92/1894

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΕΚΛΕΠΤΥΣΜΕΝΗΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΤΟΝ ΕΛΕΓΧΟ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

ΥΠΟ

ΣΠΥΡΙΔΩΝΟΣ Δ. ΣΥΜΕΩΝΙΔΗ

Διδακτορική διατριβή κατατεθείσα στο
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών,
Ιούλιος, 1991.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Κατ' αρχήν θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Μ. Α. Μαγδαληνό για την πολύπλευρη βοήθεια, τις πολύτιμες συμβουλές και τις κριτικές παρατηρήσεις του κατά την διάρκεια αυτής της μελέτης μου. Για όλα αυτά του είμαι ευγνώμων.

Πολλά οφείλω σε όλους τους καθηγητές που κατά καιρούς με δίδαξαν Στατιστική και Οικονομετρία. Ιδιαίτερα θέλω να ευχαριστήσω τον Πρύτανη του Οικονομικού Πανεπιστήμιου Αθηνών κ. Α. Κιντή, που πρώτος με δίδαξε Οικονομετρία, και τον Επίκουρο Καθηγητή του ιδίου Πανεπιστημίου κ. Ε. Πανά, του οποίου η βοήθεια για την διενέργεια Monte Carlo πειραμάτων υπήρξε σημαντική. Επιπλέον, σημαντική βοήθεια μου έδωσαν ορισμένες εύστοχες και εποικοδομητικές παρατηρήσεις των καθηγητών L. Gills και G. Phillips του Πανεπιστημίου του Manchester.

Θεωρώ χρέος μου να επισημάνω τις πολλές διευκολύνσεις που μου παρέσχε το Κέντρο Ηλεκτρονικών Υπολογιστών του Οικονομικού Πανεπιστήμιου Αθηνών και το προσωπικό του. Τους ευχαριστώ όλους.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την κάθε είδους συμπαράσταση και την ατέλειωτη υπομονή που επέδειξε κατά τα τρία τελευταία χρόνια.

Στο σημείο αυτό επιθυμώ να δηλώσω ότι το περιεχόμενο αυτής της διατριβής αποτελεί δική μου πρωτότυπη ερευνητική εργασία, εκτός αν ρητά αναφέρεται το αντίθετο. Είναι προφανές ότι η ευθύνη του περιεχομένου και των λαθών που ενδεχομένως υπάρχουν είναι αποκλειστικά δική μου.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΕΚΛΕΠΤΥΣΜΕΝΗΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΤΟΝ ΕΛΕΓΧΟ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

υπό

ΣΠΥΡΙΔΩΝΟΣ Δ. ΣΥΜΕΩΝΙΔΗ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε αυτήν την διατριβή χρησιμοποιούνται μέθοδοι της Εκλεπτυσμένης Ασυμπτωτικής Θεωρίας για την μελέτη και βελτίωση ορισμένων ελέγχων που χρησιμοποιούνται συχνά στην Οικονομετρία. Δεδομένου ότι το γενικευμένο γραμμικό υπόδειγμα χρησιμοποιείται ευρύτατα στην εφαρμοσμένη οικονομετρική έρευνα, μεγάλο μέρος αυτής της μελέτης αφιερώνεται στην διόρθωση του μεγέθους των συνηθισμένων διαρθρωτικών ελέγχων (t και F) σε περιπτώσεις αυτοσυσχέτισης, ετεροσκεδαστικότητας, ή S.U.R. υποδειγμάτων. Η σημασία των διορθώσεων αυτών γίνεται φανερή από το ότι πειραματικά δεδομένα αποδεικνύουν πως το πραγματικό μέγεθος των ανωτέρω ελέγχων είναι συχνά τριπλάσιο του ονομαστικού. Υπάρχουν, όμως, πολλές εναλλακτικές μέθοδοι για την διόρθωση του μεγέθους, η σχετική απόδοση των οποίων εξετάζεται λεπτομερώς με την βοήθεια Monte Carlo πειραμάτων.

Η ίδια, ουσιαστικά, μεθοδολογία μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε ελέγχους κακής εξειδίκευσης (misspecification tests). Στην μελέτη αυτή εξετάζουμε μεθόδους για την διόρθωση του μεγέθους των ελέγχων Anderson-Rubin-Sargan για κακή εξειδίκευση μιας εξίσωσης ενός οικονομετρικού συστήματος. Επιπλέον, μελετάται η τρίτης τάξης (τοπική) ισχύς των ανωτέρω ελέγχων όταν οι βοηθητικές μεταβλητές δεν είναι ανεξάρτητες από τον διαταρακτικό όρο της εξίσωσης και αποδεικνύεται ότι αυτή η ερμηνεία των ελέγχων, ως ελέγχων υπερταυτοποιητικών συνθηκών ορθογωνιότητας, είναι εγκυρότερη από την συνηθισμένη ερμηνεία τους ως ελέγχων κακής διαρθρωτικής εξειδίκευσης.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Σελίδα

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ (ii)

ΠΕΡΙΛΗΨΗ (iii)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΜΕ ΜΕΘΟΔΟΥΣ ΤΗΣ ΕΚΛΕΠΤΥΣΜΕΝΗΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ 1

1.1 Εισαγωγή 1
1.2 Στατιστική Συμπερασματολογία στην Οικονομετρία 2
1.3 Περιορισμοί της μη Ασυμπτωτικής Στατιστικής θεωρίας 2
1.4 Πλεονεκτήματα των Ασυμπτωτικών Μεθόδων 6
1.5 Στατιστική Συμπερασματολογία σε μικρά δείγματα 8
1.6 Εκλεπτυσμένη Ασυμπτωτική θεωρία (Ε.Α.θ.) 11
1.7 Εναλλακτικές μέθοδοι της Ε.Α.θ. 16
1.8 Σκέψεις για την Ε.Α.θ. 18
1.9 Το αντικείμενο αυτής της διατριβής 20
1.10 Τοπικά Ακριβείς Προσεγγίσεις 23
1.11 Η δομή αυτής της διατριβής 27

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΕΛΕΓΧΩΝ ΣΤΟ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ 28

2.1 Εισαγωγή 28
2.2 Το Γενικευμένο Γραμμικό Υπόδειγμα 30
2.3 Ο t έλεγχος 32
2.4 Ο F έλεγχος 36
2.5 Σύγκριση των ελέγχων t και F 40

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ 43

3.1 Εισαγωγή 43
3.2 Το υπόδειγμα 43

Σελίδα

3.3 Διορθώσεις του μεγέθους των t και F ελέγχων 45
3.4 Το Monte Carlo πείραμα 47
3.5 Τελικές παρατηρήσεις 115

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΕΤΕΡΟΣΚΕΔΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ 118

4.1 Εισαγωγή 118
4.2 Το υπόδειγμα 120
4.3 Διορθώσεις του μεγέθους των t και F ελέγχων 121
4.4 Το Monte Carlo πείραμα 123
4.5 Τελικές παρατηρήσεις 157

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΦΑΙΝΟΜΕΝΙΚΑ ΑΣΥΣΧΕΤΙΣΤΕΣ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΕΙΣ (S.U.R.) 160

5.1 Εισαγωγή 160
5.2 Το υπόδειγμα 161
5.3 Διορθώσεις του μεγέθους των t και F ελέγχων 163
5.4 Τελικές παρατηρήσεις 165

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΗΣ ΕΞΩΓΕΝΕΙΑΣ ΤΩΝ ΒΟΗΘΗΤΙΚΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΕΝΟΣ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 167

6.1 Εισαγωγή 167
6.2 Το υπόδειγμα 171
6.3 Η επαγόμενη μηδενική υπόθεση 177
6.4 Η νέα ελεγχόμενη υπόθεση 180
6.5 Τοπική ισχύς και διορθώσεις του μεγέθους των ελέγχων της εξωγένειας των βοηθητικών μεταβλητών 182
6.6 Το Monte Carlo πείραμα 188
6.7 Τελικές παρατηρήσεις 211

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 213

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΤΗΣ ΕΚΛΕΠΤΥΣΜΕΝΗΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ 218

Α.1 Εισαγωγή 218
Α.2 Στοχαστικές τάξεις μεγέθους 218

Σελίδα

A.3 Στοχαστικά αναπτύγματα και ασυμπτωτικές προσεγγίσεις 221
A.4 Τυπικά (formal) κατά Edgeworth αναπτύγματα 222
A.5 Εγκυρότητα των κατά Edgeworth αναπτυγμάτων 225
A.6 Μερικά χρήσιμα αποτελέσματα 227

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 2 228

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 3 269

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ: ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 4 310

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε: ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 5 345

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ζ: ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 6 376

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Η: ΤΥΧΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ 448

Η.1 Εισαγωγή 448
Η.2 Η δημιουργία των U(0,1) τυχαίων αριθμών 452
Η.3 Έλεγχοι ομοιομορφίας (tests of uniformity) 453
Η.4 Η δημιουργία των N(0,1) τυχαίων αριθμών 456
Η.5 Έλεγχος κανονικότητας (test of normality) 456
Η.6 Οπτικοί έλεγχοι 457
Η.7 Συγκρίσεις εναλλακτικών σπόρων (seeds) 458

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 466

ABSTRACT 481

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΜΕ ΜΕΘΟΔΟΥΣ ΤΗΣ ΕΚΛΕΠΤΥΣΜΕΝΗΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την εξέλιξη των μεθόδων της Εκλεπτυσμένης Ασυμπτωτικής Θεωρίας (Ε.Α.Θ.) στην οικονομετρία σε συνδυασμό με την αντίστοιχη θεωρία στα πλαίσια της μαθηματικής στατιστικής. Πρίν, όμως, προχωρήσουμε στην συζήτηση αυτή, θεωρούμε χρήσιμη μια σύντομη αναφορά στον κλάδο των μαθηματικών που ονομάζεται Ασυμπτωτική Ανάλυση.

Συμβαίνει συχνά να θέλουμε να υπολογίσουμε αριθμητικά μια συγκεκριμένη ποσότητα ορισμένη με τέτοιον τρόπο ώστε για τον υπολογισμό της να απαιτείται ένα τόσο μεγάλο πλήθος αριθμητικών πράξεων που καθιστά την άμεση μέθοδο σχεδόν αδύνατη. Σε τέτοιες περιπτώσεις, που ακριβείς (exact) αριθμητικές τιμές δεν είναι εφικτές, θα ήταν κανείς ευτυχής αν μπορούσε να καταφύγει σε μιαν εντελώς διαφορετική μέθοδο για να βρεί τις πληροφορίες που ζητά σχετικά με την τιμή της ποσότητας που τον ενδιαφέρει. Τέτοιες μέθοδοι βασίζονται σε χρήσιμες προσεγγίσεις της ποσότητας και συνήθως, όπως παρατήρησε ο Laplace, τα αποτελέσματά τους γίνονται όλο και καλύτερα όταν οι μέθοδοι γίνονται περισσότερο απαιτητες: η ακρίβεια των μεθόδων βελτιώνεται οποτεδήποτε η δυσκολία άμεσης εφαρμογής του ορισμού μεγαλώνει. Οι εναλλακτικές μέθοδοι αυτού του είδους ονομάζονται ασυμπτωτικές μέθοδοι και είναι το αντικείμενο της ασυμπτωτικής ανάλυσης (βλ. De Bruijn (1981)).

Παλαιότερα, η ασυμπτωτική ανάλυση εθεωρείτο περισσότερο τέχνη παρά επιστήμη. Αυτός ο χαρακτηρισμός οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι οι ερευνητές του κλάδου αυτού προέρχονταν από πολλά διαφορετικά επιστημονικά πεδία και οι μέθοδοι τους προορίζονταν να λύσουν συγκεκριμένα προβλήματα ή περιορισμένες ομάδες προβλημάτων. Έτσι οι ασυμπτωτικές τεχνικές εμφανίζονταν μάλλον ως ad hoc διαδικασίες, ενώ μια προσεκτική εξέταση αποκαλύπτει ότι στις ασυμπτωτικές μεθόδους ενυπάρχουν συγκεκριμένες αρχές που ενισχύουν την δυνατότητά μας να χειριστούμε τα σχετικά προβλήματα με τρόπο αποτελεσματικό. Και αυτό αποκτά ακόμα μεγαλύτερη σημασία αν λάβουμε υπόψη ότι η ασυμπτωτική ανάλυση βρίσκεται στο επίκεντρο

των περισσότερων τομέων των εφαρμοσμένων μαθηματικών (βλ. Bleistein and Handelsman (1986)).

1.2 ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ

Η Οικονομετρία είναι ο κλάδος της Οικονομικής Επιστήμης ο οποίος ασχολείται με την εμπειρική ανάλυση οικονομικών νόμων (Εφαρμοσμένη Οικονομετρία) και την ανάπτυξη των απαιτούμενων, προς τον σκοπό αυτό, μαθηματικών και στατιστικών τεχνικών (θεωρητική Οικονομετρία). Το κυριώτερο εργαλείο της οικονομετρικής ανάλυσης είναι μια ποικιλία μεθόδων παλινδρόμησης διαφόρων επιπέδων πολυπλοκότητας. Στην γενικότερη μορφή της η οικονομετρική ανάλυση συνίσταται στην χρησιμοποίηση των πληροφοριών ενός δείγματος για να εξαχθούν συμπεράσματα για μια μήτρα παραμέτρων Β, δηλαδή να εκτιμηθεί η μήτρα Β, να ελεγχθούν υποθέσεις για τα στοιχεία της, ή να κατασκευαστεί ένα σύνολο εμπιστοσύνης για αυτήν.

1.3 ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΤΗΣ ΜΗ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Παρά το γεγονός ότι βασικές στατιστικές έννοιες, όπως "συνάρτηση ισχύος", "κίνδυνος" κ.τ.λ., μπορούν να τυποποιηθούν σε γενικούς όρους, δεν υπάρχει, και ούτε πρέπει να αναμένουμε ότι θα υπάρξει, μια γενική μη ασυμπτωτική στατιστική θεωρία εφαρμόσιμη στα προβλήματα στατιστικής συμπερασματολογίας που αναφέραμε πιο πριν. Στην καλύτερη περίπτωση, η βασική ακριβής (exact) στατιστική θεωρία μπορεί να επιλύσει μόνον τμήματα των προβλημάτων αυτών σε περιορισμένα πεδία έρευνας.

Η εκτιμητική θεωρία, που βασίζεται στις έννοιες της αμεροληψίας, επάρκειας και πληρότητας, εφαρμόζεται κυρίως στην εκθετική οικογένεια κατανομών. Στην καλύτερη περίπτωση, ο προτεινόμενος εκτιμητής βασίζεται σε ένα επαρκές στατιστικό και είναι εκείνος ο αμερόληπτος εκτιμητής που ελαχιστοποιεί μιαν κυρτή συνάρτηση διακινδύνευσης. Όμως, η αμεροληψία ενός εκτιμητή είναι μια πολύ περιοριστική απαίτηση, ιδιαίτερα όταν δεν επιβάλλεται από το διερευνούμενο στατιστικό πρόβλημα. Σημαντικά προβλήματα δημιουργούνται οποτεδήποτε δεν υπάρχει ο αμερόληπτος εκτιμητής που απαιτείται από την φύση του στατιστικού προβλήματος, ή αν ο αμερόληπτος εκτιμητής που ελαχιστοποιεί μιαν κυρτή συνάρτηση διακινδύνευσης δεν είναι καλά ορισμένος (proper). Στο σημείο αυτό

πρέπει να παρατηρήσουμε ότι οι καλές μαθηματικές τους ιδιότητες είναι ο μοναδικός λόγος για την χρησιμοποίηση των κυρτών συναρτήσεων ζημίας στην στατιστική αρθρογραφία. Στην πράξη, οι συναρτήσεις ζημίας πρέπει πάντοτε να είναι φραγμένες, με αποτέλεσμα να μην είναι ποτέ κυρτές.

Περισσότερο ικανοποιητικά αποτελέσματα μπορούμε να πάρουμε χρησιμοποιώντας εκτιμητές αμερόληπτους ως προς την διάμεσο (median unbiased) που ελαχιστοποιούν τον κίνδυνο ως προς αυθαίρετες αρνητικές μονοκόρυφες (neg-unimodal) (bowl-shaped) συναρτήσεις ζημίας (βλ. Lehmann (1959), σελ. 83, Pfanzagl (1970), σελ. 33, θεώρημα 1.12 και Pfanzagl (1979b)). Και αυτά, όμως, τα αποτελέσματα έχουν περιορισμένες δυνατότητες εφαρμογής.

Γενικά, η μη ασυμπτωτική στατιστική θεωρία, οποτεδήποτε είναι εφαρμόσιμη, μπορεί, στην καλύτερη περίπτωση, να χρησιμοποιηθεί για να βελτιώσει δεδομένους εκτιμητές ή να βεβαιώσει ότι έχουν άριστες ιδιότητες. Αφήνει, όμως, αναπάντητο το ουσιαστικότερο ερώτημα της εκτιμητικής θεωρίας, δηλαδή, "πώς μπορούμε να βρούμε έναν καλό εκτιμητή;". Η μόνη γενική απάντηση, αυτή που προτείνει την χρησιμοποίηση του εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας, δεν μπορεί να δικαιολογηθεί στα πλαίσια της μη ασυμπτωτικής θεωρίας. Η χρήση του εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας, ο οποίος ενδέχεται να μην είναι αποδεκτός όταν χρησιμοποιούνται αρνητικές μονοκόρυφες συναρτήσεις ζημίας (Zidek (1973)), δικαιολογείται μόνον αν καταφύγουμε στην ασυμπτωτική στατιστική θεωρία.

Στην θεωρία ελέγχου υποθέσεων βασικότατο ρόλο παίζει το σημαντικό θεώρημα, γνωστό ως Λήμμα των Neyman-Pearson, το οποίο ταυτοποιεί την κρίσιμη περιοχή που είναι ισχυρότατη για τον έλεγχο μιας απλής υπόθεσης έναντι μιας απλής εναλλακτικής υπόθεσης. Στην πράξη όμως, ακόμα και στην απλούστατη περίπτωση μιας μονοπαραμετρικής οικογένειας κατανομών με πραγματική παράμετρο, υπάρχει ένα συνεχές εναλλακτικών υποθέσεων και η ισχυρότατη κρίσιμη περιοχή διαφέρει για κάθε εναλλακτική υπόθεση, εκτός αν η οικογένεια έχει μονότονο λόγο πιθανοφανειών (βλ. Pfanzagl (1960), σελ. 170 και Pfanzagl (1962), σελ. 110). Όμως, οι συναρτήσεις ισχύος μιας ισχυρότατης κρίσιμης περιοχής δεν είναι, γενικά, κατ' ανάγκην μονότονες.

Μόνον στην ειδική περίπτωση μιας μονοπαραμετρικής εκθετικής οικογένειας κατανομών μπορεί να αποδειχθεί η ύπαρξη μιας μονόπλευρης (one-sided) παντού ισχυρότατης κρίσιμης περιοχής για κάθε μέγεθος δείγματος (βλ. Pfanzagl (1968)). Για οικογένειες κατανομών με παραμέτρους διαταραχής (nuisance parameters) υπάρχει μια στοιχειώδης θεωρία που χαρακτηρίζεται από τις έννοιες της επάρκειας, της πληρότητας και των ελάχιστα ευνοϊκών κατανομών (least favorable distributions). Η εφαρμοσιμότητα, όμως, αυτής της θεωρίας είναι μάλλον περιστασιακή, ακόμα και στην περισσότερα υποσχόμενη περίπτωση της εκθετικής οικογένειας κατανομών. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι η θεωρία αυτή δεν είναι εφαρμόσιμη σε καμπυλωμένες (curved) εκθετικές οικογένειες κατανομών, λόγω έλλειψης πληρότητας. Αλλά, ακόμα και όταν εφαρμόζεται, η θεωρία μας αφήνει συχνά χωρίς τελειωτική απάντηση, ενώ δεν χρειάζεται να αναφέρουμε το γνωστό πρόβλημα Behrens-Fisher, όπου η μη ασυμπτωτική θεωρία ελέγχου υποθέσεων υφίσταται μιαν από τις δραματικότερες αποτυχίες της.

Όλες οι αδυναμίες της ακριβούς θεωρίας ελέγχου υποθέσεων εμφανίζονται και στις μη ασυμπτωτικές διαδικασίες κατασκευής συνόλων εμπιστοσύνης, λόγω της δυαδικότητας μεταξύ αυτών των δύο μεθόδων στατιστικής συμπερασματολογίας. Επιπλέον, οι διαδικασίες κατασκευής συνόλων εμπιστοσύνης παρουσιάζουν και άλλα προβλήματα σχετιζόμενα με το γεωμετρικό σχήμα των παραγομένων συνόλων εμπιστοσύνης. Είναι προφανές ότι το σχήμα ενός συνόλου εμπιστοσύνης εξαρτάται από το σχήμα της κρίσιμης περιοχής του αντιστοίχου στατιστικού ελέγχου. Ωστόσο, ενώ η ποιότητα ενός ελέγχου είναι ανεξάρτητη από το σχήμα της κρίσιμης περιοχής του, το σχήμα ενός συνόλου εμπιστοσύνης είναι αποφασιστικής σημασίας για την ερμηνεία του. Ποιά θα μπορούσε να είναι, π.χ., η χρησιμότητα ενός συνόλου εμπιστοσύνης το οποίο είναι η ένωση ξένων μεταξύ τους διαστημάτων, ή ολόκληρος ο δειγματικός χώρος, ή το κενό σύνολο; Εκτός αν η οικογένεια κατανομών έχει μονότονο λόγο πιθανοφανειών, δεν υπάρχει μια γενική μη ασυμπτωτική θεωρία κατασκευής καλών συνόλων εμπιστοσύνης. Και ενδέχεται να μην είναι τετριμμένο το ερώτημα αν είναι πάντοτε διαστήματα τα σύνολα εμπιστοσύνης που προκύπτουν από μια συγκεκριμένη διαδικασία.

Συνεπώς, μόνο στην ειδική περίπτωση της εκθετικής οικογένειας κατανομών είναι εφαρμόσιμη η στατιστική συμπερασματολογία που βασίζεται στη μη ασυμπτωτική θεωρία. Το απλούστερο οικονομετρικό υπόδειγμα, το γνωστό και από την στατιστική βιβλιογραφία Κλασσικό Γραμμικό Υπόδειγμα (Κ.Γ.Υ.), είναι γραμμική συνάρτηση των προς εκτίμηση παραμέτρων και υποτίθεται ότι έχει μη στοχαστικούς παλινδρομητές (regressors) και διαταρακτικούς όρους που είναι ανεξάρτητες και ισόνομες κανονικές μεταβλητές (normal variables). Οι υποθέσεις του Κ.Γ.Υ. μεταφέρουν τον ερευνητή σε έναν κόσμο απλότητας και ευκολίας, όπου είναι δυνατόν να ανακαλυφθούν οι ακριβείς ιδιότητες των κατανομών (exact distributional properties) των εκτιμητών και των στατιστικών ελέγχου και όπου υπάρχουν αμερόληπτοι εκτιμητές ελάχιστης διακύμανσης, ομοιόμορφα ισχυρότατοι έλεγχοι και σύνολα εμπιστοσύνης που είναι συμμετρικά διαστήματα. Το μόνο μειονέκτημα του Κ.Γ.Υ. είναι ότι δεν είναι καθόλου ρεαλιστικό.

Η κατανόηση αυτού του γεγονότος αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο των σημαντικότερων εξελίξεων στο χώρο της οικονομετρίας. Πολλές από τις υποθέσεις του Κ.Γ.Υ. ήρθησαν κάτω από την πίεση της ανάγκης για περισσότερο ρεαλιστικές οικονομικές εφαρμογές. Μια αποφασιστικής σημασίας καμπή στην εξέλιξη της οικονομετρίας σημειώθηκε με την εισαγωγή από τον Haavelmo (1943) του Συστήματος Αλληλεξαρτημένων Εξισώσεων (Σ.Α.Ε) ως στατιστικού υποδείγματος για το οποίο δεν ισχύουν οι υποθέσεις του Κ.Γ.Υ. ούτε η στατιστική συμπερασματολογία που βασίζεται σε αυτές. Θα μπορούσαμε μάλιστα να υποστηρίξουμε την άποψη ότι η χρησιμοποίηση του Σ.Α.Ε. αποτελεί την ειδοποιό διαφορά που χαρακτηρίζει την οικονομετρία ως επιστημονικό κλάδο διακεκριμένο από το κύριο ρεύμα της μαθηματικής στατιστικής. Εκτός από την εκτεταμένη χρήση του Σ.Α.Ε. για την ανάλυση οικονομικών φαινομένων υπήρξαν και άλλες σημαντικές εξελίξεις στον χώρο της οικονομετρίας. Μεταξύ αυτών περιλαμβάνονται η εισαγωγή και ανάπτυξη μη γραμμικών υποδειγμάτων (για την εμπειρική διερεύνηση της καταναλωτικής ζήτησης και της θεωρίας παραγωγής) και η εισαγωγή δυναμικών υποδειγμάτων με περίπλοκη διαρθρωτική και δυναμική εξειδίκευση. Η τελευταία αυτή εξέλιξη οφείλεται κυρίως στην επιτυχία που γνώρισαν τα υποδείγματα

χρονολογικών σειρών τύπου Box-Jenkins (1976).

Η αύξηση της ρεαλιστικότητας των οικονομετρικών υποδειγμάτων δεν έγινε χωρίς κόστος, εφόσον ήταν άρρηκτα συνδεδεμένη με την άρση των υποθέσεων του Κ.Γ.Υ. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να εκμηδενιστούν οι δυνατότητες υπολογισμού των ακριβών (exact) κατανομών των εκτιμητών και των στατιστικών ελέγχου. Ο ερευνητής βρέθηκε ξαφνικά μακριά από τον παράδεισο των μη ασυμπτωτικών (exact) ιδιοτήτων του Κ.Γ.Υ. σε έναν κόσμο γενικότερων υποδειγμάτων, όπου η ακριβής στατιστική θεωρία δεν έχει γενική εφαρμογή. Αυτή η κάθε άλλο παρά ικανοποιητική κατάσταση δεν πρέπει να αποδοθεί σε αδυναμίες των θεωρητικών του κλάδου. "Αν δεν υπάρχει αρκετή δομή στις υποθέσεις, καμιά δομή δεν μπορεί να εμφανιστεί στα αποτελέσματα" (Pfanzagl (1980), σελ. 4: "If there is not enough structure in the assumptions, no structure can appear in the results").

1.4 ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ

Η εφαρμοσμένη έρευνα στηρίζεται πάντοτε σε δείγματα και όχι σε μεμονομένες παρατηρήσεις. Συνήθως υποθέτουμε ότι αντιμετωπίζουμε την απλούστερη αλλά και σημαντικότερη περίπτωση των ανεξάρτητων και ισόνομων παρατηρήσεων (τυχαίο δείγμα). Τότε η πιθανοφάνεια (μέτρο πιθανότητας) του δείγματος είναι το γινόμενο ταυτόσημων παραγόντων, των συναρτήσεων πυκνότητας των επιμέρους παρατηρήσεων. Το γεγονός αυτό επιβάλλει στο δειγματικό μέτρο πιθανότητας ορισμένες κανονικότητες (regularities), οι οποίες διεισδύουν όλο και βαθύτερα στην δομή του προβλήματος καθώς το μέγεθος του δείγματος μεγαλώνει. Οποιαδήποτε και αν είναι η αρχική οικογένεια κατανομών των παρατηρήσεων του δείγατος, καθώς το δείγμα μεγαλώνει, η συμπεριφορά της δειγματικής πιθανοφάνειας προσεγγίζει πάντοτε, όλο και περισσότερο, την συμπεριφορά της οικογένειας των κανονικών κατανομών (βλ. LeCam (1956), Pfanzagl (1972b)).

Η ανωτέρω διαπίστωση μας οδηγεί εντελώς φυσιολογικά να υιοθετήσουμε το απλούστερο είδος ασυμπτωτικής θεωρίας που βασίζεται στις προσεγγίσεις με την κανονική κατανομή (normal approximations). Αυτές οι προσεγγίσεις φέρνουν πίσω μερικές από τις ιδιότητες του κόσμου του Κ.Γ.Υ. προσφέροντάς μας εκτιμητές

μεγίστως συγκεντρωμένους γύρω από την αληθινή τιμή της παραμέτρου (maximally concentrated estimators), ομοιόμορφα ισχυρότατους ελέγχους και σύνολα εμπιστοσύνης που είναι διαστήματα. Όμως, η προσέγγιση με την κανονική κατανομή είναι υπεραπλουστευτική και δίνει αποτελέσματα ανεπαρκούς ακρίβειας, εκτός αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι εξαιρετικά μεγάλο. Επιπλέον, εφόσον οι προσεγγίσεις με την κανονική κατανομή προσεγγίζουν την πραγματική συμπεριφορά των στατιστικών διαδικασιών μόνον μέχρις ενός βαθμού ακρίβειας, δεν μας επιτρέπουν να κάνουμε διάκριση ανάμεσα σε διαδικασίες που είναι ισοδύναμες σε αυτό το επίπεδο ακρίβειας. Συνεπώς, είναι δυνατόν μια ασυμπτωτικά ταυτόσημη συμπεριφορά να αποκρύπτει σημαντικές διαφορές της πραγματικής συμπεριφοράς δύο στατιστικών διαδικασιών. Τα προβλήματα αυτά, που προκύπτουν από την χρήση ασυμπτωτικών ιδιοτήτων σε υποδείγματα γενικότερα από το Κ.Γ.Υ., παρουσιάζονται σε πολλούς κλάδους της στατιστικής επιστήμης. Πλήττουν όμως ακόμα περισσότερο την οικονομετρία για δύο κυρίως λόγους.

Πρώτος λόγος είναι το γεγονός ότι ο οικονομέτρης δεν έχει καμιά δυνατότητα να ελέγξει την ποσότητα και την ποιότητα των οικονομικών δεδομένων που χρησιμοποιεί. Και σε περιπτώσεις κατά τις οποίες μόνον ασυμπτωτικά αποτελέσματα υπάρχουν, αναγκάζεται να τα χρησιμοποιήσει ακόμα και αν η ποιότητα και η ποσότητα των δεδομένων καθιστούν σαφές ότι για την συγκεκριμένη εφαρμογή οι ασυμπτωτικές μέθοδοι είναι ανεπαρκείς.

Δεύτερον, η διαδεδομένη χρήση οικονομετρικών υποδειγμάτων που η εξειδίκευσή τους εξαρτάται από τα δεδομένα (data instigated models) προκαλεί ακόμα σοβαρότερα προβλήματα (βλ. Leamer (1978), σελ. 283-306). Η ακολουθιακή διενέργεια στατιστικών ελέγχων και τροποποιήσεων του υποδείγματος, που στηρίζονται στις πληροφορίες που αντλούνται από τα δεδομένα, είναι ο συνήθης τρόπος δημιουργίας τέτοιων υποδειγμάτων. Το υπόδειγμα που τελικά προκύπτει από μια τέτοια διαδικασία θεωρείται ως η νέα ελεγχόμενη υπόθεση και χρησιμοποιείται σαν να ήταν σωστό για την διενέργεια προβλέψεων, προσομοιώσεων πολιτικής κ.τ.λ. Η διαδικασία αυτή έχει το μειονέκτημα ότι δύο ερευνητές, χρησιμοποιώντας την ίδια μεθοδολογία, αλλά εκτιμητές και στατιστικά ελέγχου που μόνον

ασυμπτωτικά είναι ισοδύναμα, ενδέχεται να οδηγηθούν σε εντελώς διαφορετικά τελικά υποδείγματα και τα συμπεράσματα από αυτά τα υποδείγματα δεν θα είναι ούτε ασυμπτωτικά ισοδύναμα. Δηλαδή, η ακολουθιακή χρησιμοποίηση διαδικασιών που είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμες ενδέχεται να οδηγήσει σε αποτελέσματα που ούτε ασυμπτωτικά δεν είναι ισοδύναμα. Επομένως, η συνήθης μεθοδολογία κατασκευής οικονομετρικών υποδειγμάτων φαίνεται πως είναι μια ad hoc διαδικασία, της οποίας η εγκυρότητα εξαρτάται από την καλή κρίση του ερευνητή.

Λόγω της ποσοτικής και ποιοτικής ανεπάρκειας των οικονομικών δεδομένων και της ανακρίβειας των ασυμπτωτικών κανονικών προσεγγίσεων (normal approximations) σε μικρά δείγματα, γίνεται ιδιαίτερα αισθητή στον χώρο της οικονομετρίας η ανάγκη για περισσότερη πληροφόρηση σχετικά με τις ιδιότητες μικρού δείγματος των εκτιμητών και των στατιστικών ελέγχου. Σκοπός της διατριβής αυτής είναι να καλύψει ένα μέρος αυτής της ανάγκης αντλώντας πληροφορία σε μορφή εύκολα ερμηνεύσιμη και πρακτικά εφαρμόσιμη.

1.5 ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΟΛΟΓΙΑ ΣΕ ΜΙΚΡΑ ΔΕΙΓΜΑΤΑ

Στην αναζήτηση περισσότερης γνώσης σχετικά με τις ιδιότητες σε μικρά δείγματα των εκτιμητών και των στατιστικών ελέγχου έχει αφιερωθεί ένα σημαντικό τμήμα της θεωρητικής οικονομετρικής έρευνας. Για την ανάλυση αυτού του προβλήματος έχουν ακολουθηθεί τρείς μεθοδολογικά διαφορετικές προσεγγίσεις: η Ακριβής Θεωρία Πεπερασμένου Δείγματος (Exact Finite Sample Theory), οι Μέθοδοι Monte Carlo και η Εκλεπτυσμένη Ασυμπτωτική Θεωρία (Refined Asymptotic Theory) που χρησιμοποιεί ασυμπτωτικές προσεγγίσεις ανώτερης τάξης.

Μια ανασκόπηση των οικονομετρικών εργασιών που διερευνούν τις ακριβείς ιδιότητες εκτιμητών και στατιστικών ελέγχου σε πεπερασμένα δείγματα δίνεται από τον Basmann (1974). Περισσότερο πρόσφατη είναι η ανασκόπηση από τον P.C.B. Phillips (1983) των ακριβών (exact) οικονομετρικών αποτελεσμάτων μικρού δείγματος στα πλαίσια του Σ.Α.Ε. Οι ακριβείς ιδιότητες μικρού δείγματος των εκτιμητών και στατιστικών ελέγχου στα πλαίσια της Πολυμεταβλητής Στατιστικής Ανάλυσης εξετάζονται από τον Muirhead (1982). Από τις οικονομετρικές εργασίες που είναι αντιπροσωπευτικές της ακριβούς

θεωρίας μικρού δείγματος ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι μελέτες των Richardson και Rohr (1971), Sawa (1978) και P.C.B. Phillips (1980). Οι Richardson και Rohr παρουσίασαν αποτελέσματα μικρού δείγματος για ελέγχους στατιστικής σημαντικότητας. Επειδή, όμως, χρησιμοποίησαν έναν πολύ κακής ποιότητας εκτιμητή της διακύμανσης των καταλοίπων, ο t έλεγχος που παρήγαγαν έχει περιορισμένες δυνατότητες πρακτικής εφαρμογής. Ο Sawa υπολόγισε τις ακριβείς ροπές του εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων σε ένα υπόδειγμα με αυτοσυσχέτιση πρώτου βαθμού, ενώ ο Phillips παρουσίασε την ακριβή συνάρτηση πυκνότητας του εκτιμητή βοηθητικών μεταβλητών (instrumental variables estimator) των παραμέτρων μιας διαρθρωτικής εξίσωσης χωρίς δυναμική εξειδίκευση. Παρά το γεγονός ότι η εργασία που έγινε σε αυτό το πεδίο είναι εντυπωσιακή, οι δυνατότητες πρακτικής εφαρμογής των αποτελεσμάτων της φαίνονται πολύ περιορισμένες. Οι συναρτήσεις πυκνότητας των εκτιμητών και των στατιστικών ελέγχου έχουν συνήθως πολύπλοκη μαθηματική διάρθρωση, με αποτέλεσμα να είναι δύσκολη η εξαγωγή απλών ιδιοτήτων μικρού δείγματος ή οι συγκρίσεις μεταξύ διαφορετικών εκτιμητών και στατιστικών ελέγχου. Για αυτόν τον λόγο οι ερευνητές καταφεύγουν στον αριθμητικό υπολογισμό των συναρτήσεων πυκνότητας ή κατανομής καθορίζοντας συγκεκριμένες τιμές για τις παραμέτρους του πληθυσμού. Το μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι τα αποτελέσματά της εξαρτώνται από τις συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων και δεν έχουν γενικότητα.

