_1 e_i, e_j \rangle}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}}$$

$$= \langle \frac{\lambda_i e_i}{\sqrt{\lambda_i}}, \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}} \rangle = \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\lambda_j}} \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

Με παρόμοιο τρόπο για το r_{ij}

$$\int_H \xi_i(x)\xi_i(x)\nu(dx) = \int_H \frac{\langle x, e_i \rangle \langle x, e_j \rangle}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}} \nu(dx) =$$

$$\frac{\langle Q_2 e_i, e_j \rangle}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}} = r_{i,j}$$

Τώρα αν έχουμε μια σ-άλγεβρα $\mathcal{G}_n = \sigma(\xi_1, \cdots, \xi_n)$, $n \in \mathbb{N}$ τότε από την Πρόταση 2.2.5 θα έχουμε $H_{\mathcal{G}_n}(\mu, \nu) \geq H(\mu, \nu)$ και μέσω αυτής της ανισότητας θα δείξουμε ότι το άθροισμα (I) φράσσεται. Αν $R_n = \{r_{ij}\}_{i,j=1,\cdots,n}$ και $I_n = \{\delta_{ij}\}_{i,j=1,\cdots,n}$ τότε θα έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

$$H_{\mathcal{G}_n}(\mu, \nu) = H(N(0, I_n), N(0, R_n)) = \frac{(detR_n)^{1/4}}{(det(\frac{I_n + R_n}{2}))^{1/2}} \geq H(\mu, \nu).$$

όπου το συγκεκριμένο αποτέλεσμα βγαίνει αν ορίσουμε

$$f_1(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}x^T x} = \frac{d\mu_n}{dL_n}$$

$$f_1(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(detR_n)^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}x^T R_n^{-1} x} = \frac{d\nu_n}{dL_n}$$

όπου από το θεώρημα Radon Nikodym είναι η προβολή στις πρώτες n διαστάσεις και για τις οποίες θα εφαρμόσουμε το Hellinger .

$$\int_{R_n} \sqrt{f_1}\sqrt{f_2}dx = \int_{R_n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{(detR_n)^{1/4}} e^{-\frac{1}{2}x^T(\frac{R^{-1}+I}{2})x} dx$$

Σε αυτό το σημείο υπολογίζουμε

$$\frac{R_n^{-1}+I}{2} = R_n^{-1}(\frac{I+R_n}{2})$$

$$(\frac{R_n^{-1}+I}{2}) = (\frac{I+R_n}{2})^{-1}R_n$$

και ορίζουμε $Q_n = (\frac{R_n^{-1}+I}{2})^{-1} = (\frac{I+R_n}{2})^{-1}R_n$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{(detR_n)^{1/4}} \int_{R_n} e^{-1\frac{1}{2}x^T Q_n^{-1} x} dx$$

$$= \frac{(2\pi)^{n/2}(detQ_n)^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}(detR_n)^{1/4}}$$

$$= \frac{1}{(det(\frac{I+R_n}{2}))^{1/2}} \frac{(detR_n)^{1/2}}{(detR_n)^{1/4}} = \frac{(detR_n)^{1/4}}{det(\frac{I+R_n}{2})^{1/2}} \geq H(\mu,\nu)$$

και έστω λ_{n_j} οι ιδιοτιμές του R_n για το οποίο έχουμε $-logH_{\mathcal{G}_n}(\mu,\nu) = \sum_{j=1}^{n} log[\frac{(1+\lambda_{n_j})^2}{4\lambda_{n_j}}] \leq -logH(\mu,\nu) \leq \infty$ (I), όπου $log\frac{(1+\lambda)^2}{4\lambda} \geq 0$ για $\lambda \geq 0$ ενώ ισότητα έχουμε για $\lambda = 1$.
Συνεπώς για $C_1, C_2 > 0$ σταθερές με $0 < C_1 \leq \lambda_{n_j} \leq C_2$ $j = 1, \cdots, n$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει ένα $C_3 > 0$ τ.ω

$$(1-\lambda)^2 \leq C_3 log\frac{(1+\lambda)^2}{4\lambda}, \forall\ \lambda \in [C_1, C_2] \quad (II)$$

και αυτό φαίνεται εύκολα αν ορίσουμε την συνάρτηση $f(t) = \frac{(1-t)^2}{log\frac{(1+t)^2}{4t}}$.Αν το $1 \notin [C_1, C_2]$ τότε η συνάρτηση θα είναι συνεχής στο C_1, C_2, άρα και φραγμένη από κάποιο C_3. Από την άλλη αν το $1 \in [C_1, C_2]$ τότε το $\lim_{t\to 1} f(t) = 0$, άρα και πάλι μπορούμε να το φράξουμε. Οπότε από (I) και (II) έχουμε ότι

$$sup\sum_{j=1}^{n}(1-\lambda_{n_j})^2 \leq -C_3 logH(\mu,\nu) < \infty$$

όμως το $\sum_{j=1}^{n}(1-\lambda_{n_j})$ είναι η Hilbert-Schmidt νόρμα του $I_n - R_n$. Άρα για $n \to \infty$ αφού το $-C_3 logH(\mu,\nu)$ ανεξάρτητο του n θα έχουμε ότι η $H-S$ νόρμα του $I-R$ είναι πεπερασμένη. Συνεπώς θα ισχύει και το (iii).

Βήμα 2ο

Αν οι τελεστές τις διακύμανσης Q_1 και Q_2 τα (i) και (iii) τότε $N(0,Q_1) \sim N(0,Q_2)$.
Έστω $Rf_j = \tau_j f_j$, $j \in \mathbb{N}$ με f_j και τ_j ιδιοδιανύσματα και ιδιοτιμές του τελεστή R. Τότε $C_1 \geq \tau_j \geq C_2 > 0$, $\forall$ $j \in \mathbb{N}$. Έστω τώρα $\{\xi_j\}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με κατανομή $N(0,1)$, θα ορίσουμε τις ακόλουθες κατανομές:

$$(\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j Q_1^{1/2} f_j) \sim N(0,Q_1), \quad (III)$$

$$(\sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\tau_j}\xi_j Q_1^{1/2} f_j) \sim N(0,Q_2), \quad (IV)$$

Τώρα από την στιγμή που $\sum_{j=1}^{\infty}\left|Q_1^{1/2}f_j\right|^2 < \infty$ (γιατί Q_1 trace class)τότε και τα (III) και (IV) θα συγκλίνουν στον $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P};H)$ με συμμετρική Gaussian κατανομή στον H. Ας δούμε για παράδειγμα για την (IV)

$$\mathbb{E}(<\sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{\tau_j}\xi_j Q_1^{1/2}f_j, a><\sum_{l=1}^{\infty}\sqrt{\tau_l}\xi_l Q_1^{1/2}f_l, b>)$$

τώρα για $l=j$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\tau_j < Q_1^{1/2}f_j, a>< Q_1^{1/2}f_j, b>$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}< Q_1^{1/2}(Q_1^{-1/2}Q_2^{1/2})(Q_1^{-1/2}Q_2^{1/2})^* f_j, a>< f_j, Q_1^{1/2}b>$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}< Q_2^{1/2}(Q_1^{-1/2})^*(Q_2^{1/2})^* f_j, a>< f_j, Q_1^{1/2}b>$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}< f_j,(Q_1^{-1/2}Q_2^{1/2})Q_2^{1/2}a>< f_j, Q_1^{1/2}b>$$

$$=<(Q_1^{-1/2}Q_2^{1/2})Q_2^{1/2}a, Q_1^{1/2}b>$$

$$< Q_2 a, b>, \quad a,b\in H$$

Έστω $\tilde{\mu}$ και $\tilde{\nu}$ μέτρα στον $\mathbb{R}^{\infty}$ μέσω των $\{\xi_j\}$ και $\{\sqrt{\tau_j}\xi_j\}$. Τότε μέσω του Hellinger θα έχουμε

$$H(N(0,1),N(0,\tau_j))=\sqrt{\frac{2\sqrt{\tau_j}}{1+\tau_j}}$$

και από πριν αντίστοιχα έχουμε για τ_j , $\sum_{j=1}^{\infty}(1-\tau_j)^2<\infty$.Άρα το $\tau_j\to 1$ και μέσω της Πρότασης 2.2.6 παίρνουμε το αποτέλεσμα ότι $\tilde{\mu}\sim\tilde{\nu}$. Όμως τα μ,ν είναι οι εικόνες των μέτρων $\tilde{\mu}$,$\tilde{\nu}$ μέσω της μετρήσιμης απεικόνισης $V:\mathbb{R}^{\infty}\to H,\ \{u_k\}\to V(u_k)$,

$$V(u_k)=\begin{cases}\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}u_k Q^{1/2}f_k\\ 0,\ \text{αλλιώς}\end{cases}$$

Άρα τα μέτρα μ και ν είναι ισοδύναμα.

Βήμα 3ο

Άν $N(m_1,Q_1)$ και $N(m_2,Q_2)$ δεν είναι κάθετα, τότε τα (i),(ii),(iii) ισχύουν και $N(0,Q_1)\sim N(0,Q_2)$. Για να το δούμε έστω $N(0,Q_1)$ και $N(m2-m1,Q_2)$ δεν είναι κάθετα, τότε απο τα Βήμα 1 και Βήμα 2, τα (i),(ii) ισχύουν και $N(0,Q_1)\sim N(0,Q_2)$. Συνεπώς $N(m_2-m_1,Q_2)$,$N(0,Q_2)$ δεν είναι κάθετα. Μέσω του Θεωρήματος 2.2.8 θα ισχύει το (ii) και $N(m_2-m_1,Q_2)\sim N(0,Q_2)\sim N(0,Q_1)$, οπότε $N(m_2,Q_2)\sim N(m_1,Q_2)\sim N(m_1,Q_1)$.

Βήμα 4ο

Αν τα $(i),(ii),(iii)$ ισχύουν τότε $N(m_1,Q_1)\sim N(m_2,Q_2)$.

□

(Σ'αυτό το σημείο να σημειώσουμε ότι ο υπόχωρος H_0 είναι ο χώρος Cameron-Martin που θα συζητήσουμε στα επόμενα κεφάλαια)

1.3 Θεώρημα Bochner

Στην συγκεκριμένη ενότητα θα περιγράψουμε τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις των μέτρων Gauss μέσω του θεωρήματος Bochner και το πιο ενδιαφέρον που θα παρατηρήσουμε είναι ότι θα μπορούμε να ελέγχουμε αν κάποια χαρακτηριστική συνάρτηση είναι κατανομής Gauss αν ικανοποιεί ιδιότητες στις οποίες θα αναφερθούμε εκτενέστερα στην συνέχεια.

Η χαρακτηριστική συνάρτηση θα έχει την ακόλουθη μορφή

$$\hat{\mu}(\lambda) = \varphi_\mu(\lambda) = \int_H e^{i<\lambda,x>}\mu(dx), \ \lambda \in H$$

όπου για την οποία μέσω του θεωρήματος της κυριαρχημένης σύγκλισης γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής

$$|\phi_\mu(t+u) - \phi_\mu(t)| = \left|\int_H (e^{i(t+u)x} - e^{itx})\mu(dx)\right|$$

$$\leq \int_H \left|e^{iux} - 1\right| \mu(dx)$$

Τώρα παίρνοντας $u_n \to 0$ και ορίζοντας $f_n(x) := \left|e^{iux} - 1\right|$ θα έχουμε ότι $f_n \to 0$ και $\forall x \ |f_n(x)| \leq 2$, συνεπώς ολοκληρώσιμη. Άρα από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int_H \left|e^{iu_nx} - 1\right| \mu(dx) = 0$$

άρα ϕ_μ ομοιόμορφα συνεχής.

Ακόμα εύκολο είναι να δούμε ότι είναι θετικά ορισμένη. Για τυχαίους $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N \in H$ και φανταστικούς αριθμούς $z_1, z_2, ..., z_N \in \mathbb{C}$,$N \in \mathbb{N}$ θα έχουμε ότι

$$\sum_{k,j=1}^N \phi_\mu(\lambda_k - \lambda_j) z_k \bar{z_j} = \sum_{k,j=1}^N \int_H (e^{i\langle\lambda_k,x\rangle} z_k)(e^{i\langle\lambda_j,x\rangle} \bar{z_j})\mu(dx)$$

$$= \sum_{k,j=1}^N \int_H \left|e^{i\langle\lambda_k,x\rangle} z_k\right|^2 \mu(dx) - \int_H \left|\sum_{k=1}^N e^{i\langle\lambda_k,x\rangle} z_k\right|^2 \mu(dx) \geq 0$$

Θεώρημα 1.3.1 *(Bochner) Αν $\varphi : H \to \mathbb{C}$ είναι χαρακτηριστική συνάρτηση ενός μέτρου πιθανότητας μ στον χώρο $(H, \mathcal{B}(H))$ τότε*
(i) φ είναι συνεχής και θετικά ορισμένη συνάρτηση τ.ω. $\varphi(0) = 1$
(ii) για κάθε $\epsilon > 0$ θα υπάρχει ένας συμμετρικός, θετικά ορισμένος πυρηνικός τελεστής S_ε τ.ω.

$$1 - \Re\varphi(\lambda) \leq \varepsilon \ \ \forall \ \ \lambda \ : < S_\varepsilon\lambda, \lambda > \leq 1$$

Ανάποδα αν μια συνάρτηση $\varphi : H \to \mathbb{C}$ ικανοποιεί τα $(i), (ii)$ θα είναι χαρακτηριστική συνάρτηση ενός μέτρου πιθανότητας μ στον H.

Απόδειξη: Έστω $\varphi : H \to \mathbb{C}$ η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός μέτρου πιθανότητας μ στον H. Το (i) είναι προφανές και γιαύτό θα αποδείξουμε μόνο το (ii). Ορίζουμε τον γραμμικό τελεστή S_R, $R > 0$, μέσω της σχέσης

$$< S_R\lambda, \lambda > = \int_{B(0,R)} |< x, \lambda >|^2 \mu(dx), \ \forall \ \lambda \in H$$

είναι προφανές ότι ο S_R είναι θετικά ορισμένος με αθροίσιμη διαγώνιο

$$\tau_r S_R = \int_{B(0,R)} |x|^2 \mu(dx) < \infty$$

Επίσης

$$1 - \Re\varphi(\lambda) = \int_H (1 - cos < x, \lambda >)\mu(dx)$$
$$= 2\int_H [sin\frac{< x, \lambda >}{2}]^2 \mu(dx)$$
$$\leq 2\int_{B(0,R)} [sin\frac{< x, \lambda >}{2}]^2 \mu(dx) + 2\mu(B(0, R)^c)$$
$$\leq \frac{1}{2} < S_R\lambda, \lambda > +2\mu(B(0, R)^c)$$

και αυτό μπορούμε να το δούμε εύκολα αν θυμηθούμε από τις τριγωνομετρικές ταυτότητες την $cos2t = 1 - 2sin^2 t$ και για $< x, \lambda >= 2t$ θα έχουμε το ζητούμενο

$$2\int_{B(0,R)} [sin\frac{< x, \lambda >}{2}]^2$$

Συνεπώς διαλέγοντας R τ.ω. $2\mu(B(0, R)^c) < \epsilon/2$ και $S_\epsilon = S_R/\epsilon$ και γνωρίζοντας $< S_\epsilon\lambda, \lambda >\leq 1$ θα έχουμε $1 - \Re\varphi(\lambda) \leq \epsilon$.
Τώρα από την ανάποδη πλευρά ας υποθέσουμε ότι το φ ικανοποιεί τα $(i), (ii)$. Έστω $\{e_k\}$ μια ορθομοναδιαία βάση στον H και $\Pi_n = \sum_{i=1}^n e_i \otimes e_i$ την ορθογώνια προβολή του H στις n πρώτες διαστάσεις δηλαδή στο $span(\{e_1, \cdots, e_n\})$. Ενώ $\Pi_{n,m}$ η ορθογώνια προβολή στο γραμμικό $span(\{e_{n+1}, \cdots, e_m\})$.
Ορίζουμε

$$\varphi_n(\lambda) = \varphi(\Pi_n\lambda), \quad \lambda \in H \qquad (1)$$

Τότε το φ_n είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του μέτρου μ_n συγκεντρωμένο στον $H_n = lin\{e_1, \cdots, e_n\}$ από το Bochner για τις πεπερασμένες διαστάσεις. Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι το $\{\mu_n\}$ είναι tight.Αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχει υπακολουθία $\{\mu_{n_j}\}$ που συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο μέτρο μ και είναι προφανές ότι η φ θα είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του μ.

$$\mu_{n_j} \rightharpoonup \mu$$

και για φ συνεχή

$$\int_H e^{i<\lambda,x>}\mu_{n_j}(dx) \to \int_H e^{i<\lambda,x>}\mu(dx)$$

Για να αποδείξουμε ότι η ακολουθία $\{\mu_n\}$ είναι tight θα δείξουμε ότι για τυχαίο $r \in (0, 1)$,$\epsilon \in (0, 1/2)$, σταθεροποιώντας M αρκετά μεγάλο και k θετικός αριθμός τ.ω.

$$\mu_n(\{x \in H : |\Pi_M x| \leq k\}) = \mu_n(A_{M,k}) \geq 1 - \epsilon, \quad (I)$$

$$\mu_n\{x \in H : |x - \Pi_M x| \leq r\} = \mu_n(C_{M,r}) \geq 1 - \epsilon, \quad (II)$$

Για να το δούμε αυτό, έστω $a_1, \cdots, a_n$ σημεία στο $B(0, k) \cap H_M$ τ.ω

$$\bigcup_{i=1}^{l} B(a_i, r) \supset B(0, k) \cap H_M$$

και αφού ισχύει

$$\bigcup_{i=1}^{l} B(a_i, 2r) \supset A_{M,k} \cap C_{M,r}$$

θα έχουμε

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{l} B(a_i, 2r)) = 1 - \mu(A_{M,k} \cap C_{M,r})^c$$
$$= 1 - \mu((A_{M,k})^c \cup (C_{M,r})^c)$$
$$= 1 - \mu((A_{M,k})^c) - \mu((C_{M,r})^c)$$

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{l} B(a_i, 2r)) \leq 1 - 2\epsilon$$