Τα πειράματα προσομοίωσης (simulation experiments), γνωστά ως Μέθοδοι Monte Carlo, είναι η περισσότερο δημοφιλής και διαδεδομένη μεθοδολογία για την διερεύνηση των ιδιοτήτων μικρού δείγματος των εκτιμητών και των στατιστικών ελέγχου. Η ανασκόπηση των εργασιών αυτού του ερευνητικού πεδίου που δημοδίευσε ο Sowey (1973) περιέχει μια βιβλιογραφία από περίπου 150 οικονομετρικά άρθρα, βιβλία και διδακτορικές διατριβές. Και ο αριθμός αυτός αυξάνεται σημαντικά αν συνυπολογίσουμε τις εργασίες που δημοσιεύθησαν μετά την επισκόπηση του Sowey. Το γεγονός ότι για πολλά εφαρμοσμένα προβλήματα με περίπλοκα εξειδικευμένες εξισώσεις (π.χ. πολύπλοκα δυναμικά υποδείγματα) οι Μέθοδοι Monte Carlo αποτελούν την μόνη εύλογα απλή μέθοδο διερεύνησης των ιδιοτήτων μικρού δείγματος των

εκτιμητών και των στατιστικών ελέγχου, πρέπει να θεωρηθεί επαρκής εξήγηση της μεγάλης δημοτικότητάς τους μεταξύ των οικονομετρών. Το κύριο μειονέκτημά τους είναι πως τα αποτελέσματά τους στερούνται γενικότητας διότι εξαρτώνται από την συγκεκριμένη εκλογή των τιμών των παραμέτρων. Προσπάθειες για να μειωθεί αυτή η έλλειψη γενικότητας στηρίζονται στην αξιοποίηση τεχνικών σχεδιασμού πειραμάτων (experimental design) και προσαρμογής των καταλλήλων επιφανειών απόκρισης (response surfaces) (βλ. Mison and Hendry (1980)). Όμως, οι μέθοδοι αυτές γίνονται υπερβολικά περίπλοκες αν το εξεταζόμενο υπόδειγμα έχει παραμέτρους κάποιου ρεαλιστικού πλήθους.

Η διερεύνηση της συμπεριφοράς σε μικρά δείγματα των ελέγχων στατιστικής σημαντικότητας μπορεί να βασιστεί σε μιαν εναλλακτική μεθοδολογία, γνωστή ως προσέγγιση του Barnard (Barnard's approximation) (βλ. Sargan (1976), σελ. 428). Χρησιμοποιώντας συνεπείς εκτιμήσεις των παραμέτρων σαν να ήσαν οι αληθείς τιμές τους, η προσέγγιση του Barnard συνίσταται στην προσομοίωση του υποδείγματος με σκοπό την εκτίμηση της περιοχής απόρριψης του ελέγχου. Η κρίσιμη περιοχή επιλέγεται έτσι ώστε το ποσοστό των προσομοιωμένων τιμών του στατιστικού του ελέγχου που ανήκουν σε αυτήν την περιοχή να ισούται με το επιθυμητό ονομαστικό μέγεθος (nominal size) του ελέγχου. Αν, κάτω από την μηδενική υπόθεση, η ασυμπτωτική κατανομή πρώτης τάξης του στατιστικού είναι ανεξάρτητη από τις παραμέτρους του υποδείγματος, ένας επαρκώς μεγάλος αριθμός προσομοιώσεων "αποδεικνύει" ότι το μέγεθος (size) του διορθωμένου ελέγχου θα διαφέρει από το ονομαστικό μέγεθός του κατά ένα λάθος τάξης $O(T^{-3/2})$, όπου T είναι το μέγεθος του δείγματος. Το μεγάλο υπολογιστικό κόστος της μεθόδου δεν ελαττώνει τις δυνατότητες πρακτικής εφαρμογής της, υπό την προϋπόθεση ότι η στατιστική διαδικασία μπορεί να προγραμματιστεί σε μια μορφή αρκετά γενική που να περιλαμβάνει υποδείγματα με πρακτικό ενδιαφέρον.

Η τρίτη μεθοδολογία για την διερεύνηση της συμπεριφοράς των εκτιμητών και των στατιστικών ελέγχου σε μικρά δείγματα είναι η Εκλεπτυσμένη Ασυμπτωτική Θεωρία (Ε.Α.Θ.). Η μέθοδος, αντί για ασυμπτωτικές προσεγγίσεις πρώτης τάξης με την κανονική κατανομή (normal approximations), χρησιμοποιεί ασυμπτωτικά αναπτύγματα

(asymptotic expansions) με σφάλμα μικρότερης τάξης μεγέθους από το σφάλμα των ασυμπτωτικών προσεγγίσεων πρώτης τάξης. Παρά τον ασυμπτωτικό τους χαρακτήρα, τα αποτελέσματα της μεθόδου φαίνεται ότι μπορούν να στηρίξουν μια γενική στατιστική θεωρία, ικανή να μας πληροφορήσει για τις ακριβείς ιδιότητες στατιστικών διαδικασιών με ακρίβεια μεγαλύτερη από εκείνην των πρώτης τάξης ασυμπτωτικών προσεγγίσεων.

1.6 ΕΚΛΕΠΤΥΣΜΕΝΗ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ (Ε.Α.Θ.)

Μπορούμε να διακρίνουμε δύο μεθοδολογικά διαφορετικές σχολές Ε.Α.Θ. στην οικονομετρία: την σχολή του Sargan και την σχολή του Nagar.

Οι εργασίες των Sargan και Mikhail (1971), Sargan (1975), (1976), (1980), Sargan και Tse (1979), Tse (1982), P.C.B. Phillips (1977a), (1977b), (1978), (1980a) είναι αντιπροσωπευτικές της σχολής του Sargan, της οποίας η μεθοδολογία βασίζεται στην εργασία του Chambers (1967). Ένας εκτιμητής ή στατιστικό ελέγχου γράφεται ως συνάρτηση τυχαίων μεταβλητών των οποίων οι ημιαναλοίωτες (cumulants) υπολογίζονται εύκολα. Από αυτές τις ημιαναλοίωτες και τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης προκύπτουν οι συντελεστές μιας προσέγγισης Edgeworth ή τύπου Edgeworth (Edgeworth or Edgeworth-type approximation).

Μια Edgeworth προσέγγιση είναι το ανάπτυγμα της συνάρτησης κατανομής ενός εκτιμητή ή στατιστικού ελέγχου σε όρους της κανονικής κατανομής, ενώ μια προσέγγιση τύπου Edgeworth παράγεται σε όρους οποιασδήποτε άλλης κατανομής. Σημειώνουμε ότι, οι συντελεστές της κανονικής πυκνότητας σε μιαν Edgeworth προσέγγιση είναι πολυώνυμα τύπου Hermite ή πολυώνυμα τύπου Chebyshev-Cramer, δηλαδή ένας μετασχηματισμός τους. Αξίζει, επιπλέον, να παρατηρήσουμε ότι, συνήθως, τα αναπτύγματα τύπου Edgeworth αναφέρονται στην κατανομή χ^2 πολλαπλασιασμένη με πολυώνυμα τύπου Laguerre. Τα αναπτύγματα αυτού του είδους είναι δυνατόν να παραχθούν μόνον κάτω από πολύ ειδικές συνθήκες (βλ. Chandra and Ghosh (1979)). Στα τύπου Edgeworth αναπτύγματα των επομένων κεφαλαίων αυτής της διατριβής τα πολυώνυμα που πολλαπλασιάζουν τις χ^2 πυκνότητες είναι γενικότερης μορφής, δηλαδή δεν είναι τύπου Laguerre.

Παρά το γεγονός ότι οι συνθήκες που έθεσε ο Chambers δεν

είναι ικανές να εξασφαλίσουν την ύπαρξη ενός έγκυρου (valid) ασυμπτωτικού αναπτύγματος (βλ. Bhattacharya and Ghosh (1978), σελ. 449) οι προσεγγίσεις του Sargan και του Phillips φαίνεται πως είναι έγκυρες. Γενικά η σχολή του Sargan ακολουθεί υψηλά πρότυπα θεωρητικής αυστηρότητας (rigour), ανάλογα με αυτά της μαθηματικής στατιστικής. Η εγκυρότητα των μεθόδων της μπορεί να αποδειχθεί, αν και οι αποδείξεις είναι υπερβολικά πολύπλοκες και δύσκολες. Ωστόσο, οι υπολογιστικές ανάγκες (computational requirements) της μεθόδου είναι σημαντικότερες από τις αναλυτικές της δυσκολίες, με αποτέλεσμα να μην έχουν γίνει προσπάθειες να μελετηθεί η σχετική απόδοση ασυμπτωτικά ισοδύναμων εκτιμητών ή στατιστικών ελέγχου. Για να υπολογιστούν, π.χ., συμμετρικές περιοχές αποδοχής, με ένα σφάλμα τάξης $O(T^{-3/2})$, για ένα μόνον t στατιστικό ενός σχετικά μικρού στατικού υποδείγματος με δέκα ενδογενείς και είκοσι εξωγενείς μεταβλητές, πρέπει να υπολογιστούν αναλυτικά περισσότερες από δυόμισι εκατομμύρια τρίτης τάξης παράγωγοι μιας συνάρτησης που ορίζεται σε όρους λογαρίθμων, τετραγωνικών μητρών, οριζουσών και ιχνών μητρών. Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι οι δυνατότητες πρακτικής εφαρμογής της μεθόδου είναι πολύ περιορισμένες και δεν αναμένεται να βελτιωθούν στο μέλλον λόγω των μεγάλων απαιτήσεών της σε υπολογιστικό χρόνο και χωρητικότητα μνήμης ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Αντιπροσωπευτικές της σχολής του Nagar είναι οι μελέτες των Nagar (1959), (1961), Nagar και Gupta (1968), (1970), Kadane (1971), Srivastava (1972), Nagar και Ullah (1973), Lee και Trivedi (1979), Rothenberg (1981), (1984a), (1984b), (1988), Fujikoshi et.al. (1982), Μαγδαληνού (1983), (1985), (1990) κ.ά. Η μεθοδολογία της σχολής του Nagar είναι η ίδια με την μέθοδο των στατιστικών διαφορικών (statistical differentials) (βλ. Box (1949), Lomnicki and Zarembka (1957), Mitrofanova (1967)) στο κύριο ρεύμα της μαθηματικής στατιστικής, η οποία είναι μια γενίκευση της μεθόδου των διαφορίσιμων στατιστικών συναρτήσεων (differentiable statistical functions) του von Mises (Serfling (1980), σελ. 210-242). Ένας εκτιμητής ή στατιστικό ελέγχου αναπτύσσεται σε μιαν ασυμπτωτική σειρά και οι ροπές, ή η συνάρτηση κατανομής, των πρώτων λίγων όρων της σειράς θεωρούνται

προσεγγίσεις των ροπών, ή της συνάρτηση κατανομής, του αρχικού εκτιμητή ή του στατιστικού του ελέγχου. Γενικά η μέθοδος δεν είναι έγκυρη και αυτό το θέμα έχει συζητηθεί εκτεταμένα στην οικονομετρική βιβλιογραφία. Έστω, π.χ., e το δειγματοληπτικό σφάλμα των εκτιμητών k-τάξης των παραμέτρων μιας διαρθρωτικής εξίσωσης ενός οικονομετρικού συστήματος. Ο Nagar (1959) βρήκε ένα ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της μορφής

$$e = e_o + O(T^{-3/2}) \qquad (1.1)$$

και ισχυρίστηκε ότι οι δύο πρώτες ροπές του e_o μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως προσεγγίσεις των δύο πρώτων ροπών του e, που είναι, αντίστοιχα, το μεροληπτικό σφάλμα (bias) και η μήτρα μέσου σφάλματος τετραγώνου (mean square error) των εκτιμητών k-τάξης.

Ο Dhrymes ((1970), σελ. 204-208) και ο Srinivasan (1970) αντέκρουσαν τον ισχυρισμό του Nagar θεωρώντας ότι η σχέση (1.1) δεν μπορεί να εγγυηθεί την εγκυρότητά του. Και ενίσχυσαν την θέση τους επισημαίνοντας ότι οι ροπές του e_o είναι πάντοτε πεπερασμένες, παρά το γεγονός ότι το e ενδέχεται να μην έχει πεπερασμένες ροπές. Το να δεχτούμε, σε μια τέτοια περίπτωση, τον ισχυρισμό του Nagar είναι σαν να προσπαθούμε να προσεγγίσουμε μιαν άπειρη ποσότητα με μιαν πεπερασμένη και συνεπώς κρίνεται παράλογο.

Μια διαφορετική ερμηνεία της σχέσης (1.1) προτάθηκε από τον Basmann (1961). Ο Basmann θεώρησε ότι αυτό που επιδιώκουμε, χρησιμοποιώντας την μέθοδο του Nagar, δεν είναι να βρούμε προσεγγίσεις των ροπών του e, αλλά να βρούμε κατάλληλα μέτρα θέσης, διασποράς κ.τ.λ. των εκτιμητών που μας ενδιαφέρουν. Και ισχυρίστηκε ότι, ακόμα και αν κάποιος εκτιμητής δεν έχει πεπερασμένες ροπές, είναι δυνατή η προσέγγιση της συνάρτησης κατανομής του με την συνάρτηση κατανομής ενός άλλου εκτιμητή που έχει πεπερασμένες ροπές. Αν μπορέσουμε να βρούμε μιαν τέτοιαν κατανομή, είναι λογικό να χρησιμοποιήσουμε τον μέσο της, την διακύμανσή της κ.τ.λ. ως μέτρα θέσης, διασποράς κ.τ.λ. του αρχικού εκτιμητή. Σύμφωνα, λοιπόν, με τον Basmann οι ροπές του Nagar ερμηνεύονται σωστά αν θεωρηθούν (ασυμπτωτικές προσεγγίσεις στις) ακριβείς ροπές ενός στατιστικού, του οποίου η κατανομή προσεγγίζει την κατανομή του εκτιμητή που μελετούμε. Ο Amemiya ((1966), σελ.

291), ο Ramage ((1971), σελ. 41) και οι Brown et.al. ((1974), σελ 668) είναι μερικοί από τους οικονομέτρες που υιοθέτησαν την ερμηνεία του Basmann.

Υπήρξε, ωστόσο, και η άποψη (βλ. Srinivasan (1970), σελ. 540) ότι η ερμηνεία του Basmann είναι χωρίς νόημα, εκτός αν αποδειχθεί πως η κατανομή του e_o προσεγγίζει την κατανομή του e καλύτερα από ό,τι η οριακή κατανομή (limiting distribution) του e όταν το $T\to\infty$, δηλαδή η ασυμπτωτική προσέγγιση πρώτης τάξης. Σε αντίθετη περίπτωση, οι πρώτης τάξης ασυμπτωτικές ροπές του e είναι εξίσου καλές με τις ροπές του e_o ως μέτρα θέσης, διασποράς κ.τ.λ. του εκτιμητή και η μέθοδος του Nagar δεν μας προσφέρει τίποτα. Μπορεί, μάλιστα, να δειχθεί (Srinivasan (1970)) ότι η σχέση (1.1) δεν επαρκεί για να εγγυηθεί ότι η κατανομή του e_o αποτελεί καλύτερη προσέγγιση.

Μέθοδοι παρόμοιες με αυτήν του Nagar έχουν αποδειχθεί έγκυρες στην βιβλιογραφία του κυρίου ρεύματος της μαθηματικής στατιστικής από τους Chibisov (1972b), (1973), Bhattacharya και Ghosh (1978), Chandra και Ghosh (1979) κ.ά. (βλ. Pfanzagl (1980)). Όμως, τα αποτελέσματα αυτών των ερευνών δεν είναι άμεσα εφαρμόσιμα στην οικονομετρία διότι αναφέρονται σε συναρτήσεις του τυποποιημένου μέσου (standardized mean) ανεξάρτητων ή ασθενώς εξαρτημένων (weakly dependent) τυχαίων διανυσμάτων. Επιπλέον, στην οικονομετρία παρουσιάζονται πρόσθετα προβλήματα για δύο κυρίως λόγους.

Πρώτον, διότι πολλές ασυμπτωτικές μέθοδοι χρησιμοποιούν προσεγγίσεις που είναι ασυμπτωτικές ως προς παραμέτρους διαφορετικές από το μέγεθος του δείγματος, όπως, π.χ., οι ασυμπτωτικές μέθοδοι "μικρού σ" ("small σ" asymptotics) ή οι ασυμπτωτικές μέθοδοι "μεγάλης παραμέτρου συγκέντρωσης" ("large concentration" asymptotics), στις οποίες θα αναφερθούμε στο επόμενο τμήμα.

Δεύτερον, στα οικονομετρικά υποδείγματα υπάρχουν εξωγενείς (μη στοχαστικές) μεταβλητές και, ενδεχομένως, εξαρτημένες (dependent) μεταβλητές, γεγονός που καθιστά την υπόθεση των ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών ακατάλληλη και τα αποτελέσματα των Chibisov, Bhattacharya και Ghosh, Chandra και

Ghosh κ.ά. ανεφάρμοστα.

Τα προβλήματα αυτά λύθηκαν (σε μεγάλο βαθμό) από τον Μαγδαληνό ((1991), υπό δημοσίευση), ο οποίος ανέπτυξε μιαν απλή μέθοδο για την αξιολόγηση της εγκυρότητας πολλών από τις προσεγγίσεις της Ε.Α.Θ. που χρησιμοποιούνται στην οικονομετρία. Τα αποτελέσματα του άρθρου του, που θα τα παρουσιάσουμε περιληπτικά στο Παράρτημα Α, φαίνεται ότι επιβεβαιώνουν σε πολλές περιπτώσεις την εγκυρότητα των μεθόδων της σχολής του Nagar, δηλαδή των προσεγγίσεων Edgeworth και τύπου Edgeworth, των συγκρίσεων αποτελεσματικότητας με χρήση ροπών τύπου Nagar (Nagar-type moments) και των ασυμπτωτικών μεθόδων "μικρού σ" και "μεγάλης παραμέτρου συγκέντρωσης".

Μια συγκριτική αξιολόγηση των δύο σχολών Ε.Α.Θ. διευκολύνεται πολύ αν ληφθεί υπόψη το ιδανικό της Οικονομετρικής Εταιρείας (Econometric Society), δηλαδή η ανάπτυξη "εποικοδομητικού και αυστηρού τρόπου σκέψης όμοιου με αυτόν που κυριαρχεί στις φυσικές επιστήμες". Η σχολή του Sargan πέτυχε αυστηρότητα (rigour) ανάλογη με αυτήν της μαθηματικής στατιστικής, αλλά κανείς δεν μπορεί να ισχυριστεί ότι ικανοποίησε το ιδανικό της εποικοδομητικότητας (constructiveness). Αντίθετα, η μεθοδολογία της σχολής του Nagar κρίνεται αρκετά εποικοδομητική, αν ληφθεί υπόψη η πολυπλοκότητα των προβλημάτων με τα οποία ασχολείται, και τα αποτελέσματά της είναι απλά και εύκολα, τόσο στην ερμηνεία, όσο και στην εφαρμογή τους. Παραδείγματα αποτελούν οι εργασίες των Nagar (1959) και Kadane (1971) που παρουσιάζουν συγκρίσεις ασυμπτωτικά ισοδύναμων εκτιμητών και των Rothenberg (1981), (1984b), (1988) και Μαγδαληνού (1985), (1990) που παρουσιάζουν συγκρίσεις ασυμπτωτικά ισοδύναμων ελέγχων και απλούς αναλυτικούς τύπους διόρθωσης του μεγέθους ελέγχων (size corrections). Εφόσον οι μέθοδοι της σχολής του Nagar δεν είναι, γενικά, έγκυρες, η εγκυρότητά τους θα πρέπει να αποδεικνύεται σε κάθε περίπτωση. Ωστόσο, λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματά της, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι η μεθοδολογία της σχολής του Nagar αποτελεί έναν πολύ ικανοποιητικό συνδυασμό απλότητας και αυστηρότητας.

Οι μέθοδοι της Ε.Α.Θ. αυτής της διατριβής κατατάσσονται μεθοδολογικά στην σχολή του Nagar. Τα αποτελέσματά της είναι απλά,

ερμηνεύονται εύκολα και η εμπειρική εφαρμογή τους έχει σχετικά μικρές υπολογιστικές απαιτήσεις (computational requirements). Επιπλέον, οι μέθοδοι που χρησιμοποιούμε είναι απόλυτα έγκυρες και αυστηρές με βάση τα αναλυτικά εργαλεία του Παραρτήματος Α. Επομένως, μπορούμε με ασφάλεια να ισχυριστούμε ότι η διατριβή αυτή ικανοποιεί και τα δύο ιδανικά της Οικονομετρικής Εταιρείας, συνδυάζοντας την αυστηρότητα με την απλότητα και την εποικοδομητικότητα των αποτελεσμάτων της.

1.7 ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΤΗΣ Ε.Α.Θ.

Στην βιβλιογραφία του κυρίου ρεύματος της μαθηματικής στατιστικής με τον όρο "ασυμπτωτικές μέθοδοι" εννοούνται οι ασυμπτωτικές μέθοδοι μεγάλου δείγματος (large sample asymptotics). Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι το μέγεθος του δείγματος, Τ, εμφανίζεται ως παράμετρος σε κάθε στατιστικό πρόβλημα. Επιπλέον, εφόσον η συσσώρευση επιπρόσθετων παρατηρήσεων αυξάνει την διαθέσιμη πληροφορία για την εκτίμηση των παραμέτρων του υποδείγματος, η ιδέα του "μεγάλου Τ" είναι όχι μόνον φυσική αλλά και διαισθητικά σαφής. Ωστόσο, δεν υπάρχει τίποτα στα μαθηματικά της ασυμπτωτικής θεωρίας που να μας περιορίζει να παράγουμε ασυμπτωτικές προσεγγίσεις μόνο σε όρους του μεγέθους του δείγματος. Μπορούμε να παράγουμε ασυμπτωτικές προσεγγίσεις σε όρους οποιασδήποτε παραμέτρου του υποδείγματος. Τέτοιες παράμετροι ονομάζονται "ασυμπτωτικές κλίμακες" ("asymptotic scales") των ασυμπτωτικών προσεγγίσεων ή αναπτυγμάτων. Στην οικονομετρία χρησιμοποιούνται συχνά ως ασυμπτωτικές κλίμακες παράμετροι διαφορετικές από το μέγεθος του δείγματος. Οι καλές μαθηματικές ιδιότητες των ασυμπτωτικών προσεγγίσεων που προκύπτουν με αυτόν τον τρόπο δεν επαρκούν για να εγγυηθούν την χρησιμότητά τους σε πρακτικά προβλήματα. Απαιτείται, επιπλέον, η ύπαρξη μιας σαφούς διαισθητικής ερμηνείας των υποθέσεων κάτω από τις οποίες τέτοιες ασυμπτωτικές προσεγγίσεις είναι έγκυρες και η δυνατότητα να ελεγχθούν αυτές οι υποθέσεις, για το δεδομένο οικονομετρικό υπόδειγμα, από τις πληροφορίες του δείγματος.

Θεωρώντας τους διαταρακτικούς όρους των οικονομετρικών υποδειγμάτων ως πολλαπλάσια μιας αυθαίρετης σταθεράς, έστω σ, ο Kadane (1970) πρότεινε την γενική ασυμπτωτική μέθοδο "μικρού σ". Η

μέθοδος χρησιμοποιεί ως ασυμπτωτική κλίμακα την παράμετρο σ και οι ασυμπτωτικές προσεγγίσεις παράγονται καθώς το $\sigma \longrightarrow 0$ (βλ. Kadane (1971), (1974), Srivastava (1972), Klein (1973), (1979), Sawa (1973), Brown et.al. (1974), Phillips and Hale (1977), Morimune (1978), Lee and Trivedi (1979) κ.ά.). Για να ερμηνεύσουμε διαισθητικά την μέθοδο αρκεί να θεωρήσουμε μιαν οικογένεια οικονομετρικών υποδειγμάτων που διαφέρουν ως προς το σ ενώ είναι ταυτόσημα από κάθε άλλη άποψη. Συνεπώς, για τις διάφορες τιμές του σ έχουμε μιαν ακολουθία στοχαστικών υποδειγμάτων που συγκλίνει σε ένα μη στοχαστικό υπόδειγμα, καθώς το $\sigma \longrightarrow 0$. Οι ιδιότητες των εκτιμητών ή των στατιστικών ελέγχου σε αυτήν την ακολουθία στοχαστικών υποδειγμάτων είναι το αντικείμενο του ενδιαφέροντός μας. Εφόσον στην οικονομετρία υποθέτουμε ότι οι διαταρακτικοί όροι δεν υπερκαλύπτουν την πληροφορία που περιέχεται στην εξίσωση παλινδρόμησης, η ιδέα της ασυμπτωτικής μεθόδου "μικρού σ" φαίνεται πολύ φυσιολογική. Όμως, παρά την ευλογοφάνειά της, η ανωτέρω ερμηνεία δεν μας βοηθά να αποφανθούμε αν η ασυμπτωτική μέθοδος "μικρού σ" είναι κατάλληλη για ένα συγκεκριμένο υπόδειγμα και σύνολο δεδομένων. Το πρόβλημα δημιουργείται από το γεγονός ότι η συνεπής εκτίμηση του σ, που γενικά μπορεί να προκύψει από τα δεδομένα, είναι δυνατόν να γίνει αυθαίρετα μικρή με την κατάλληλη αλλαγή των μονάδων μέτρησης της εξαρτημένης μεταβλητής.

Μια ασυμπτωτική προσέγγιση σε όρους της "παραμέτρου συγκέντρωσης" ("concentration parameter"), έστω μ, προτάθηκε από τον Basmann (1963) για την ειδική περίπτωση ενός υποδείγματος δύο αλληλεξαρτημένων εξισώσεων. Η παράμετρος μ είναι μια συνάρτηση των παραμέτρων ανηγμένης μορφής του υποδείγματος, αλλά ο ορισμός της διαφέρει ανάλογα με τον συγγραφέα (βλ. Richardson (1968), Sawa (1969), (1972), Takeuchi (1970), McDonald (1972), Anderson and Sawa (1973), Mariano (1973), (1975), (1977), Anderson (1974) κ.τ.λ.). Η δυνατότητα εφαρμογής της σε οικονομετρικά συστήματα με δύο μόνον εξισώσεις περιορίζει σημαντικά το ενδιαφέρον της μεθόδου. Επιπλέον, ο έλεγχος της συνήθους υπόθεσης ότι $\mu^2 \longrightarrow \infty$ δεν είναι καθόλου εύκολος και η διαισθητική της ερμηνεία δεν είναι ξεκάθαρη. Ο Anderson (1977) δίνει την καλύτερη ερμηνεία της μεθόδου επισημαίνοντας ότι καθώς το $T \longrightarrow \infty$, ή το $\sigma \longrightarrow 0$, το $\mu^2 \longrightarrow \infty$,

όπου σ είναι ένα πολλαπλάσιο της διακύμανσης των διαταρακτικών όρων. Συνεπώς, η ασυμπτωτική μέθοδος "μεγάλου μ" μπορεί να θεωρηθεί ειδική περίπτωση μιας ασυμπτωτικής μεθόδου με ασυμπτωτική κλίμακα την παράμετρο $\tau_* = \sigma/\sqrt{T}$, αν υποτεθεί ότι το $\tau_* \longrightarrow 0$ (βλ. Μαγδαληνός (1983), Κεφάλαια 4, 5 και 6).

Οι ασυμπτωτικές προσεγγίσεις αυτής της διατριβής έχουν ως ασυμπτωτική κλίμακα την παράμετρο $\tau = 1/\sqrt{T}$.

1.8 ΣΚΕΨΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ Ε.Α.Θ.

Είναι γεγονός ότι, για τα προβλήματα που μελετήθηκαν πρώτα και εξακολουθούν να καταλαμβάνουν το μεγαλύτερο μέρος των εγχειριδίων στατιστικής, υπάρχουν καλές "ακριβείς" ("exact") λύσεις. Αυτό δημιουργεί μιαν επιφύλαξη έναντι των ασυμπτωτικών μεθόδων και δεν είναι λίγοι εκείνοι που αρνούνται να δεχθούν μιαν ασυμπτωτική λύση ως πλήρη απάντηση ενός στατιστικού προβλήματος. Παράδειγμα αποτελεί το γνωστό πρόβλημα Behrens-Fisher, που θεωρείται ακόμα άλυτο αν και ο έλεγχος του Welch (1947), ο οποίος προτάθηκε στη βάση κάποιου είδους ασυμπτωτικού αναπτύγματος, έχει αρκετά καλή απόδοση ακόμα και για μικρό μέγεθος δείγματος. Η αναζήτηση καλής ακριβούς λύσης για οποιοδήποτε στατιστικό πρόβλημα είναι ένα υπερβολικά αισιόδοξο ερευνητικό πρόγραμμα. Διότι θα πρέπει να έγινε ήδη κατανοητό ότι δεν υπάρχουν ακριβείς λύσεις για όλες τις περιπτώσεις και πρέπει να αρκεστούμε σε ό,τι καλύτερο έχουμε, δηλαδή τις ασυμπτωτικές λύσεις. Το γεγονός ότι σε πολλές περιπτώσεις δεν υπάρχουν άλλες εφικτές λύσεις, είναι ένα επιπλέον επιχείρημα υπέρ της αποδοχής των ασυμπτωτικών μεθόδων ως "λύσεων" των προβλημάτων της μαθηματικής στατιστικής και της οικονομετρίας.

Από όσα έχουμε ήδη πεί φαίνεται ότι οι μέθοδοι της Ε.Α.Θ., οι οποίες χρησιμοποιούν ασυμπτωτικά αναπτύγματα αντί για προσεγγίσεις με την κανονική κατανομή, οδηγούν σε μια γενική στατιστική θεωρία που, αν και είναι πολυπλοκότερη από την θεωρία που βασίζεται στις κανονικές προσεγγίσεις, είναι ταυτόχρονα αρκετά απλή ώστε να δίνει γενικά αποτελέσματα, αλλά και αρκετά περίπλοκη ώστε να επιτυγχάνει αριθμητικά αποτελέσματα επαρκούς ακρίβειας ακόμα και με δείγματα μετρίου μεγέθους. Αξίζει δε να σημειωθεί ότι τα αποτελέσματα αυτά επιτυγχάνονται με μικρής κλίμακας αλλαγές των στατιστικών και οικονομετρικών προγραμμάτων που "τρέχουν" στα συνήθη συστήματα

ηλεκτρονικών υπολογιστών.

Παρ' όλα αυτά, είναι δυνατόν να αμφισβητηθεί σοβαρά η σκοπιμότητα της περαιτέρω εκλέπτυνσης της ασυμπτωτικής θεωρίας των κανονικών προσεγγίσεων. Το επιχείρημα, το οποίο στα πλαίσια της οικονομετρίας αποκτά ιδιαίτερη βαρύτητα λόγω της πολυπλοκότητας των οικονομικών φαινομένων, έχει ως εξής: Τα υποδείγματά μας, όσο σύνθετα και αν είναι, αποτελούν ατελείς προσεγγίσεις της πραγματικότητας και συνεπώς το αληθινό μέτρο πιθανότητας δεν ανοίκει στην οικογένεια των μέτρων πιθανότητας που έχουμε υποθέσει. Είναι, για παράδειγμα, φανερό ότι οι διαταρακτικοί όροι μιας οικονομετρικής εξίσωσης μόνον προσεγγιστικά μπορούν να θεωρηθούν ότι ακολουθούν την κανονική κατανομή. Διότι, εκτός από την στοχαστική συμπεριφορά των οικονομικών μονάδων, στα λάθη της εξίσωσης περιλαμβάνονται και όλα τα σφάλματα κακής συναρτησιακής ή δυναμικής εξειδίκευσης του υποδείγματος, καθώς και λάθη από την παράλειψη σημαντικών ερμηνευτικών μεταβλητών, λάθη μέτρησης κ.τ.λ. Αν, λοιπόν, το υπόδειγμα είναι κατ' αυτόν τον τρόπο λανθασμένο, όλες οι στατιστικές μέθοδοι που στηρίζονται σε αυτό θα έχουν ένα συστηματικό λάθος, δηλαδή ένα λάθος που δεν θα τείνει στο μηδέν, καθώς το $T \longrightarrow \infty$, ή το $\tau_* \longrightarrow 0$, ή το $\sigma \longrightarrow 0$. Συνεπώς, η εκλέπτυνση της ασυμπτωτικής θεωρίας στα πλαίσια του υποδείγματος δεν είναι ρεαλιστική εφόσον με κανέναν τρόπο δεν μπορούμε να μειώσουμε ένα τέτοιο συστηματικό λάθος. Παρ' όλα αυτά μπορούμε να ισχυριστούμε ότι, έχοντας στην διάθεσή μας μια πιο αποτελεσματική ασυμπτωτική θεωρία, τίποτα δεν μας αναγκάζει να περιοριστούμε στην χρήση "απλών" ("simple") υποδειγμάτων, όπως αυτά της κανονικής κατανομής. Και είμαστε σε θέση να χειριστούμε υποδείγματα αρκετά πολύπλοκα που προσεγγίζουν περισσότερο την πραγματικότητα, μειώνοντας με αυτόν τον τρόπο το μέγεθος του συστηματικού λάθους. Αυτό, όμως, θα συμβεί μόνον αν είναι πρακτικά δυνατό, χρησιμοποιώντας τις δυνατότητες της Ε.Α.Θ., να βελτιώσουμε την (πολλές φορές ad hoc) διαδικασία εξειδίκευσης του υποδείγματος. Και μπορούμε, επιπλέον, να θεωρήσουμε την λεπτομερή διερεύνηση διαφόρων παραμετρικών οικογενειών ως μια προεισαγωγική μελέτη που αργότερα ενδέχεται να επεκταθεί για να καλύψει μεθόδους για στατιστική συμπερασματολογία σχετικά με συναρτησιακά

(functionals), που ορίζονται σε περισσότερο γενικές οικογένειες μέτρων πιθανότητας. Εκτός αυτού, η ευστάθεια (robustness) των αποτελεσμάτων της σε πολλές περιπτώσεις συνηγορεί και αυτή υπέρ της εμπειρικής εφαρμογής της Ε.Α.Θ. Θα πρέπει, όμως, να είμαστε προσεκτικοί στην εφαρμοσμένη έρευνα διότι ακόμα και η "καλύτερη δυνατή" εξειδίκευση του υποδείγματος δεν αποτελεί εγγύηση ότι το συστηματικό λάθος που απομένει είναι επαρκώς μικρό.

Χωρίς να θέλουμε να παρουσιάσουμε μια τελεσίδικη ετυμηγορία υπέρ των μεθόδων της Ε.Α.Θ., είμαστε υποχρεωμένοι να επισημάνουμε ότι ένα όλο και μεγαλύτερο κομμάτι της εργασίας του οικονομέτρη απαιτεί τον ευφυή χειρισμό προσεγγίσεων και ότι για την εκτίμηση των οικονομετρικών συστημάτων είναι ανάγκη να αναπτυχθούν "έξυπνες προσεγγίσεις για μερικούς από αυτούς τους τύπους με μήκος πολλών γραμμών και για τους πίνακες μη συνήθων (nonstandard) κατανομών για να βοηθηθούν οι άνθρωποι που κάνουν την εμπειρική εργασία στα οικονομικά" (Kmenda (1974), σελ. 275). Αυτές οι ανάγκες καλύπτονται σε μεγάλο βαθμό από τις μεθόδους της Ε.Α.Θ., οι οποίες γίνονται τόσο καλύτερες όσο περισσότερο απαραίτητες είναι.