συνεπώς από το Παράρτημα ισχύει το 2) για το tightness και την συμπάγεια. Συνεπώς το μόνο που μένει είναι να δείξουμε ότι τα $(I), (II)$ ισχύουν. Έστω $r \in (0,1), \epsilon \in (0, 1/2)$ και έστω $S \leq 0$ ένας πυρηνικός τελεστής τ.ω $1 - \Re\varphi(\lambda) < \epsilon/L$ αν $< S\lambda, \lambda > \leq 1$, όπου $L > 0$. Συνεπώς από το θεώρημα Fubini θα έχουμε

$$\int_H e^{-\frac{1}{2}|\Pi_{M,N}x|^2} \mu_n(dx) = \int_H \left[\int_H e^{i<\lambda,x>} N(0, \Pi_{M,N})(d\lambda) \right] \mu_n(dx)$$

$$= \int_H \varphi_n(\lambda) N(0, \Pi_{M,N})(d\lambda)$$

όπου $\int_H e^{i<\lambda,x>} N(0, \Pi_{M,N})(d\lambda) = e^{-\frac{1}{2}<\Pi_{M,N}x,x>}$ και $\Pi_{M,N}^2 = \Pi_{M,N}$
και $< \Pi_{M,N}x, x > = < \Pi_{M,N}^2 x, x > = |\Pi_{M,N}x|^2$
Επίσης μέσω της (1) θα έχουμε

$$\int_H (1 - e^{-\frac{1}{2}|\Pi_{M,N}x|^2}) \mu_n(dx) = \int_H (1 - \Re\varphi(\lambda)) N(0, \Pi_{M,N}\Pi_n)(d\lambda)$$

$$= \int_{<S\lambda,\lambda>\leq 1} (1 - \Re\varphi(\lambda)) N(0, \Pi_{M,N}\Pi_n)(d\lambda) + \int_{<S\lambda,\lambda>\geq 1} (1 - \Re\varphi(\lambda)) N(0, \Pi_{M,N}\Pi_n)(d\lambda)$$

$$\leq \frac{\epsilon}{L} + \int_H < S\lambda, \lambda > N(0, \Pi_{M,N}\Pi_n)(d\lambda)$$

$$\leq \frac{\epsilon}{L} + \tau_r[S\Pi_{M,N}\Pi_n].$$

και σταθεροποιώντας το M έχουμε

$$\tau_r[S\Pi_{M,N}\Pi_n] \leq \frac{\epsilon}{L}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad N > M.$$

συνεπώς

$$\int_H (1 - e^{-\frac{1}{2}|\Pi_{M,N}x|^2}) \mu_n(dx) \leq \frac{2\epsilon}{L}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad N > M$$

$$\int_{\{x\in H:|\Pi_{M,N}x|>r\}} (1 - e^{-\frac{1}{2}|\Pi_{M,N}x|^2}) \mu_n(dx) \leq \frac{2\epsilon}{L}$$

$$(1 - e^{-\frac{1}{2}r^2}) \mu_n(\{x \in H : |\Pi_{M,N}x| > r\}) \leq \frac{2\epsilon}{L}$$

ακόλουθα έχουμε

$$\mu_n(\{x \in H : |\Pi_{M,N}x| > r\}) \leq \frac{2\epsilon}{L(1 - e^{-r^2/2})}$$

$$1 - \mu_n(\{x \in H : |\Pi_{M,N}x| \leq r\}) \leq \frac{2\epsilon}{L(1 - e^{-r^2/2})}$$

$$\mu_n(\{x \in H : |\Pi_{M,N}x| \leq r\}) \geq 1 - \frac{2\epsilon}{L(1 - e^{-r^2/2})}$$

και αφήνοντας το $N \to \infty$ με συγκεκριμένο L τ.ω. $L > 2(1 - e^{-r^2/2})^{-1}$

$$\mu_n(\{x \in H : |\Pi_{M,N}x| \leq r\}) \geq 1 - \epsilon$$

συνεπώς η (II) αποδεικνύεται.
Τώρα για να αποδείξουμε την πρώτη ανισότητα (I) ορίζουμε την μ_n^j την εικόνα του μ_n στην j συντεταγμένη. Τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση φ_n^j του μέτρου μ_n^j θα είναι

$$\varphi_n^j = \varphi(t\Pi_n e_j), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\varphi(t\Pi_n e_j) = \int_H e^{it<\Pi_n e_j, x>}\mu(dx) = \int_H e^{it<e_j, \Pi_n x>}\mu(dx)$$

$$\int_H e^{it<e_j,x>}\mu_n(dx) = \int_H e^{it\Pi_{e_j}(x)}\mu_n(dx)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{ity}\Pi_{e_j} * \mu_n(dy) = \varphi_n^j(t)$$

με $y \stackrel{\Pi_{e_j}}{\to} < y, e_j >$. Επίσης $\varphi_n^j = \varphi$ για $n \geq j$ και $\mu_n^j = \mu_j^j$ για $n = j+1, \cdots$ και η ακολουθία $\left\{\mu_n^j\right\}$ θα είναι tight για οποιαδήποτε επιλογή του j.
Για τυχόν $\epsilon > 0, M \in \mathbb{N}, \exists k > 0$, τ.ω

$$\mu_n^j([-kM^{-1/2}, kM^{-1/2}]) \geq 1 - \epsilon, \quad n \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \cdots, M$$

$$\mu_n(\left\{x \in H : |< x, e_j >| \leq kM^{-1/2}\right\}) \geq 1 - \epsilon, \quad n \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \cdots, M$$

Έστω $x \in H$ τ.ω $|< x, e_j >| \leq kM^{-1/2}$, $j = 1, \cdots, M$ τότε $\sum_{j=1}^M |< x, e_j >|^2 \leq \sum_{j=1}^M \frac{k^2}{M} = k^2$. Άρα $\mu_n(\left\{x \in H : \sum_{j=1}^M |< x, e_j >|^2 \leq k^2\right\}) \geq 1 - \epsilon$, όπου $|< x, e_j >|^2 = |\Pi_M x|^2$.

$\square$

Κεφάλαιο 2

Μέτρα Gauss σε χώρους Banach

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα συζητήσουμε για μέτρα Gauss σε χώρους Banach και για το πολύ σημαντικό θεώρημα του Fernique μέσω του οποίου θα μπορούμε εύκολα να παρατηρούμε ότι οι ροπές μιας απειροδιάστατης κατανομής έχουν πεπερασμένες ροπές.

2.1 Θεώρημα Fernique

Αρχικά θα ορίσουμε την χαρακτηριστική συνάρτηση τον μέσο και τον τελεστή της διακύμανσης στους χώρους Banach με την χρήση των φραγμένων γραμμικών τελεστών στον X^*.

$$\hat{\mu}(f) := \int_X exp\left\{if(x)\right\}\mu(dx), \quad f \in X^*$$

$$a_\mu(f) := \int_X f(x)\mu(dx), \quad f \in X^*$$

$$B_\mu(f,g) := \int_X [f(x) - a_\mu(f)][g(x) - a_\mu(g)]\mu(dx), \quad f, g \in X^*$$

Επίσης μέσω των χαρακτηριστικών συναρτήσεων μπορούμε να καταλάβουμε πότε δύο μέτρα πιθανότητας είναι ίδια και πότε η κατανομή μας είναι *Gaussian*.

Θεώρημα 2.1.1 *Ένα Borel μέτρο πιθανότητας μ στον χώρο X θα είναι μέτρο Gauss αν και μόνο αν η χαρακτηριστική συνάρτηση έχει την ακόλουθη μορφή*

$$\hat{\mu} = exp\left\{ia(f) - \frac{1}{2}B(f,f)\right\}, \quad f \in X^*$$

Απόδειξη:
Αρχικά θα δείξουμε το ευθύ μέρος του θεωρήματος.Έστω μ μέτρο Gauss , θα δείξουμε ότι η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η προαναφερθείσα με μέσο $a = a_\mu$ και $B = B_\mu$. Έχουμε

$$\hat{\mu}(f) = \int_{\mathbb{R}} exp\left\{i\xi\right\}(\mu \circ f^{-1})(d\xi) = exp\left\{im - \frac{1}{2}\sigma^2\right\}$$

όπου m και σ είναι ο μέσος και η διακύμανση του μέτρου $\mu \circ f^{-1}$.

$$m = \int_{\mathbb{R}} \xi(\mu \circ f^{-1})(d\xi) = \int_X f(x)\mu(dx) = a_\mu(f)$$

$$\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} (\xi - m)^2(\mu \circ f^{-1})(d\xi) = \int_X (f(x) - a_\mu(f))\mu(dx) = B_\mu(f,f)$$

Τώρα για την αντίθετη κατεύθυνση του θεωρήματος θα έχουμε , ότι για ένα Borel μέτρο πιθανότητας που ισχύει η προαναφερθείσα χαρακτηριστική εξίσωση θα δείξουμε ότι είναι Gauss .

$$\widehat{\mu \circ f^{-1}}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} exp\left\{i\tau t\right\}(\mu \circ f^{-1})(dt) = \int_X exp\left\{i\tau f(x)\right\}\mu(dx)$$

$$exp\left\{i\tau a(f) - \frac{1}{2}\tau^2 B(f,f)\right\}$$

Συνεπώς $\mu \circ f^{-1} = N(a(f), B(f,f))$ είναι μέτρο Gauss .

□

Πρόταση 2.1.1 *Έστω X ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach και μ_1,μ_2 δύο μέτρα πιθανότητας στον $(X, \mathcal{B}(X))$. Άν $\hat{\mu_1} = \hat{\mu_2}$ τότε $\mu_1 = \mu_2$.*

Όπως και στους χώρους Hilbert έτσι και στους χώρους Banach για να δούμε αν ένα μέτρο είναι Gaussian θα πρέπει να το ανάγουμε και να το ελέγχουμε στον $\mathbb{R}$ μέσω του push-forward.

Ορισμός 2.1.1 *Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach . Ένα μέτρο πιθανότητας μ στο $(X, \mathcal{B}(X))$ θα είναι Gaussan το $\mu_\circ f^{-1}$ είναι μέτρο Gauss στον $\mathbb{R}$ για κάθε $f \in X^*$.*

Ακόμα η ακόλουθη πρόταση είναι κεντρικής σημασίας για την απόδειξη του θεωρήματος Fernique.