1.9 ΤΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΑΥΤΗΣ ΤΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ

Ένα μεγάλο μέρος της εφαρμοσμένης στατιστικής και οικονομετρικής έρευνας αφιερώνεται στην διενέργεια στατιστικών ελέγχων είτε της διαρθρωτικής εξειδίκευσης του χρησιμοποιουμένου υποδείγματος, είτε διαφόρων γραμμικών υποθέσεων επί των παραμέτρων του. Τέτοιες υποθέσεις ελέγχονται με την χρησιμοποίηση των γνωστών μας ελέγχων t και F, υπό την υπονοούμενη υπόθεση ότι το μέγεθος του χρησιμοποιουμένου δείγματος είναι επαρκώς μεγάλο ώστε να επιτρέπει την προσέγγιση με την κανονική ή την χ^2 κατανομή, αντίστοιχα.

Όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό δημιουργούνται σοβαρά προβλήματα, διότι στην περίπτωση αυτή υπάρχει σημαντική απόκλιση του πραγματικού (actual) από το ονομαστικό (nominal) μέγεθος του ελέγχου. Υπενθυμίζουμε ότι ονομαστικό μέγεθος του ελέγχου είναι το επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας στο οποίο γίνεται ο έλεγχος, ενώ το πραγματικό μέγεθος του ελέγχου είναι το ποσοστό των φορών κατά τις οποίες το κριτήριο απορρίπτει την μηδενική υπόθεση, όταν αυτή είναι αληθής, σε επαναλαμβανόμενη

διενέργεια του ελέγχου με σταθερή την μήτρα των προκαθορισμένων μεταβλητών του υποδείγματος. Γίνεται, επομένως, σαφές ότι σημαντική απόκλιση του πραγματικού από το ονομαστικό μέγεθος ενός ελέγχου ενδέχεται να οδηγήσει σε εσφαλμένα συμπεράσματα και λανθασμένη διαρθρωτική εξειδίκευση του υποδείγματος.

Επιπλέον, η πολύ γνωστή ασυμφωνία μεταξύ των τριών κλασσικών αρχών ελέγχου, δηλαδή των ελέγχων Wald, likelihood ratio, και Lagrange multiplier, μπορεί κατά κύριο λόγο να αποδοθεί στο γεγονός ότι οι τρείς ανωτέρω έλεγχοι έχουν διαφορετικά πραγματικά μεγέθη. Επειδή οι αποκλίσεις του πραγματικού από το ονομαστικό μέγεθος είναι μεγάλες συγκρινόμενες με τις διαφορές στην δύναμη των ελέγχων, μια διόρθωση του πραγματικού μεγέθους, έτσι ώστε αυτό να προσεγγίζει το ονομαστικό μέγεθος του ελέγχου, αναμένεται να εξαλείψει το μεγαλύτερο μέρος της πιθανότητας της ασυμφωνίας μεταξύ των τριών κλασσικών αρχών ελέγχου (βλ. Rothenbrg (1982), σελ. 529). Έτσι, αφού διορθωθεί το μέγεθος του ελέγχου, η απώλεια από την χρησιμοποίηση των ελέγχων t και F θα είναι μικρή, ακόμα και σε περιπτώσεις κατά τις οποίες υπάρχουν περισσότερο αποτελεσματικοί έλεγχοι δεύτερης τάξης προσέγγισης.

Υπάρχουν δύο τρόποι διόρθωσης του πραγματικού μεγέθους ενός ελέγχου: η διόρθωση των κριτικών τιμών του ελέγχου, είτε, εναλλακτικά, η διόρθωση του στατιστικού με το οποίο διενεργείται ο έλεγχος. Για την πρώτη διόρθωση αναπτύσσουμε κατά Edgeworth την συνάρτηση κατανομής του στατιστικού ελέγχου και κρατούμε μερικούς αρχικούς όρους έτσι ώστε το λάθος της προσέγγισης να είναι τάξης $O(T^{-3/2})$. Στη συνέχεια βρίσκουμε τις κριτικές τιμές της προσεγγιστικής συνάρτησης κατανομής που αντιστοιχούν στο επιθυμητό ονομαστικό μέγεθος του ελέγχου. Όταν χρησιμοποιούμε τις κατά Edgeworth διορθωμένες κριτικές τιμές, η απόκλιση του πραγματικού από το ονομαστικό μέγεθος του ελέγχου είναι τάξης $O(T^{-3/2})$. Για την δεύτερη χρησιμοποιούμε ένα κατά Cornish-Fisher ανάπτυγμα (βλ. Cornish and Fisher (1937), Fisher and Cornish (1960), Hill and Davis (1968), Μαγδαληνός (1985)) για να υπολογίσουμε το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο στατιστικό. Ο έλεγχος ολοκληρώνεται με την σύγκριση του διορθωμένου στατιστικού με τις κριτικές τιμές της αντίστοιχης κατανομής για τον t ή τον F έλεγχο. Όταν ο έλεγχος

διενεργείται με την χρησιμοποίηση του κατά Cornish-Fisher διορθωμένου στατιστικού, η απόκλιση του πραγματικού από το ονομαστικό μέγεθος του ελέγχου είναι επίσης τάξης $O(T^{-3/2})$. Επομένως, οι δύο μέθοδοι δίνουν διορθώσεις που είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμες μέχρι την τάξη μεγέθους της απαιτούμενης ακρίβειας. Ωστόσο, η κατά Cornish-Fisher διόρθωση του στατιστικού έχει δύο σημαντικά πλεονεκτήματα συγκρινόμενη με την κατά Edgeworth διόρθωση των κριτικών τιμών του.

Πρώτον, το κατά Cornish-Fisher ανάπτυγμα δεν παρουσιάζει τα γνωστά προβλήματα του κατά Edgeworth αναπτύγματος στην περιοχή των ουρών της κατανομής που προσεγγίζει. Εφόσον το κατά Cornish-Fisher ανάπτυγμα είναι η αντιστροφή της κατά Edgeworth διόρθωσης των κριτικών τιμών, είναι λογικό να αναμένουμε πως οι δύο μέθοδοι διόρθωσης πρέπει να έχουν πολύ όμοιες ιδιότητες στην περιοχή που αντιστοιχεί στο κύριο σώμα της προσεγγιζόμενης κατανομής. Όμως, στην περίπτωση ελέγχου υποθέσεων αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να προσεγγίσουμε, όσο γίνεται καλύτερα, τις πιθανότητες στις ουρές της κατανομής. Σε αυτές ακριβώς τις περιοχές οι ιδιότητες των δύο μεθόδων διόρθωσης διαφέρουν σημαντικά. Η κατά Edgeworth προσέγγιση δεν είναι μια καλά ορισμένη (proper) κατανομή και συχνά προσδίδει αρνητικές "πιθανότητες" στις ουρές της κατανομής. Αντίθετα, το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο στατιστικό είναι μια καλά ορισμένη τυχαία μεταβλητή και στις ουρές της κατανομής της αντιστοιχούν μόνον θετικές πιθανότητες.

Δεύτερον, η εφαρμοσμένη στατιστική και οικονομετρική έρευνα διευκολύνεται σημαντικά αν, αντί των κατά Edgeworth διορθωμένων κριτικών τιμών, χρησιμοποιηθεί το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο στατιστικό. Διότι το ίδιο κατά Cornish-Fisher διορθωμένο στατιστικό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διενεργηθούν έλεγχοι σε οποιοδήποτε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας. Αντίθετα, απαιτείται ο υπολογισμός διαφορετικών κατά Edgeworth διορθωμένων κριτικών τιμών για να ελεγχθεί η μηδενική υπόθεση σε διαφορετικά επίπεδα στατιστικής σημαντικότητας. Πρέπει, επίσης, να επισημάνουμε ότι, με δεδομένο το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο στατιστικό, είναι πολύ εύκολο να υπολογιστεί το επίπεδο σημαντικότητας (p-value) που αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη τιμή

του. Ο υπολογισμός αυτός είναι αρκετά δύσκολος και επίπονος αν βασίζεται στις κατά Edgeworth διορθωμένες κριτικές τιμές.

Στην διατριβή αυτήν αναπτύσσεται η κατά Cornish-Fisher διόρθωση του μεγέθους των ελέγχων t και F στο γενικευμένο γραμμικό υπόδειγμα (generalized linear model) και συγκρίνεται με την κατά Edgeworth διόρθωση που έχει ήδη προταθεί από τους Rothenberg (1984b), (1988) και Magee (1989). Τόσο η θεωρητική, όσο και η πειραματική, με μεθόδους Monte Carlo, σύγκριση της σχετικής απόδοσης των δύο διορθώσεων συνηγορεί υπέρ της κατά Cornish-Fisher διόρθωσης του μεγέθους των t και F ελέγχων. Επιπλέον, στα πλαίσια ενός οικονομετρικού συστήματος εισάγονται μέθοδοι ελέγχου της εξωγένειας των βοηθητικών μεταβλητών (instrumental variables) και αναπτύσσονται εναλλακτικές διορθώσεις του μεγέθους αυτών των ελέγχων. Και στην περίπτωση αυτή, η κατά Cornish-Fisher διόρθωση φαίνεται να υπερισχύει της κατά Edgeworth διόρθωσης με βάση θεωρητικά επιχειρήματα αλλά και πειραματικά αποτελέσματα. Αξίζει, μάλιστα, να σημειωθεί ότι οι έλεγχοι της εξωγένειας των βοηθητικών μεταβλητών ενός οικονομετρικού συστήματος αποτελούν ένα παράδειγμα ιδιαίτερα κακής απόδοσης των κατά Edgeworth διορθώσεων του μεγέθους των χ^2 και F ελέγχων.

1.10 ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΙΒΕΙΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ

Από την στατιστική και οικονομετρική βιβλιογραφία προκύπτει το συμπέρασμα ότι είναι προτιμότερο, αντί να χρησιμοποιήσουμε την "ασυμπτωτική" μορφή του ελέγχου, να κάνουμε προσαρμογές για τους βαθμούς ελευθερίας (degrees of freedom adjustments) και να πάρουμε αναπτύγματα σε όρους της t-Student ή F κατανομής κατανομής, αντί της κανονικής ή χ^2 κατανομής, αντίστοιχα. Και οι δύο μέθοδοι προσέγγισης έχουν ένα σφάλμα της ίδιας τάξης μεγέθους, αλλά οι προσαρμογές για τους βαθμούς ελευθερίας φαίνεται πως βελτιώνουν την προσέγγιση σε μικρά δείγματα. Στη συνέχεια θα παραθέσουμε περιληπτικά την σχετική συζήτηση.

Ο Dhrymes κατακρίνει τις προσαρμογές για τους βαθμούς ελευθερίας σε περιπτώσεις που μόνον ασυμπτωτικά αποτελέσματα είναι διαθέσιμα. Διότι δεν υπάρχει τίποτα στην ασυμπτωτική θεωρία μεγάλου δείγματος που να δικαιολογεί τέτοιου είδους διορθώσεις (βλ. Dhrymes (1969), σελ. 220). Η κριτική του Dhrymes αντικρούεται

από τον Μαγδαληνό ((1983), σελ. 134-140) με το επιχείρημα ότι δεν υπάρχει κανένας λόγος που να μας υπαγορεύει να αρκεστούμε σε πληροφορίες που προέρχονται αποκλειστικά από την ασυμπτωτική θεωρία. Αντίθετα από την άποψη του Dhrymes, όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό υπάρχουν αρκετά επιχειρήματα υπέρ της προσαρμογής για τους βαθμούς ελευθερίας.

Θεωρούμε, για παράδειγμα, το γενικευμένο γραμμικό υπόδειγμα. Αν η μήτρα συνδιακυμάνσεων των διαταρακτικών όρων του είναι γνωστή εκτός από έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα, το διορθωμένο για τους βαθμούς ελευθερίας στατιστικό του Wald κατανέμεται ακριβώς ως μια F μεταβλητή. Αντίθετα, στην περίπτωση που η μήτρα συνδιακυμάνσεων δεν είναι γνωστή και εκτιμάται από τα δεδομένα, η ακριβής κατανομή του στατιστικού δεν είναι γνωστή και αναγκαζόμαστε να χρησιμοποιήσουμε τον ασυμπτωτικό (χωρίς προσαρμογές για τους βαθμούς ελευθερίας) έλεγχο. Αξίζει να σημειωθεί ότι, ενώ οι δύο έλεγχοι είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμοι, ο ασυμπτωτικός έλεγχος είναι πιο αυστηρός με την έννοια ότι απορρίπτει την μηδενική υπόθεση συχνότερα από ό,τι ο ακριβής έλεγχος. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με όσα θα περιμέναμε διαισθητικά. Διότι συνεπάγεται ότι η συγκέντρωση των GLS εκτιμητών των παραμέτρων του υποδείγματος γύρω από τις αληθείς τιμές τους έχει αυξηθεί, παρά το γεγονός ότι η εκτίμηση της μήτρας συνδιακυμάνσεων εισάγει μια νέα πηγή λάθους στην εκτιμητική διαδικασία. Αποδεικνύεται ότι, κάτω από ρεαλιστικές συνθήκες, η περιοχή αποδοχής του ασυμπτωτικού ελέγχου μπορεί να είναι μικρότερη από το 50% της περιοχής αποδοχής του αντίστοιχου ακριβούς ελέγχου, γεγονός που σημαίνει πως τα δύο είδη ελέγχων έχουν σημαντικά διαφορετικά πραγματικά μεγέθη. Για να διευκολύνουμε την αξιολόγηση της σημαντικότητας των προσαρμογών για τους βαθμούς ελευθερίας παραθέτουμε τον Πίνακα 1.1 (βλ. Μαγδαληνός (1983), σελ. 139). Ο πίνακας παρουσιάζει την ποσοστιαία αύξηση της περιοχής αποδοχής του ασυμπτωτικού ελέγχου χ^2, σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας 5%, που οφείλεται στην προσαρμογή για τους βαθμούς ελευθερίας. Ο Πίνακας 1.1 δείχνει ότι κάτω από δυσμενείς, αλλά ρεαλιστικές, συνθήκες οι προσαρμογές για τους βαθμούς ελευθερίας μπορούν ακόμα και να τριπλασιάσουν την περιοχή αποδοχής. Οι διαφορές των περιοχών αποδοχής τείνουν στο

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1

r	1					3					10		
T−n \ n	1	5	10	15	20	3	5	10	15	20	10	15	20
5	1.06	2.44	4.16	5.88	7.60	2.32	3.15	5.23	7.31	9.38	6.77	9.36	12.00
7	0.66	1.49	2.53	3.57	4.61	1.39	1.86	3.06	4.25	5.44	3.83	5.25	6.67
10	0.42	0.94	1.58	2.23	2.87	0.85	1.14	1.85	2.56	3.27	2.26	3.07	3.88
15	0.26	0.58	0.97	1.36	1.76	0.52	0.68	1.11	1.53	1.95	1.31	1.77	2.24
20	0.19	0.42	0.70	0.98	1.26	0.37	0.49	0.79	1.08	1.38	0.93	1.25	1.57
25	0.15	0.32	0.55	0.77	0.99	0.29	0.38	0.61	0.84	1.07	0.71	0.96	1.20
30	0.12	0.27	0.45	0.63	0.81	0.23	0.31	0.49	0.68	0.87	0.57	0.77	0.97
40	0.10	0.23	0.40	0.58	0.75	0.20	0.27	0.44	0.62	0.79	0.50	0.69	0.87
60	0.07	0.20	0.37	0.53	0.70	0.16	0.23	0.39	0.56	0.72	0.43	0.60	0.77
120	0.05	0.18	0.33	0.48	0.64	0.12	0.18	0.34	0.50	0.65	0.36	0.52	0.68

Σχετική αύξηση της περιοχής αποδοδοχής του χ^2 ελέγχου σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας 5%, όπου r είναι το πλήθος των γραμμικών περιορισμών, n είναι το πλήθος των διαρθρωτικών παραμέτρων του υποδείγματος και T−n είναι το πλήθος των βαθμών ελευθερίας.

μηδέν καθώς το μέγεθος του δείγματος αυξάνεται, αλλά όχι τόσο γρήγορα όσο θα περίμενε κανείς, ιδίως αν το πλήθος των διαρθρωτικών παραμέτρων είναι μεγάλο.

Η συζήτηση που προηγήθηκε συνηγορεί υπέρ της προσαρμογής για τους βαθμούς ελευθερίας όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό. Εφόσον η ακρίβεια μιας ασυμπτωτικής προσέγγισης εξαρτάται από τον πρώτον όρο του ασυμπτωτικού αναπτύγματος, το προηγούμενο συμπέρασμα ισχύει και στην περίπτωση κατά την οποία χρησιμοποιούμε προσεγγίσεις της E.A.Θ. Οι Kunitomo et.al. (1983) και οι Morimune και Tsukuda (1984), εργαζόμενοι στα πλαίσια της μεθόδου "μικρού σ", παρουσιάζουν περιπτώσεις κατά τις οποίες προσεγγίσεις που βασίζονται σε προσαρμογές για τους βαθμούς ελευθερίας έχουν καλύτερη απόδοση από προσεγγίσεις που δεν έχουν υποστεί τέτοιες προσαρμογές. Η μόνη ερμηνεία που μπορούμε να δώσουμε είναι ότι, όταν το υπόδειγμα έχει επαρκώς απλοποιηθεί, οι προσεγγίσεις που βασίζονται σε προσαρμογές για τους βαθμούς ελευθερίας μετατρέπονται στις (γνωστές) ακριβείς (exact) κατανομές. Είναι, λοιπόν, λογικό να αναζητήσουμε εναλλακτικές προσεγγίσεις σε όρους των ακριβών (exact) t και F κατανομών και να αναπτύξουμε κατά Edgeworth ή κατά Cornish-Fisher διορθώσεις του μεγέθους των ελέγχων που προκύπτουν από αυτές.

Στο σημείο αυτό εισάγουμε την έννοια της "τοπικής ακρίβειας" ("local exactness") η σημασία της οποίας είναι καθοριστική για την επιλογή της προσέγγισης που είναι ενδεδειγμένη για κάθε συγκεκριμένη περίπτωση. Θεωρούμε, για παράδειγμα, ότι η μήτρα συνδιακυμάνσεων των διαταρακτικών όρων του γενικευμένου γραμμικού υποδείγματος, εκτός από έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα, είναι γνωστό πως ανήκει σε μια σφαίρα ακτίνας θ. Θα λέγομε ότι μια προσέγγιση κατά Edgeworth είναι "τοπικά ακριβής" ("locally exact") αν μετατρέπεται στη (γνωστή) ακριβή κατανομή καθώς το $\theta \longrightarrow 0$. Όμοια ένα κατά Cornish-Fisher διορθωμένο στατιστικό θα λέγεται "τοπικά ακριβές" αν, καθώς το $\theta \longrightarrow 0$, μετατρέπεται σε ένα στατιστικό του οποίου η (γνωστή) κατανομή είναι ακριβής.

Γενικά, μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα απεριόριστο πλήθος διαφορετικών προσεγγίσεων αλλάζοντας την κατανομή σε όρους της οποίας παίρνουμε τα αναπτύγματα. Η επιλογή αυτή δεν επηρεάζει την

τάξη μεγέθους του σφάλματος, αλλά είναι καθοριστικής σημασίας για την ακρίβεια της προσέγγισης σε μικρά δείγματα. Η συνηθισμένη επιλογή των οριακών (limiting) κατανομών (κανονική ή χ^2) είναι οπωσδήποτε αναλυτικά βολική. Ωστόσο, οι προσεγγίσεις που προκύπτουν από τις κατανομές αυτές δεν έχουν άριστες ιδιότητες όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό. Καλύτερες είναι οι επιλογές που βασίζονται στην έννοια της τοπικής ακρίβειας. Αν απαιτήσουμε η προσέγγιση που θα επιλεγεί να είναι τοπικά ακριβής, θα επιλέξουμε μια συνάρτηση κατανομής από την οποία παράγεται μια ασυμπτωτική σειρά που μετατρέπεται στον ακριβή τύπο όταν, υπό την προϋπόθεση πως υπάρχουν επαρκείς πληροφορίες, μπορούμε να μετασχηματίσουμε το υπόδειγμα έτσι ώστε η μήτρα συνδιακυμάνσεων να είναι βαθμωτή (scalar).

Σε αυτή την διατριβή προτείνεται η προσαρμογή των στατιστικών για τους βαθμούς ελευθερίας. Επιπλέον, εισάγονται κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher διορθώσεις του μεγέθους των ακριβών (exact) ελέγχων t και F στο γενικευμένο γραμμικό υπόδειγμα και των ακριβών (exact) ελέγχων της εξωγένειας των βοηθητικών μεταβλητών σε ένα οικονομετρικό σύστημα. Monte Carlo πειράματα επιβεβαιώνουν τις θεωρητικές προσδοκίες υπέρ των προσαρμογών για τους βαθμούς ελευθερίας και των κατά Cornish-Fisher διορθώσεων.

1.11 Η ΔΟΜΗ ΑΥΤΗΣ ΤΗΣ ΔΙΑΤΡΙΒΗΣ

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται εναλλακτικές μέθοδοι διόρθωσης του μεγέθους των ελέγχων t και F στο γενικευμένο γραμμικό υπόδειγμα. Εξειδικεύσεις των ανωτέρω διορθώσεων για τις περιπτώσεις αυτοσυσχέτισης πρώτου βαθμού, ετεροσκεδαστικότητας και S.U.R. υποδειγμάτων δίνονται στα Κεφάλαια 3, 4 και 5, αντίστοιχα. Στο Κεφάλαιο 6 εξετάζονται εναλλακτικές μέθοδοι διόρθωσης του μεγέθους των ελέγχων κακής εξειδίκευσης Anderson-Rubin-Sargan, οι οποίοι μπορούν να ερμηνευθούν, εξ' ίσου ικανοποιητικά, και ως έλεγχοι της ανεξαρτησίας των βοηθητικών μεταβλητών από τον διαταρακτικό όρο μιας διαρθρωτικής εξίσωσης ενός οικονομετρικού συστήματος. Τα συμπεράσματα αυτής της διατριβής, τα οποία στηρίζονται στην θεωρητική αλλά και πειραματική (με μεθόδους Monte Carlo) διερεύνηση των εξεταζομένων προβλημάτων, συνοψίζονται στο Κεφάλαιο 7. Όλες οι αποδείξεις δίνονται σε παραρτήματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΕΛΕΓΧΩΝ ΣΤΟ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην εφαρμοσμένη στατιστική και οικονομετρική έρευνα συχνά βρισκόμαστε στην ανάγκη να εκτιμήσουμε με την μέθοδο των γενικευμένων ελαχίστων τετραγώνων (GLS) το κανονικό γραμμικό υπόδειγμα, του οποίου η μήτρα συνδιακυμάνσεων των διαταρακτικών όρων είναι μη βαθμωτή (nonscalar). Η εκτιμητική διαδικασία συνήθως ακολουθείται από την διαδικασία ελέγχου είτε της διαρθρωτικής εξειδίκευσης του υποδείγματος, είτε διαφόρων γραμμικών υποθέσεων επί των παραμέτρων του. Τέτοιες υποθέσεις ελέγχονται με την χρησιμοποίηση των γνωστών t και F ελέγχων, υπό την υπονοούμενη υπόθεση ότι το μέγεθος του χρησιμοποιουμένου δείγματος είναι αρκετά μεγάλο ώστε να επιτρέπει την προσέγγιση με την κανονική ή την χ^2 κατανομή, αντίστοιχα.

Προβλήματα δημιουργούνται όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό, διότι στην περίπτωση αυτή το πραγματικό μέγεθος ενός ελέγχου διαφέρει σημαντικά από το ονομαστικό του μέγεθος, με αποτέλεσμα να είναι πιθανό να καταλήξουμε σε εσφαλμένα συμπεράσματα και λανθασμένη διαρθρωτική εξειδίκευση του υποδείγματος.

Επιπλέον, το γεγονός ότι οι τρείς κλασσικές αρχές ελέγχου (Wald, likelihood Ratio και Lagrange multiplier) παράγουν ελέγχους με διαφορετικά πραγματικά μεγέθη, είναι η κύρια αιτία της παρατηρούμενης ασυμφωνίας των αποτελεσμάτων τους. Επειδή οι διαφορές μεταξύ του ονομαστικού και του πραγματικού μεγέθους είναι μεγάλες σε σύγκριση με τις διαφορές στην δύναμη των ελέγχων, μια διόρθωση του πραγματικού μεγέθους, έτσι ώστε αυτό να προσεγγίσει το ονομαστικό μέγεθος του ελέγχου, αναμένεται να εξαλείψει το μεγαλύτερο μέρος της πιθανότητας της ασυμφωνίας μεταξύ των τριών κλασσικών αρχών ελέγχου (βλ. Rothenberg (1982), σελ. 529). Έτσι, η απώλεια από την χρησιμοποίηση των κατά μέγεθος διορθωμένων ελέγχων t και F θα είναι μικρή, ακόμα και σε περιπτώσεις κατά τις οποίες υπάρχουν περισσότερο αποτελεσματικοί έλεγχοι δεύτερης τάξης προσέγγισης.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στο Κεφάλαιο 1, υπάρχουν δύο τρόποι

διόρθωσης του πραγματικού μεγέθους ενός ελέγχου, έτσι ώστε να μη διαφέρει σημαντικά από το ονομαστικό μέγεθος του ελέγχου: η κατά Edgeworth διόρθωση των κριτικών τιμών του ελέγχου ή, εναλλακτικά, η κατά Cornish-Fisher διόρθωση του στατιστικού που χρησιμοποιείται για τον έλεγχο. Και οι δύο αυτές διορθώσεις του μεγέθους των ελέγχων έχουν ένα λάθος τάξης $O(T^{-3/2})$ και είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμες μέχρι την τάξη μεγέθους της απαιτούμενης ακρίβειας.

Ο Rothenberg (1984b), (1988), εργαζόμενος στα πλαίσια μιας γενικής κλάσης υποδειγμάτων που περιλαμβάνει τις περισσότερες από τις συνηθισμένες οικονομετρικές εξειδικεύσεις, ανέπτυξε αναλυτικούς τύπους για τις τύπου Edgeworth διορθωμένες κριτικές τιμές για τον έλεγχο του Wald, από τις οποίες μπορούν να παραχθούν οι τύπου Edgeworth διορθωμένες κριτικές τιμές για τον αντίστοιχο t ή F έλεγχο. Αυτοί οι τύποι, όμως, δεν είναι άμεσα χρησιμοποιήσιμοι διότι εξαρτώται από μερικές άγνωστες παραμέτρους, των οποίων η εκτίμηση σε συγκεκριμένες περιπτώσεις δεν έχει συζητηθεί από τον Rothenberg.

Στο κεφάλαιο αυτό αναπαράγονται τα αποτελέσματα του Rothenberg με τον δικό μας συμβολισμό, ο οποίος προκύπτει ευθέως από τον ορισμό του γενικευμένου γραμμικού υποδείγματος. Αυτό έγινε διότι ο συμβολισμός που χρησιμοποιείται σε αυτήν την διατριβή καθιστά άμεση την εφαρμογή των αναλυτικών εργαλείων του Παραρτήματος Α για να διαπιστωθεί η εγκυρότητα (validity) των μεθόδων διόρθωσης του μεγέθους των t και F ελέγχων.

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι, αντί να διορθώσουμε τις κριτικές τιμές του ελέγχου, έχουμε την δυνατότητα να διορθώσουμε το στατιστικό με το οποίο κάνουμε τον έλεγχο και ότι οι δύο διορθώσεις είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμες. Ωστόσο, η κατά Cornish-Fisher διόρθωση του στατιστικού θεωρείται καλύτερη από την κατά Edgeworth διόρθωση των κριτικών τιμών του ελέγχου. Διότι, σε αντίθεση με την κατά Edgeworth προσέγγιση που δεν είναι μια καλά ορισμένη κατανομή, το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο στατιστικό είναι μια καλά ορισμένη τυχαία μεταβλητή. Επιπλέον, με δεδομένο το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο στατιστικό, ο ερευνητής μπορεί να υπολογίσει πολύ εύκολα το επίπεδο σημαντικότητας (p-value) που αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη τιμή του και να πραγματοποιήσει

τον έλεγχο σε κάθε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας.

Είναι, λοιπόν, φανερό ότι, αφού υπολογιστεί το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο στατιστικό, ο έλεγχος πραγματοποιείται με την σύγκριση της τιμής αυτού του στατιστικού με τις κριτικές τιμές της αντίστοιχης κατανομής για τον t ή τον F έλεγχο.

Στο σημείο αυτό ο ερευνητής καλείται να επιλέξει αν θα χρησιμοποιήσει την "ασυμπτωτική" μορφή του στατιστικού ελέγχου, αναπτύσσοντας σε όρους της κανονικής ή της χ^2 κατανομής, ή θα προσαρμόσει το στατιστικό για τους βαθμούς ελευθερίας και θα πάρει τα αναπτύγματα σε όρους της t ή της F κατανομής, αντίστοιχα. Και οι δύο μέθοδοι προσέγγισης έχουν ένα σφάλμα της ίδιας τάξης μεγέθους. Παρ' όλα αυτά, από την σχετική συζήτηση του Κεφαλαίου 1 προκύπτει πως η μέθοδος προσέγγισης που βασίζεται στην προσαρμογή για τους τους βαθμούς ελευθερίας είναι προτιμότερη και βελτιώνει την προσέγγιση σε μικρά δείγματα (βλ. Kunitomo et.al. (1983), Μαγδαληνός (1983), (1985) και Morimune and Tsukuda (1984)).

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε αναλυτικούς τύπους για τις κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher δεύτερης τάξης διορθώσεις (ασυμπτωτικές ή τοπικά ακριβείς) του μεγέθους των ελέγχων t και F, για την περίπτωση του γενικευμένου γραμμικού υποδείγματος του οποίου η μήτρα συνδιακυμάνσεων των διαταρακτικών όρων είναι μη βαθμωτή.

2.2 ΤΟ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ

Θεωρούμε την εξίσωση:

$$y = X\beta + \sigma u, \qquad (2.1)$$

όπου y είναι ένα T×1 διάνυσμα παρατηρήσεων της εξαρτημένης μεταβλητής, X είναι μια T×n μήτρα εξωγενών μεταβλητών, β είναι ένα n×1 διάνυσμα αγνώστων παραμέτρων και σu ($\sigma > 0$) είναι ένα T×1 διάνυσμα στοχαστικών διαταρακτικών όρων. Το τυχαίο διάνυσμα u κατανέμεται ως $N(0,\Omega^{-1})$, όπου τα στοιχεία της T×T μήτρας Ω είναι γνωστές συναρτήσεις του αγνώστου κ×1 διανύσματος παραμέτρων γ και, πιθανώς, μιας T×m μήτρας Z, με στοιχεία παρατηρήσεις σε ένα σύνολο εξωγενών μεταβλητών, μερικές από τις οποίες ενδέχεται να είναι και παλινδρομητές (regressors). Το διάνυσμα γ ανήκει στον παραμετρικό χώρο Θ, που είναι κάποιο ανοικτό υποσύνολο του κ-διάστατου

Ευκλείδιου χώρου.

Έστω $\hat{\gamma}$ ένας συνεπής εκτιμητής του γ. Για κάθε συνάρτηση $f = f(\gamma)$, γράφουμε $\hat{f} = f(\hat{\gamma})$. Οι εφικτοί GLS εκτιμητές των β και σ^2 είναι:

$$\hat{\beta} = (X'\hat{\Omega}X)^{-1}X'\hat{\Omega}y, \tag{2.2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = (y-X\hat{\beta})'\hat{\Omega}(y-X\hat{\beta})/(T-n). \tag{2.3}$$

Γράφουμε $\Omega_i = \partial\Omega/\partial\gamma_i$, $\Omega_{ij} = \partial^2\Omega/\partial\gamma_i\partial\gamma_j$ κ.τ.λ. για τις $T\times T$ μήτρες των μερικών παραγώγων πρώτης, δεύτερης κ.τ.λ. τάξης της μήτρας Ω ως προς τα στοιχεία του διανύσματος γ.

Ορίζουμε το $(\kappa+1)\times 1$ διάνυσμα δ με στοιχεία

$$\delta_o = (\hat{\sigma}^2-\sigma^2)/\tau\sigma^2, \quad \delta_i = (\hat{\gamma}_i-\gamma_i)/\tau \quad (i = 1,\ldots,\kappa), \tag{2.4}$$

όπου $\tau = 1/\sqrt{T}$, είναι η "ασυμπτωτική κλίμακα" των αναπτυγμάτων μας.

Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες κανονικότητας:

(i) Τα στοιχεία των μητρών Ω και Ω^{-1} είναι φραγμένα για όλα τα T και για όλα τα $\gamma \in \Theta$ και οι μήτρες

$$A = X'\Omega X/T, \quad F = X'X/T \tag{2.5}$$

συγκλίνουν σε μη ιδιάζουσες μήτρες καθώς το $T\to\infty$.

(ii) Οι μερικές παράγωγοι, μέχρι και τέταρτης τάξης, των στοιχείων της μήτρας Ω ως προς τα στοιχεία του διανύσματος γ είναι φραγμένες για όλα τα T και για όλα τα $\gamma \in \Theta$.

(iii) Ο εκτιμητής $\hat{\gamma}$ είναι μια άρτια συνάρτηση του u και είναι συναρτησιακά ανεξάρτητος από τις παραμέτρους β, δηλαδή μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση μόνον των X, Z και σu.

(iv) Το διάνυσμα δ δέχεται ένα στοχαστικό ανάπτυγμα της μορφής

$$\delta = d_1 + \tau d_2 + \omega(\tau^2), \tag{2.6}$$

όπου η τάξη μεγέθους ω ορίζεται στο Παράρτημα Α (Ορισμός Α.3) και οι αναμενόμενες τιμές

$$E(d_1d_1'), \quad E(\sqrt{T}d_1 + d_2)$$

υπάρχουν και έχουν πεπερασμένα όρια καθώς το $T\to\infty$.

Οι δύο πρώτες συνθήκες συνεπάγονται ότι οι μήτρες

$$A_i = X'\Omega_iX/T, \quad A_{ij} = X'\Omega_{ij}X/T, \quad A^*_{ij} = X'\Omega_i\Omega^{-1}\Omega_jX/T \tag{2.7}$$

είναι φραγμένες και συνεπώς το κατά Taylor ανάπτυγμα του $\hat{\beta}$ είναι

ένα στοχαστικό ανάπτυγμα (Μαγδαληνός (1991)). Υπό την προϋπόθεση ότι οι παράμετροι β και γ είναι συναρτησιακά ανεξάρτητες, η υπόθεση (iii) ικανοποιείται για μιαν ευρεία κλάση εκτιμητών του γ, που περιλαμβάνει τους εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας (ML) και τους απλούς ή επαναληπτικούς εκτιμητές που βασίζονται στα κατάλοιπα της παλινδρόμησης (Breusch (1980), Rothenberg (1984a)). Επιπλέον, υπό την προϋπόθεση ότι η μήτρα Z ικανοποιεί μια συνθήκη όμοια με την (i), μπορούμε να δείξουμε ότι η συνθήκη (iv) ικανοποιείται για τις ίδιες κλάσεις των εκτιμητών του γ. Σημειώστε ότι <u>δεν</u> υποθέτουμε ότι ο εκτιμητής του γ είναι ασυμπτωτικά αποτελεσματικός.