Πρόταση 2.1.2 *Έστω X ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach και μ ένα μέτρο Gauss στον X τότε αν γ ένα μέτρο Gauss σε ένα χώρο Υ, τότε το $\mu \otimes \gamma$ θα είναι ένα μέτρο Gauss στον $X \times Y$.*

Απόδειξη: Για να αποδείξουμε την πρόταση θα εργασθούμε με την ισότητα των χαρακτηριστικών συναρτήσεων. Γνωρίζουμε ότι

$$B_\gamma(f,f) = \|f - a_\gamma(f)\|^2_{L^2(X,\gamma)}$$

$$B_\mu(g,g) = \|f - a_\mu(f)\|^2_{L^2(X,\mu)}$$

για $f \in X^*$ και $g \in y^*$.
Τώρα για κάθε $l \in (X \times Y)^*$, θα ορίσουμε

$$l(x,y) = l(x,0) + l(0,y) := f(x) + g(y)$$

Υπολογίζοντας την χαρακτηριστική συνάρτηση για τον χώρο $(X \times Y)$

$$\widehat{\gamma \otimes \mu}(l) = \int_{X\times Y} e^{il(x,y)}(\gamma \otimes \mu)(d(x,y))$$

$$= \int_X e^{if(x)}\gamma(dx)\int_Y e^{ig(y)}\mu(dy)$$

$$= \left\{ia_\gamma(f) - \frac{1}{2}\|f - a_\gamma(f)\|^2_{L^2(X,\gamma)} + ia_\mu(g) - \frac{1}{2}\|g - a_\mu(g)\|^2_{L^2(Y,\mu)}\right\}$$

$$= exp(\left\{i(a_\gamma(f) + a_\mu(g)) - \frac{1}{2}(\|f - a_\gamma(f)\|^2_{L^2(X,\gamma)} + \|g - a_\mu(g)\|^2_{L^2(Y,\mu)})\right\})$$

Τώρα ελέγχοντας την συσχέτιση

$$\int_{X\times Y}(f(x) - a_\gamma(f))(g(y) - a_\mu(g))(\gamma \otimes \mu)(d(x,y))$$

$$= \int_X (f(x) - a_\gamma(f))\gamma(dx)\int_Y (g(y) - a_\mu(g))\mu(dx) = 0$$

γνωρίζοντας ότι είναι ασυσχέτιστα

$$\|f - a_\gamma(f)\|^2_{L^2(X,\gamma)} + \|g - a_\gamma(g)\|^2_{L^2(Y,\mu)} =$$

$$= \int_X (l(x,0) - a_\gamma(f))^2 \gamma(dx) + \int_Y (l(0,y) - a_\mu(g))^2 \mu(dx)$$

$$= \int_{X\times Y} (l(x,0) - a_\gamma(f))^2 (\gamma\otimes\mu)(d(x,y)) + \int_{X\times Y} (l(0,y) - a_\mu(g))^2 (\gamma\otimes\mu)(d(x,y))$$

$$= \int_{X\times Y} (l(x,0) - a_\gamma(f))^2 + (l(0,y) - a_\mu(g))^2 (\gamma\otimes\mu)(d(x,y))$$

$$= \int_{X\times Y} (l(x,0) + l(0,y) - (a_\gamma(f) + a_\mu(g)))^2 (\gamma\otimes\mu)(d(x,y))$$

$$= \int_{X\times Y} (l(x,y) - (a_\gamma(f) + a_\mu(g)))^2 (\gamma\otimes\mu)(d(x,y))$$

συνεπώς

$$B_{\gamma\otimes\mu}(l,l) = \|l(x,y) - (a_\gamma(f) + a_\mu(g))\|^2_{L^2(X\times Y,\gamma\otimes\mu)} = B_\gamma(f,f) + B_\mu(g,g)$$

□

Στην συνέχεια για την απόδειξη του θεωρήματος Fernique θα χρησιμοποιήσουμε επίσης το ακόλουθο: Αν μ είναι ένα κεντραρισμένο μέτρο Gauss , τότε για $\theta \in \mathbb{R}$ η εικόνα του μέτρου $(\mu\otimes\mu)_\circ R_\theta^{-1}$ στον $X\times X$ κάτω από την απεικόνιση $R_\theta : X\times X \to X\times X,\ \ R_\theta(x,y) := (xcos\theta + ysin\theta, -xsin\theta + ycos\theta)$ θα είναι πάλι $\mu\otimes\mu$.

Θεώρημα 2.1.2 *(Fernique) Έστω μ ένα κεντραρισμένο Gaussian μέτρο σε έναν διαχωρίσιμο χώρο Banach X. Τότε υπάρχει $a > 0$ τ.ω*

$$\int_X exp\left\{a\|x\|^2\right\}\mu(dx) < \infty$$

Απόδειξη: Η γενική ιδέα της απόδειξης είναι να βρούμε a τ.ω κάτω από το μέτρο μ να αντισταθμίζεται η αύξηση του εκθετικού e. Ουσιαστικά θέλουμε το μέτρο $\mu(\{\|x\| \geq r\})$ να τείνει στο μηδέν.
Τώρα ας βρούμε $t, \tau > 0$ και ας εκτιμήσουμε το $\mu(\{\|x\| \leq \tau\})\mu(\{\|x\| \geq t\})$ χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (ii) της Πρότασης 3.3.3 για γωνία $\theta = -\frac{\pi}{4}$ θα έχουμε

$$\mu(\{x\in H : \|x\| \leq \tau\})\mu(\{x \in H : \|x\| \geq t\})$$

$$= (\mu\otimes\mu)(\{(x,y)\in X\times X : \|x\| \leq \tau\} \cap \{(x,y) \in X\times X : \|y\| \geq t\}),\quad (I)$$

Ακόμα από την στροφή που προκαλούμε θα πάρουμε σημεία του τύπου

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\frac{\pi}{4} & -sin\frac{\pi}{4} \\ sin\frac{\pi}{4} & cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} u = \frac{x-y}{\sqrt{2}} \\ v = \frac{x+y}{\sqrt{2}} \end{matrix}.$$

$$= (\mu\otimes\mu)(\left\{(x,y)\in X\times X : \frac{\|x-y\|}{\sqrt{2}} \leq \tau\right\} \cap \left\{(x,y)\in X\times X : \frac{\|x+y\|}{\sqrt{2}} \geq t\right\})$$

και μέσω της τριγωνικής ανισότητας $\|x\|, \|y\| \geq \frac{\|x+y\|}{2} - \frac{\|x-y\|}{2}$ θα έχουμε ότι

$$\left\{(x,y)\in X\times X : \frac{\|x-y\|}{\sqrt{2}} \leq \tau\right\} \cap \left\{(x,y)\in X\times X : \frac{\|x+y\|}{\sqrt{2}} \geq t\right\}$$

$$\subset \left\{(x,y)\in X\times X : \|X\| > \frac{t-\tau}{\sqrt{2}}\right\} \cap \left\{(x,y)\in X\times X : \|y\| > \frac{t-\tau}{\sqrt{2}}\right\}$$

άρα θα έχουμε

$$\mu(\{\|x\| \leq \tau\})\mu(\{\|x\| \geq t\}) \leq \mu(X \setminus \bar{B}(0, \frac{t-\tau}{\sqrt{2}}))^2$$

Θεωρούμε $\tau > 0$ τ.ω $c := \mu(\bar{B}(0,\tau)) \in (1/2, 1)$ και

$$\alpha := \frac{1}{24\tau^2} log(\frac{c}{1-c})$$

και ορίζουμε επαγωγικά μια ακολουθία t_n, θέτοντας

$$t_0 := \tau,\ t_n := \tau + \sqrt{2}t_{n-1} = \tau(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}^{n+1} - 1), \quad n \leq 1$$

όπου t_n αύξουσα, διότι $t_1 - \tau + \sqrt{2}\tau > t_0$, άρα συνεχώς η ακτίνα θα αυξάνει και ουσιαστικά το $\mu(X \setminus \bar{B}(0, t_n)) \to 0$, όσο το $t_n \to \infty$ και έχοντας ότι $t_{n-1} = \frac{t_n - \tau}{\sqrt{2}}$

$$\mu(\{\|x\| \leq \tau\})\mu(\{\|x\| > t_n\}) \leq \mu(X \setminus \bar{B}(0, t_{n-1}))^2$$

$$\Rightarrow \mu(\{\|x\| > t_n\}) \leq \frac{\mu(X \setminus \bar{B}(0, t_{n-1}))^2}{\mu(\{\|x\| \leq \tau\})}$$

$$\Rightarrow \mu(X \setminus \bar{B}(0, t_n)) \leq \frac{\mu(X \setminus \bar{B}(0, t_{n-1}))^2}{\mu(\{\|x\| \leq \tau\})}$$

$$= (\frac{\mu(X \setminus \bar{B}(0, t_{n-1}))}{c})^2 c$$

και επαγωγικά έχουμε

$$\mu(X \setminus \bar{B}(0, t_n)) \leq c(\frac{1-c}{c})^{2n}$$

Το ακόλουθο ολοκλήρωμα το σπάμε ως εξής:

$$\int_X exp\left\{\alpha \|x\|^2\right\}\mu(dx)$$

$$= \int_{\bar{B}(0,\tau)} exp\left\{\alpha \|x\|^2\right\}\mu(dx) + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\frac{\bar{B}(0,t_{n+1})}{B(0,t_n)}} exp\left\{\alpha \|x\|^2\right\}\mu(dx)$$

$$\leq cexp\left\{\alpha\tau^2\right\} + \sum_{n=0}^{\infty} exp\left\{\alpha t_{n+1}^2\right\}\mu(X \setminus \bar{B}(0, t_n))$$