Ορίζουμε τα βαθμωτά λ_o και μ_o, τα κ×1 διανύσματα λ και μ και την κ×κ μήτρα Λ από τις εξισώσεις:

$$\begin{bmatrix} \lambda_o & \lambda' \\ \lambda & \Lambda \end{bmatrix} = \lim_{T\to\infty} E(d_1 d_1'), \qquad \begin{bmatrix} \mu_o \\ \mu \end{bmatrix} = \lim_{T\to\infty} E(\sqrt{T} d_1 + d_2). \tag{2.8}$$

Για κάθε n×m μήτρα L με στοιχεία l_{ij} γράφουμε:

$$L = \left[(l_{ij})_{i=1,\ldots,n;\ j=1,\ldots,m}\right] \tag{2.9}$$

με τις αντίστοιχες τροποποιήσεις για τα διανύσματα και τις τετραγωνικές μήτρες. Αν τα l_{ij} είναι $n_i \times m_j$ μήτρες, τότε ο συμβολισμός (2.9) σημαίνει ότι η μήτρα L είναι μια $(\sum_{i=1}^{n} n_i) \times (\sum_{j=1}^{m} m_j)$ επιμερισμένη μήτρα με υπομήτρες τις l_{ij}. Τέλος θα χρησιμοποιήσουμε τα σύμβολα tr, vec, ⊗ και τον συμβολισμό του διαφορισμού μητρών όπως ορίζονται από τον Dhrymes ((1978), σελ. 518-540). Τα σύμβολα P_X, $\bar{P}_X$ υποδηλώνουν τους προβολικούς τελεστές στον χώρο που δημιουργείται από τις στήλες της μήτρας X και στο ορθογώνιο συμπλήρωμά του, αντίστοιχα.

<u>2.3 Ο t ΕΛΕΓΧΟΣ</u>

Έστω e_o ένα γνωστό βαθμωτό και e ένα γνωστό n×1 διάνυσμα. Για να ελέγξουμε την μηδενική υπόθεση

$$e'\beta - e_o = 0 \tag{2.10}$$

ως προς μονόπλευρες (one-sided) εναλλακτικές υποθέσεις χρησιμοποιούμε το στατιστικό

$$t = (e'\hat{\beta}-e_o)/\left[\hat{\sigma}^2 e'(X'\hat{\Omega}X)^{-1}e\right]^{1/2} . \qquad (2.11)$$

Ορίζουμε το κx1 διάνυσμα l και την κxκ μήτρα L ως

$$l = \left[(l_i)_{i=1,\ldots,\kappa}\right], \quad L = \left[(l_{ij})_{i,j=1,\ldots,\kappa}\right], \qquad (2.12)$$

όπου

$$l_i = e'GA_iGe/e'Ge, \quad l_{ij} = e'GC_{ij}Ge/e'Ge, \qquad (2.13)$$

$$G = (X'\Omega X/T)^{-1}, \quad C_{ij} = A^*_{ij}-2A_iGA_j+A_{ij}/2 \qquad (2.14)$$

και οι μήτρες A_i, A_{ij} και A^*_{ij} έχουν οριστεί στην (2.7).

ΛΗΜΜΑ 2.1: *Κάτω από την μηδενική υπόθεση (2.10), η συνάρτηση κατανομής του στατιστικού (2.11) δέχεται το Edgeworth ανάπτυγμα*

$$Pr(t \le x) = I(x) - \frac{\tau^2}{2}\left[(p_1 + \frac{1}{2}) + (p_2 + \frac{1}{2})x^2\right]xi(x) + O(\tau^3), \qquad (2.15)$$

όπου

$$p_1 = tr(\Lambda L) + l'\Lambda l/4 + l'(\mu+\lambda/2) - \mu_o + (\lambda_o-2)/4,$$

$$p_2 = (l'\Lambda l - 2l'\lambda + \lambda_o - 2)/4 \qquad (2.16)$$

και $I(\cdot)$, $i(\cdot)$ είναι οι συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας, αντίστοιχα, της τυπικής κανονικής κατανομής.

Από το Λήμμα 2.1 προκύπτει το ακόλουθο πόρισμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.1: *Η Edgeworth διορθωμένη κριτική τιμή του στατιστικού (2.11) είναι*

$$i^*_\alpha = i_\alpha + \frac{\tau^2}{2}\left[(p_1+1/2) + (p_2+1/2)i^2_\alpha\right]i_\alpha, \qquad (2.17)$$

όπου i_α είναι η αντίστοιχη α κριτική τιμή της τυπικής κανονικής κατανομής.

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.1 μπορούμε να αποδείξουμε το κατωτέρω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1: *Κάτω από την υπόθεση (2.10) και αν ικανοποιούνται οι συνθήκες κανονικότητας το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο στατιστικό*

$$\tilde{t} = t - \frac{\tau^2}{2}\left[(p_1+1/2) + (p_2+1/2)t^2\right]t \qquad (2.18)$$

κατανέμεται, με ένα λάθος τάξης $O(\tau^3)$, ως μια τυπική κανονική μεταβλητή.

Ακολουθώντας την σχετική συζήτηση του Κεφαλαίου 1 προτείνουμε την χρησιμοποίηση του "προσαρμοσμένου για τους βαθμούς ελευθερίας" t ελέγχου αντί της "ασυμπτωτικής" μορφής αυτού του ελέγχου.

ΛΗΜΜΑ 2.2: *Κάτω από την μηδενική υπόθεση (2.10) η συνάρτηση κατανομής του στατιστικού (2.11) δέχεται το ανάπτυγμα τύπου Edgeworth*

$$Pr(t \le x) = I_{T-n}(x) - \frac{\tau^2}{2}(p_1 + p_2 x^2) x i_{T-n}(x) + O(\tau^3), \qquad (2.19)$$

όπου οι ποσότητες p_1 *και* p_2 *έχουν οριστεί στην (2.16) και* $I_{T-n}(\cdot)$, $i_{T-n}(\cdot)$ *είναι οι συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας, αντίστοιχα, μιας* t *μεταβλητής με* T-n *βαθμούς ελευθερίας. Επιπλέον, η προσέγγιση είναι τοπικά ακριβής (locally exact), δηλαδή, αν είναι γνωστό ότι το* γ *ανήκει σε μια σφαίρα ακτίνας* θ, *τότε η προσέγγιση γίνεται ακριβής καθώς το* $\theta \to 0$.

Από το Λήμμα 2.2 παίνουμε το κατωτέρω πόρισμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.2: *Η τύπου Edgeworth διορθωμένη κριτική τιμή του στατιστικού (2.11) είναι*

$$t_\alpha^* = t_\alpha + \frac{\tau^2}{2}(p_1 + p_2 t_\alpha^2) t_\alpha, \qquad (2.20)$$

όπου t_α *είναι η αντίστοιχη* α *κριτική τιμή της* t *κατανομής με* T-n *βαθμούς ελευθερίας.*

Από το Λήμμα 2.2 έπεται το ακόλουθο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2: *Κάτω από την υπόθεση (2.10) και αν ικανοποιούνται οι συνθήκες κανονικότητας το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο στατιστικό*

$$\hat{t} = t - \frac{\tau^2}{2}(p_1 + p_2 t^2) t \qquad (2.21)$$

κατανέμεται, με ένα λάθος τάξης $O(\tau^3)$, *ως μια* t *μεταβλητή με* T-n *βαθμούς ελευθερίας. Επιπλέον, η προσέγγιση είναι τοπικά ακριβής (locally exact), δηλαδή, αν είναι γνωστό ότι το* γ *ανήκει σε μια σφαίρα ακτίνας* θ, *τότε η προσέγγιση γίνεται ακριβής καθώς το* $\theta \to 0$.

Παρά το γεγονός ότι στην παρούσα εργασία δεν εξετάζουμε θέματα σχετικά με την ισχύ του t ελέγχου, σημειώνουμε πως είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι, μέχρι την τάξη μεγέθους της προσέγγισής μας, η τοπική ισχύς (local power) του ελέγχου που βασίζεται στο κατά Cornish-Fisher διορθωμένο t στατιστικό (2.21) είναι ίδια με την ισχύ του ελέγχου που στηρίζεται στην Edgeworth ή τύπου

Edgeworth διορθωμένη κριτική τιμή του στατιστικού (2.11), που δίνονται στις σχέσεις (2.17) και (2.20), αντίστοιχα.

Στην εφαρμοσμένη στατιστική και οικονομετρική έρευνα, ο ερευνητής μπορεί να χρησιμοποιήσει το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο t στατιστικό (2.21) όπως ακριβώς θα χρησιμοποιούσε το σύνηθες t στατιστικό (2.11) στο κλασσικό γραμμικό υπόδειγμα για να διενεργήσει ελέγχους στατιστικής σημαντικότητας των διαρθρωτικών παραμέτρων, για να ελέγξει μονοκατάληκτες γραμμικές υποθέσεις για τα στοιχεία του διανύσματος β κ.τ.λ. Επιπλέον, ο χρήστης μπορεί να υπολογίσει το επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας (p-value) μιας συγκεκριμένης τιμής, έστω t_o, του στατιστικού (2.11) χρησιμοποιώντας το ακόλουθο πόρισμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.3: *Το επίπεδο σημαντικότητας που αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη τιμή, έστω t_o, του συνήθους t στατιστικού (2.11) προκύπτει συγκρίνοντας την τιμή του κατά Cornish-Fisher διορθωμένου t στατιστικού (2.21), έστω $\hat{t}_o$, με την συνάρτηση κατανομής της t-Student κατανομής. Δηλαδή*

$$Pr(t \leq t_o) = I_{T-n}(\hat{t}_o) + O(\tau^3)$$
$$\text{και} \qquad (2.22)$$
$$Pr(t > t_o) = 1 - I_{T-n}(\hat{t}_o) + O(\tau^3),$$

όπου $I_{T-n}(\cdot)$, $i_{T-i}(\cdot)$ είναι οι συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας, αντίστοιχα, μιας t μεταβλητής με T-n βαθμούς ελευθερίας.

Είναι προφανές ότι στην εφαρμοσμένη έρευνα οι ποσότητες p_1 και p_2 στην (2.16) εκτιμώνται ως $\hat{p}_1$ και $\hat{p}_2$, αντίστοιχα, και επομένως το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο στατιστικό (2.21) υπολογίζεται από τον τύπο

$$\hat{t} = t - \frac{\tau^2}{2}(\hat{p}_1 + \hat{p}_2 t^2)t, \qquad (2.23)$$

όπου το σύμβολο "^" συμβολίζει τις εκτιμήσεις των αντιστοίχων ποσοτήτων από τα δεδομένα.

Στην περίπτωση του δικατάληκτου (two-sided) ελέγχου στατιστικής σημαντικότητας της κ-διαρθρωτικής παραμέτρου, β_κ, από την υπόθεση (2.10) έπεται ότι το e έχει 1 στην κ-θέση και 0 οπουδήποτε αλλού. Συνεπώς τα στοιχεία των l και L εκτιμώνται ως

$$\hat{l}_i = \hat{g}_x'\hat{A}_i\hat{g}_x/\hat{g}_{xx}, \quad \hat{l}_{ij} = \hat{g}_x'\hat{C}_{ij}\hat{g}_x/\hat{g}_{xx}, \tag{2.24}$$

αντίστοιχα, όπου $\hat{g}_x$ είναι η κ-στήλη και $\hat{g}_{xx}$ είναι το κ-διαγώνιο στοιχείο, αντίστοιχα, της μήτρας $\hat{G} = (X'\hat{\Omega}X/T)^{-1}$. Επιπλέον, το σύμβολο "^" συμβολίζει τις εκτιμήσεις των αντιστοίχων ποσοτήτων από τα δεδομένα. Τέλος από το Πόρισμα 2.2 προκύπτει το ακόλουθο πόρισμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.4: *Ένα συμμετρικό διάστημα εμπιστοσύνης με πιθανότητα* $1-\alpha + O(\tau^3)$ *να περιέχει το* κ*-στοιχείο του διανύσματος* β *είναι*

$$I_\alpha = \left\{\beta_\kappa : |\hat{\beta}_\kappa - \beta_\kappa| \le (\hat{\sigma}^2\hat{g}_{xx}/T)^{1/2}\left[1 + (\hat{p}_1 + \hat{p}_2 t^2_{\alpha/2})/2T\right] t_{\alpha/2}\right\}, \tag{2.25}$$

όπου τα $\hat{p}_1$ *και* $\hat{p}_2$ *υπολογίζονται από τις* (2.16) *και* (2.24) *και* $t_{\alpha/2}$ *είναι η* $\alpha/2$ *κριτική τιμή της* t *κατανομής με* T-n *βαθμούς ελευθερίας.*

2.4 Ο F ΕΛΕΓΧΟΣ

Έστω H μια r×n γνωστή μήτρα βαθμού r και h ένα γνωστό r×1 διάνυσμα. Ο έλεγχος της μηδενικής υπόθεσης

$$H\beta - h = 0 \tag{2.26}$$

βασίζεται στο στατιστικό του Wald

$$w = (H\hat{\beta}-h)'\left[H(X'\hat{\Omega}X)^{-1}H'\right]^{-1}(H\hat{\beta}-h)/\hat{\sigma}^2. \tag{2.27}$$

Ορίζουμε το κ×1 διάνυσμα c και τις κ×κ μήτρες C και D ως

$$c = \left[(\mathrm{tr}A_iP)_{i=1,\ldots,\kappa}\right], \quad C = \left[(\mathrm{tr}C_{ij}P)_{i,j=1,\ldots,\kappa}\right]$$
και
$$D = \left[(\mathrm{tr}D_{ij}P)_{i,j=1,\ldots,\kappa}\right], \tag{2.28}$$

όπου οι μήτρες A_i και C_{ij} έχουν οριστεί στις (2.7) και (2.14), αντίστοιχα, και

$$P = GQG, \quad Q = H'(HGH')^{-1}H, \quad D_{ij} = A_iPA_j/2. \tag{2.29}$$

ΛΗΜΜΑ 2.3: *Κάτω από την μηδενική υπόθεση* (2.26) *η συνάρτηση κατανομής του στατιστικού* (2.27) *δέχεται το ανάπτυγμα τύπου Edgeworth*

$$\Pr(w \le x) = F_r(x) - \tau^2(h_1 + h_2\frac{x}{r+2})\frac{x}{r} f_r(x) + O(\tau^3), \tag{2.30}$$

όπου

$$h_1 = tr[\Lambda(C+D)] - c'\Lambda c/4 + c'\mu + r[c'\lambda/2 - \mu_o - (r-2)\lambda_o/4],$$

$$h_2 = tr(\Lambda D) + [c'\Lambda c - (r+2)(2c'\lambda - r\lambda_o)]/4 \qquad (2.31)$$

και $F_r(\cdot)$, $f_r(\cdot)$ *είναι οι συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας, αντίστοιχα, μιας* χ^2 *μεταβλητής με* r *βαθμούς ελευθερίας.*

Από το Λήμμα 2.3 παίρνουμε το κατωτέρω πόρισμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.5: *Η τύπου Edgeworth διορθωμένη κριτική τιμή του στατιστικού (2.27) είναι*

$$\chi_\alpha^{2*} = \chi_\alpha^2 + \tau^2\left[\frac{h_1}{r} + \frac{h_2}{r(r+2)}\chi_\alpha^2\right]\chi_\alpha^2, \qquad (2.32)$$

όπου χ_α^2 *είναι η άνω* α *κριτική τιμή της* χ^2 *κατανομής με* r *βαθμούς ελευθερίας.*

Από το Λήμμα 2.3 προκύπτει το κατωτέρω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3: *Κάτω από την υπόθεση (2.26) και αν ισχύουν οι συνθήκες κανονικότητας το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο στατιστικό*

$$\hat{w} = w - \tau^2\left[\frac{h_1}{r} + \frac{h_2}{r(r+2)}w\right]w \qquad (2.33)$$

κατανέμεται, με ένα λάθος τάξης $O(\tau^3)$, *ως μια* χ^2 *μεταβλητή με* r *βαθμούς ελευθερίας.*

Οι παράμετροι h_1 και h_2 ως συναρτήσεις του αγνώστου διανύσματος παραμέτρων γ δεν είναι γνωστές. Επομένως, στην εφαρμοσμένη έρευνα οι παράμετροι αυτές εκτιμώνται ως

$$\hat{h}_i = h_i(\hat{\gamma}) = h_i + \omega(\tau) \quad (i = 1,2), \qquad (2.34)$$

για να γίνουν εφαρμόσιμες οι σχέσεις (2.32) και (2.33), όπου το σύμβολο "^" συμβολίζει τις εκτιμήσεις των αντιστοίχων ποσοτήτων από τα δεδομένα.

Η ακριβής κατανομή του στατιστικού (2.27) δεν έχει πινακοποιηθεί, ακόμα και για τις περιπτώσεις κατά τις οποίες το διάνυσμα γ είναι γνωστό. Για αυτό είναι προτιμότερο να διορθώσουμε το στατιστικό (2.27) για τους βαθμούς ελευθερίας του αριθμητή παίρνοντας έτσι το στατιστικό

$$v = (H\hat{\beta}-h)'[H(X'\hat{\Omega}X)^{-1}H']^{-1}(H\hat{\beta}-h)/r\hat{\sigma}^2. \qquad (2.35)$$

Το στατιστικό (2.35) είναι το ακριβές ανάλογο του γνωστού F στατιστικού στο κλασσικό γραμμικό υπόδειγμα και κατανέμεται

ακριβώς ως μια F μεταβλητή όταν το διάνυσμα γ είναι γνωστό.

ΛΗΜΜΑ 2.4: *Κάτω από την υπόθεση (2.26) η συνάρτηση κατανομής του στατιστικού (2.35) έχει το ανάπτυγμα τύπου Edgeworth*

$$Pr(v \le x) = F^{r}_{T-n}(x) - \tau^2(q_1 + q_2 x) x f^{r}_{T-n}(x) + O(\tau^3), \qquad (2.36)$$

όπου

$$q_1 = h_1/r + (r-2)/2,$$

$$q_2 = h_2/(r+2) - r/2 \qquad (2.37)$$

και $F^{r}_{T-n}(\cdot)$, $f^{r}_{T-n}(\cdot)$ *είναι οι συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας, αντίστοιχα, μιας F μεταβλητής με r και T−n βαθμούς ελευθερίας. Επιπλέον, η προσέγγιση είναι τοπικά ακριβής (locally exact), δηλαδή, αν είναι γνωστό ότι το γ ανήκει σε μια σφαίρα ακτίνας θ, τότε η προσέγγιση γίνεται ακριβής καθώς το* $\theta \longrightarrow 0$.

Από το Λήμμα 2.4 προκύπτει το επόμενο πόρισμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.6: *Η τύπου Edgeworth διορθωμένη κριτική τιμή του στατιστικού (2.35) είναι*

$$F^{*}_{\alpha} = F_{\alpha} + \tau^2(q_1 + q_2 F_{\alpha}) F_{\alpha}, \qquad (2.38)$$

όπου F_{α} *είναι η άνω α κριτική τιμή της F κατανομής με r και T−n βαθμούς ελευθερίας.*

Από το Λήμμα 2.4 προκύπτει το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4: *Κάτω από την υπόθεση (2.26) και αν ισχύουν οι συνθήκες κανονικότητας το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο στατιστικό*

$$\hat{v} = v - \tau^2(q_1 + q_2 v) v \qquad (2.39)$$

κατανέμεται, με ένα λάθος τάξης $O(\tau^3)$, *ως μια F μεταβλητή με r και T−n βαθμούς ελευθερίας. Επιπλέον, η προσέγγιση είναι τοπικά ακριβής (locally exact), δηλαδή, αν είναι γνωστό ότι το γ ανήκει σε μια σφαίρα ακτίνας θ, τότε η προσέγγιση γίνεται ακριβής καθώς το* $\theta \longrightarrow 0$.

Όπως και στην περίπτωση του t ελέγχου, είναι εύκολο να δειχθεί ότι, μέχρι την τάξη μεγέθους της προσέγγισής μας, η τοπική ισχύς (local power) του ελέγχου που βασίζεται στο κατά Cornish–Fisher διορθωμένο F στατιστικό (2.39) είναι ίδια με την ισχύ του ελέγχου που στηρίζεται στην τύπου Edgeworth διορθωμένη

κριτική τιμή του συνήθους F στατιστικού (2.35) (βλ. Rothenberg (1984b)).

Στην εφαρμοσμένη στατιστική και οικονομετρική έρευνα, ο ερευνητής μπορεί να χρησιμοποιήσει το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο F στατιστικό (2.39) όπως ακριβώς θα χρησιμοποιούσε το σύνηθες F στατιστικό (2.35) στο κλασσικό γραμμικό υπόδειγμα για να πραγματοποιήσει ελέγχους στατιστικής σημαντικότητας της εκτιμημένης εξίσωσης, να ελέγξει δικατάληκτες γραμμικές υποθέσεις για τα στοιχεία του διανύσματος β κ.τ.λ. Επιπλέον, ο χρήστης μπορεί να υπολογίσει το επίπεδο σημαντικότητας (p-value) μιας συγκεκριμένης τιμής, έστω v_o, του στατιστικού (2.35) χρησιμοποιώντας το ακόλουθο πόρισμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.7: *Το επίπεδο σημαντικότητας που αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη τιμή, έστω v_o, του συνήθους F στατιστικού (2.35) προκύπτει αν συγκρίνουμε την τιμή του κατά Cornish-Fisher διορθωμένου F στατιστικού (2.39), έστω $\hat{v}_o$, με τους πίνακες της F κατανομής. Δηλαδή, αν $F^r_{T-n}(\cdot)$, $f^r_{T-n}(\cdot)$ είναι οι συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας, αντίστοιχα, της F κατανομής με r και T-n βαθμούς ελευθερίας, ισχύει ότι*

$$\Pr(v > v_o) = 1 - F^r_{T-n}(\hat{v}_o) + O(\tau^3). \qquad (2.40)$$

Ο έλεγχος της από κοινού σημαντικότητας όλων των διαρθρωτικών παραμέτρων του υποδείγματος (2.1) διευκολύνεται από την χρησιμοποίηση του ακολούθου πορίσματος.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.8: *Στην περίπτωση κατά την οποία θέλουμε να ελέγξουμε την από κοινού στατιστική σημαντικότητα όλων των διαρθρωτικών παραμέτρων, έχουμε ότι r = n και ότι η μήτρα H της (2.26) ισούται με την nxn ταυτοτική μήτρα, δηλαδή $H = I_n$. Τότε τα στοιχεία των c, D και $C^* = C + D$ είναι*

$$c_i = \mathrm{tr}(A_i G), \quad d_{ij} = (\mathrm{tr} A_i G A_j G/2),$$
$$c^*_{ij} = \mathrm{tr}\left[(A^*_{ij} + A_{ij}/2)G\right] - 3d_{ij}. \qquad (2.41)$$

Επιπλέον, οι ποσότητες q_1 και q_2 που ορίστηκαν στην (2.37) γίνονται

$$q_1 = [tr(\Lambda C^*) - c'\Lambda c/4 + c'\mu]/n + c'\lambda/2 - \mu_o - (n-2)(\lambda_o-2)/4$$

και (2.42)

$$q_2 = \frac{1}{n+2}\left[tr(\Lambda D) + \frac{1}{4}[c'\Lambda c - (n+2)(2c'\lambda - n(\lambda_o-2))]\right].$$

Στο σημείο αυτό είναι σκόπιμο να σημειωθεί ότι στην εφαρμοσμένη έρευνα οι ποσότητες q_1 και q_2 στην (2.37) εκτιμώνται από τα δεδομένα ως $\hat{q}_1$ και $\hat{q}_2$, αντίστοιχα, και επομένως το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο F στατιστικό (2.39) υπολογίζεται από τον τύπο

$$\hat{v} = v - \tau^2(\hat{q}_1 + \hat{q}_2 v)v, \qquad (2.43)$$

όπου το σύμβολο "^" συμβολίζει τις εκτιμήσεις των αντιστοίχων ποσοτήτων από τα δεδομένα.

Από το Πόρισμα 2.6 προκύπτει το ακόλουθο πόρισμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.9: *Ένα συμμετρικό ελλειψοειδές εμπιστοσύνης με πιθανότητα* $1-\alpha + O(\tau^3)$ *να περιέχει το διάνυσμα* β *είναι*

$$E_\alpha = \left\{\beta : (\hat{\beta}-\beta)'X'\hat{\Omega}X(\hat{\beta}-\beta) \le n\hat{\sigma}^2[1 + (\hat{q}_1 + \hat{q}_2 x_\alpha)/T]F_\alpha\right\}, \qquad (2.44)$$

όπου τα $\hat{q}_1$ *και* $\hat{q}_2$ *υπολογίζονται από τις* (2.41) *και* (2.42) *και* F_α *είναι η άνω* α *κριτική τιμή της F κατανομής με n και T-n βαθμούς ελευθερίας.*

2.5 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΕΛΕΓΧΩΝ t ΚΑΙ F

Η υπόθεση (2.26) είναι ίδια με την (2.10) για

$$H = e', \quad h = e_o, \quad r = 1. \qquad (2.45)$$

Θέτουμε

$$k = e/(e'Ge)^{1/2}, \qquad (2.46)$$

οπότε από τις (2.29), (2.45) και (2.46) βρίσκουμε

$$Q = H'(HGH')^{-1}H = e(e'Ge)^{-1}e' = kk'$$

και (2.47)

$$P = GQG = Gkk'G.$$

Από τις (2.12), (2.13), (2.14), (2.28), (2.46) και (2.47) παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

(i) $trA_iP = trA_iGkk'G = trk'GA_iGk = e'GA_iGe/e'Ge = l_i,$

(ii) $trA_iPA_jP = trA_iGkk'GA_jGkk'G = trk'GA_iGkk'GA_jGk =$

$$= (e'GA_iGe/e'Ge)(e'GA_jGe/e'Ge) = l_il_j,$$

(iii) $trC_{ij}P = trC_{ij}Gkk'G = trk'GC_{ij}Gk = e'GC_{ij}Ge/e'Ge = l_{ij}.$

Από την απόδειξη του Λήμματος 2.1 (βλ. Παράρτημα Β) και χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα (i), (ii) και (iii) συμπεραίνουμε ότι για τον t έλεγχο σχύουν οι σχέσεις:

$$p_1 = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{ij}(l_{ij} + \frac{1}{4}\,l_il_j) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} l_i(\mu_i + \frac{1}{2}\,\lambda_{io}) + \frac{1}{4}\,\lambda_o - \mu_o - \frac{1}{2} \qquad (2.48)$$

και

$$p_2 = \frac{1}{4}\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{ij}l_il_j - 2\sum_{i=1}^{\infty} l_i\lambda_{io} + \lambda_o\Big) - \frac{1}{2}. \qquad (2.49)$$

Από την απόδειξη του Λήμματος 2.3 (βλ. Παράρτημα Β) και χρησιμοποιώντας την (2.45) και τα αποτελέσματα (i), (ii) και (iii) συμπεραίνουμε ότι για τον F έλεγχο, όταν r = 1, ισχύουν οι σχέσεις:

$$h_1 = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{ij}(trC_{ij}P) - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{ij}\big[(trA_iP)(trA_jP) - 2(trA_iPA_jP)\big] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty}(\mu_i + \frac{r}{2}\,\lambda_{io})(trA_iP) - r(\mu_o + \frac{r-2}{4}\,\lambda_o) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{ij}(l_{ij} + \frac{1}{4}\,l_il_j) + \sum_{i=1}^{\infty} l_i(\mu_i + \frac{1}{2}\,\lambda_{io}) + \frac{1}{4}\,\lambda_o - \mu_o \qquad (2.50)$$

και

$$h_2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{ij}(trA_iP)(trA_jP) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{ij}(trA_iPA_jP) -$$

$$- \frac{r+2}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_{io}(trA_iP) + \frac{r(r+2)}{4}\,\lambda_o =$$

$$= \frac{3}{4}\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{ij}l_il_j - 2\sum_{i=1}^{\infty} l_i\lambda_{io} + \lambda_o\Big). \qquad (2.51)$$

Από τις (2.37), (2.45), (2.48), (2.49), (2.50) και (2.51) βρίσκουμε ότι

$$q_1 = h_1 - 1/2 = p_1, \quad q_2 = h_2/3 - 1/2 = p_2. \qquad (2.52)$$

Από το Πόρισμα 2.2 έπεται ότι η τύπου Edgeworth διορθωμένη κριτική τιμή για τον δικατάληκτο t έλεγχο της (2.10) σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας α είναι

$$t^{*}_{\alpha/2} = t_{\alpha/2} + \frac{\tau^2}{2}(p_1 + p_2 t^2_{\alpha/2})\, t_{\alpha/2}, \qquad (2.53)$$

όπου $t_{\alpha/2}$ είναι η α/2 κριτική τιμή της t-Student κατανομής με T-n βαθμούς ελευθερίας. Επιπλέον, από το Πόρισμα 2.6 έπεται ότι, αν ισχύει η (2.45), η τύπου Edgeworth διορθωμένη κριτική τιμή για τον F έλεγχο της (2.26) σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας α είναι

$$F^{*}_{\alpha} = F_{\alpha} + \tau^2(q_1 + q_2 F_{\alpha})F_{\alpha}, \qquad (2.54)$$

όπου F_{α} είναι η άνω α κριτική τιμή της F κατανομής με 1 και T-n βαθμούς ελευθερίας. Από τις (2.52), (2.53) και (2.54) και δεδομένου ότι $t^2_{\alpha/2} = F_{\alpha}$ έχουμε ότι

$$(t^{*}_{\alpha/2})^2 = \left[t_{\alpha/2} + \frac{\tau^2}{2}(p_1 + p_2 t^2_{\alpha/2})\, t_{\alpha/2}\right]^2 =$$

$$= t^2_{\alpha/2} + 2\,\frac{\tau^2}{2}(p_1 + p_2 t^2_{\alpha/2})\, t^2_{\alpha/2} + O(\tau^4) =$$

$$= F_{\alpha} + \tau^2(q_1 + q_2 F_{\alpha})F_{\alpha} + O(\tau^4) = F^{*}_{\alpha} + O(\tau^4). \qquad (2.55)$$

Η σχέση (2.55) συνεπάγεται ότι, μέχρι την ακρίβεια της προσέγγισής μας, οι κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher μέθοδοι διόρθωσης του μεγέθους των t και F ελέγχων, οι οποίες βασίζονται στα τύπου Edgeworth αναπτύγματα των συναρτήσεων κατανομής των συνήθων t και F στατιστικών, δεν αλλοιώνουν την μεταξύ των t και F ελέγχων υφισταμένη σχέση. Επομένως, οι έλεγχοι t και F είναι ισοδύναμοι με ένα σφάλμα τάξης $O(\tau^4)$. Η ύπαρξη του ανωτέρω σφάλματος επιβάλλει την παραγωγή των κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher διορθώσεων του μεγέθους του t ελέγχου ανεξάρτητα από τις αντίστοιχες διορθώσεις του ελέγχου F.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΑΥΤΟΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

3.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό εξειδικεύονται οι αναλυτικοί τύποι των κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher διορθώσεων του μεγέθους των t και F ελέγχων για την περίπτωση του γραμμικού υποδείγματος με αυτοσυσχέτιση πρώτου βαθμού. Σκοπός μας είναι η ανάπτυξη απλών λειτουργικών τύπων για τον υπολογισμό των διαφόρων διορθώσεων που να χρησιμοποιούν, όσο αυτό είναι δυνατό, ποσότητες που έχουν ήδη υπολογισθεί κατά την εκτιμητική διαδικασία. Πράγματι, οι τύποι που δίνονται στις Προτάσεις 3.1 και 3.2, κατωτέρω, αποτελούν σημαντική βελτίωση σε σχέση με τους τύπους των Rothenberg (1984b), (1988) και Magee (1989) και απλοποιούν τον υπολογισμό των κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher διορθώσεων στην περίπτωση του γραμμικού υποδείγματος με αυτοσυσχέτιση πρώτου βαθμού. Επιπλέον, Monte Carlo πειράματα χρησιμοποιούνται για να διερευνηθεί η ποιότητα των ανωτέρω διορθώσεων. Τα αποτελέσματα αυτών των πειραμάτων παρουσιάζονται και σχολιάζονται διεξοδικά.

Στο Κεφάλαιο 2 έγινε η υπόθεση ότι η μήτρα συνδιακυμάνσεων των διαταρακτικών όρων, έστω Ω^{-1}, εκτός από έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα, ανήκει σε μια σφαίρα ακτίνας θ. Επομένως, ο ορισμός της τοπικά ακριβούς προσέγγισης προϋποθέτει ότι υπάρχει ένα βαθμωτό πολλαπλάσιο, σ^2, της μήτρας Ω^{-1} που μπορεί να εξετασθεί ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες παραμέτρους της. Όταν έχουμε αυτοσυσχετιζόμενα σφάλματα ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας σ^2 μπορεί να ταυτιστεί με την διακύμανση των λαθών στο αυτοπαλίνδρομο σχήμα. Στην περίπτωση αυτή η παράμετρος σ^2 είναι ταυτοποιημένη και δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα στον ορισμό της τοπικής ακρίβειας και των διορθώσεων των t και F στατιστικών.

3.2 ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ

Το γενικευμένο γραμμικό υπόδειγμα με αυτοσυσχέτιση πρώτου βαθμού είναι

$$y = X\beta + \sigma u, \qquad (3.1)$$

όπου y είναι ένα $T\times 1$ διάνυσμα παρατηρήσεων της εξαρτημένης

μεταβλητής, X είναι μια T×n μήτρα εξωγενών μεταβλητών, β είναι ένα n×1 διάνυσμα αγνώστων παραμέτρων και σu ($\sigma > 0$) είναι το T×1 διάνυσμα των μη παρατηρουμένων λαθών. Το διάνυσμα u κατανέμεται ως $N(0,\Omega^{-1})$, όπου Ω είναι μια T×T μήτρα. Τα στοιχεία του διανύσματος u δημιουργούνται από μια στάσιμη (stationary) AR(1) στοχαστική διαδικασία:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad (t = 2,\ldots,T), \tag{3.2}$$

όπου

$$\rho \in \Theta = \{x: 0 < |x| < 1\},$$

$$u_t \sim N(0,1/\alpha), \tag{3.3}$$

$$\alpha = 1-\rho^2$$

και ε_t είναι ανεξάρτητες τυπικές κανονικές μεταβλητές. Είναι φανερό ότι

$$\Omega^{-1} = E(uu') = R/\alpha, \tag{3.4}$$

όπου

$$R = [(\rho^{|t-s|})_{t,s=1,\ldots,T}] \tag{3.5}$$

και

$$\Omega = (1+\rho^2) I_T - \rho D - \rho^2 \Delta, \tag{3.6}$$

όπου D είναι μια μήτρα της οποίας το (i,j)-στοιχείο είναι 1 όταν $|i-j| = 1$ και 0 οπουδήποτε αλλού και Δ είναι μια μήτρα που έχει 1 στις (1,1) και (T,T) θέσεις και 0 οπουδήποτε αλλού.

Από τους πολλούς εκτιμητές του ρ που έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία αυτοί που χρησιμοποιούνται συχνότερα στην εφαρμοσμένη έρευνα είναι:

(i) Ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης των καταλοίπων των ελαχίστων τετραγώνων (LS)

$$\tilde{\rho}_{LS} = \sum_{t=2}^{T} \tilde{u}_t \tilde{u}_{t-1} / \sum_{t=1}^{T} \tilde{u}_t^2, \tag{3.7}$$

όπου $\tilde{u}_t$ είναι τα κατάλοιπα ελαχίστων τετραγώνων.

(ii) Η προσέγγιση από το στατιστικό Durbin-Watson (DW)

$$\hat{\rho}_{DW} = 1-d/2, \tag{3.8}$$

όπου d είναι το στατιστικό Durbin-Watson.

(iii) Ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης των καταλοίπων των γενικευμένων

ελαχίστων τετραγώνων (GL)

$$\hat{\rho}_{GL} = \sum_{t=2}^{T} \hat{u}_t \hat{u}_{t-1} / \sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2, \qquad (3.9)$$

όπου $\hat{u}_t$ είναι τα κατάλοιπα των γενικευμένων ελαχίστων τετραγώνων, υπολογισμένα με την χρησιμοποίηση οποιουδήποτε ασυμπτωτικά αποτελεσματικού εκτιμητή του ρ.

(iv) Ο Prais-Winsten (1954) εκτιμητής (PW). Έστω $\hat{\beta}_{PW}$ και $\hat{\rho}_{PW}$ οι Prais-Winsten εκτιμητές των β και ρ, αντίστοιχα· αυτοί ελαχιστοποιούν το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων των γενικευμένων ελαχίστων τετραγώνων.

(v) Ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας (ML), ο οποίος, όπως έδειξαν οι Beach και MacKinnon (1978), ικανοποιεί μιαν κυβική εξίσωση με συντελεστές που ορίζονται σε όρους των καταλοίπων μεγίστης πιθανοφάνειας.

Μπορούμε να δείξουμε ότι οι συνθήκες κανονικότητας του Κεφαλαίου 2 ικανοποιούνται για όλους αυτούς τους εκτιμητές, υπό την προϋπόθεση ότι οι μήτρες

$$A = X'\Omega X/T, \quad F = X'X/T \qquad (3.10)$$

συγκλίνουν σε μη ιδιάζουσες μήτρες καθώς το $T \longrightarrow \infty$. Επιπλέον, ορίζουμε τις μήτρες

$$G = A^{-1}, \quad B = F^{-1}, \quad \Gamma = X'RX/T. \qquad (3.11)$$

3.3 ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΤΩΝ t ΚΑΙ F ΕΛΕΓΧΩΝ

Οι υπολογισμοί των διανυσμάτων l και c και των μητρών L, C και D από τους ορισμούς (2.12), (2.13), (2.14), (2.28) και (2.29) είναι άμεσοι, αλλά μπορεί να έχουν μεγάλο υπολογιστικό κόστος όταν το μέγεθος του δείγματος, T, είναι μεγάλο. Τότε είναι προτιμότερη η χρησιμοποίηση των ασυμπτωτικών τύπων, οι οποίοι δίνονται στις προτάσεις αυτού του κεφαλαίου.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1: *Το διάνυσμα και η μήτρα που ορίζονται στις (2.12) και (2.13) μπορούν να υπολογισθούν από τους τύπους*

$$l = \frac{1}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho} h'GFGh, \quad L = \frac{1-\rho l}{\alpha\rho^2} - \frac{l}{\rho} + \frac{\alpha}{\rho^2} h'G(\Gamma - 2\alpha FGF)Gh, \qquad (3.12)$$

όπου $h = e/(e'Ge)^{1/2}$. *Όμοια, το διάνυσμα και οι μήτρες που ορίζονται στην (2.28) μπορούν να υπολογισθούν από τους τύπους*

$$c = \frac{r}{\rho} - \frac{\alpha}{\rho}\,\mathrm{tr}(FP),$$

$$C = \frac{r-\rho c}{\alpha\rho^2} - \frac{c}{\rho} + \frac{\alpha}{\rho^2}\,\mathrm{tr}(\Gamma P) - 2\frac{\alpha^2}{\rho^2}\,\mathrm{tr}(FGFP), \qquad (3.13)$$

$$D = \frac{c}{\rho} - \frac{r}{2\rho^2} + \frac{\alpha^2}{2\rho^2}\,\mathrm{tr}(FP)^2,$$

όπου η μήτρα P έχει οριοθεί στην (2.29). Η διαφορά μεταξύ των αρχικών ορισμών (2.13), (2.28) και των τύπων (3.12), (3.13), αντίστοιχα, είναι τάξης $O(\tau^2)$, δηλαδή είναι ασήμαντη σε σχέση με την τάξη μεγέθους της προσέγγισής μας.

Αυτό που απομένει είναι ο υπολογισμός των παραμέτρων (2.8), τις οποίες μπορούμε να εκφράσουμε σε όρους των βαθμωτών

$$c_1 = \mathrm{tr}(AB\Gamma B) + \alpha\,\mathrm{tr}(B\Gamma), \quad c_2 = \alpha\,\mathrm{tr}(FG). \qquad (3.14)$$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 3.2:</u> *Κάτω από τις υποθέσεις αυτού του κεφαλαίου και για κάθε ασυμπτωτικά αποτελεσματικό εκτιμητή του ρ οι παράμετροι (2.8) είναι*

$$\lambda = \alpha, \ \lambda = 0, \ \lambda_o = 2, \ \mu_o = -1. \qquad (3.15)$$

Επιπλέον, ανάλογα με τον εκτιμητή του ρ που χρησιμοποιήθηκε κατά την εκτίμηση με την μέθοδο GLS, έχουμε

$$\mu_{LS} = -\left[(n+3)\rho + (c_1-2n)/2\rho\right],$$

$$\mu_{DW} = \mu_{LS} + 1,$$

$$\mu_{GL} = \mu_{PW} = \mu_{LS} - \alpha c_2/2\rho + (c_1-\alpha n)/2\rho, \qquad (3.16)$$

$$\mu_{ML} = \mu_{GL} + \rho.$$

Σημειώνουμε ότι όλες οι μήτρες που εμφανίζονται στις Προτάσεις 3.1 και 3.2 είναι nxn και, εκτός από τις Γ και P, όλες υπολογίζονται κατά την εκτιμητική διαδικασία. Επιπλέον, τα ίχνη των διαφόρων μητρών μπορούν να υπολογισθούν από αναλυτικούς τύπους χωρίς την πραγματοποίηση πολλαπλασιασμών μητρών. Από υπολογιστική άποψη, οι τύποι που δίνονται στις Προτάσεις 3.1 και 3.2 αποτελούν σημαντική βελτίωση σε σχέση με τους τύπους των Rothenberg (1984b), (1988) και Magee (1989) και απλοποιούν τον υπολογισμό των κατά Edgeworth και κατά Cornish–Fisher διορθώσεων στην περίπτωση του

γραμμικού υποδείγματος με αυτοσυσχέτιση πρώτου βαθμού. Φυσικά, το ρ θα πρέπει να αντικατασταθεί από τον αντίστοιχο εκτιμητή του για να πάρουμε λειτουργικούς τύπους.

3.4 ΤΟ MONTE CARLO ΠΕΙΡΑΜΑ

Στο τμήμα αυτό θα περιγράψουμε το Monte Carlo πείραμα με το οποίο διερευνήσαμε την απόδοση των διαφόρων διορθώσεων του μεγέθους των ελέγχων t και F στην περίπτωση του γραμμικού υποδείγματος του οποίου ο διαταρακτικός όρος υπόκειται σε αυτοσυσχέτιση πρώτου βαθμού.

Η απόδοση των διαφόρων διορθώσεων του μεγέθους των ελέγχων t και F μπορεί να μετρηθεί ως η διαφορά του ονομαστικού από το πραγματικό μέγεθος των διορθωμένων ελέγχων, δεδομένου ότι οι διορθώσεις αυτές σκοπό έχουν να μειώσουν την απόκλιση του πραγματικού από το ονομαστικό μέγεθος των ελέγχων. Από τα προηγούμενα καθίσταται σαφές ότι όσο μικρότερη είναι η διαφορά μεταξύ του ονομαστικού και του πραγματικού μεγέθους ενός ελέγχου, τόσο καλύτερη είναι η απόδοση αυτού του ελέγχου.

Η έννοια της απόδοσης που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο είναι σχετική ως προς την φύση της, διότι δεν έχουμε στην διάθεσή μας ένα γενικά αποδεκτό μέτρο του "μεγάλου" ή του "μικρού", προκειμένου να κρίνουμε την διαφορά μεταξύ του ονομαστικού και του πραγματικού μεγέθους ενός ελέγχου. Επομένως, είναι προτιμότερο να καταφύγουμε στην σύγκριση των αποδόσεων των διαφόρων ελέγχων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν εναλλακτικά. Έτσι, μπορούμε να συγκρίνουμε τον έλεγχο που βασίζεται στο κατά Cornish-Fisher διορθωμένο t στατιστικό, το οποίο κατανέμεται σύμφωνα με την t-Student κατανομή, με τους ελέγχους που στηρίζονται στο σύνηθες t στατιστικό ή στις (τύπου) Edgeworth διορθωμένες κριτικές τιμές του και χρησιμοποιούν την t-Student ή (ασυμπτωτικά) την κανονική κατανομή. Όμοια μπορούμε να συγκρίνουμε τον έλεγχο που βασίζεται στο κατά Cornish-Fisher διορθωμένο F στατιστικό, το οποίο κατανέμεται σύμφωνα με την F κατανομή, με τους ελέγχους που στηρίζονται στο σύνηθες χ^2 στατιστικό ή στις τύπου Edgeworth διορθωμένες κριτικές τιμές του από την χ^2 κατανομή, καθώς και με τους ελέγχους που βασίζονται στο σύνηθες F στατιστικό ή στις τύπου Edgeworth διορθωμένες κριτικές τιμές του

από την F κατανομή.

Έχοντας υπόψη τα ανωτέρω, σχεδιάσαμε ένα πείραμα ικανό να μας βοηθήσει να υπολογίσουμε το πραγματικό μέγεθος των ελέγχων που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, για δεδομένη την τιμή του ονομαστικού τους μεγέθους, δηλαδή του επιπέδου στατιστικής σημαντικότητάς τους.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, σκοπός του πειράματός μας ήταν η αξιολόγηση της απόδοσης των διαφόρων διορθώσεων του μεγέθους των ελέγχων t και F στην περίπτωση κατά την οποία ο στοχαστικός όρος του γραμμικού υποδείγματος υπόκειται σε αυτοσυσχέτιση πρώτου βαθμού. Ωστόσο, στην εφαρμοσμένη οικονομετρική έρευνα, εκτός από την αυτοσυσχέτιση των διαταρακτικών όρων, ο ερευνητής, τις περισσότερες φορές, βρίσκεται αντιμέτωπος και με το πρόβλημα της πολυσυγγραμμικότητας των ερμηνευτικών μεταβλητών. Για αυτόν τον λόγο αποφασίσαμε να πραγματοποιήσουμε το πείραμα για συνδυασμούς τιμών του συντελεστή αυτοσυσχέτισης των διαταρακτικών όρων, ρ, και του (κοινού) συντελεστή συσχέτισης μεταξύ δύο οποιωνδήποτε διαφορετικών ερμηνευτικών μεταβλητών, έστω Α.

Κάθε συνδυασμός των τιμών των παραμέτρων ρ και Α αποτέλεσε ένα σημείο του πειραματικού μας χώρου, τον οποίον προσπαθήσαμε να κάνουμε όσο γίνεται περισσότερο αντιπροσωπευτικό του παραμετρικού χώρου που ορίζεται από τα σύνολα των δυνατών τιμών των ανωτέρω παραμέτρων. Για τον σκοπό αυτό θεωρήσαμε έξι διαφορετικές τιμές του συντελεστή αυτοσυσχέτισης, δηλαδή ρ = −.9, −.5, −.1, .1, .5, .9 και τέσσερεις διαφορετικές τιμές του συντελεστή που δηλώνει την ένταση της πολυσυγγραμμικότητας μεταξύ δύο οποιωνδήποτε ερμηνευτικών μεταβλητών, δηλαδή Α = .0, .1, .5, .9. Συνδυάζοντας ανά δύο τις τιμές των παραμέτρων ρ και Α δημιουργήσαμε τον πειραματικό μας χώρο, ο οποίος αποτελείτο από 24 σημεία και ήταν πραγματικά αντιπροσωπευτικός του συνόλου των συνδυασμών αυτοσυσχέτισης και πολυσυγγραμμικότητας που είναι δυνατόν να αντιμετωπίσει κανείς στην εφαρμοσμένη οικονομετρική έρευνα. Διότι περιείχε σημεία που παρουσιάζουν μικρή, μέτρια ή μεγάλη αυτοσυσχέτιση σε συνδυασμό με μεγάλη, μέτρια, μικρή ή ανύπαρκτη πολυσυγγραμμικότητα. Οι περιπτώσεις με ρ = .0 δεν μελετήθησαν πειραματικά, διότι μας ενδιέφερε να διερευνήσουμε την απόδοση των

διαφόρων διορθώσεων του μεγέθους των t και F ελέγχων στην περίπτωση κατά την οποία ο στοχαστικός όρος πράγματι αυτοσυσχετίζεται. Επιπλέον, δέν μελετήθηκαν πειραματικά και οι περιπτώσεις με ρ = 1, διότι η ποσότητα $\alpha = 1-\rho^2$ θα γινόταν ίση με μηδέν, γεγονός που θα κατέστρεφε την διαδικασία υπολογισμού των προτεινομένων διορθώσεων, εφόσον το α βρίσκεται στον παρονομαστή ποσοτήτων που είναι απαραίτητες για τον υπολογισμό τους. Οι περιπτώσεις με A = .0 είναι πολύ σπάνιες στην εφαρμοσμένη έρευνα. Παρ' όλα αυτά μελετήθησαν πειραματικά, διότι μας δίνουν πληροφορίες για την συμπεριφορά των προτεινομένων διορθώσεων στην "ιδανική" εκείνη περίπτωση κατά την οποία ο ερευνητής έχει να αντιμετωπίσει μόνο το πρόβλημα της αυτοσυσχέτισης πρώτου βαθμού των διαταρακτικών όρων σε ένα γραμμικό υπόδειγμα.

Για κάθε συνδυασμό των τιμών των παραμέτρων ρ και A δημιουργήσαμε μια μήτρα ερμηνευτικών μεταβλητών ως εξής: Χρησιμοποιώντας την IMSL (International Mathematical and Statistical Library) δημιουργήσαμε 20 ανεξάρτητες παρατηρήσεις για τους τέσσερεις ανεξάρτητους N(0,1) ψευτοτυχαίους αριθμούς z_{t1}, z_{t2}, z_{t3} και z_{t4} (t = 1,...,20). Ακολουθώντας τους McDonald και Galarneau ((1975), σελ. 409) κατασκευάσαμε τα στοιχεία, x_{tj}, της μήτρας των ερμηνευτικών μεταβλητών, X, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$x_{tj} = 1 \quad (t = 1,...,20 \text{ και } j = 1)$$

και (3.17)

$$x_{tj} = (1-A)^{1/2} z_{t(j-1)} + \sqrt{A} z_{t4} \quad (t = 1,...,20 \text{ και } j = 2,3,4),$$

από τις οποίες έπεται ότι ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ δύο οποιωνδήποτε ερμηνευτικών μεταβλητών, εξαιρουμένης της σταθεράς, είναι A. Από τις σχέσεις (3.17) προκύπτει ότι το χρησιμοποιούμενο μέγεθος δείγματος είναι 20. Πρέπει να σημειώσουμε ότι η μήτρα X γινόταν δεκτή και χρησιμοποιόταν στην συνέχεια του πειράματος υπό την προϋπόθεση ότι η μήτρα (X'X) ήταν μη ιδιάζουσα και συνεπώς μπορούσε να αντιστραφεί.

Κάθε μήτρα που δημιουργήσαμε για δεδομένο συνδυασμό των τιμών των παραμέτρων ρ και A την χρησιμοποιήσαμε σε 500 επαναλήψεις του πειράματος. Για καθεμιά από τις επαναλήψεις αυτές κατασκευάσαμε από ένα διάνυσμα y. Η κατασκευή καθενός από τα 500 αυτά διανύσματο

θα περιγραφεί στην συνέχεια.

Εφόσον ο διαταρακτικός όρος παρουσιάζει αυτοσυσχέτιση πρώτου βαθμού έπεται ότι ισχύει η σχέση

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad (t = 2,\ldots,20),$$

όπου (3.18)

$u_t \sim N(0,1/\alpha)$, $\alpha = 1-\rho^2$ και $\varepsilon_t \sim N(0,1)$.

Για την δημιουργία του διανύσματος u με στοιχεία u_t $(t = 1,\ldots,20)$ απαιτείται η γνώση του όρου $u_o \sim N(0,1/\alpha)$. Η υπόθεση ότι ο όρος u_o κατανέμεται κανονικά με μέσο 0 και διακύμανση $1/\alpha$ εξασφαλίζει την στασιμότητα (stationarity) της διαδικασίας αυτοσυσχέτισης της σχέσης (3.18) (βλ. Nankervis and Savin (1988), σελ. 121).

Χρησιμοποιώντας την IMSL κατασκευάσαμε έναν $N(0,1/\alpha)$ $(\alpha = 1-\rho^2)$ ψευτοτυχαίο αριθμό u_o και 20 ανεξάρτητες παρατηρήσεις για τον $N(0,1)$ ψευτοτυχαίο αριθμό ε_t. Τα στοιχεία, u_t, του διανύσματος του στοχαστικού όρου, u, τα κατασκευάσαμε χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$u_t = \rho u_o + \varepsilon_t \quad (t = 1)$$

και (3.19)

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad (t = 2,\ldots,20).$$

Γνωρίζοντας το διάνυσμα u δημιουργήσαμε το διάνυσμα της εξαρτημένης μεταβλητής, y, με στοιχεία, y_t, χρησιμοποιώντας την σχέση

$$y_t = \sum_{j=1}^{4} x_{tj}\beta_j + \sigma u_t \quad (t = 1,\ldots,20), \qquad (3.20)$$

όπου β_j είναι οι προς εκτίμηση παράμετροι του υποδείγματος. Από το θεώρημα 5 του Breusch ((1980), σελ 336), λαμβάνοντας υπόψη ότι τα t και F στατιστικά προκύπτουν ως ειδικές περιπτώσεις του στατιστικού του Wald, έπεται ότι οι κατανομές των t και F στατιστικών για τον έλεγχο των υποθέσεων (2.10) και (2.26) είναι ανεξάρτητες από τις αληθείς τιμές των παραμέτρων β και σ^2 του υποδείγματος (3.1), όταν οι ελεγχόμενες υποθέσεις ισχύουν. Εφόσον η μελέτη του πραγματικού μεγέθους ενός ελέγχου γίνεται υπό την προϋπόθεση ότι η ελεγχόμενη υπόθεση είναι αληθής, είναι φανερό πως τα αποτελέσματα του πειράματός μας δεν εξαρτώνται από τις τιμές

των παραμέτρων β_j $(j = 1,\ldots,4)$ και σ^2. Στηριζόμενοι στην ανωτέρω διαπίστωση θέσαμε $\beta_j = 0$ $(j = 1,\ldots,4)$ και $\sigma = 1$. Έτσι απλοποιήσαμε την υπολογιστική διαδικασία του πειράματός μας, ενώ τα αποτελέσματά μας δεν έχασαν την γενικότητά τους. Θέτοντας $\beta_j = 0$ $(j = 1,\ldots,4)$ και $\sigma = 1$ στην σχέση (3.20) παίρνουμε την σχέση

$$y_t = u_t \tag{3.21}$$

από την οποία υπολογίσαμε τα στοιχεία των διανυσμάτων y της εξαρτημένης μεταβλητής για καθεμιά από τις 500 επαναλήψεις του πειράματος με δεδομένη την μήτρα των εξωγενών μεταβλητών.

Για τον t έλεγχο θεωρήσαμε τέσσερεις υποθέσεις της μορφής (2.10):

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 0, \quad \beta_4 = 0, \tag{3.22}$$

ενώ για τον F έλεγχο θεωρήσαμε μιαν υπόθεση της μορφής (2.26):

$$H\beta = h, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.23}$$

Χρησιμοποιώντας την μήτρα των ερμηνευτικών μεταβλητών και τα 500 διαφορετικά διανύσματα της εξαρτημένης μεταβλητής, που δημιουργήσαμε για καθένα από τα 24 σημεία του πειραματικού χώρου, πραγματοποιήσαμε σε κάθε πειραματικό σημείο 500 επαναλήψεις της διαδικασίας που θα περιγράψουμε στην συνέχεια.

Κάθε διάνυσμα τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής παλινδρομήθηκε με την μέθοδο OLS πάνω στην μήτρα των ερμηνευτικών μεταβλητών και εκτιμήθησαν οι παράμετροι του υποδείγματος

$$y_t = \sum_{j=1}^{4} x_{tj}\beta_j + u_t \quad (t = 1,\ldots,20). \tag{3.24}$$

Χρησιμοποιώντας τις εκτιμήσεις των παραμέτρων, την μήτρα των ερμηνευτικών μεταβλητών και το διάνυσμα της εξαρτημένης μεταβλητής, υπολογήσαμε τα OLS κατάλοιπα, $\tilde{u}_t$ $(t = 1,\ldots,20)$, και την OLS εκτίμηση του ρ από την σχέση

$$\hat{\rho}_{LS} = \sum_{t=2}^{20} \tilde{u}_t \tilde{u}_{t-1} \Big/ \sum_{t=1}^{20} \tilde{u}_t^2. \tag{3.25}$$

Αντί του OLS εκτιμητή του ρ θα μπορούσαμε να είχαμε

χρησιμοποιήσει οποιονδήποτε από τους υπολοίπους εκτιμητές του ρ που μελετήσαμε σε αυτό το κεφάλαιο. Επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε τον OLS εκτιμητή του ρ για την διεξαγωγή του πειράματός μας εξ' αιτίας της απλότητάς του και διότι αναμέναμε να πάρουμε όμοια αποτελέσματα και για τους άλλους εκτιμητές του ρ.

'Εχοντας στην διάθεσή μας την εκτίμηση $\hat{\rho}_{LS}$, μπορέσαμε να διορθώσουμε τα στοιχεία της μήτρας X και του διανύσματος y, κάνοντας χρήση των σχέσεων

$$x^*_{tj} = (1-\hat{\rho}^2_{LS})^{1/2} x_{tj} \quad (t = 1 \text{ και } j = 1,\ldots,4),$$

$$x^*_{tj} = x_{tj} - \hat{\rho}_{LS} x_{(t-1)j} \quad (t = 2,\ldots,20 \text{ και } j = 1,\ldots,4), \tag{3.26}$$

$$y^*_t = (1-\hat{\rho}^2_{LS})^{1/2} y_t \quad (t = 1),$$

$$y^*_t = y_t - \hat{\rho}_{LS} y_{t-1} \quad (t = 2,\ldots,20).$$

Με τα διορθωμένα, για την αυτοσυχέτιση πρώτου βαθμού, στοιχεία x^*_{tj} και y^*_t κατασκευάσαμε την διορθωμένη μήτρα των ερμηνευτικών μεταβλητών, X^*, και το διορθωμένο διάνυσμα της εξαρτημένης μεταβλητής, y^*. Στην συνέχεια παλινδρομήσαμε το διάνυσμα y^* πάνω στη μήτρα X^* με την μέθοδο OLS και εκτιμήσαμε τις παραμέτρους του υποδείγματος. Η εκτίμηση αυτή των παραμέτρων του υποδείγματος είναι ισοδύναμη με την GLS εκτίμησή τους, διότι κατά την διαδικασία διόρθωσης των μεταβλητών με τις σχέσεις (3.26) εφαρμόσαμε την διόρθωση του Kadiyala (1968) για την πρώτη παρατήρηση και επομένως δεν χάσαμε κανένα βαθμό ελευθερίας. Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειωθεί ότι η εκτίμηση του υποδείγματος με την χρησιμοποίηση των X^* και y^* δεν είναι δυνατή αν η μήτρα $X^{*\prime}X^*$ είναι ιδιάζουσα. Σε περιπτώσεις που θα προέκυπτε μια μήτρα X^* τέτοια ώστε η μήτρα $X^{*\prime}X^*$ να είναι ιδιάζουσα θα απορρίπταμε το αρχικό διάνυσμα y, θα δημιουργούσαμε αντ' αυτού ένα άλλο και θα επαναλαμβάναμε όλη την διαδικασία μέχρις ότου η μήτρα $X^{*\prime}X^*$ γινόταν μη ιδιάζουσα και συνεπώς υπήρχε η αντίστροφή της. Αξίζει, ωστόσο, να αναφέρουμε πως από ένα πλήθος 36000 παλινδρομήσεων, που πραγματοποιήθηκαν κατά την διενέργεια του πειράματος, καμία δεν παρουσίασε το πρόβλημα που μόλις αναφέραμε.

'Εχοντας στην διάθεσή μας την OLS εκτίμηση του συντελεστή

αυτοσυσχέτισης, $\hat{\rho}_{LS}$, και τις GLS εκτιμήσεις των παραμέτρων του υποδείγματος και χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα 2.2 και 2.4 του Κεφαλαίου 2, υπολογίσαμε τις τιμές των συνήθων t, χ^2 και F στατιστικών καθώς και τις τιμές των τοπικά ακριβών (locally exact) κατά Cornish-Fisher διορθωμένων t και F στατιστικών για τον έλεγχο των υποθέσεων (3.22) και (3.23) έναντι των εναλλακτικών υποθέσεων

$$\beta_j > 0 \text{ ή } \beta_j < 0 \quad (j = 1,\ldots,4) \tag{3.27}$$

και

$$H\beta \neq h, \tag{3.28}$$

αντίστοιχα, όπου η μήτρα H και το διάνυσμα h έχουν οριστεί στη σχέση (3.23). Εν συνεχεία, χρησιμοποιώντας τις τιμές των στατιστικών αυτών και τις συναρτήσεις πυκνότητας της κανονικής, t-Student, χ^2 και F κατανομής, υπολογίσαμε τα αντίστοιχα επίπεδα σημαντικότητας (p-values). Πιο συγκεκριμένα, υπολογίσαμε τα επίπεδα σημαντικότητας του συνήθους t στατιστικού υπό την υπόθεση ότι αυτό κατανέμεται σύμφωνα με την t-Student ή (ασυμπτωτικά) την κανονική κατανομή και τα επίπεδα σημαντικότητας των συνήθων χ^2 και F στατιστικών υπό την υπόθεση ότι αυτά κατανέμονται σύμφωνα με την χ^2 και την F κατανομή, αντίστοιχα. Επιπλέον, υπολογίστηκαν τα επίπεδα σημαντικότητας των τοπικά ακριβών (locally exact) κατά Cornish-Fisher διορθωμένων t και F στατιστικών υπό την υπόθεση ότι αυτά ακολουθούν την t-Student και την F κατανομή, αντίστοιχα. Στο σημείο αυτό πρέπει να παρατηρηθεί ότι το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο F στατιστικό (2.39) είναι δυνατόν να πάρει και αρνητικές τιμές, οπότε λέγομε ότι έχουμε υπερδιόρθωση του F στατιστικού. Σε μια τέτοια περίπτωση έχουμε σημαντικό πρόβλημα δεδομένου ότι το κατά Cornish-Fisher διορθωνένο F στατιστικό (2.39) υποτίθεται ότι κατανέμεται ως μια F μεταβλητή. Αξίζει να σημειωθεί ότι από ένα πλήθος 36000 κατά Cornish-Fisher διορθωμένων F στατιστικών, που υπολογίσαμε κατά την διενέργεια του πειράματος, μόνον ένα ήταν αρνητικό.

Το μόνο που έμενε ήταν ο υπολογισμός των επιπέδων σημαντικότητας που αντιστοιχούν στις (τύπου) Edgeworth διορθωμένες κριτικές τιμές των συνήθων t, χ^2 και F στατιστικών. Ο υπολογισμός αυτός μπορεί να γίνει με δύο ισοδύναμους τρόπους. Σύμφωνα με τον

πρώτο, κατ' αρχήν υπολογίζουμε τις (τύπου) Edgeworth διορθωμένες κριτικές τιμές των συνήθων t, χ^2 και F στατιστικών, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.17) και (2.20), (2.32) και (2.38), αντίστοιχα. Ειδικότερα, οι (τύπου) Edgeworth διορθωμένες κριτικές τιμές του συνήθους t στατιστικού προκύπτουν από το κατά Edgeworth ανάπτυγμα της συνάρτησης κατανομής του σε όρους της t-Student ή (ασυμπτωτικά) της κανονικής κατανομής, ενώ οι τύπου Edgeworth διορθωμένες κριτικές τιμές των συνήθων χ^2 και F στατιστικών προκύπτουν από τα κατά Edgeworth αναπτύγματα των συναρτήσεων κατανομής τους σε όρους των αντιστοίχων κατανομών. Έχοντας υπολογίσει τις (τύπου) Edgeworth διορθωμένες κριτικές τιμές των συνήθων t, χ^2 και F στατιστικών, εύκολα παίρνουμε τα επίπεδα σημαντικότητας, που αντιστοιχούν σε αυτές τις κριτικές τιμές, ολοκληρώνοντας τις συναρτήσεις πυκνότητας της t-Student ή (ασυμπτωτικά) της κανονικής, της χ^2 και της F κατανομής, αντίστοιχα, στα διαστήματα που ορίζονται από τις (τύπου) Edgeworth διορθωμένες κριτικές τιμές και το άκρο της κατάλληλης ουράς της αντιστοίχης συνάρτησης πυκνότητας. Για τις χ^2 και F κατανομές η κατάλληλη ουρά είναι η δεξιά, ενώ για την κανονική και την t-Student κατανομή η κατάλληλη ουρά είναι η αριστερή ή η δεξιά, ανάλογα με το αν η (τύπου) Edgeworth διορθωμένη κριτική τιμή του t στατιστικού είναι αρνητική ή θετική. Ένας ισοδύναμος τρόπος υπολογισμού των επιπέδων σημαντικότητας που αντιστοιχούν στις (τύπου) Edgeworth διορθωμένες κριτικές τιμές των συνήθων t, χ^2 και F στατιστικών είναι ο ακόλουθος: Υπολογίζουμε τις τιμές των κατά Edgeworth αναπτυγμάτων των συναρτήσεων κατανομής των συνήθων t, χ^2 και F στατιστικών σε όρους της t-Student (βλ. (2.19)) ή (ασυμπτωτικά) της κανονικής (βλ. (2.15)), της χ^2 (βλ. (2.30)) και της F (βλ. (2.36)) κατανομής, αντίστοιχα, για τις συγκεκριμένες τιμές των στατιστικών αυτών. Τα ζητούμενα επίπεδα σημαντικότητας για τα χ^2, τα F και τα θετικά t στατιστικά προκύπτουν αν από την μονάδα αφαιρεθούν οι τιμές των κατά Edgeworth αναπτυγμάτων των συναρτήσεων κατανομής τους, ενώ τα ζητούμενα επίπεδα σημαντικότητας για τα αρνητικά t στατιστικά ισούνται με τις τιμές των κατά Edgeworth αναπτυγμάτων των συναρτήσεων κατανομής τους. Επειδή απλοποιούσε πολύ την υπολογιστική διαδικασία, στο πείραμα

επιλέξαμε αυτόν τον τρόπο για να υπολογίσουμε τα επίπεδα σημαντικότητας που αντιστοιχούν στις (τύπου) Edgeworth διορθωμένες κριτικές τιμές των συνήθων t, χ^2 και F στατιστικών.

Τελειώνοντας την αναφορά μας στον τρόπο υπολογισμού των διαφόρων στατιστικών και των αντιστοίχων επιπέδων σημαντικότητας κρίνουμε σκόπιμο να τονίσουμε ότι χρησιμοποιήσαμε τις μονόπλευρες (one-sided) εναλλακτικές υποθέσεις (3.27) για δύο λόγους: Πρώτον, διότι ο t έλεγχος για καθεμιά από τις υποθέσεις (3.22) έναντι δίπλευρων (two-sided) εναλλακτικών υποθέσεων είναι ειδική περίπτωση του F ελέγχου και, δεύτερον, διότι τα κατά Edgeworth αναπτύγματα των συναρτήσεων πυκνότητας της t-Student ή (ασυμπτωτικά) της κανονικής κατανομής δεν είναι συμμετρικά περί το μηδέν και επομένως το επίπεδο σημαντικότητας που αντιστοιχεί στην (τύπου) Edgeworth διορθωμένη κριτική τιμή του συνήθους στατιστικού $t = t_o$ είναι γενικά διαφορετικό από το αντίστοιχο επίπεδο σημαντικότητας του συνήθους στατιστικού $t = -t_o$.

Η διαδικασία που μόλις περιγράψαμε επαναλήφθηκε 500 φορές σε καθένα από τα 24 σημεία του πειραματικού χώρου. Σε κάθε πειραματικό σημείο 500 διαφορετικά διανύσματα τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής παλινδρομήθηκαν πάνω στην ίδια μήτρα των ερμηνευτικών μεταβλητών. Δηλαδή, η μήτρα των ερμηνευτικών μεταβλητών διατηρήθηκε "σταθερή σε επαναλαμβανόμενα δείγματα" των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής, όπως ακριβώς υποτίθεται στην οικονομετρική θεωρία. Όμως, η μήτρα των ερμηνευτικών μεταβλητών ήταν διαφορετική σε καθένα από τα πειραματικά σημεία, γεγονός που κατέστησε τα αποτελέσματα του πειράματος ανεξάρτητα από την εκλογή μιας συγκεκριμένης μήτρας ερμηνευτικών μεταβλητών.

Από τον τρόπο κατασκευής των μητρών των ερμηνευτικών μεταβλητών και των διανυσμάτων της εξαρτημένης μεταβλητής, τον οποίον έχουμε ήδη εκθέσει, γίνεται φανερό ότι για την διενέργεια του πειράματος ήταν αναγκαία η δημιουργία μεγάλου πλήθους ψευτοτυχαίων αριθμών από την N(0,1) κατανομή. Το πρόβλημα της δημιουργίας ψευτοτυχαίων αριθμών καθώς και αυτό του ελέγχου της "τυχαιότητάς" τους μελετάται σχετικά λεπτομερώς στο Παράρτημα Η. Για τους σκοπούς αυτού του κεφαλαίου αρκεί να αναφέρουμε ότι η ποιότητα μιας ακολουθίας ψευτοτυχαίων αριθμών δεν είναι παντού

ομοιόμορφη. Οι αρχικοί αριθμοί κάθε ψευτοτυχαίας ακολουθίας δεν εμφανίζουν επαρκώς "τυχαία" συμπεριφορά. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίον συνηθίζεται σε Monte Carlo εφαρμογές να μην χρησιμοποιείται κάποιο πλήθος από τους αρχικούς αριθμούς της χρησιμοποιούμενης ψευτοτυχαίας ακολουθίας. Στο πείραμα που πραγματοποιήσαμε αφήσαμε αχρησιμοποίητους τους πρώτους 1600 αριθμούς της ψευτοτυχαίας ακολουθίας που δημιουργήσαμε. Για την κατασκευή της ψευτοτυχαίας ακολουθίας χρησιμοποιήσαμε την υπορουτίνα GGNPM της IMSL (βλ Παράρτημα Η). Ως σπόρος (seed) χρησιμοποιήθηκε ο αριθμός 314159.

Η ποιότητα των ψευτοτυχαίων αριθμών που χρησιμοποιήσαμε κρίνεται ικανοποιητική με βάση τόσο την ποιότητα του αλγορίθμου της IMSL, όσο και τους ελέγχους "τυχαιότητας" που διεξήγαμε. Ωστόσο, είναι πιθανό να υπάρχουν τμήματα της ψευτοτυχαίας ακολουθίας στα οποία η ποιότητα των αριθμών να είναι καλύτερη από ό,τι σε άλλα. Το ενδεχόμενο αυτό μας δημιούργησε το ακόλουθο πρόβλημα αξιολόγησης των αποτελεσμάτων του πειράματος: Από την ίδια την δομή του πειραματικού χώρου κατανοούμε ότι τα αποτελέσματα του πειράματος σε ένα συγκεκριμένο πειραματικό σημείο εξαρτώνται από τον συνδυασμό των τιμών των παραμέτρων ρ και Α, ο οποίος χαρακτηρίζει αυτό το σημείο του πειραματικού χώρου. Διότι από την θεωρία της παλινδρόμησης και από την μορφή των διαφόρων διορθώσεων του μεγέθους των ελέγχων που εξετάσαμε, καταλαβαίνουμε ότι η ακρίβεια των υπολογισμών και συνεπώς η ποιότητα των αποτελεσμάτων του πειράματος χειροτερεύει σε εκείνα τα πειραματικά σημεία που χαρακτηρίζονται από τιμές του ρ ή του Α μεγάλες κατ' απόλυτη τιμή. Επομένως, αν κατά την εκτέλεση του πειράματος σε τέτοια "δυσμενή" πειραματικά σημεία χρησιμοποιηθούν τμήματα της ψευτοτυχαίας ακολουθίας με σχετικά χαμηλής ποιότητας αριθμούς, τα αποτελέσματα του πειράματος στα συγκεκριμένα πειραματικά σημεία θα γίνουν ακόμα χειρότερης ποιότητας. Σε μια τέτοια περίπτωση το έργο της αξιολόγησης των αποτελεσμάτων του πειράματος καθίσταται πολύ δύσκολο. Διότι δεν γνωρίζουμε αν μια ενδεχομένως κακή συμπεριφορά των διαφόρων διορθώσεων πρέπει να αποδοθεί στον συγκεκριμένο συνδυασμό των τιμών των παραμέτρων ρ και Α ή στην κακή ποιότητα των ψευτοτυχαίων αριθμών που χρησιμοποιήθηκαν ως πρώτη ύλη για το

τυχαίο πείραμα. Για να απαλλαγούμε από το ενδεχόμενο της συστηματικής επίδρασης της ποιότητας των ψευτοτυχαίων αριθμών στα αποτελέσματα του πειράματος, καταφύγαμε στην τυχαιοποίηση της σειράς με την οποία εκτελέστηκε το πείραμα στα διάφορα σημεία του πειραματικού χώρου. Την τυχαιοποίηση αυτή εκθέτουμε στην συνέχεια.