και γνωρίζοντας $(\sqrt{2}^{n+2} - 1)^2 \leq 2^{n+2}$, $\forall \ n \in \mathbb{N}$

$$= cexp\left\{a\tau^2\right\} + \sum_{n=0}^{\infty} exp\left\{a\tau^2(1+\sqrt{2})^2(\sqrt{2}^{n+1} - 1)^2\right\}\mu(X \setminus \bar{B}(0, t_n))$$

$$\leq cexp\left\{a\tau^2\right\} + \sum_{n=0}^{\infty} exp\left\{a\tau^2(1+\sqrt{2})^2 2^{n+2}\right\}\mu(X \setminus \bar{B}(0, t_n))$$

$$= cexp\left\{a\tau^2\right\} + \sum_{n=0}^{\infty} exp\left\{4a\tau^2(1+\sqrt{2})^2 2^{n}\right\} c(\frac{1-c}{c})^{2n}$$

$$= c(exp\left\{a\tau^2\right\} + \sum_{n=0}^{\infty} exp\left\{4a\tau^2(1+\sqrt{2})^2 2^{n}\right\} (\frac{1-c}{c})^{2n})$$

$$= c(exp\left\{a\tau^2\right\} + \sum_{n=0}^{\infty} exp\left\{2^n(log\frac{1-c}{c} + 4\alpha\tau^2(1+\sqrt{2})^2)\right\})$$

$$= c(exp\left\{a\tau^2\right\} + \sum_{n=0}^{\infty} exp\left\{2^n(log\frac{1-c}{c} + 4\frac{1}{24\tau^2}log\frac{c}{1-c}\tau^2(1+\sqrt{2})^2)\right\})$$

$$= c(exp\left\{a\tau^2\right\} + \sum_{n=0}^{\infty} exp\left\{2^n(log(1-c) - log(c) + (log(c) - log(1-c))\frac{(1+2\sqrt{2}+2)}{6})\right\})$$

$$= c(exp\left\{a\tau^2\right\} + \sum_{n=0}^{\infty} exp\left\{2^n((log(1-c) - log(c)) - (log(1-c) - log(c))(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3})\right\})$$

$$= c(exp\left\{a\tau^2\right\} + \sum_{n=0}^{\infty} exp\left\{2^n(log(\frac{1-c}{c}))(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3})\right\})$$

όπου η τελευταία σειρά συγκλίνει για $c > 1/2$ δηλαδή $log(\frac{1-c}{c}) < 0$.

□

Γενικά το θεώρημα Fernique μπορεί να επεκταθεί και για μη κεντραρισμένα μέτρα.
Επίσης μια πρώτη εφαρμογή του θεωρήματος είναι ότι μπορούμε πολύ εύκολα να δούμε ότι όλες οι ροπές θα υπάρχουν δηλαδή

$$\int_X (\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \frac{\|x\|^n}{n!})\mu(dx)$$

και αφού το

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a\,\|x\|)^n}{n!} < \infty$$

μπορούμε να εναλλάξουμε το άθροισμα με το ολοκλήρωμα

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_X \|x\|^n \mu(dx) < \infty$$

Ακόμα μέσω του παραπάνω θεωρήματος μπορούμε να δούμε ότι ο μέσος και η συνδιακύμανση που ορίσαμε στην αρχή του κεφαλαίου είναι συνεχείς, αρκεί να δείξουμε ότι είναι φραγμένοι. Ορίζουμε

$$c_1 := \int_X \|x\| \mu(dx)$$

$$c_2 := \int_X \|x\|^2 \mu(dx)$$

$$|\alpha_\mu(f)| = \left|\int_X f(x)\mu(dx)\right|$$

$$\leq \int_X |f(x)| \mu(dx)$$

$$\leq \|f\|_{X^*} \int_X \|x\| \mu(dx) = c_1 \|f\|_{X^*}$$

όπου c_1 πεπερασμένο από Fernique

$$|B_\mu(f,g)| \leq \int_X |f(x) - a_\mu(f)|\, |g(x) - a_\mu(g)|\, \mu(dx)$$

$$\leq \|f\|_{X^*} \|g\|_{X^*} \int_X (\|x\| + c_1)^2 \mu(dx) = (c_2 + 3c_1^2) \|f\|_{X^*} \|g\|_{X^*}$$

Πρόταση 2.1.3 *Αν μ ένα μέτρο Gauss σε έναν διαχωρίσιμο χώρο Banach Ξ ,τότε θα υπάρχει $a \in X$ που θα αναπαρηστά τον μέσο $a_\mu(f)$ δηλαδή ,*

$$a_\mu(f) = f(a)$$

(Η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο [2] Proposition 2.3.3)

2.2 Reproducing Kernels

Σάυτό το σημείο θα αναφερθούμε στο Reproducing Kernel μέσω του οποίου θα ορίσουμε στο επόμενο κεφάλαιο τον χώρο Cameron-Martin και θα δούμε κάτω από ποιες συνθήκες θα ανήκουν στοιχεία σάυτό τον χώρο.

Αρχικά ας ορίσουμε την ακόλουθη απεικόνιση: Έστω X χώρος Banach τότε εύκολα μπορούμε να δούμε ότι ο X^* περιέχεται στον $L^2(X,\mu)$ και θ κανονική εμβύθιση (inclusion map)

$$j(f) = f - \alpha_\mu(f), \quad f \in X^*$$

είναι συνεχής.Αρκεί να δούμε μέσω της συνέχειας της συνδιακύμανσης τα εξής:

$$\|j(f)\|_{L^2(X,\mu)} = (\int_X (f - a_\mu(f))^2 \mu(dx))^{1/2}$$

$$\leq (\|f\|_{X^*}^2 \int_X (\|x\| - c_1)^2 \mu(dx))^{1/2} = \|f\|_{X^*} (c_2 - c_1^2)^{1/2}$$

όπου c_1 και c_2 όπως τα ορίσαμε πριν.

Ορισμός 2.2.1 *(Reproducing Kernel) Το reproducing kernel ορίζεται ως το $X_\mu^* :=$ η κλειστότητα του $j(X^*)$ στον $L^2(X,\mu)(X_\mu^* = \overline{j(X^*)}$ στον $L^2(X,\mu))$.*
Δηλαδή το X_μ^* περιέχει όλα τα όρια στον $L^2(X,\mu)$ μέσω των ακολουθιών $j(f_h) = f_h - \alpha_\mu(f)$ με $(f_h) \subset X^*$.

Επίσης είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι ο μέσος a_μ στον χώρο X_μ^* είναι μηδέν.

$$\int_X (f - a_\mu)(d\mu) = 0$$

και ότι μπορούμε να απεικονίσουμε την συνδιακύμανση

$$B_\mu(f,g) = \int_X f(x)g(x)\mu(dx) = \langle f,g \rangle_{L^2(X,\mu)}, \quad f,g \in X_\mu^*$$

Τώρα για την χαρακτηριστική συνάρτηση του μέτρου στον χώρο X_μ^* θα εχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.2.1 *Έστω μ ένα μέτρο Gauss σε έναν διαχωρίσιμο χώρο Banach .Τότε*

$$\hat{\mu}(f) = exp\left\{-\frac{1}{2}\|f\|_{L^2(X,\mu)}^2\right\}, \quad \forall f \in X_\mu^*$$

Απόδειξη: Έστω $f \in X_\mu^*$ και $g_h = j(f_h)$, $f_h \in X^*$, μια ακολουθία που συγκλίνει στο $f \in L^2(X,\mu)$. Τότε γνωρίζουμε ότι $a_\mu(g_h) = 0$, για κάθε $h \in \mathbb{N}$. Αρχικά επειδή η απεικόνιση $t \mapsto e^{it}$ είναι 1-Lipschitz .Για $x \neq y$ θα έχουμε

$$\frac{|e^{ix} - e^{iy}|}{|x-y|} = \left|e^{i\frac{x+y}{2}}\right| \frac{\left|e^{i\frac{x-y}{2}} - e^{i\frac{y-x}{2}}\right|}{|x-y|}$$

$$\leq \frac{\left|2isin(\frac{x-y}{2})\right|}{|x-y|}$$

$$= \left|\frac{sin(\frac{x-y}{2})}{\frac{x-y}{2}}\right| \leq 1$$

Συνεπώς

$$\left|\int_X exp\{ig_h(x)\} - exp\{if(x)\}\mu(dx)\right| \leq \int_X |exp\{ig_h(x)\} - exp\{if(x)\}|\mu(dx)$$

$$\leq \int_X |g_h(x) - f(x)| \, \mu(dx)$$
$$\leq (\int_X |g_h(x) - f(x)|^2 \, \mu(dx))^{1/2} \to 0$$

Άρα έχουμε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση θα είναι:

$$\hat{\mu}(f) = \lim_{h\to\infty} \hat{\mu}(g_h) = \lim_{h\to\infty} exp\left\{-\frac{1}{2}B_\mu(g_h, g_h)\right\} = exp\left\{-\frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(X,\mu)}\right\}$$

□

Επίσης ορίζουμε τον ακόλουθο τελεστή

$$R_\mu : X^*_\mu \to X$$

$$R_\mu f(g) := \int_X f(x)[g(x) - \alpha_\mu(g)]\mu(dx), \quad f \in X^*_\mu, \quad g \in X^*.$$

και μπορούμε να δούμε ότι:

$$R_\mu f(g) = \langle f, g - a_\mu(g)\rangle_{L^2(X,\mu)}$$

Πρόταση 2.2.2 *Έστω X ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach . Τότε οι τιμές του R_μ περιέχονται στο X, δηλαδή για κάθε $f \in X^*_\mu$ υπάρχει $y \in X$ τ.ω*

$$R_\mu f(g) = g(y), \quad \forall \ \ g \in X^*$$

(η απόδειξη μπορεί να την βρεθεί στο [2] Proposition2.3.6) και λόγω της παραπάνω πρότασης θα έχουμε ότι θα μπορούμε να δούμε το $R_\mu f$ μέσω ενός στοιχείου $y \in X$ και θα γράφουμε

$$R_\mu f(g) = g(R_\mu(f)), \quad \forall \ \ g \in X^*$$

2.3 Cameron-Martin

Στο ακόλουθο κεφάλαιο θα αναφερθούμε στο πότε μια μετάθεση στους χώρους Banach παραμένει αναλλοίωτη.Θα διαπιστώσουμε ότι για να συμβαινει αυτό αυτή η μετάθεση θα πρέπει να βρίσκεται στον χώρο Cameron-Martin όπου θα περιέχει όλα εκείνα τα στοιχεία $h \in X$ για τα οποία το $\mu_h(B) := \mu(B - h)$ να είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μέτρο μ.