Τα 24 σημεία του πειραματικού μας χώρου μπορούν να διαιρεθούν σε τέσσερεις εξάδες σημείων. Σε όλα τα πειραματικά σημεία μιας εξάδας αντιστοιχούν ζεύγη τιμών των παραμέτρων ρ και Α στα οποία η τιμή του Α είναι κοινή. Διαιρώντας, λοιπόν, κατ' αυτόν τον τρόπο τον πειραματικό χώρο σε τέσσερεις εξάδες σημείων μπορέσαμε να τυχαιοποιήσουμε την σειρά εκτέλεσης του πειράματος στα διάφορα πειραματικά σημεία ως εξής: Τυχαιοποιήσαμε την σειρά των ζευγών των τιμών των παραμέτρων ρ και Α μέσα σε κάθε εξάδα και εν συνεχεία τυχαιοποιήσαμε την σειρά με την οποία το πείραμα πραγματοποιήθηκε για τις διάφορες εξάδες. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιήσαμε τον πίνακα τυχαίων αριθμών του βιβλίου "Στατιστική, Πίνακες δια Στατιστικάς Ερεύνας" του καθηγητού κ. Κ.Η. Κεβόρκ ((1981), σελ. 89-100). Ο πίνακας έχει 12 σελίδες. Με ρίψη δύο κύβων και άθροιση των αποτελεσμάτων επιλέξαμε τυχαία μια σελίδα του πίνακα. Επελέγη η έβδομη σελίδα του πίνακα (7 = 3 + 4), δηλαδή η σελίδα 95. Διαβάζοντας από πάνω προς τα κάτω αριθμούς, αρχίζοντας από την πρώτη στήλη αυτής της σελίδας και συνεχίζοντας στις επόμενες, διαλέξαμε μονοψήφιους αριθμούς διάφορους του μηδενός και μικρότερους ή ίσους του έξι, έτσι ώστε να σχηματίσουμε εξάδες, καθεμιά από τις οποίες δεν περιλάμβανε δύο φορές τον ίδιο αριθμό. Αυτούς τους αριθμούς τους τοποθετήσαμε, με την σειρά ανάγνωσής τους, στα κελλιά του Πίνακα 3.1, γεμίζοντας τα κελλιά κάθε γραμμής από αριστερά προς τα δεξιά και τις γραμμές από πάνω προς τα κάτω. Έτσι τυχαιοποιήσαμε την σειρά των ζευγών των τιμών των παραμέτρων ρ και Α σε κάθε εξάδα τέτοιων ζευγών, η οποία χαρακτηρίζεται από σταθερή και δεδομένη τιμή του Α. Συνεχίζοντας την ανάγνωση μονοψήφιων τυχαίων αριθμών και επιλέγοντας εκείνους που ήσαν διάφοροι του μηδενός και μικρότεροι ή ίσοι του τέσσερα δημιουργήσαμε μια τετράδα αριθμών τέτοια ώστε κάθε αριθμός να περιλαμβάνεται μόνο μια φορά. Τους αριθμούς αυτής της τετράδας τους γράψαμε, με την σειρά ανάγνωσής τους, στην τελευταία στήλη

του Πίνακα 3.1, από πάνω προς τα κάτω. Με αυτόν τον τρόπο τυχαιοποιήσαμε την σειρά με την οποία το πείραμα εκτελέστηκε στα πειραματικά σημεία που αντιστοιχούσαν στις τέσσερεις εξάδες των ζευγών των τιμών των παραμέτρων ρ και Α.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.1

ΤΥΧΑΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ

		ρ						ΣΕΙΡΑ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ ΤΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ.
		-0.9	-0.5	-0.1	0.1	0.5	0.9	
A	0.0	5	3	4	6	2	1	2
	0.1	3	5	1	2	4	6	1
	0.5	2	5	4	1	3	6	4
	0.9	5	4	3	1	6	2	3

Η πειραματική διαδικασία εκτελέστηκε σε όλα τα σημεία του πειραματικού χώρου. Τα αποτελέσματα του πειράματος έγιναν αντικείμενο επεξεργασίας και οι πληροφορίες που περιείχαν συνοψίστηκαν σε πίνακες και διαγράμματα. Η κατασκευή αυτών των πινάκων και διαγραμμάτων και τα συμπεράσματα που προκύπτουν από αυτά θα παρουσιαστούν στην συνέχεια.

Έχουμε ήδη πεί ότι η μήτρα των ερμηνευτικών μεταβλητών του υποδείγματος που δημιουργήθηκε κατά την εκτέλεση του πειράματος περιείχε τρείς ερμηνευτικές μεταβλητές και την σταθερά, δηλαδή συνολικά τέσσερεις μεταβλητές. Επομένως, χρησιμοποιώντας τις GLS εκτιμήσεις των β_j ($j = 1,\ldots,4$) από την (3.24), σε κάθε επανάληψη του πειράματος υπολογίζονταν τέσσερα t στατιστικά (2.11) και τέσσερα κατά Cornish-Fisher διορθωμένα t στατιστικά (2.21), από ένα για κάθε ερμηνευτική μεταβλητή. Επιπλέον, σε κάθε επανάληψη του πειράματος υπολογίζονταν οι τιμές του χ^2 στατιστικού (2.27), του F στατιστικού (2.35) και του κατά Cornish-Fisher διορθωμένου F στατιστικού (2.39).

Με δεδομένες τις τιμές αυτών των στατιστικών, σε κάθε επανάληψη του πειράματος υπολογίζαμε τα επίπεδα σημαντικότητας

(p-values) που αντιστοιχούν στους ελέγχους που μελετήσαμε και σε καθεμιά από τις μεθόδους διόρθωσης του μεγέθους τους. Για τον t έλεγχο τα επίπεδα σημαντικότητας που αντιστοιχούν στις προσεγγίσεις με την κανονική (N) και την t-Student (T) κατανομή είναι τα ολοκληρώματα της κανονικής και της t_{T-n} πυκνότητας, αντίστοιχα, από την τιμή του στατιστικού (2.11) μέχρι το άπειρο. Χρησιμοποιώντας τις (2.15) και (2.19) παίρνουμε τα επίπεδα σημαντικότητας από τις κατά Edgeworth προσεγγίσεις της κανονικής (NE) και της t-Student (TE) κατανομής, αντίστοιχα. Το επίπεδο σημαντικότητας που αντιστοιχεί στην τοπικά ακριβή κατά Cornish-Fisher μέθοδο διόρθωσης του t ελέγχου (CFT) βρίσκεται με ολοκλήρωση της t_{T-n} πυκνότητας από την τιμή του στατιστικού (2.21) μέχρι το άπειρο. Όμοια υπολογίζονται τα επίπεδα σημαντικότητας που αντιστοιχούν στις μεθόδους διόρθωσης του μεγέθους του F ελέγχου. Ολοκληρώνοντας την χ^2_{n-1} πυκνότητα από την τιμή του στατιστικού (2.27) μέχρι το άπειρο παίρνουμε το επίπεδο σημαντικότητας που αντιστοιχεί στην προσέγγιση με την χ^2 κατανομή (X2) και χρησιμοποιώντας την (2.30) βρίσκουμε το επίπεδο σημαντικότητας από την κατά Edgeworth προσέγγιση της χ^2 κατανομής (X2E). Ολοκληρώνοντας την F^{n-1}_{T-n} πυκνότητα από την τιμή του στατιστικού (2.35) μέχρι το άπειρο παίρνουμε το επίπεδο σημαντικότητας που αντιστοιχεί στην προσέγγιση με την F κατανομή (F) και χρησιμοποιώντας την (2.36) βρίσκουμε το επίπεδο σημαντικότητας από την κατά Edgeworth προσέγγιση της F κατανομής (FE). Τέλος, το επίπεδο σημαντικότητας που αντιστοιχεί στην τοπικά ακριβή κατά Cornish-Fisher μέθοδο διόρθωσης του F ελέγχου (CFF) βρίσκεται με ολοκλήρωση της F^{n-1}_{T-n} πυκνότητας από την τιμή του στατιστικού (2.39) μέχρι το άπειρο. Στο σημείο αυτό πρέπει να διευκρινίσουμε ότι οι παράμετροι p_i (i = 1, 2) στις σχέσεις (2.15), (2.19) και (2.21) και οι παράμετροι h_i και q_i (i = 1, 2) στις σχέσεις (2.30) και (2.36) ή (2.39), αντίστοιχα, υπολογίσθησαν με βάση τα αποτελέσματα που δίνονται στις Προτάσεις 3.1 και 3.2.

Χρησιμοποιώντας τα ανωτέρω επίπεδα σημαντικότητας κατασκευάσαμε τον Πίνακα 3.2 ως εξής: Για κάθε σημείο του πειραματικού χώρου, δηλαδή για κάθε συνδυασμό των τιμών των παραμέτρων ρ και A, υπολογίσαμε το πραγματικό μέγεθος (actual

size) του ελέγχου των υποθέσεων (3.22) (για όλες τις ερμηνευτικές μεταβλητές και την σταθερά) και (3.23) έναντι των εναλλακτικών υποθέσεων (3.27) και (3.28), αντίστοιχα, σε δεδομένο επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας (nominal size). Ειδικότερα, αν τα συνήθη ή τα κατά Cornish-Fisher διορθωμένα t στατιστικα ήσαν θετικά ή αρνητικά, χρησιμοποιούσαμε την εναλλακτική υπόθεση (3.27) με $>$ ή $<$, αντίστοιχα. Εφόσον για κάθε συνδυασμό των τιμών των παραμέτρων ρ και Α πραγματοποιήθηκαν 500 επαναλήψεις του πειράματος, το πραγματικό μέγεθος καθενός ελέγχου σε κάθε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας ισούται με την σχετική συχνότητα των περιπτώσεων κατά τις οποίες το αντίστοιχο επίπεδο σημαντικότητας (p-value) είναι κατ' απόλυτη τιμή μικρότερο από αυτό το επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας, δηλαδή με το πλήθος αυτών των περιπτώσεων διαιρεμένο δια 500. Το πραγματικό μέγεθος των ελέγχων υπολογίσθηκε για όλες τις διαφορετικές μεθόδους υπολογισμού των επιπέδων σημαντικότητας που αντιστοιχούν είτε στα συνήθη t και F στατιστικά, είτε στις εναλλακτικές μεθόδους διόρθωσης του μεγέθους των αντιστοίχων ελέγχων. Ο υπολογισμός του πραγματικού μεγέθους των ελέγχων έγινε ξεχωριστά για τα θετικά και τα αρνητικά t στατιστικά και πραγματοποιήθηκε για τρείς διαφορετικές τιμές του επιπέδου στατιστικής σημαντικότητας: 0.01, 0.05, 0.10.

Τα πραγματικά μεγέθη των t και F ελέγχων, που υπολογίσθησαν όπως περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο, παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.2. Τα κυριότερα συμπεράσματα που συνάγονται από την εξέταση του πίνακα αυτού είναι τα ακόλουθα.

Είναι γνωστό από την στατιστική θεωρία (βλ. και την σχετική συζήτηση στο Κεφάλαιο 1) ότι, αν κατά την διενέργεια των ελέγχων t και F χρησιμοποιήσουμε τις ασυμπτωτικές κατανομές (κανονική και χ^2), αντί των ακριβών (exact) κατανομών (t-Student και F, αντίστοιχα), οι ασυμπτωτικοί έλεγχοι που θα προκύψουν είναι πιο αυστηροί από τους αντιστοίχους ακριβείς. Δηλαδή, οι έλεγχοι που χρησιμοποιούν τις ασυμπτωτικές κατανομές απορρίπτουν την μηδενική υπόθεση συχνότερα από ό,τι οι έλεγχοι που βασίζονται στις ακριβείς κατανομές. Επομένως, το πραγματικό μέγεθος της ασυμπτωτικής μορφής των ελέγχων είναι μεγαλύτερο από το πραγματικό μέγεθος της ακριβούς μορφής τους. Αυτό το θεωρητικό αποτέλεσμα επαληθεύεται

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2

ΕΚΤΙΜΗΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ

(ΘΕΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

H_o:		β_1														
Size:		1%					5%					10%				
Test:		N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT
ρ	A	%					%					%				
−.9	.0	0.8	0.8	0.4	0.6	0.4	2.0	2.0	1.6	1.8	1.8	5.4	6.2	5.2	5.8	5.6
	.1	0.4	0.4	0.2	0.2	0.2	3.4	3.6	2.2	3.6	3.6	5.8	6.8	5.0	6.4	6.4
	.5	1.0	0.8	0.2	0.4	0.4	4.4	4.4	3.8	4.4	4.4	8.8	9.2	8.4	9.0	9.0
	.9	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	1.8	2.0	1.2	1.6	1.6	5.8	6.2	4.6	6.2	6.0
−.5	.0	1.6	1.2	0.8	1.2	1.2	5.8	5.2	4.8	5.0	5.0	10.2	10.6	10.2	10.4	10.4
	.1	1.2	1.0	0.8	1.0	1.0	6.0	5.2	4.6	5.0	5.0	8.4	8.8	8.0	8.2	8.2
	.5	1.2	1.0	0.6	0.8	0.8	5.4	4.8	4.0	4.6	4.6	9.6	9.6	8.8	9.6	9.2
	.9	1.2	0.8	0.8	0.8	0.8	5.6	5.0	4.8	4.8	4.8	10.6	10.2	9.8	10.0	10.0
−.1	.0	4.2	2.6	2.8	2.2	1.6	9.8	7.8	8.4	7.4	7.2	14.2	12.2	13.0	11.8	11.8
	.1	2.8	2.2	2.2	1.6	1.6	7.0	6.0	6.0	6.0	6.0	9.4	9.0	9.0	8.8	8.8
	.5	3.2	2.4	2.4	2.0	2.0	8.2	6.8	7.6	6.6	6.6	11.6	10.0	10.8	9.6	9.6
	.9	2.8	1.8	2.2	1.8	1.6	8.0	6.6	7.4	6.6	6.2	11.6	10.2	10.6	9.8	9.8
.1	.0	2.4	2.2	2.2	1.6	1.2	9.0	6.2	7.8	6.2	5.8	14.2	12.6	13.2	12.4	12.2
	.1	3.6	1.8	2.0	1.6	1.6	8.2	6.6	7.8	6.4	6.4	13.4	11.6	12.8	11.4	11.4
	.5	1.0	0.4	0.8	0.4	0.4	7.0	4.4	5.6	4.2	3.8	13.0	10.8	12.2	10.4	9.8
	.9	2.2	1.4	1.6	1.4	1.4	7.6	5.6	6.6	5.2	5.0	11.4	10.0	10.8	10.0	9.8
.5	.0	6.2	4.6	5.2	3.6	2.4	14.0	9.2	12.6	8.8	7.8	18.6	14.0	17.6	14.0	13.4
	.1	8.4	5.2	6.8	4.2	1.8	11.8	9.6	11.0	9.6	8.4	17.0	13.0	16.8	13.0	11.6
	.5	7.8	4.0	6.8	3.6	1.4	12.8	9.8	12.2	9.4	6.4	18.4	13.2	17.4	13.2	11.0
	.9	7.6	4.4	6.2	4.0	2.2	11.8	9.8	11.0	9.6	8.0	16.6	12.8	15.8	12.8	11.6
.9	.0	22.6	17.6	20.6	14.4	5.8	31.0	23.6	29.6	22.8	10.4	35.6	28.4	34.8	28.2	14.8
	.1	22.6	17.0	20.8	12.8	6.4	30.0	23.2	29.2	21.8	8.0	34.4	27.4	33.4	26.8	12.4
	.5	22.0	16.6	20.2	14.0	10.8	28.2	21.4	27.2	20.6	13.4	32.4	25.8	32.0	25.4	18.0
	.9	23.8	17.2	21.4	13.6	9.0	29.8	23.2	28.6	21.8	11.8	34.6	27.4	34.0	26.8	16.6

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2

ΕΚΤΙΜΗΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ

(ΘΕΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

H_o:																
								β_2								
Size:		1%					5%					10%				
Test:		N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT
ρ	A	%					%					%				
−.9	.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.0	2.0	1.6	1.8	1.8	6.8	7.4	6.0	7.0	7.0
	.1	0.6	0.2	0.2	0.0	0.0	3.4	2.8	3.0	2.6	2.6	7.4	7.6	7.2	7.0	7.0
	.5	1.2	0.8	0.8	0.6	0.6	2.8	2.6	2.4	2.4	2.4	6.4	6.2	5.6	6.0	6.0
	.9	0.8	0.4	0.2	0.4	0.2	4.2	3.8	3.8	3.8	3.6	7.6	7.6	7.6	7.6	7.6
−.5	.0	2.0	1.2	1.2	0.8	0.6	5.2	3.4	4.0	3.4	3.4	9.8	8.6	9.2	8.4	8.0
	.1	1.8	1.2	1.2	1.0	1.0	6.2	4.8	5.0	4.6	4.4	10.8	9.8	10.2	9.8	9.8
	.5	3.2	1.4	1.6	0.6	0.4	9.2	7.2	7.6	7.0	6.6	15.8	12.4	15.0	12.2	12.2
	.9	1.8	1.2	1.2	1.0	1.0	6.2	4.6	5.2	4.6	4.4	11.6	10.4	10.8	10.4	10.2
−.1	.0	3.6	2.2	2.4	1.2	1.0	9.6	7.2	8.0	6.8	6.6	15.0	13.2	14.2	13.0	12.8
	.1	2.8	2.0	2.0	1.4	1.4	6.4	5.4	5.8	5.0	4.8	11.8	10.0	11.2	10.0	9.6
	.5	3.0	2.0	2.0	1.8	1.6	7.0	5.0	6.0	5.0	5.0	11.6	9.0	11.0	9.0	8.8
	.9	3.6	2.2	2.2	2.2	1.8	7.2	5.6	6.0	5.6	5.6	11.8	10.0	11.2	9.8	9.8
.1	.0	1.2	0.4	0.4	0.2	0.2	6.4	4.8	5.4	4.8	4.6	10.6	9.4	10.2	9.2	9.0
	.1	3.0	1.8	1.8	1.6	1.6	8.4	6.2	6.6	6.0	6.0	13.4	11.2	12.2	11.2	11.2
	.5	3.8	2.6	2.8	2.2	2.0	10.0	8.2	9.0	7.6	7.6	14.4	13.2	13.6	13.2	13.2
	.9	3.0	2.4	2.6	2.2	2.0	8.4	5.8	7.2	5.6	5.6	13.4	11.0	12.8	10.8	10.8
.5	.0	2.2	1.4	1.4	1.4	1.4	8.0	5.2	6.4	4.8	4.8	13.4	11.2	12.4	11.0	11.0
	.1	2.6	1.6	1.8	1.0	0.4	6.6	4.4	5.4	4.2	4.2	11.6	9.6	11.0	9.4	9.4
	.5	1.4	1.2	0.8	1.2	1.2	5.4	4.6	4.2	4.6	4.6	11.0	10.0	10.6	9.8	9.8
	.9	1.4	1.0	1.0	1.0	0.8	5.8	4.4	4.8	4.4	4.4	10.0	8.0	8.8	8.0	7.8
.9	.0	1.4	0.8	0.8	0.6	0.6	6.0	5.0	5.0	4.6	4.6	11.6	9.4	10.4	9.2	9.2
	.1	1.0	0.6	0.4	0.4	0.4	4.4	3.8	2.8	3.4	3.4	8.4	8.6	8.0	8.6	8.6
	.5	2.2	1.8	1.4	1.6	1.4	6.8	5.6	5.4	5.6	5.6	11.8	11.0	10.6	10.8	10.8
	.9	1.8	0.8	0.6	0.8	0.8	6.2	6.0	5.8	5.8	5.8	9.4	9.4	8.4	9.4	9.4

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2

ΕΚΤΙΜΗΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ

(ΘΕΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

H_o:		β_2														
Size:		1%					5%					10%				
Test:		N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT
ρ	A	%					%					%				
−.9	.0	0.6	0.6	0.2	0.4	0.4	2.6	2.6	2.4	2.4	2.4	7.6	7.6	7.0	7.6	7.6
	.1	0.6	0.4	0.4	0.4	0.4	2.6	2.6	2.4	2.2	2.2	7.2	6.2	6.6	6.2	6.2
	.5	1.0	0.8	0.8	0.8	0.8	5.8	5.0	5.0	5.0	5.0	10.2	9.8	9.4	9.6	9.6
	.9	0.8	0.4	0.4	0.4	0.4	2.6	2.6	2.6	2.4	2.4	6.2	5.8	5.6	5.8	5.8
−.5	.0	1.4	1.0	1.0	0.8	0.8	7.2	6.0	6.0	5.6	5.6	13.0	11.6	11.8	11.6	11.6
	.1	1.4	1.2	1.2	1.2	1.2	6.8	5.6	5.6	5.4	5.4	11.8	10.6	11.0	10.6	10.6
	.5	1.8	1.0	1.0	0.6	0.6	6.2	4.6	5.4	4.0	4.0	11.4	8.4	10.4	8.2	7.8
	.9	2.4	1.4	1.6	1.0	1.0	8.0	6.2	6.6	6.2	6.0	12.8	11.4	12.4	11.4	11.4
−.1	.0	1.6	1.2	1.4	0.8	0.8	7.4	5.6	6.2	5.4	5.4	11.4	9.8	11.0	9.8	9.8
	.1	2.4	1.4	1.6	1.4	1.4	6.6	5.0	6.0	4.6	4.6	12.8	10.2	12.0	10.2	10.2
	.5	2.6	2.0	2.2	2.0	1.8	6.4	5.4	5.8	5.2	4.6	12.8	9.6	11.6	9.4	9.4
	.9	3.0	1.8	2.0	1.4	1.2	8.8	5.6	7.2	5.6	5.6	13.8	11.8	13.0	11.0	10.8
.1	.0	3.0	2.0	2.2	1.8	1.8	7.8	6.0	6.8	5.8	5.8	11.8	10.8	11.0	10.4	10.4
	.1	2.6	1.2	1.2	1.0	1.0	7.4	5.6	6.2	5.4	5.2	13.4	11.4	12.0	11.2	11.2
	.5	3.6	2.4	2.6	1.8	1.6	9.0	6.4	7.6	6.4	6.4	14.2	10.6	12.2	10.6	10.6
	.9	3.2	2.2	2.4	2.0	2.0	7.6	5.2	6.4	5.0	5.0	12.4	9.4	10.8	9.4	9.4
.5	.0	4.6	2.0	3.4	1.8	1.6	9.2	7.0	7.6	7.0	6.2	14.0	11.6	12.8	11.4	11.2
	.1	2.0	1.0	1.0	0.8	0.8	6.4	4.2	4.8	4.2	4.2	11.2	9.4	10.0	9.4	9.4
	.5	1.4	0.8	0.8	0.8	0.8	7.4	4.4	6.2	4.4	4.2	11.2	9.8	10.6	9.6	9.6
	.9	2.0	1.0	1.2	0.8	0.8	7.6	5.2	6.2	4.6	4.6	13.4	10.6	12.2	10.0	10.0
.9	.0	0.4	0.4	0.2	0.4	0.2	2.8	2.6	2.4	2.6	2.6	7.6	7.0	6.6	7.0	7.0
	.1	1.0	1.0	0.6	1.0	0.8	3.2	3.4	2.8	3.2	3.0	7.0	7.2	6.4	6.8	6.8
	.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.4	2.2	2.0	1.8	1.8	6.4	6.4	6.0	6.2	6.2
	.9	0.8	0.4	0.2	0.4	0.4	4.6	4.6	3.8	4.4	4.4	7.8	8.4	6.8	8.2	8.0

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2

ΕΚΤΙΜΗΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ

(ΘΕΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

H_o:		β_4														
Size:		1%					5%					10%				
Test:		N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT
ρ	A	%					%					%				
−.9	.0	0.4	0.2	0.0	0.2	0.2	2.0	2.2	1.4	2.0	1.8	5.8	5.2	5.0	5.0	5.0
	.1	0.6	0.4	0.2	0.4	0.4	3.6	3.0	3.0	3.0	3.0	6.6	6.8	6.2	6.6	6.6
	.5	0.4	0.4	0.2	0.4	0.4	2.8	3.0	2.0	2.8	2.8	6.8	7.2	5.6	6.6	6.6
	.9	0.6	0.2	0.2	0.2	0.2	2.8	2.4	1.8	2.2	2.0	8.4	8.0	7.2	7.8	7.6
−.5	.0	1.8	0.6	0.6	0.4	0.4	5.8	3.8	5.0	3.8	3.8	10.6	10.2	10.6	10.2	10.2
	.1	2.8	1.8	1.8	1.6	1.2	7.8	5.6	7.4	5.0	5.0	11.2	9.4	10.4	9.4	9.2
	.5	2.2	1.4	1.6	1.4	1.4	6.4	5.2	5.6	5.0	5.0	12.2	10.2	11.6	10.2	10.2
	.9	1.2	1.2	1.2	1.0	1.0	5.2	4.4	3.8	3.6	3.6	9.4	9.0	8.8	8.8	8.8
−.1	.0	2.2	1.2	1.4	0.8	0.8	8.2	5.8	6.6	5.0	5.0	12.8	12.0	12.6	11.6	11.4
	.1	1.0	0.2	0.2	0.0	0.0	7.0	3.4	4.6	3.2	3.2	11.6	10.0	10.6	9.8	9.6
	.5	2.6	1.2	1.2	0.6	0.6	9.2	6.8	8.8	6.2	6.0	12.8	12.0	12.2	12.0	11.6
	.9	2.0	1.4	1.2	1.2	1.0	6.4	5.2	5.6	5.0	4.4	12.4	9.8	11.4	9.6	9.2
.1	.0	2.8	2.6	2.6	2.2	2.0	8.2	6.0	7.2	5.6	5.4	14.8	11.2	13.6	11.2	11.2
	.1	2.0	0.6	0.6	0.4	0.4	7.6	6.2	6.8	5.8	5.6	12.6	10.6	11.4	10.2	10.2
	.5	1.6	0.6	0.8	0.6	0.6	5.4	4.0	4.4	3.8	3.8	9.2	7.6	9.0	7.6	7.2
	.9	2.2	1.6	1.6	1.2	1.2	7.0	5.0	5.6	4.6	4.2	12.6	10.2	11.2	10.2	10.2
.5	.0	2.8	1.6	1.4	1.6	1.6	8.2	6.2	7.2	6.0	5.6	12.8	10.4	11.8	10.4	10.4
	.1	1.8	1.0	1.0	1.0	1.0	5.8	5.4	5.2	5.2	5.2	10.8	10.0	10.2	10.0	10.0
	.5	1.6	1.0	0.8	1.0	0.8	5.4	4.6	4.8	4.4	4.2	9.8	9.4	8.8	9.2	9.2
	.9	2.0	1.2	0.8	0.8	0.8	6.8	5.6	5.4	5.4	5.4	13.4	12.4	12.2	11.8	11.8
.9	.0	2.4	1.8	1.8	1.4	1.4	7.2	6.0	6.8	5.6	5.4	12.8	10.6	11.6	10.6	10.2
	.1	0.6	0.4	0.4	0.4	0.4	3.2	3.2	2.6	3.2	3.2	9.6	9.8	8.4	9.4	9.4
	.5	0.6	0.4	0.2	0.4	0.4	3.0	3.2	2.6	2.8	2.8	7.0	8.0	6.8	7.6	7.4
	.9	1.6	0.8	0.6	0.8	0.8	3.6	3.6	3.4	3.6	3.6	7.4	7.2	6.4	7.0	6.8

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2

ΕΚΤΙΜΗΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ

(ΑΡΝΗΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

H_o:		β_1														
Size:		1%					5%					10%				
Test:		N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT
ρ	A	%					%					%				
−.9	.0	1.2	1.0	0.4	0.8	0.8	5.2	6.0	3.6	5.4	5.0	9.0	9.0	7.8	8.6	8.6
	.1	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	2.0	1.8	1.4	1.8	1.8	5.4	6.2	4.4	6.2	6.0
	.5	0.8	0.6	0.6	0.6	0.6	4.2	4.4	3.4	4.0	4.0	8.4	8.8	7.4	8.8	8.8
	.9	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	2.6	2.8	1.8	2.6	2.6	6.0	7.6	5.2	7.4	7.4
−.5	.0	2.2	2.0	1.4	1.8	1.8	6.4	6.2	5.8	6.2	6.2	9.6	9.4	8.8	9.0	8.8
	.1	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	4.8	4.4	4.0	4.4	4.4	9.8	9.8	9.0	9.8	9.8
	.5	1.8	1.2	0.8	1.0	1.0	6.0	5.6	5.0	5.6	5.6	11.8	11.6	10.8	11.2	11.2
	.9	1.0	0.6	0.4	0.6	0.6	5.4	5.0	4.6	4.4	4.4	11.0	10.8	10.4	10.8	10.8
−.1	.0	2.8	1.8	1.6	1.4	1.2	8.0	6.6	7.0	6.6	6.2	11.6	10.0	11.0	9.8	9.8
	.1	1.6	0.8	0.8	0.4	0.4	7.0	5.0	5.4	4.8	4.6	10.8	9.4	9.6	9.2	9.2
	.5	2.4	1.8	1.6	1.6	1.4	7.0	5.4	5.8	4.8	4.8	11.2	9.8	10.6	9.4	9.4
	.9	1.4	1.2	1.2	1.2	1.2	6.6	4.8	5.2	4.8	4.6	11.6	9.6	10.8	9.6	9.4
.1	.0	2.6	1.2	1.6	0.6	0.4	8.6	6.2	7.4	5.8	5.6	14.4	12.4	13.8	12.0	12.0
	.1	3.2	1.6	2.0	0.8	0.8	9.2	6.2	7.2	6.0	6.0	12.6	11.2	11.6	11.0	10.8
	.5	3.2	1.2	1.6	0.8	0.8	8.8	6.2	7.8	6.0	5.4	13.6	10.6	12.6	10.4	10.4
	.9	2.8	1.6	1.6	1.2	1.2	8.8	6.8	7.6	6.0	6.0	13.2	12.4	13.0	12.4	12.4
.5	.0	8.0	6.2	6.8	5.4	3.2	15.8	11.8	14.4	11.4	9.8	22.6	17.6	21.2	17.2	16.4
	.1	5.8	2.8	4.2	2.4	1.2	11.6	7.2	10.2	7.0	5.0	17.4	12.6	16.0	12.4	10.4
	.5	6.0	2.2	3.6	1.6	1.0	13.0	9.8	12.0	9.4	6.6	17.4	13.8	16.6	13.6	11.4
	.9	5.0	3.4	4.0	3.2	1.4	11.4	7.8	10.8	7.4	6.2	17.0	12.2	16.0	12.0	10.4
.9	.0	20.2	16.8	18.4	15.0	6.8	26.8	20.8	25.4	19.8	10.4	32.6	24.4	32.0	24.4	15.0
	.1	19.6	12.6	16.4	10.0	8.0	26.2	18.0	25.2	17.4	10.6	29.6	22.8	29.2	21.6	12.8
	.5	22.0	17.0	21.2	14.8	10.0	27.8	21.6	26.8	21.2	12.2	33.8	25.2	32.4	24.6	15.0
	.9	24.4	18.6	21.6	15.0	7.6	30.8	24.2	30.0	22.6	9.4	34.6	27.6	34.4	26.6	13.0

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2

ΕΚΤΙΜΗΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ

(ΑΡΝΗΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

H_o:					β_2										
Size:		1%					5%					10%				
Test:		N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT
ρ	A	%					%					%				
−.9	.0	0.8	0.6	0.4	0.6	0.6	3.0	2.8	2.6	2.8	2.8	6.0	6.2	5.4	6.2	6.2
	.1	1.2	1.0	0.8	1.0	0.8	3.4	3.2	3.0	3.0	3.0	6.4	6.2	5.4	6.0	6.0
	.5	1.2	0.8	0.6	0.4	0.4	4.4	4.0	3.4	3.6	3.6	7.8	8.0	7.8	8.0	8.0
	.9	1.0	0.4	0.2	0.4	0.4	3.4	3.2	3.0	3.0	3.0	6.8	7.0	6.2	6.8	6.8
−.5	.0	2.0	1.0	1.0	0.8	0.8	7.2	5.4	5.6	5.4	5.4	15.0	11.6	14.0	11.4	11.4
	.1	1.6	0.8	0.6	0.6	0.6	6.2	4.2	5.8	4.0	4.0	12.4	10.8	11.0	10.6	10.6
	.5	2.2	1.0	1.0	0.2	0.2	6.2	4.6	5.6	4.2	4.2	13.2	10.0	11.8	9.6	9.6
	.9	2.0	1.2	1.2	1.2	0.8	5.8	4.6	4.8	4.6	4.6	10.4	7.6	9.2	7.6	7.6
−.1	.0	2.2	1.0	1.0	1.0	0.8	6.6	4.4	5.0	3.6	3.6	12.0	9.8	11.2	9.8	9.6
	.1	2.0	1.8	2.0	1.6	1.6	6.2	4.0	4.6	4.0	4.0	11.2	9.4	10.4	9.2	9.2
	.5	2.6	1.2	1.2	1.2	1.2	6.4	4.6	4.8	4.4	4.2	12.2	9.6	11.0	9.6	9.6
	.9	2.2	1.4	1.4	1.2	1.0	6.0	5.2	5.4	5.0	4.8	13.0	11.0	12.0	11.0	10.8
.1	.0	3.2	2.4	2.4	2.0	2.0	7.4	5.8	6.6	5.6	5.6	12.0	10.8	11.4	10.8	10.8
	.1	3.4	1.8	2.0	1.0	0.6	8.0	6.8	7.2	6.4	6.4	12.0	10.6	11.4	10.4	10.2
	.5	3.0	2.4	2.4	1.2	1.0	7.6	5.6	6.6	5.0	4.6	11.6	9.2	10.4	9.2	9.2
	.9	2.0	0.8	0.8	0.6	0.6	7.4	5.8	6.4	5.6	5.6	14.2	11.8	13.8	11.6	11.2
.5	.0	2.6	1.8	1.8	1.4	1.2	8.4	7.0	7.4	6.6	6.4	14.6	11.8	13.6	11.8	11.6
	.1	1.6	1.0	1.0	0.8	0.8	7.0	5.0	5.6	4.8	4.8	12.0	9.6	10.6	9.6	9.6
	.5	1.4	0.8	0.8	0.6	0.6	5.6	5.0	4.8	4.8	4.8	11.2	10.0	10.2	10.0	9.8
	.9	1.4	0.8	0.8	0.8	0.8	6.4	5.2	5.0	4.8	4.8	11.4	9.8	10.6	9.8	9.8
.9	.0	2.0	1.6	1.8	1.4	1.2	5.6	4.0	4.2	3.8	3.6	9.0	8.4	8.6	8.0	7.8
	.1	0.2	0.2	0.0	0.0	0.0	2.8	2.6	2.2	2.6	2.6	7.8	7.6	6.2	7.2	7.0
	.5	1.4	0.4	0.4	0.4	0.4	4.8	4.0	4.4	3.6	3.6	9.8	8.8	8.6	8.4	8.4
	.9	1.2	1.0	0.8	0.6	0.6	3.0	3.2	2.6	3.2	3.0	7.4	6.6	6.4	6.4	6.4

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2

ΕΚΤΙΜΗΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ

(ΑΡΝΗΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

H_o:										β_3									
Size:		1%					5%					10%				
Test:		N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT
ρ	A	%					%					%				
−.9	.0	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	2.2	2.0	1.6	2.0	2.0	5.4	5.2	4.8	5.2	5.2
	.1	1.4	0.6	0.6	0.4	0.2	5.8	4.2	3.8	3.8	3.8	10.4	9.6	9.6	9.6	9.6
	.5	1.0	0.4	0.2	0.4	0.4	3.4	3.2	3.0	3.0	3.0	7.0	6.6	6.2	6.2	6.2
	.9	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	2.8	2.8	2.2	2.4	2.4	7.4	7.6	6.2	7.2	7.2
−.5	.0	1.2	0.4	0.4	0.2	0.2	5.6	4.0	4.6	4.0	4.0	12.0	10.6	10.6	10.2	10.2
	.1	1.0	0.8	0.6	0.8	0.8	5.2	4.4	4.4	4.2	4.0	10.4	9.0	9.4	8.8	8.8
	.5	3.6	2.0	2.4	1.6	1.4	7.8	6.4	7.2	6.0	5.8	13.0	9.6	11.8	9.6	9.2
	.9	1.6	1.0	1.0	1.0	1.0	4.8	3.8	4.0	3.8	3.8	9.2	8.6	8.8	8.6	8.6
−.1	.0	1.0	0.6	0.8	0.4	0.4	3.4	3.0	3.0	2.8	2.6	10.4	7.0	8.6	6.8	6.8
	.1	3.2	1.8	1.8	1.8	1.6	7.4	6.2	6.8	5.8	5.8	11.6	10.2	10.8	10.2	10.0
	.5	2.0	1.2	1.4	1.0	0.8	6.8	4.8	6.4	4.8	4.6	13.2	10.2	12.2	9.8	9.8
	.9	3.0	2.0	2.2	2.0	2.0	8.0	6.8	7.4	6.2	6.2	11.6	10.2	10.6	10.2	10.2
.1	.0	2.2	1.4	1.4	1.4	1.4	7.8	6.6	6.8	6.4	6.4	12.4	10.6	11.4	10.6	10.4
	.1	1.6	1.0	1.0	1.0	1.0	6.4	4.2	4.6	4.0	3.8	10.8	9.0	9.6	9.0	9.0
	.5	3.6	2.4	2.6	2.0	1.8	9.2	6.2	7.8	5.8	5.6	13.4	10.6	12.6	10.4	10.4
	.9	2.2	1.8	1.8	1.6	1.6	7.4	5.2	6.8	5.0	4.8	12.8	10.2	12.2	10.2	10.2
.5	.0	5.8	4.0	4.8	3.8	2.8	12.4	9.6	11.0	8.8	8.8	17.6	14.2	17.4	14.2	14.0
	.1	1.0	0.8	0.8	0.8	0.8	5.6	4.6	5.0	4.4	4.4	9.8	8.8	9.4	8.8	8.4
	.5	2.4	1.8	1.6	1.0	1.0	7.4	6.2	6.6	5.8	5.8	13.4	11.8	12.6	11.8	11.8
	.9	2.8	2.0	2.0	1.6	1.6	8.2	6.6	6.6	6.2	6.2	14.6	13.0	13.8	12.8	12.6
.9	.0	1.0	1.0	0.6	0.6	0.4	3.4	3.0	2.6	2.8	2.8	8.2	8.4	7.6	7.8	7.4
	.1	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	4.2	4.0	3.2	4.0	4.0	9.2	9.4	8.2	9.4	9.4
	.5	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	4.2	4.0	3.6	4.0	4.0	9.8	10.0	8.4	10.0	9.8
	.9	1.0	0.8	0.4	0.8	0.6	3.6	4.0	3.0	3.6	3.4	6.6	6.8	6.2	6.8	6.6

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2

ΕΚΤΙΜΗΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ

(ΑΡΝΗΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

H_o:		β_1														
Size:		1%					5%					10%				
Test:		N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT
ρ	A	%					%					%				
−.9	.0	0.4	0.4	0.2	0.4	0.4	2.0	2.4	1.6	2.4	2.2	4.8	4.4	4.4	4.2	4.2
	.1	0.6	0.4	0.2	0.2	0.2	3.0	2.8	2.6	2.4	2.4	6.0	6.0	5.2	6.0	6.0
	.5	0.8	0.6	0.6	0.6	0.6	3.6	3.4	2.8	3.4	3.4	7.4	7.4	6.6	7.4	7.2
	.9	1.0	0.8	0.6	0.6	0.6	3.0	2.4	2.4	2.2	2.2	6.2	5.6	5.2	5.4	5.4
−.5	.0	3.2	2.0	2.0	1.8	1.6	7.6	6.6	7.2	6.0	5.8	14.6	12.2	12.6	11.8	11.8
	.1	3.8	2.2	2.2	2.2	2.2	10.0	7.4	8.6	7.0	6.6	17.2	13.2	16.0	12.6	12.0
	.5	2.4	1.0	1.2	0.6	0.6	6.6	5.6	5.8	5.6	5.4	11.2	9.4	10.2	9.4	9.4
	.9	2.4	1.6	1.6	1.4	1.4	6.6	6.2	6.0	5.8	5.8	11.4	10.6	10.8	10.6	10.6
−.1	.0	2.4	1.4	1.6	0.8	0.8	8.8	6.0	7.6	5.8	5.6	12.4	10.4	11.6	10.2	10.2
	.1	2.0	1.0	1.0	0.8	0.8	5.6	4.0	4.6	3.8	3.6	11.8	8.6	10.6	8.4	8.2
	.5	3.6	2.0	2.2	1.6	1.6	7.2	5.8	6.6	5.6	5.4	12.2	10.0	11.0	10.0	10.0
	.9	2.0	0.8	1.0	0.6	0.6	8.0	7.2	7.2	6.8	6.6	14.0	12.2	13.2	12.2	12.0
.1	.0	2.0	1.0	1.0	0.6	0.6	5.6	3.8	4.8	3.4	3.4	10.6	7.8	9.6	7.6	7.6
	.1	3.2	2.4	2.4	1.8	1.6	9.8	7.6	8.6	7.4	7.2	13.6	11.8	12.8	11.8	11.8
	.5	2.6	1.4	1.6	1.4	1.4	10.0	7.2	7.8	6.8	6.8	16.2	12.6	14.4	12.0	12.0
	.9	2.4	1.8	2.2	1.6	1.6	7.0	5.2	6.0	5.2	5.2	12.6	10.4	12.2	10.2	10.0
.5	.0	1.0	0.4	0.4	0.4	0.4	9.2	6.6	7.8	6.6	6.4	16.4	13.2	15.2	13.2	13.0
	.1	1.0	0.6	0.6	0.4	0.4	6.4	5.4	4.8	5.0	5.0	10.6	10.6	10.0	10.4	10.4
	.5	1.6	1.0	0.8	0.8	0.8	6.4	5.4	5.0	5.4	5.2	11.4	10.2	10.2	10.2	10.2
	.9	1.8	1.0	1.2	0.6	0.6	4.6	3.8	4.2	3.6	3.6	10.8	9.0	9.2	9.0	9.0
.9	.0	3.0	2.0	2.2	1.4	1.4	9.8	7.2	8.6	6.6	6.2	16.6	13.6	15.8	13.6	13.6
	.1	0.8	0.6	0.6	0.6	0.6	4.6	4.6	3.6	4.4	4.4	10.6	10.6	9.0	10.0	10.0
	.5	0.6	0.4	0.2	0.4	0.4	4.0	3.4	3.0	3.2	3.0	8.2	7.8	6.0	7.8	7.6
	.9	1.2	0.8	0.6	0.6	0.6	5.2	4.6	4.2	4.4	4.4	10.6	10.6	9.6	10.4	10.2

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.2

ΕΚΤΙΜΗΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ

(F ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

H_o:		$\beta_2, \beta_3, \beta_4$														
Size:		1%					5%					10%				
Test:		X2	X2E	F	FE	CFF	X2	X2E	F	FE	CFF	X2	X2E	F	FE	CFF
ρ	A	%					%					%				
−.9	.0	0.6	0.0	0.0	0.0	0.0	2.0	1.2	0.8	1.2	1.0	4.2	3.8	2.4	3.4	3.4
	.1	1.4	0.4	0.2	0.0	0.0	4.0	2.6	2.4	2.2	2.2	6.8	4.4	4.4	4.2	4.2
	.5	1.2	0.6	0.0	0.4	0.4	4.6	2.6	2.4	2.6	2.6	8.8	6.2	4.8	5.8	5.2
	.9	1.0	0.2	0.2	0.2	0.2	2.6	2.0	2.0	2.0	2.0	5.4	4.4	3.0	4.0	3.8
−.5	.0	3.0	1.6	1.0	0.6	0.6	11.0	5.0	5.4	4.0	3.4	18.2	11.2	12.6	10.6	10.0
	.1	6.0	3.4	2.4	1.4	1.4	11.8	8.4	8.8	6.8	6.0	16.8	12.6	13.0	11.2	11.0
	.5	4.6	3.0	3.0	2.0	1.6	11.2	6.2	6.4	5.0	4.6	17.8	10.2	12.6	8.8	8.6
	.9	4.0	2.2	1.0	0.8	0.6	11.2	6.6	6.8	4.8	4.4	17.6	12.0	13.2	11.0	10.8
−.1	.0	4.4	1.6	1.0	0.4	0.2	10.8	5.4	6.2	4.4	3.8	18.0	10.6	12.4	9.2	8.6
	.1	5.4	2.4	1.8	1.2	1.2	11.8	7.0	7.4	5.4	5.0	16.6	11.2	12.4	9.6	9.2
	.5	6.6	3.4	2.8	1.8	1.0	13.6	8.4	9.2	6.4	5.6	19.0	12.8	15.0	12.2	11.4
	.9	6.0	2.6	1.8	1.2	1.2	14.0	7.8	8.6	6.2	6.0	21.2	13.4	15.6	12.4	11.4
.1	.0	6.2	3.2	3.0	2.6	2.2	13.4	9.0	9.0	6.8	5.6	18.0	13.2	14.4	12.2	11.6
	.1	5.8	2.2	0.6	0.6	0.4	14.2	8.8	9.2	6.4	6.4	22.4	14.6	16.2	12.4	11.6
	.5	7.8	3.6	2.8	2.2	1.8	15.8	10.0	10.6	8.2	6.8	21.0	14.8	16.6	12.8	11.8
	.9	6.4	3.4	2.8	2.0	2.0	11.8	7.6	8.0	6.6	6.2	17.8	11.6	13.4	10.4	10.2
.5	.0	9.8	6.4	4.8	2.6	2.0	19.4	12.2	13.2	10.2	9.2	26.0	19.4	20.6	16.6	15.4
	.1	3.2	1.6	0.6	0.6	0.2	9.6	6.4	6.8	3.6	3.4	15.2	11.0	11.4	9.2	9.2
	.5	3.8	2.2	1.6	1.2	1.2	10.0	6.2	6.2	5.2	5.0	15.8	10.4	11.2	8.8	8.6
	.9	5.0	2.4	1.4	0.8	0.8	11.0	7.0	7.0	6.0	5.6	17.4	11.8	12.0	10.6	10.6
.9	.0	3.2	2.2	1.6	1.2	1.2	8.4	5.0	4.8	4.0	3.8	14.2	9.4	9.2	9.0	8.8
	.1	1.4	0.8	0.4	0.4	0.4	5.2	3.2	2.6	2.8	2.8	8.6	7.2	5.4	6.8	6.4
	.5	2.2	1.6	1.0	1.0	0.8	6.0	4.2	3.0	3.8	3.2	10.6	9.6	7.0	8.4	8.0
	.9	2.0	0.8	0.0	0.2	0.2	7.6	5.4	4.0	4.4	3.8	11.8	10.4	8.4	9.8	9.4

από τα αποτελέσματα του πειράματός μας, όπως φαίνεται στον Πίνακα 3.2.

Στις οκτώ πρώτες σελίδες του Πίνακα 3.2 παρουσιάζονται οι εκτιμημένες πιθανότητες απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης για τον t έλεγχο της στατιστικής σημαντικότητας καθεμιάς από τις παραμέτρους β_j (j = 1,...,4). Η περίπτωση κατά την οποία η εναλλακτική υπόθεση είναι η H_1: $\beta_j > 0$ παρουσιάζεται στις πρώτες τέσσερεις σελίδες του Πίνακα 3.2, ενώ η περίπτωση με εναλλακτική υπόθεση την H_1: $\beta_j < 0$ δίνεται στις επόμενες τέσσερεις σελίδες του. Ο πίνακας δείχνει ότι για συνδυασμούς των τιμών της παραμέτρου A με μικρές ή ενδιάμεσες τιμές της απόλυτης τιμής της παραμέτρου ρ, δηλαδή $|\rho| = .1$ ή $|\rho| = .5$, ο έλεγχος CFT είναι σχεδόν παντού ο καλύτερος, ακολουθούμενος από τους ελέγχους TE και NE που είναι ο δεύτερος και τρίτος καλύτερος, αντίστοιχα. Ο έλεγχος T είναι ο αμέσως επόμενος καλύτερος, ενώ την χειρότερη απόδοση από όλους έχει ο N έλεγχος. Αντίθετα, στις περιπτώσεις κατά τις οποίες η απόλυτη τιμή της παραμέτρου ρ είναι κοντά στην μονάδα οι έλεγχοι N και NE είναι συνήθως οι καλύτεροι. Ο έλεγχος N είναι πιθανότερο να αποδίδει καλύτερα από τον NE έλεγχο για τιμές της παραμέτρου ρ κοντά στο −1, ενώ το αντίθετο είναι αληθές για τιμές της παραμέτρου ρ κοντά στο 1.

Η ένατη σελίδα του Πίνακα 3.2 περιέχει τις εκτιμημένες πιθανότητες απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης για τον F έλεγχο της "στατιστικής σημαντικότητας" της εκτιμημένης εξίσωσης, δηλαδή της από κοινού στατιστικής σημαντικότητας των παραμέτρων β_2, β_3 και β_4. Ο πίνακας δείχνει ότι, στις περισσότερες περιπτώσεις, για συνδυασμούς των τιμών της παραμέτρου A με μικρές ή ενδιάμεσες τιμές της απόλυτης τιμής της παραμέτρου ρ, δηλαδή $|\rho| = .1$ ή $|\rho| = .5$, ο έλεγχος CFF είναι ο καλύτερος, ακολουθούμενος από τους ελέγχους FE και X2E που είναι ο δεύτερος και τρίτος καλύτερος, αντίστοιχα. Ο έλεγχος F είναι ο αμέσως επόμενος καλύτερος, ενώ την χειρότερη απόδοση από όλους αυτούς τους ελέγχους έχει ο X2. Αξίζει να σημειωθεί ότι για ονομαστικό μέγεθος ίσο με 0.01 ο F έλεγχος έχει καλύτερη απόδοση από τον έλεγχο X2E. Αντίθετα, στις περιπτώσεις κατά τις οποίες η απόλυτη τιμή της παραμέτρου ρ είναι κοντά στην μονάδα οι έλεγχοι X2 και X2E είναι συνήθως οι

καλύτεροι. Ο X2 έλεγχος είναι πιθανότερο να αποδίδει καλύτερα από τον έλεγχο X2E για τιμές της παραμέτρου ρ κοντά στο −1, ενώ το αντίθετο συμβαίνει για τιμές της παραμέτρου ρ κοντά στο 1.

Η σχετικά κακή απόδοση των κατά Edgeworth και των τοπικά ακριβών (locally exact) κατά Cornish-Fisher διορθώσεων για τιμές του |ρ| κοντά στην μονάδα ήταν ένα αρκετά απρόσμενο αποτέλεσμα των πειραμάτων, το οποίο ενδέχεται να μπορεί να αποδοθεί στην εμπειρική κατανομή του χρησιμοποιηθέντος $\hat{\rho}$. Σε όλες τις περιπτώσεις, δηλαδή για κάθε συνδυασμό των τιμών των παραμέτρων Α και ρ, οι Monte Carlo εκτιμήσεις της διακύμανσης, ασυμμετρίας και κύρτωσης της κατανομής του $\hat{\rho}$ ήσαν όμοιες και είχαν μέγεθος κατά πολύ μικρότερο από το μέγεθος του μεροληπτικού σφάλματος του $\hat{\rho}$. Εξάλλου, το μέγεθος αυτού του μεροληπτικού σφάλματος φαίνεται πως είναι μια αύξουσα συνάρτηση του |ρ|. Αυτό ερμηνεύει, κατά ένα μέρος, τα ευρήματα του τυχαίου πειράματος, εφόσον οι εκλεπτυσμένες μέθοδοι προσέγγισης αναμένεται να υπερδιορθώνουν σε περιπτώσεις κατά τις οποίες το ρ υποεκτιμάται.

Στο σημείο αυτό θεωρείται σκόπιμο να παρατηρηθεί ότι η αξιολόγηση των κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher διορθώσεων πρέπει να βασίζεται σε συγκρίσεις ελέγχων που είναι αποκλειστικά ασυμπτωτικοί ή αποκλειστικά ακριβείς και διαφέρουν μόνον ως προς την μέθοδο διόρθωσης του πραγματικού τους μεγέθους. Επομένως, η σχετικά κακή απόδοση των κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher διορθώσεων της ακριβούς μορφής των ελέγχων t και F για τιμές του |ρ| κοντά στην μονάδα δεν μπορεί να υποβαθμίσει την ορθότητα, αποτελεσματικότητα και χρησιμότητα των διορθώσεων αυτών. Διότι και στην συγκεκριμένη περίπτωση οι έλεγχοι TE και CFT αποδίδουν καλύτερα από τον T έλεγχο και όμοια οι FE και CFF έλεγχοι είναι καλύτεροι από τον έλεγχο F. Συνεπώς, η σχετικά χειρότερη απόδοση της ακριβούς μορφής των ελέγχων για τιμές του |ρ| κοντά στην μονάδα μπορεί, κατά ένα μέρος, να εξηγηθεί από το γεγονός ότι σε αυτές τις περιπτώσεις οι ασυμπτωτικές μορφές των ελέγχων έχουν μια πάρα πολύ καλή απόδοση.

Οι εναλλακτικές μέθοδοι διόρθωσης του πραγματικού μεγέθους των t και F ελέγχων μπορούν να συγκριθούν και διαγραμματικά. Σε ένα τετράγωνο διάγραμμα σχεδιάζουμε το πραγματικό μέγεθος (δηλαδή

το ποσοστό των επιπέδων σημαντικότητας που είναι μικρότερα από ένα δεδομένο ονομαστικό μέγεθος) ενός ελέγχου ως συνάρτηση του ονομαστικού μεγέθους αυτού του ελέγχου. Υπό ιδανικές συνθήκες το πραγματικό και το ονομαστικό μέγεθος ενός ελέγχου ταυτίζονται και συνεπώς όλες οι παρατηρήσεις πρέπει να βρίσκονται πάνω στην διαγώνιο των 45 μοιρών του διαγράμματος. Αυτή η γραμμή είναι η συνάρτηση κατανομής μιας U(0,1) τυχαίας μεταβλητής. Φυσικά, αν είχαμε ένα τυχαίο δείγμα από την U(0,1) κατανομή, τότε, λόγω του δειγματοληπτικού σφάλματος, οι παρατηρήσεις δεν θα βρίσκονταν ακριβώς πάνω στην γραμμή των 45 μοιρών. Θα βρίσκονταν, όμως, μέσα σε μια ταινία, συμμετρική γύρω από την γραμμή των 45 μοιρών και με εύρος που δίνεται από τον πίνακα της μονοδειγματικής (one-sample) κατανομής Kolmogorov-Sirnov (βλ. Durbin (1973)). Αυτό σημαίνει ότι, αν μια συγκεκριμένη καμπύλη βρίσκεται μέσα στην ταινία, τότε οι αποκλίσεις της από την γραμμή των 45 μοιρών μπορούν να αποδοθούν στο δειγματοληπτικό σφάλμα, δηλαδή είναι στατιστικά ασήμαντες. Αντίθετα, αν η καμπύλη τέμνει τα όρια της ταινίας, τότε απορρίπτουμε την υπόθεση ότι οι αποκλίσεις της από την γραμμή των 45 μοιρών οφείλονται στην τυχαία δειγματοληψία. Είναι φανερό ότι η ταινία αντιπροσωπεύει ένα είδος διαστήματος εμπιστοσύνης που μας βοηθά να ερμηνεύσουμε τις πληροφορίες που περιέχονται στα διαγράμματα και την κατασκευάσαμε έτσι ώστε να αντιστοιχεί στο 95% διάστημα εμπιστοσύνης.

Επιπλέον, από τον τρόπο κατασκευής των διαγραμμάτων προκύπτει ότι τα σημεία που βρίσκονται δεξιά της διαγωνίου των 45 μοιρών αντιστοιχούν σε ονομαστικό μέγεθος μεγαλύτερο του πραγματικού, ενώ το αντίθετο συμβαίνει για τα σημεία που βρίσκονται αριστερά απο την ανωτέρω διαγώνιο. Για όλους τους ελέγχους που εξετάσαμε, για κάθε τιμή του ονομαστικού μεγέθους τους (επιπέδου στατιστικής σημαντικότητας) βρήκαμε το αντίστοιχο πραγματικό μέγεθος με τον τρόπο που έχουμε ήδη αναφέρει. Τα ζεύγη των τιμών του ονομαστικού και του πραγματικού μεγέθους, που προέκυψαν με αυτόν τον τρόπο, τα απεικονίσαμε στο διάγραμμα. Έτσι, για καθένα έλεγχο κατασκευάσαμε μια καμπύλη, η οποία ενώνει την κάτω αριστερή με την άνω δεξιά γωνία του τετραγώνου διαγράμματος. Με βάση τα διαγράμματα αυτά καλύτερος πρέπει να θεωρηθεί εκείνος ο έλεγχος, του οποίου η

καμπύλη απέχει σχετικά λιγότερο από την γραμμή των 45 μοιρών για το εύρος των τιμών του επιπέδου στατιστικής σημαντικότητας που χρησιμοποιούνται συχνότερα στην εφαρμοσμένη έρευνα, δηλαδή για τιμές του επιπέδου στατιστικής σημαντικότητας μεταξύ του 0.01 και του 0.10. Ωστόσο, τα διαγράμματα που κατασκευάσαμε μας παρέχουν πληροφορίες για την συμπεριφορά των εξεταζομένων ελέγχων και για κάθε άλλη τιμή του ονομαστικού μεγέθους των ελέγχων αυτών.

Οι κλίμακες μέτρησης και του ονομαστικού και του πραγματικού μεγέθους των ελέγχων ήσαν ίδιες. Θεωρήσαμε ότι και τα δύο μεγέθη των ελέγχων παίρνουν τιμές μεταξύ του 0 και του 1. Αυτό δεν δημιουργεί κανένα πρόβλημα στην περίπτωση των ελέγχων που χρησιμοποιούν την χ^2 ή την F κατανομή. Διότι αυτές οι κατανομές ορίζονται μόνο για θετικές τιμές της τυχαίας μεταβλητής. Έτσι, στο ακρότατο σημείο της δεξιάς ουράς της χ^2 ή της F κατανομής το ονομαστικό μέγεθος ισούται με το μηδέν· καθώς κινούμαστε προς την αρχή των αξόνων το ονομαστικό μέγεθος μεγαλώνει και στην αρχή των αξόνων το ονομαστικό μέγεθος του ελέγχου ισούται με την μονάδα. Ανάλογη συμπεριφορά επιδεικνύει και το πραγματικό μέγεθος των ελέγχων που γενικά διαφέρει από το ονομαστικό, εκτός από δύο περιπτώσεις κατά τις οποίες ισούται με αυτό. Τούτο συμβαίνει στην αρχή των αξόνων και στο ακρότατο σημείο της δεξιά ουράς της χ^2 ή της F κατανομής.

Προβλήματα δημιουργήθησαν στην περίπτωση του t ελέγχου με την χρήση της t-Student ή (ασυμπτωτικά) της κανονικής κατανομής. Διότι, εφόσον με τους ελέγχους αυτούς επιδιώξαμε να ελέγξουμε την υπόθεση (3.22) ως προς τις μονόπλευρες εναλλακτικές υποθέσεις (3.27), είναι προφανές ότι η μέγιστη δυνατή τιμή του ονομαστικού μεγέθους είναι 0.5 και στην περίπτωση της εκ δεξιών, αλλά και στην περίπτωση της εξ' αριστερών μονόπλευρης εναλλακτικής υπόθεσης. Πράγματι, όταν η εναλλακτική υπόθεση είναι η εκ δεξιών μονόπλευρη, απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση (3.22) μόνο για επαρκώς μεγάλες θετικές τιμές του t στατιστικού (συνήθους ή διορθωμένου). Στο ακρότατο σημείο της δεξιά ουράς της t-Student ή (ασυμπτωτικά) της κανονικής κατανομής το ονομαστικό μέγεθος ισούται με το μηδέν, ενώ αυξάνεται καθώς πλησιάζουμε την αρχή των αξόνων, όπου παίρνει την μέγιστη δυνατή τιμή του, δηλαδή το 0.5. Το πραγματικό μέγεθος του

t ελέγχου παίρνει τιμές μεταξύ του μηδενός και του 0.5 περίπου. Αντίστοιχα ισχύουν και για την περίπτωση κατά την οποία η υπόθεση (3.22) ελέγχεται ως προς μιαν εξ' αριστερών μονόπλευρη εναλλακτική υπόθεση, θεωρώντας, βεβαίως, την αριστερή ουρά της t-Student ή (ασυμπτωτικά) της κανονικής κατανομής.

Το ανωτέρω πρόβλημα λύθηκε ως εξής: Για όλες τις περιπτώσεις που αντιστοιχούσαν σε αρνητικά t στατιστικά (συνήθη ή διορθωμένα) το πραγματικό μέγεθος του αντιστοίχου ελέγχου θεωρήθηκε ίσο με το αποτέλεσμα που προέκυψε μετά την αφαίρεσή του από την μονάδα. Το ίδιο κάναμε και για τις τιμές του επιπέδου στατιστικής σημαντικότητας που αντιστοιχούσαν σε ελέγχους της μηδενικής υπόθεσης έναντι μιας εξ' αριστερών μονόπλευρης εναλλακτικής υπόθεσης. Έτσι, θεωρήσαμε ότι και το ονομαστικό και το πραγματικό μέγεθος του t ελέγχου αυξάνονται συνεχώς καθώς μετακινούμαστε από την δεξιά προς την αριστερή ουρά της t-Student ή (ασυμπτωτικά) της κανονικής κατανομής. Γενικά, μετρημένα κατ' αυτόν τον τρόπο, το πραγματικό και το ονομαστικό μέγεθος διαφέρουν, εκτός από δύο περιπτώσεις κατά τις οποίες οι τιμές τους ισούνται. Αυτό γίνεται στο ακρότατο σημείο της δεξιάς ουράς της t-Student ή (ασυμπτωτικά) της κανονικής κατανομής, όπου και τα δύο ισούνται με το μηδέν και στο ακρότατο σημείο της αριστερής ουράς των ανωτέρω κατανομών, στο οποίο και τα δύο παίρνουν ως τιμή την μονάδα.

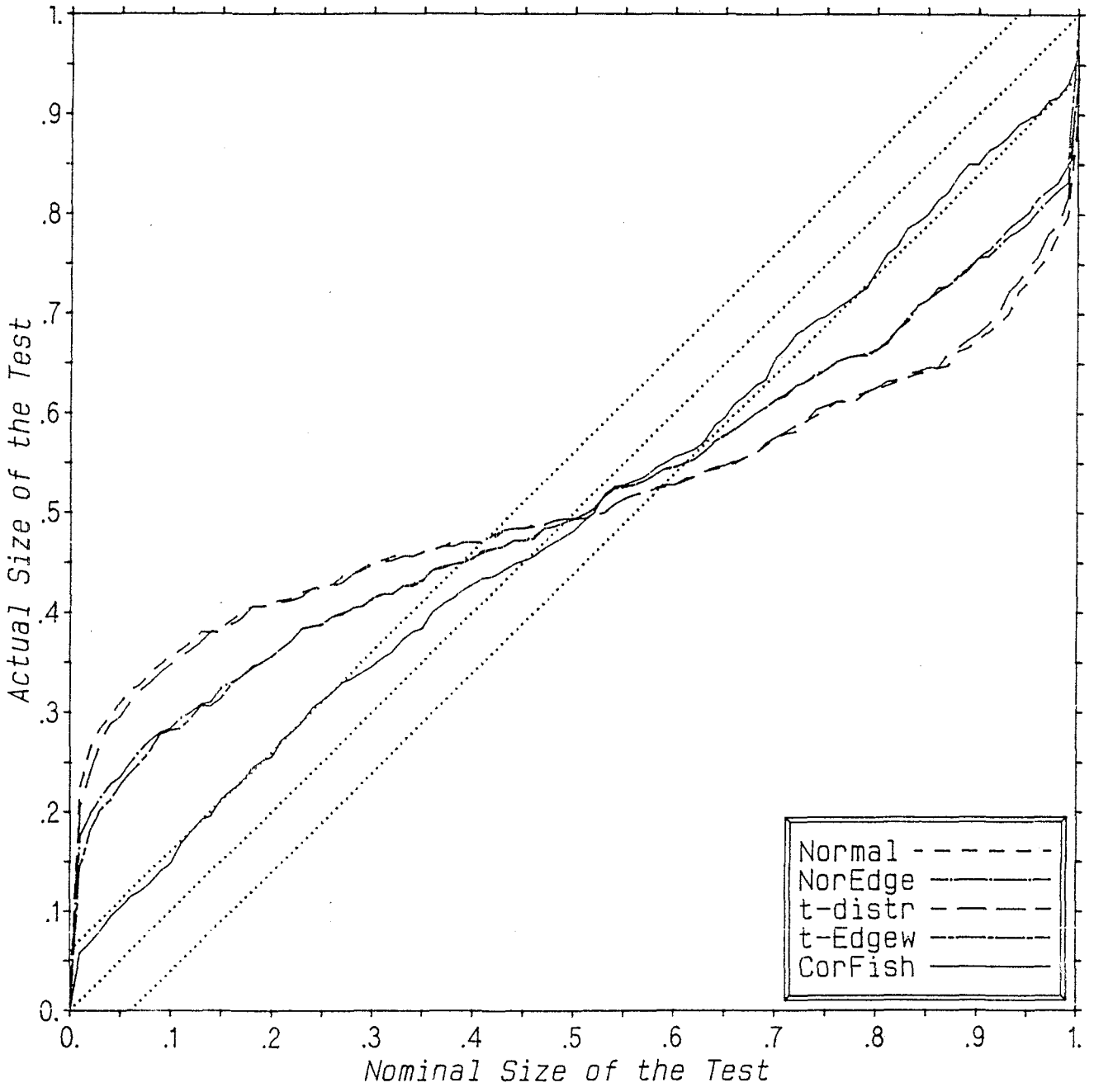
Κατά την εκτέλεση των Monte Carlo πειραμάτων κατασκευάστηκαν εκατόν είκοσι διαγράμματα. Θα παρουσιάσουμε μόνον έξι, εκείνα τα οποία εμφανίζουν σαφέστερα τις γενικές ιδιότητες των διαφόρων ελέγχων που εξετάσαμε. Τα Διαγράμματα 3.1 και 3.2 απεικονίζουν την απόδοση των εναλλακτικών μορφών του t ελέγχου, ενώ η συμπεριφορά των εναλλακτικών μορφών του F ελέγχου παρουσιάζεται στα Διαγράμματα 3.3, 3.4, 3.5 και 3.6. Τα διαγράμματα αυτά έχουν έναντι του Πίνακα 3.2 το πλεονέκτημα ότι μας δίνουν πληροφορίες για την απόδοση των διαφόρων ελέγχων σε κάθε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας.