Ορισμός 2.3.1 *(Χώρος Cameron-Martin)*
Για κάθε $h \in X$ ορίζουμε

$$|h|_H := sup\left\{f(h) : f \in X^*, \|j(f)\|_{L^2(X,\mu)} \leq 1\right\}$$

όπου $j : X^* \to L^2(X, \mu)$ και ο χώρος Cameron-Martin ορίζεται ως

$$H := \{h \in X : |h|_H < \infty\}$$

Συνεπώς ένα στοιχείο θα ανήκει στον χώρο Cameron-Martin υπό την έννοια ότι η απεικόνιση $f \mapsto f(h)$ είναι συνεχής.

Πρόταση 2.3.1 *Ένα στοιχείο $h \in X$ ανήκει στον H αν και μόνο αν υπάρχει $\hat{h} \in X^*_\mu$ τ.ω $h = R_\mu\hat{h}$ και σάυτή την περίπτωση θα γράφουμε*

$$|h|_H = \left\|\hat{h}\right\|_{L^2(X,\mu)}$$

Σάυτό το σημείο να επισημάνουμε ότι το $R_\mu : X^*_\mu \to H$ είναι μια ισομετρία και ο H είναι ένας χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο

$$[h, k]_H := \langle\hat{h}, \hat{k}\rangle_{L^2(X,\mu)}$$

όπου $h = R_\mu\hat{h}, k = R_\mu\hat{k}$.

Απόδειξη:

Αν $|h|_H < \infty$, ορίζουμε την γραμμική απεικόνιση $L : j(X^*) \to \mathbb{R}$

$$L(j(f)) := f(h), \quad \forall f \in X^*$$

η οποία είναι συνεχής γιατί

$$|f(h)| \leq \|j(f)\|_{L^2(X,\mu)} |h|_H$$

και την οποία απεικόνιση μέσω της αναπαράστασης Riez θα την επεκτείνουμε και στον X_μ^* μέσω ενός μοναδικού $\hat{h} \in X_\mu^*$

$$L(\phi) = \int_X \phi(x)\hat{h}\mu(dx), \quad \forall \phi \in X_\mu^*$$

συγκεκριμένα, για οποιοδήποτε $f \in X^*$

$$f(h) = L(j(f)) = \int_X j(f)(x)\hat{h}(x)\mu(dx) = f(R_\mu \hat{h})$$

συνεπώς $R_\mu \hat{h} = h$ και $|h|_H = sup\left\{f(h) : f \in X^*, \|j(f)\|_{L^2(X,\mu)} \leq 1\right\} = \left\|\hat{h}\right\|_{L^2(X,\mu)}$
Από την άλλη έχουμε ότι $h = R_\mu \hat{h}$,τότε για κάθε $f \in X^*$ έχουμε

$$f(h) = \int_X j(f)(x)\hat{h}(x)\mu(dx) \leq \left\|\hat{h}\right\|_{L^2(X,\mu)} \|j(f)\|_{L^2(X,\mu)}$$

όπου $|h|_H < \infty$.

□

Σάυτό το σημείο θα πρέπει να τονίσουμε ότι ο H είναι διαχωρίσιμος αφού είναι ισομετρικός με τον X_μ^* όπου είναι διαχωρίσιμος γιατί είναι υπόχωρος του $L^2(X,\mu)$ και γνωρίζουμε ότι ο χώρος X είναι διαχωρίσιμος .
Στην συνέχεια για την απόδειξη του θεωρήματος Cameron Martin θα παραθέσουμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 2.3.1 *Για οποιοδήποτε $g \in X_\mu^*$ τότε το μέτρο*

$$\mu_g = exp\left\{g - \frac{1}{2}\|g\|_{L^2(X,\mu)}^2\right\}\mu$$

είναι Gauss με χαρακτηριστική συνάρτηση

$$\hat{\mu}_g(f) = exp\left\{if(R_\mu g) + ia_\mu(f) - \frac{1}{2}\|j(f)\|_{L^2(X,\mu)}^2\right\}$$

(Η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο [2]Λεμμα 3.1.4)

Θεώρημα 2.3.1 *(Cameron-Martin) Για $h \in X$, ορίζουμε $\mu_h(B) := \mu(B-h)$.Αν $h \in (H)$ τότε τα μέτρα μ_h και μ θα είναι ισοδύναμα και θα ισχύει $\mu_h = \varrho_h \mu$ με*

$$\varrho_h(x) := exp\left\{\hat{h}(x) - \frac{1}{2}|h|_H^2\right\}$$

όπου το $\hat{h} = R_\mu^{-1}h$.Αν $h \notin H$ τότε $\mu_h \perp \mu$. Δηλαδή $\mu_h \approx \mu$ αν και μόνο αν $h \in H$.

Απόδειξη: Για $h \in H$, υπολογίζουμε την χαρακτηριστική συνάρτηση του μ_h. Για οποιοδήποτε $f \in X^*$ έχουμε

$$\hat{\mu}_h(f) = \int_X exp\left\{if(x)\right\}\mu_h(dx) = \int_X exp\left\{if(x+h)\right\}\mu(dx)$$

$$= \int_X e^{if(h)} e^{if(x)} \mu(dx) = e^{if(h)} \int_X e^{if(x)} \mu(dx)$$

$$= e^{if(h)} e^{ia_\mu(f) - \frac{1}{2}\|j(f)\|^2_{L^2(X,\mu)}}$$

$$= exp\left\{ if(R_\mu \hat{h}) + ia_\mu(f) - \frac{1}{2}\|j(f)\|^2_{L^2(X,\mu)} \right\}, \quad f \in X^*$$

από το προηγούμενο Λήμμα και γνωρίζοντας ότι για ίσες χαρακτηριστικές συναρτήσεις έχουμε και ίσα μέτρα θα γνωρίζουμε τότε ότι $\mu_h = \varrho_h \mu$

Τώρα ας δούμε ότι αν $h \notin H$ τότε $\mu_h \perp \mu$. Αρχικά ας δούμε την περίπτωση που είμαστε στην μια διάσταση. Αν μ είναι ένα μέτρο Dirac τότε θα έχουμε ότι $\mu_h \perp \mu$ για κάθε $h \neq 0$ και $|\mu_h - \mu|(\mathbb{R}) = 2$.

$$(2(1 - H(\mu,\nu)) \leq |\mu - \nu|(X) \leq 2\sqrt{1 - H(\mu,\nu)^2})$$

Αλλιώς αν $\mu = N(a, \sigma^2)$ μέτρο Gauss στον $\mathbb{R}$ τότε $\mu_h << \mu$ μέ $\frac{d\mu_h}{d\mu} = exp\left\{-\frac{h^2}{2\sigma^2} + \frac{h(t-a)}{\sigma^2}\right\}$ και εφαρμόζοντας το ολοκλήρωμα Hellinger για $\lambda = \mu$

$$H(\mu, \mu_h) = exp\left\{-\frac{h^2}{8\sigma^2}\right\}$$

όπου

$$|\mu - \mu_h|(\mathbb{R}) \geq 2(1 - exp\left\{-\frac{1}{8\sigma^2}h^2\right\})$$

Τώρα για τον χώρο Q θα έχουμε ότι για κάθε $f \in X^*$, $\mu_h \circ f^{-1} = (\mu \circ f^{-1})_{f(h)}$ και

$$\left|\mu \circ f^{-1} - (\mu \circ f^{-1})_{f(h)}\right|(\mathbb{R}) \leq |\mu - \mu_h|(X)$$

Συνεπώς αν $(f_n) \subset X^*$ με $\|j(f_n)\|^2_{L^2(X,\mu)} = 1$ και $f_n(h) \geq n$

$$|\mu - \mu_h|(X) \geq \left|(\mu \circ f_n^{-1}) - (\mu \circ f_n^{-1})_{f_n(h)}\right|(\mathbb{R}) \geq 2(1 - exp\left\{-\frac{1}{8}f_n(h)^2\right\})$$

$$\geq 2\left(1 - exp\left\{-\frac{1}{8}n^2\right\}\right)$$

Όπου σημαίνει $|\mu - \mu_h|(X) = 2$ μέσω του οποίου γνωρίζουμε ότι $\mu_h \perp \mu$.

□

Θεώρημα 2.3.2 *Έστω μ ένα μέτρο Gauss σε έναν διαχωρίσιμο χώρο Banach X και H ο χώρος Cameron-Martin τότε θα ισχύουν τα ακόλουθα:*
(i)Αν το μ είναι ένα κεντραρισμένο μέτρο τότε ο H είναι η τομή όλων των Borel υποσυνόλων του X

(ii)Αν το μ είναι ένα κεντραρισμένο μέτρο και X^*_μ είναι απειροδιάστατος τότε $\mu(H) = 0$.

(Η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο Lecture 3,Theorem 3.1.9 του summer school)

Τέλος θα πρέπει να αναφέρουμε ότι το αμετάβλητο που έχουμε στους απειροδιάστατους χώρους δεν είναι το ίδιο με το αμετάβλητο του Lebesgue .

Ορισμός 2.3.2 *Quasi μεταβλητότητα: Έστω ένα μέτρο $\mu \in M(H)$ θα λέγεται $h - quasi$ αμετάβλητο αν και μόνο αν $\mu_h = \mu(A - h) \sim \mu \forall A \in B(H)$, με την έννοια ότι το μετατοπισμένο μέτρο θα έχει τα ίδια μηδενοσύνολα με το αρχικό. Το σύνολο όλων των h για τα οποία θα έχουμε την προηγούμενη ισοδυναμία θα λέγεται Cameron-Martin .*

(Προσέγγιση του χώρου Cameron-Martin από χώρους Hilbert δίνεται στο Παράρτημα)

Κεφάλαιο 3

Παράρτημα

Μέτρο Borel :Έστω X ένας χώρος Banach και $\mathcal{B}(X)$ η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει ανοικτά σύνολα του X (σ-άλγεβρα συνόλων Borel).Ένα μέτρο μ θα λέγεται μέτρο Borel αν $\mu : \mathcal{B}(X) \to [0,1]$.(Για μ μέτρο πιθανότητας)

Διαχωρησιμότητα: Ένας μετρικός χώρος (X, d) θα λέγεται διαχωρίσιμος αν υπάρχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο $S \subset X$, το οποίο να είναι πυκνό στον μετρικό χώρο X, δηλαδή $\bar{S} = X$.
Επίσης ένας χώρος Hilbert θα είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν έχει αριθμήσιμη ορθομοναδιαία βάση.

Συμμετρικός Τελεστής: Έστω T ένας γραμμικός τελεστής και $D(T) \subset H$ το πεδίο ορισμού του, όπου H ένας χώρος Hilbert τότε θα λέμε ότι ο T είναι συμμετρικός αν ισχύει ότι $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ για κάθε $x, y \in D(T)$.

Trace Class τελεστής: Ένας μη αρνητικός αυτοσυζηγής γραμμικός τελεστής L θα λέγεται trace class αν υπάρχει μια ορθομοναδιαία βάση $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ σε έναν χώρο Hilbert H τ.ω

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle Le_k, e_k\rangle < \infty$$

και θα ορίζουμε

$$tr(L) := \sum_{k=1}^{\infty} \langle Le_k, e_k\rangle$$

για οποιαδήποτε ορθομοναδιαία βάση.
Έστω $(f_k : k \in \mathbb{N})$ ορθομοναδιαία βάση και $(e_n : n \in \mathbb{N})$ ορθομοναδιαία βάση για την οποία ισχύει $Le_n = \lambda_n e_n$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle Lf_k, f_k\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle L(\sum_{n=1}^{\infty} \langle f_k, e_n\rangle e_n), \sum_{m=1}^{\infty} \langle f_k, e_m\rangle e_m\rangle$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \langle\langle f_k, e_n\rangle Le_n, \langle f_k, e_m\rangle e_m\rangle$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_n \langle\langle f_k, e_n\rangle e_n, \langle f_k, e_m\rangle e_m\rangle$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle f_k, e_n\rangle^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$$

Φραγμένος τελεστής: Ένας τελεστής $T : V \to W$, όπου V, W δύο χώροι Banach θα λέγεται φραγμένος αν ισχύει ότι

$$\|T\nu\| \le C\,\|\nu\|$$

όπου C είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του $\nu \in V$.

Ολοκλήρωμα Bochner

Το ολοκλήρωμα Bochner είναι το ισοδύναμο του ολοκληρώματος Lebesgue αλλά σε απειροδιάστατους διανυσματικούς χώρους.
Αρχικά θα ορίσουμε τον μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{F})$ όπου Ω θα είναι χώρος Banach εφοδιασμένος με ένα μέτρο Gauss και χώρο Υ ο οποίος θα είναι Banach ή Cameron-Martin .
Θα δώσουμε κάποιους γενικούς ορισμούς για το ολοκλήρωμα, θα έχουμε απλές συναρτήσεις

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} 1_{\Gamma_i}(x) y_i, \quad x \in \Omega$$

για $n \in \mathbb{N}, \Gamma_i \in \mathcal{F}, y_i \in Y$ για κάθε $i = 1, ..., n$ και $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ για $i \neq j$ και θα ορίσουμε ολοκλήρωμα

$$\int_{\Omega} F(x)\mu(dx) := \sum_{i=1}^{n} \mu(\Gamma_i) y_i$$

στην συνέχεια θα ορίσουμε την ισχυρή μετρησιμότητα.

Ορισμός ισχυρής μετρησιμότητας : Μια συνάρτηση $F : \Omega \to Y$ θα λέγεται ισχυρά μετρήσιμη αν υπάρχει ακολουθία απλών συναρτήσεων $F_n(x)$ τ.ω $\lim_{n\to\infty} \|F(x) - F_n(x)\|_Y = 0$, σ.π. $x \in \Omega$.

Μέσο του ακόλουθου λήμματος θα δούμε ότι θα μπορούμε να βρίσκουμε σε διαχωρίσιμους χώρους ακολουθία απλών συναρτήσεων έτσι ώστε να ισχύει ο προηγούμενος ορισμός

Λήμμα :Έστω Ε ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος με μετρική d και X μια συνάρτηση από το Ω στο Ε . Τότε θα υπάρχει ακολουθία F_m απλών συναρτήσεων τ.ω για τυχών $x \in \Omega$ η ακολουθία $d(F(x), F_m(x))$ να συγκλίνει στο μηδέν.

Αν η F είναι ισχυρά μετρήσιμη τότε το $\|F(\cdot)\|_Y$ θα είναι πραγματική μετρήσιμη συνάρτηση.
Επίσης θα μπορούσαμε να δούμε και την ισχυρή μετρησιμότητα ως εξής: Η F θα λέγεται ισχυρά μετρήσιμη αν και μόνο αν για κάθε $f \in Y^*$ η σύνθεση $f \circ F : \Omega \to \mathbb{R}$,$x \mapsto f(F(x))$ είναι μετρήσιμη .
Δηλαδή στον χώρο Hilbert η F θα ήταν ισχυρά μετρήσιμη αν $x \mapsto \langle F(x), y_k \rangle_Y$ είναι μετρήσιμη για y_k ορθομοναδιαία βάση.
Στην συνέχεια βλέπουμε πότε μια συνάρτηση είναι Bochner ολοκληρώσιμη .

Ορισμός Bochner ολοκληρωσιμότητας: Μια ισχυρά μετρήσιμη συνάρτηση $F : \Omega \to Y$ θα λέγεται Bochner ολοκληρώσιμη αν υπάρχει ακολουθία απλών συναρτήσεων F_n τ.ω

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \|F(x) - F_n(x)\|_Y \mu(dx) = 0$$

και σάυτή την περίπτωση θα ορίζουμε

$$\int_{\Omega} F(x)\mu(dx) := \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} F_n(x)\mu(dx)$$

Από το προηγούμενο Λήμμα θα έχουμε ότι :

$$\left\| \int_{\Omega} F_m(x)\mu(dx) - \int_{\Omega} F_n(x)\mu(dx) \right\|$$

$$\leq \int_{\Omega} \|F(x) - F_n(x)\| \mu(dx) + \int_{\Omega} \|F(x) - F_m(x)\| \mu(dx) \to 0$$

Συνεπώς θα έχουμε ότι :

$$\int_{\Omega} \|F(x) - F_n(x)\| \, \mu(dx) \to 0$$

Πρόταση ολοκληρωσιμότητας Bochner : Μια μετρήσιμη συνάρτηση $F : \Omega \to Y$ θα λέγεται Bochner ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν

$$\int_{\Omega} \|F(x)\|_Y \, \mu(dx) < \infty$$

(Για την απόδειξη σας παραπέμπουμε στο [2]Proposition 9.2.4)

Ακόμα οι επόμενες ιδιότητες ισχύουν για το ολοκλήρωμα Bochner :

Πρόταση ιδιοτήτων ολοκληρωσιμότητας Bochner : Έστω $F : \Omega \to Y$ μια Bochner ολοκληρώσιμη συνάρτηση τότε

$(i)\left\|\int_{\Omega} F(x)\mu(dx)\right\|_Y \leq \int_{\Omega} \|F(x)\|_Y \, \mu(dx)$

$(ii)\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E F(x)\mu(dx) = 0$

(iii) Για κάθε $f \in Y^*$, η απεικόνιση $x \mapsto f(F(x))$ ανήκει στον $L^1(\Omega, \mu)$, και

$$f(\int_{\Omega} F(x)\mu(dx)) = \int_{\Omega} f(F(x))\mu(dx)$$

Απόδειξη:(i) Έστω F_n απλή ακολουθία συναρτήσεων, τότε γνωρίζουμε ότι για κάθε τέτοια ακολουθία ισχύει $\left\|\int_{\Omega} F_n(x)\mu(dx)\right\|_Y \leq \int_{\Omega} \|F_n(x)\|_Y \, \mu(dx)$. Γνωρίζοντας αυτό θα έχουμε

$$\left\|\int_{\Omega} F(x)\mu(dx)\right\|_Y \leq \left\|\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} F_n(x)\mu(dx)\right\|_Y \leq \lim_{n\to\infty} sup \int_{\Omega} \|F_n(x)\|_Y \, \mu(dx)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \|F_n(x) - F(x)\|_Y \, \mu(dx) + \int_{\Omega} \|F(x)\|_Y \, \mu(dx)$$

$$\int_{\Omega} \|F(x)\|_Y \, \mu(dx)$$

Το (ii) μπορούμε να το μεταφράσουμε ως εξής: $\forall \epsilon > 0$ θα υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω $\mu(E) < \delta$ και $\left\|\int_E F(x)\mu(dx)\right\|_Y \leq \epsilon$ και αφού $\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E \|F(x)\|_Y \, \mu(dx) = 0$ τότε μέσω της ιδιότητας (i) θα έχουμε το ζητούμενο.

Τώρα για το (iii) γνωρίζουμε ότι για απλές συναρτήσεις ισχύει

$$f(\int_{\Omega} F(x)\mu(dx)) = f(\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} F_n(x)\mu(dx))$$

$$\lim_{n\to\infty} f(\int_{\Omega} F_n(x)\mu(dx)) = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f(F_n(x))\mu(dx)$$

Επίσης γνωρίζουμε ότι η ακολουθία $f(F_n(x))$ συγκλίνει σημειακά στο $f(F(x))$ και

$$|f(F_n(x))| \leq \|f\|_{Y^*} \|F_n(x)\|_Y \leq (\|F_n(x) - F(x)\|_Y + \|F(x)\|_Y)$$

$$\leq \|f\|_{Y^*} (\|y_1\|_Y + 2\|F(x)\|_Y)$$

και εφαρμόζοντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε το ζητούμενο

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f(F_n(x))\mu(dx) = \int_{\Omega} f(F(x))\mu(dx)$$

□

Ως συνέπεια της ιδιότητας (iii) θα έχουμε για έναν διαχωρίσιμο χώρο Hilbert και για μια ορθομοναδιαία βάση y_k

$$\int_\Omega F(x)\mu(dx) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_\Omega \langle F(x), y_k \rangle \mu(dx) y_k$$

όπου $F : \Omega \to Y$ Bochner ολοκληρώσιμη συνάρτηση

Ο χώρος των L^p , $1 \leq p \leq \infty$ συναρτήσεων είναι ισοδύναμος με τον χώρο των Bochner ολοκληρώσιμων συναρτήσεων τ.ω.

$$\|F\|_{L^p(\Omega,\mu;Y)} := (\int_\Omega \|F\|_Y^p \mu(dx))^{1/p} < \infty$$

Τέλος μπορούμε να δούμε ότι ,υπάρχει $a \in X$ τ.ω $a_\mu(f) = f(a)$, για κάθε $f \in X^*$.Για την συνάρτηση $t(x) := x$ θα έχουμε απο το θεώρημα Fernique $\int_X \|x\| \mu(dx) \leq \infty$ συνεπώς θα ανήκει στον χώρο L^1 όπου γνωρίζουμε ότι είναι Bochner ολοκληρώσιμη και θα έχουμε

$$a = \int_X x\mu(dx)$$

Από την προηγούμενη πρόταση επίσης θα έχουμε ότι για κάθε $f \in X^*$

$$f(\int_X x\mu(dx)) = \int_X f(x)\mu(dx) = a_\mu(f)$$

συνεπώς $a = \int_X x\mu(dx)$.

Αυτοσυζηγής: Έστω A ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής, όπου H χώρος Hilbert . Τότε ο A θα λέγεται αυτοσυζηγής αν και μόνο αν $A = A^*$.

Ψευδοαντίστροφος:Αν έχουμε έναν φραγμένο τελεστή $A : X \to Y \ \forall \ A_1(X)$ τότε ορίζουμε το σύνολο

$$A^{-1}(x) = \{x_1 \in X : Ax_1 = x\}$$

δηλαδή θα περιέχει τα σημεία τα οποία δεν ανήκουν στο $Ker(A)$.

Επίσης, έστω ότι $y \in A(X)$ και $\exists \ z \in X$ με $A(z) = y$, τότε αν υπάρχει άλλο στοιχείο $z^{'} \in X$ με $A(z^{'}) = y$, θα έχουμε

$$A(z - z^{'}) = y - y = 0$$

δηλαδή για τα σημεία που δεν ανήκουν στο $Ker(A)$ θα έχουμε μοναδική απεικόνιση. $z - z^{'} \in Ker(A)$. Ακόμα για το σύνολο $A^{-1}(\{y\}) = z + Ker(A)$ θα ψάξουμε να βρούμε σημείο ελάχιστης νόρμας έτσι ώστε να μπορέσουμε να ορίσουμε $A^{-1}y = x$.

$$A^{-1}y = argmin \left\{ \left| A^{-1}(\{y\}) \right|_X \right\}$$

Το παραπάνω z έχει την μοναδική γραφή $z = x + z^{'}$ για $x \in X \in Ker(A)^\perp$ και $z^{'} \in Ker(A)$ με το $A(x) = y$ και $\|z\|^2 = \|x\|^2 + \left\|z^{'}\right\|^2 \geq \|x\|^2$
Τέλος το $A^{-1}(X)$ είναι ο ορθογώνιος υπόχωρος του $Ker(A) = A^{-1}(0)$.

Τελεστής Hilbert-Schmidt : Έστω T ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής σε έναν χώρο Hilbert και $\{x_n\}$ ορθοκανονική βάση, άν έχουμε ότι:

$$\|T\|_{HS}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|Tx_n\| < \infty$$

τότε ο τελεστής T θα λέγεται Hilbert-Schmidt .

Βάση Shauder : Έστω Η απειροδιάστατος διαχωρίσιμος γραμμικός χώρος Hilbert τότε θα υπάρχει ορθοκανονική βάση που θα καλείται Shauder μια ορθοκανονική ακολουθία $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq H$ τ.ω $\forall x \in H$ τ.ω $\exists!\ x_n$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$.

Συνέλιξη μέτρων πιθανότητας:Έστω δύο μέτρα Gauss γ_1 στον χώρο X_1 και γ_2 στον χώρο X_2 (όπου X_1, X_2 διαχωρίσιμοι χώροι Banach), τότε γνωρίζουμε ότι γινόμενο τους $\gamma_1 \otimes \gamma_2$ θα είναι και αυτό ένα μέτρο Gauss στον χώρο $X_1 \times X_2$.Τώρα στην περίπτωση όπου $X_1 = X_2 = X$, θα ορίζουμε ώς συνέλιξη $\gamma_1 * \gamma_2$ των μέτρων γ_1,γ_2 την εικόνα του μέτρου $\gamma_1 \otimes \gamma_2$ υπό την απεικόνιση $X \times X \mapsto X$ και πιο συγκεκριμένα $(x, y) \mapsto x + y$.Όπου η συνέλιξη δύο μέτρων μας δίνει ώς αποτέλεσμα ένα μέτρο , που στην συγκεκριμένη περίπτωση θα είναι ένα μέτρο Gauss .
Τώρα στην συνέχεια γνωρίζοντας ότι το μέτρο $\mu = \gamma_1 * \gamma_2$ είναι ένα μέτρο Gauss θα έχουμε ότι θα έχει μέσο και διακύμανση τα ακόλουθα:

$$a_\mu = a_{\gamma_1} + a_{\gamma_2}$$

$$R_\mu = R_{\gamma_1} + R_{\gamma_2}$$

Tight Compact
1) Έστω E ένας πλήρης, διαχωρίσιμος, μετρικός χώρος. Ένα σύνολο Λ μέτρων πιθανότητας στον $(E, \mathcal{B}(E))$ θα είναι σχετικά συμπαγές αν και μόνο αν είναι tight.
2) Έστω E ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach και μ ένα μέτρο πιθανότητας στον $(E, \mathcal{B}(E))$. Τότε για τυχαίο $\epsilon > 0$ θα υπάρχει ένα συμπαγές $K_\epsilon \subset E$ τ.ω.

$$\mu(K_\epsilon) \le 1 - \epsilon$$

Ισομετρία : Έστω Q και U μετρικοί χώροι με μετρικές d_X και d_Y. Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ θα λέγεται ισομετρία αν για οποιοδήποτε $a, b \in X$ έχουμε

$$d_Y(f(a), f(b)) = d_X(a, b)$$

Θεώρημα Cameron-Martin Hilbert space : Έστω $\mu = N(0, Q)$ ένα μέτρο Gauss σε έναν χώρο Hilber X τότε ο χώρος X^*_μ που είχαμε αναφέρει ως reproducing kernel θα γίνει

$$X^*_\mu = \left\{ f : X \to \mathbb{R} : f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k z_k \lambda_k^{-1/2}, z \in X \right\}$$

και ο χώρος Cameron-Martin θα είναι το πεδίο τιμών του $Q^{1/2}$, δηλαδή

$$H = \left\{ x \in X : \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \lambda_k^{-1} < \infty \right\}$$

και με νόρμα.
Για $h = Q^{1/2}z \in H$,θα έχουμε

$$\hat{h}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k z_k \lambda_k^{-1/2}$$

και νόρμα

$$[h, k]_H = \langle Q^{-1/2}h, Q^{-1/2}k \rangle \quad \forall h, k \in H$$

(Την απόδειξη μπορεί να την βρει κάποιος στο [2] Theorem 4.2.7)

Επίσης μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ο χώρος Cameron-Martin $Q^{1/2}(H)$ είναι πυκνό στον H.
Υποθέτοντας ότι το $ker(Q) = 0$ και παίρνοντας $x \in H$ τ.ω $\langle Q^{1/2}a, x \rangle = 0$ για κάθε $a \in H$ θα έχουμε $Q^{1/2}x = 0$ και επιπλέον $Qx = 0$, όπου σημαίνει ότι $x = 0$.Αυτό αποδεικνύει ότι το $Q^{1/2}(H)$ είναι πυκνό στον H.Για την αντίθετη κατεύθυνση θα έχουμε , έστω $x \in H$ με $Qx = 0$ και επιπλέον $Q^{1/2}x = 0$ με $\langle Q^{1/2}x, y \rangle = \langle x, Q^{1/2}y \rangle = 0$ για κάθε $y \in H$.Αφού το $Q^{1/2}$ είναι πυκνό στον H θα έχουμε $x = 0$.

Βιβλιογραφία

[1] G.Da Prato,J. Zabczyk. *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*,Cambridge University Press, 2008.

[2] A. Lunardi, M. Miranda, D. Pallara, *Program of the 19th Internet Seminar* , 2015/2016.

[3] A. Alexanderian, *On non existence of Lebesgue like measures in infinite dimension*, 2014.

[4] *An Introduction to Stochastic PDEs*,Warwick University/Courant Institute, 2009.

[5] V.I.Bogachev*Gaussian Measures*,American Mathematical Society,2015.