Στο Διάγραμμα 3.1 η καμπύλη που αντιστοιχεί στον CFT έλεγχο κείται εξ' ολοκλήρου στο εσωτερικό της συμμετρικής ταινίας "εμπιστοσύνης", ενώ οι καμπύλες που αντιστοιχούν σε όλους τους άλλους ελέγχους κείνται σχεδόν ολόκληρες έξω από την ταινία. Στο

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 3.1

ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΤΟΥ t ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΤΟ β_1

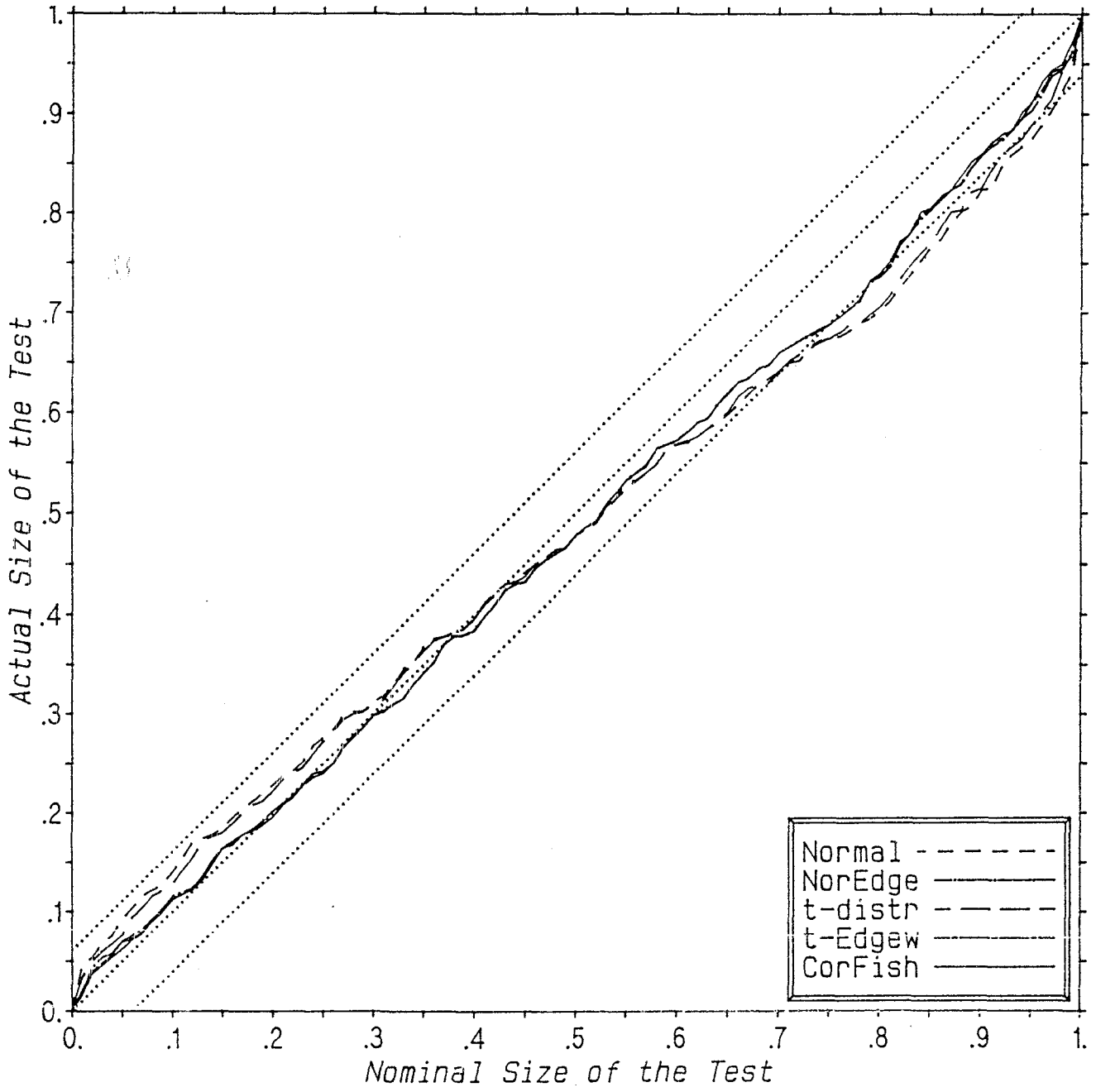
$\rho = .9$ και $A = 0.$



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 3.2

ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΤΟΥ t ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΤΟ β_3

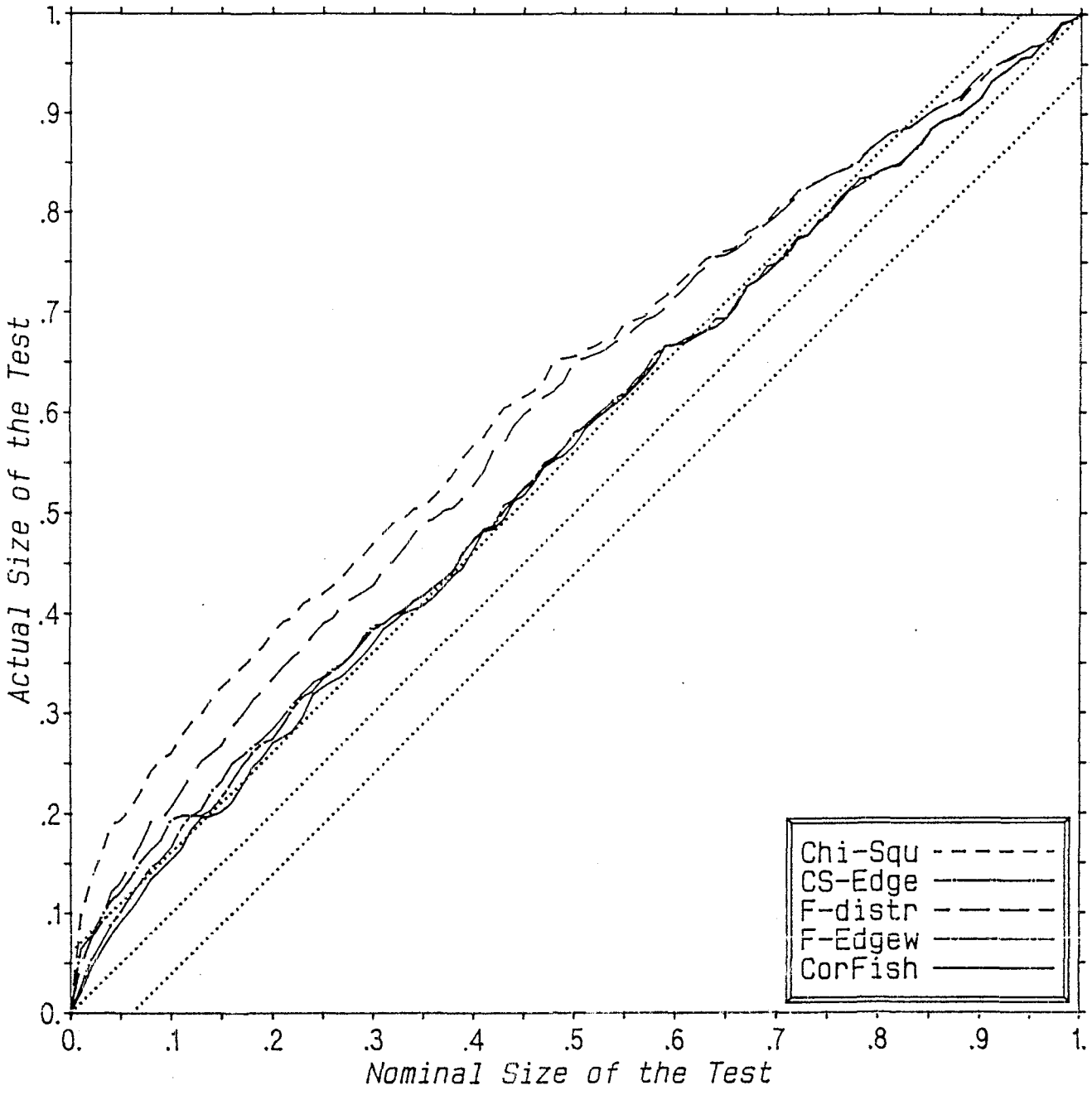
$\rho = .5$ και $A = 0.$



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 3.3

ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΤΟΥ F ΕΛΕΓΧΟΥ

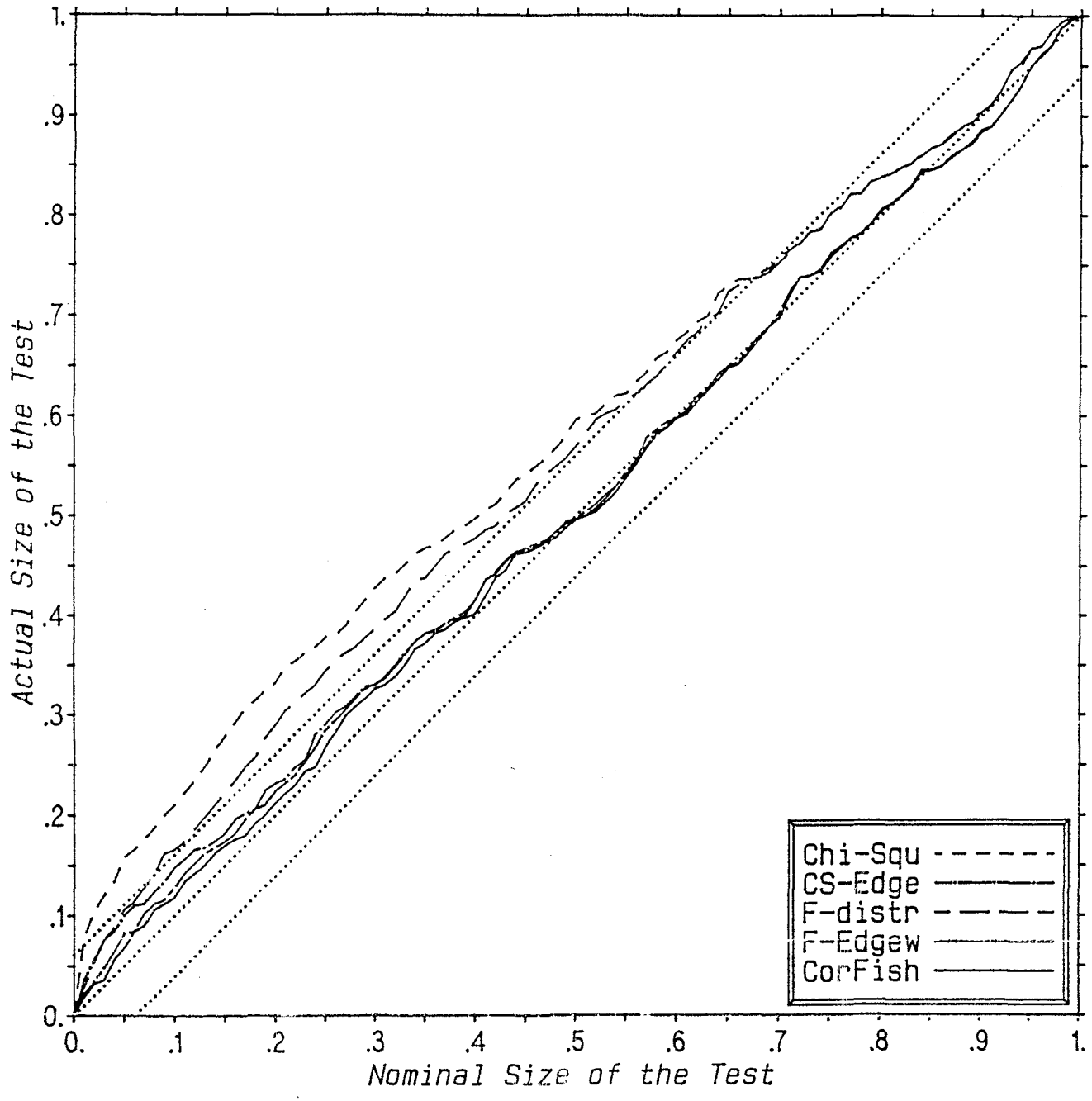
ρ = .5 και Α = 0.



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 3.4

ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΤΟΥ F ΕΛΕΓΧΟΥ

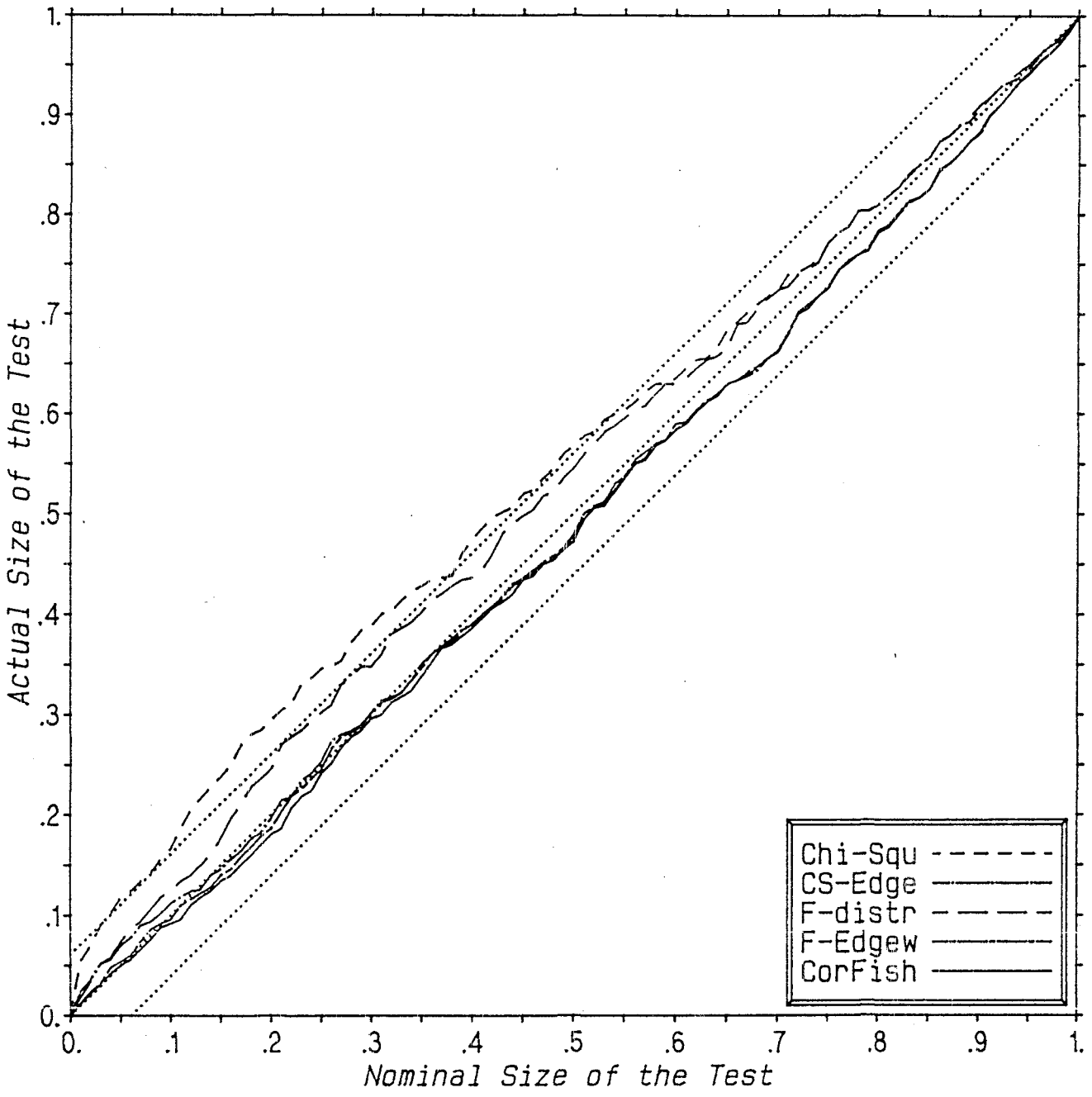
ρ = .1 και A = .5



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 3.5

ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΤΟΥ F ΕΛΕΓΧΟΥ

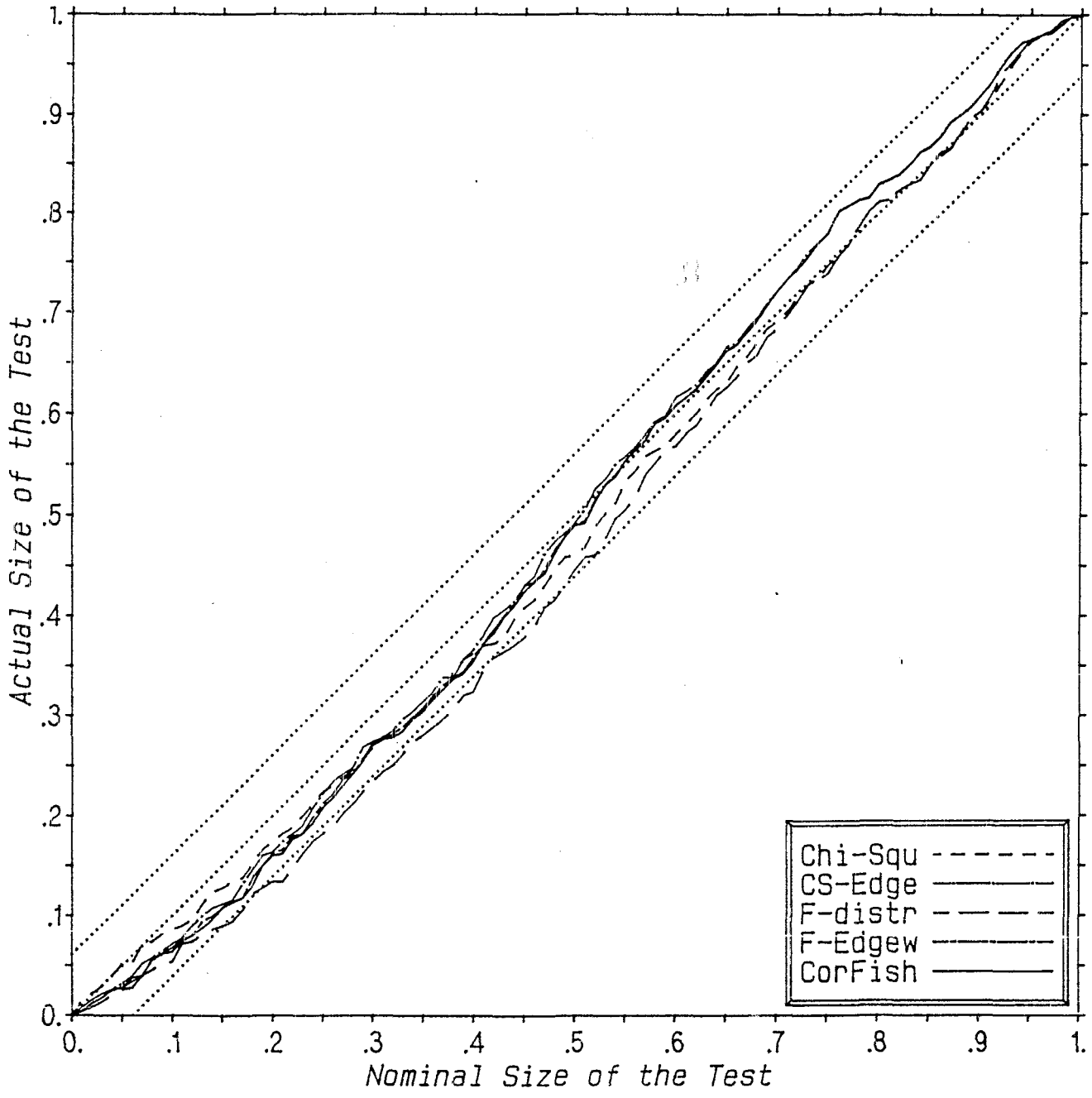
$\rho = -.1$ και $A = .1$



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 3.6

ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΤΟΥ F ΕΛΕΓΧΟΥ

ρ = .9 και Α = .1



Διάγραμμα 3.2 όλες οι καμπύλες κείνται στο εσωτερικό της ταινίας με την εξαίρεση μεγάλων τμημάτων των καμπύλων που αντιστοιχούν στους N και T ελέγχους. Πρέπει να σημειωθεί ότι, σύμφωνα με τις ιδιότητες της συμμετρικής ταινίας που συζητήθησαν πιο πριν, όλες οι καμπύλες που κείνται εξ' ολοκλήρου στο εσωτερικό της ταινίας είναι, σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας 5%, στατιστικά ταυτόσημες και συνεπώς δεν έχει νόημα να κατατάξουμε τους αντίστοιχους ελέγχους ως προς την σχετική τους απόδοση. Αντίθετα, για τους ελέγχους που αντιστοιχούν σε καμπύλες που τέμνουν τα όρια της ταινίας προκύπτει μια κατάταξη, η οποία είναι συνεπής με τις πληροφορίες του Πίνακα 3.2: Οι διορθωμένοι έλεγχοι είναι καλύτεροι από τους αδιόρθωτους και ο έλεγχος CFT είναι ομοιομόρφως καλύτερος από τους ελέγχους TE και NE, οι οποίοι είναι ο δεύτερος και τρίτος καλύτερος, αντίστοιχα. Ακολουθούν οι έλεγχοι T και N.

Στο Διάγραμμα 3.3 όλες οι καμπύλες κείνται σχεδόν εξ' ολοκλήρου έξω από τα όρια της συμμετρικής ταινίας "εμπιστοσύνης". Αντίθετα, στα Διαγράμματα 3.4, 3.5 και 3.6 όλες οι καμπύλες κείνται στο εσωτερικό της ταινίας με την εξαίρεση των καμπύλων που αντιστοιχούν στους ελέχους X2 και F στο Διάγραμμα 3.4, X2 στο Διάγραμμα 3.5 και F στο Διάγραμμα 3.6. Τονίζουμε ότι στο Διάγραμμα 3.6 η καμπύλη του X2 ελέγχου κείται ολόκληρη μέσα στην συμμετρική ταινία. Από τις ιδιότητες της συμμετρικής ταινίας έπεται ότι η διαφορά του ονομαστικού από το πραγματικό τους μέγεθος είναι στατιστικά ασήμαντη για όλους τους ελέγχους που αντιστοιχούν σε καμπύλες, οι οποίες κείνται ολόκληρες εντός αυτής της ταινίας. Από τα Διαγράμματα 3.3, 3.4 και 3.5 προκύπτει ότι οι διορθωμένοι έλεγχοι είναι καλύτεροι από τους αδιόρθωτους και ο CFF έλεγχος είναι ομοιομόρφως καλύτερος από τους ελέγχους FE και X2E, οι οποίοι είναι ο δεύτερος και τρίτος καλύτερος, αντίστοιχα. Ακολουθούν οι έλεγχοι F και X2. Το Διάγραμμα 3.6 απεικονίζει τις περιπτώσεις κατά τις οποίες το $|\rho|$ είναι κοντά στην μονάδα και οι ασυμπτωτικές μορφές του F ελέγχου αποδίδουν καλύτερα από τις ακριβείς μορφές του. Οι πληροφορίες των Διαγραμμάτων 3.3, 3.4, 3.5 και 3.6 είναι συνεπείς με το περιεχόμενο του Πίνακα 3.2. Τέλος, από τα Διαγράμματα 3.3, 3.4 και 3.5 προκύπτει ότι για ονομαστικό μέγεθος μεγαλύτερο από 3% ο έλεγχος X2E είναι καλύτερος από τον F

έλεγχο, ενώ το αντίθετο συμβαίνει για ονομαστικό μέγεθος μικρότερο από 3%.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο Πίνακας 3.2 και τα διαγράμματα που παρουσιάσαμε προηγουμένως επιβεβαιώνουν τις θεωρητικές μας προσδοκίες για την ανωτερότητα των τοπικά ακριβών (locally exact) (προσαρμοσμένων για τους βαθμούς ελευθερίας) ελέγχων σε σύγκριση με τους ασυμπτωτικούς (χωρίς προσαρμογές για τους βαθμούς ελευθερίας) ελέγχους. Το γεγονός ότι για μικρά ονομαστικά μεγέθη ο αδιόρθωτος F έλεγχος (F) υπερτερεί του κατά Edgeworth διορθωμένου χ^2 ελέγχου (X2E) ήταν αρκετά απρόσμενο και θα πρέπει να ληφθεί σοβαρά υπόψη στην εφαρμοσμένη στατιστική και οικονομετρική έρευνα.

Ο Πίνακας 3.2 και τα Διαγράμματα 3.1 ως 3.6 μας παρέχουν πολλές πληροφορίες για την συμπεριφορά των διαφόρων ελέγχων που μελετήσαμε. Θα θέλαμε, ωστόσο, να είχαμε επιπλέον πληροφόρηση για την απόδοση αυτών των ελέγχων. Θα ήταν σκόπιμο να γνωρίζαμε κατά πόσον η συμπεριφορά των διαφόρων ελέγχων εξαρτάται από τις τιμές των παραμέτρων ρ και Α. Για αυτό, αποφασίσαμε να διερευνήσουμε αν οι τιμές αυτών των παραμέτρων αποτελούν προσδιοριστικούς παράγοντες της ποιότητας της απόδοσης των διαφόρων ελέγχων που εξετάσαμε. Αυτό το επιτύχαμε πραγματοποιώντας ανάλυση της διακύμανσης της απόδοσης των διαφόρων ελέγχων κατά δύο παράγοντες, θεωρώντας ως παράγοντες τις παραμέτρους ρ και Α. Με την ανάλυση διακύμανσης διερευνήσαμε κατά πόσον οι παράμετροι αυτές μπορούν, καθεμιά ξεχωριστά ή από κοινού, να ερμηνεύσουν τις διακυμάνσεις της απόδοσης των διαφόρων ελέγχων. Η απόδοση κάθε ελέγχου μετρήθηκε ως η διαφορά του πραγματικού μείον το αντίστοιχο ονομαστικό του μέγεθος. Την ανάλυση διακύμανσης την πραγματοποιήσαμε μόνο για την περίπτωση κατά την οποία το ονομαστικό μέγεθος των ελέγχων είναι 0.05, διότι αυτό είναι το συνηθέστερα χρησιμοποιούμενο επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας των ελέγχων.

Κατά την δημιουργία του πειραματικού χώρου θεωρήσαμε έξι διαφορετικές τιμές της παραμέτρου ρ και τέσσερεις διαφορετικές τιμές της παραμέτρου Α. Εφόσον κάθε συνδυασμός των τιμών αυτών των παραμέτρων ορίζει ένα σημείο του πειραματικού χώρου, είναι προφανές ότι το πείραμα εκτελέστηκε σε 24 πειραματικά σημεία. Σε

κάθε πειραματικό σημείο το πείραμα επαναλήφθηκε 500 φορές και υπολογίσθησαν τα πραγματικά μεγέθη (actual sizes), ASNj, ASNEj, ASTj, ASTEj και ASCFTj (j = 1,...,4), των ελέγχων N, NE, T, TE και CFT, αντίστοιχα, της στατιστικής σημαντικότητας της παραμέτρου β_j (j = 1,...,4) που αντιστοιχούν σε ονομαστικό μέγεθος (επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας) 0.05. Επιπλέον, υπολογίσθησαν τα αντίστοιχα πραγματικά μεγέθη, ASX2, ASX2E, ASF, ASFE και ASCFF, των ελέγχων X2, X2E, F, FE και CFF, αντίστοιχα, της από κοινού στατιστικής σημαντικότητας των παραμέτρων β_2, β_3 και β_4. Επομένως, για κάθε σημείο του πειραματικού χώρου, από το πείραμα προέκυψε μια τιμή του πραγματικού μεγέθους καθενός ελέγχου και συνεπώς μια μέτρηση της απόδοσης του ελέγχου αυτού. Δηλαδή, από το πείραμα προέκυψαν συνολικά 24 παρατηρήσεις.

Εξάλλου, για την ανάλυση διακύμανσης κατά τους δύο παράγοντες, ρ και Α, λαμβανομένης υπόψη και της αλληλεπίδρασής τους, δεν επαρκούν 24 παρατηρήσεις. Διότι, λόγω του πλήθους των τιμών των παραμέτρων ρ και Α, 24 παρατηρήσεις απαιτούνται για να περιληφθούν στην ανάλυση διακύμανσης μόνον οι δύο παράγοντες (ρ και Α), όχι όμως και η αλληλεπίδρασή τους. Για να διερευνήσουμε και τα αποτελέσματα της αλληλεπίδρασης των παραμέτρων ρ και Α με την ανάλυση διακύμανσης χρειαζόμασταν περισσότερες παρατηρήσεις, τις οποίες αποκτήσαμε επαναλαμβάνοντας δύο ακόμα φορές ολόκληρο το πείραμα που περιγράψαμε ως τώρα, χρησιμοποιώντας δύο νέες, διαφορετικές, ακολουθίες ψευτοτυχαίων αριθμών. Για την δημιουργία αυτών των δύο καινούριων ψευτοτυχαίων ακολουθιών χρησιμοποιήσαμε πάλι την υπορουτίνα GGNPM της IMSL, δίνοντας στον σπόρο (seed) κάθε φορά ως τιμή έναν από τους αριθμούς: 271828 και 24121962. Επομένως, μετά από την διενέργεια ολοκλήρου του πειράματος τρείς φορές είχαμε στην διάθεσή μας 72 παρατηρήσεις, γεγονός που μας επέτρεψε να προχωρήσουμε στην ανάλυση διακύμανσης, με την οποία διερευνήσαμε κατά πόσον οι παράμετροι ρ και Α, ξεχωριστά ή από κοινού, μπορούν να ερμηνεύσουν τις διακυμάνσεις της απόδοσης των ελέγχων που εξετάσαμε. Τα αποτελέσματα της ανάλυσης διακύμανσης που πραγματοποιήσαμε δίνονται στον Πίνακα 3.3.

Στις τέσσερεις πρώτες σελίδες του Πίνακα 3.3 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των αναλύσεων διακύμανσης για τις διάφορες μορφές

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3

(ΘΕΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ		ΠΗΓΕΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ			
		ρ	Α	ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ρ ΚΑΙ Α	ΕΡΜΗΝΕΥΟΜΕΝΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ
ASN1 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	658.894	0.524	1.308	144.159
	PVALUE	0.000	0.668	0.235	0.000
ASNE1 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	457.782	1.002	1.161	100.406
	PVALUE	0.000	0.400	0.333	0.000
AST1 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	695.517	0.164	1.221	152.017
	PVALUE	0.000	0.920	0.290	0.000
ASTE1 - 0-05	DF	5	3	15	23
	F	366.087	1.002	0.731	80.192
	PVALUE	0.000	0.400	0.741	0.000
ASCFT1 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	52.827	0.696	0.546	11.931
	PVALUE	0.000	0.559	0.900	0.000
ASN2 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	17.117	2.026	0.681	4.430
	PVALUE	0.000	0.123	0.790	0.000
ASNE2 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	6.948	3.118	0.635	2.331
	PVALUE	0.000	0.035	0.831	0.007
AST2 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	17.561	2.882	0.944	4.809
	PVALUE	0.000	0.045	0.525	0.000
ASTE2 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	6.758	3.457	0.701	2.377
	PVALUE	0.000	0.023	0.771	0.006
ASCFT2 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	6.972	3.293	0.744	2.431
	PVALUE	0.000	0.028	0.728	0.005
ASN3 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	18.370	1.928	1.410	5.165
	PVALUE	0.000	0.138	0.181	0.000
ASNE3 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	9.664	1.842	1.520	3.333
	PVALUE	0.000	0.152	0.136	0.000
AST3 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	18.725	2.373	1.483	5.348
	PVALUE	0.000	0.082	0.150	0.000
ASTE3 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	10.020	2.024	1.535	3.443
	PVALUE	0.000	0.123	0.130	0.000
ASCFT3 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	9.425	1.569	1.330	3.121
	PVALUE	0.000	0.209	0.222	0.000

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3

(ΘΕΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ		ΠΗΓΕΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ			
		ρ	A	ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ρ ΚΑΙ A	ΕΡΜΗΝΕΥΟΜΕΝΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ
ASN4 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	25.770	3.235	1.033	6.698
	PVALUE	0.000	0.030	0.440	0.000
ASNE4 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	12.540	2.779	0.625	3.496
	PVALUE	0.000	0.051	0.840	0.000
AST4 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	19.516	2.231	0.792	5.050
	PVALUE	0.000	0.097	0.680	0.000
ASTE4 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	11.669	2.505	0.543	3.218
	PVALUE	0.000	0.070	0.902	0.000
ASCFT4 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	10.627	2.505	0.432	2.918
	PVALUE	0.000	0.070	0.961	0.001

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3

(ΑΡΝΗΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ		ΠΗΓΕΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ			
		ρ	Α	ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ρ ΚΑΙ Α	ΕΡΜΗΝΕΥΟΜΕΝΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ
ASN1 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	477.848	1.752	1.071	104.807
	PVALUE	0.000	0.169	0.406	0.000
ASNE1 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	326.047	3.492	1.021	72.002
	PVALUE	0.000	0.023	0.451	0.000
AST1 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	509.130	2.279	0.911	111.572
	PVALUE	0.000	0.091	0.558	0.000
ASTE1 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	319.609	2.796	1.094	70.558
	PVALUE	0.000	0.050	0.387	0.000
ASCFT1 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	69.707	2.629	0.716	15.964
	PVALUE	0.000	0.061	0.756	0.000
ASN2 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	32.749	0.327	0.891	7.743
	PVALUE	0.000	0.806	0.579	0.000
ASNE2 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	24.342	0.537	2.041	6.693
	PVALUE	0.000	0.659	0.032	0.000
AST2 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	33.589	0.148	1.403	8.236
	PVALUE	0.000	0.930	0.184	0.000
ASTE2 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	30.088	0.193	2.508	8.202
	PVALUE	0.000	0.901	0.008	0.000
ASCFT2 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	33.616	0.218	2.740	9.123
	PVALUE	0.000	0.883	0.004	0.000
ASN3 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	16.153	0.763	1.130	4.348
	PVALUE	0.000	0.520	0.357	0.000
ASNE3 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	8.227	0.432	0.799	2.366
	PVALUE	0.000	0.731	0.673	0.006
AST3 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	16.500	1.398	0.824	4.307
	PVALUE	0.000	0.255	0.647	0.000
ASTE3 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	9.457	0.566	0.957	2.754
	PVALUE	0.000	0.640	0.512	0.002
ASCFT3 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	9.016	0.555	0.916	2.630
	PVALUE	0.000	0.647	0.553	0.002

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3

(ΑΡΝΗΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ		ΠΗΓΕΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ			
		ρ	A	ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ρ ΚΑΙ A	ΕΡΜΗΝΕΥΟΜΕΝΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ
ASN4 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	10.896	0.278	0.909	2.997
	PVALUE	0.000	0.841	0.560	0.001
ASNE4 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	8.333	0.514	1.321	2.740
	PVALUE	0.000	0.675	0.227	0.002
AST4 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	11.816	0.375	1.069	3.315
	PVALUE	0.000	0.771	0.408	0.000
ASTE4 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	8.622	0.756	1.299	2.820
	PVALUE	0.000	0.524	0.240	0.001
ASCFT4 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	8.988	0.943	1.368	2.969
	PVALUE	0.000	0.427	0.202	0.001

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.3

(F ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ		ΠΗΓΕΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ			
		ρ	Α	ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ρ ΚΑΙ Α	ΕΡΜΗΝΕΥΟΜΕΝΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ
ASX2 - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	65.415	2.674	1.716	15.688
	PVALUE	0.000	0.058	0.079	0.000
ASX2E - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	27.415	1.002	1.014	6.752
	PVALUE	0.000	0.400	0.457	0.000
ASF - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	37.504	1.214	1.165	9.071
	PVALUE	0.000	0.315	0.330	0.000
ASFE - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	18.762	1.274	0.975	4.880
	PVALUE	0.000	0.294	0.495	0.000
ASCFF - 0.05	DF	5	3	15	23
	F	17.905	0.752	0.904	4.580
	PVALUE	0.000	0.527	0.565	0.000

του t ελέγχου της στατιστικής σημαντικότητας καθεμιάς από τις παραμέτρους β_j $(j = 1,\ldots,4)$. Η περίπτωση κατά την οποία η εναλλακτική υπόθεση είναι η $H_1: \beta_j > 0$ παρουσιάζεται στις δύο πρώτες σελίδες του πίνακα, ενώ οι επόμενες δύο σελίδες του περιέχουν την περίπτωση με εναλλακτική υπόθεση την $H_1: \beta_j < 0$. Τα αποτελέσματα των αναλύσεων διακύμανσης για τις διάφορες μορφές του F ελέγχου της από κοινού στατιστικής σημαντικότητας των παραμέτρων β_2, β_3 και β_4 παρουσιάζονται στην πέμπτη σελίδα του Πίνακα 3.3. Κάθε γραμμή του πίνακα περιέχει τους βαθμούς ελευθερίας του αντιστοίχου F ελέγχου, την τιμή του F στατιστικού για αυτόν τον έλεγχο και το επίπεδο σημαντικότητας (p-value) που αντιστοιχεί σε αυτήν την τιμή του F στατιστικού. Από τον πίνακα συμπεραίνουμε ότι οι αποκλίσεις του πραγματικού από το ονομαστικό μέγεθος των διαφόρων ελέγχων που εξετάσαμε μπορούν, γενικά, να ερμηνευθούν από τον συντελεστή αυτοσυσχέτισης των διαταρακτικών όρων του υποδείγματος, ενώ η παράμετρος που μετρά την ένταση του προβλήματος της πολυσυγγραμμικότητας και η αλληλεπίδρασή της με τον συντελεστή αυτοσυσχέτισης, γενικά, δεν ερμηνεύουν τις ανωτέρω αποκλίσεις.

Επίσης, έχουμε ήδη παρατηρήσει ότι η σχετική απόδοση των ελέγχων που βασίζονται στις τοπικά ακριβείς κατά Cornish-Fisher διορθώσεις των t και F στατιστικών δεν είναι το ίδιο καλή σε όλα τα σημεία του πειραματικού χώρου. Όμως, από τον Πίνακα 3.2 και τα Διαγράμματα 3.1 ως 3.6 προκύπτει ότι οι ανωτέρω έλεγχοι έχουν, γενικά, καλύτερη απόδοση από όλους τους άλλους ελέγχους που εξετάσαμε.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η διερεύνηση του κατά πόσον το μέγεθος της σχετικής υπεροχής των τοπικά ακριβών (locally exact) κατά Cornish-Fisher διορθώσεων του μεγέθους των t και F ελέγχων μπορεί να ερμηνευτεί από τις τιμές των παραμέτρων ρ και A, ξεχωριστά ή και από την αλληλεπίδρασή τους. Απάντηση στο ανωτέρω ερώτημα προσπαθήσαμε να δώσουμε εφαρμόζοντας πάλι την μέθοδο της ανάλυσης διακύμανσης. Η σχετική υπεροχή των ελέγχων που στηρίζονται στα τοπικά ακριβή (locally exact) κατά Cornish-Fisher διορθωμένα στατιστικά, σε σχέση με καθέναν από τους υπόλοιπους ελέγχους, μετρήθηκε ως η διαφορά που προκύπτει αν από το πραγματικό μέγεθος

καθενός των υπολοίπων ελέγχων αφαιρεθεί το πραγματικό μέγεθος του ελέγχου, ο οποίος βασίζεται στο αντίστοιχο τοπικά ακριβές κατά Cornish-Fisher διορθωμένο στατιστικό. Τα ανωτέρω πραγματικά μεγέθη ήσαν αυτά που αντιστοιχούν σε ονομαστικό μέγεθος 0.05, διότι αυτό είναι το συνηθέστερα χρησιμοποιούμενο επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας.

Και για αυτήν την ανάλυση διακύμανσης χρησιμοποιήθηκαν οι 72 παρατηρήσεις που προέκυψαν από τις τρείς εκτελέσεις του πειράματος. Τα αποτελέσματά της παρουσιάζονται στον Πίνακα 3.4. Οι δύο πρώτες σελίδες του πίνακα αυτού περιέχουν τα αποτελέσματα των αναλύσεων διακύμανσης για τις διάφορες μορφές του t ελέγχου της στατιστικής σημαντικότητας καθεμιάς από τις παραμέτρους β_j ($j = 1,\ldots,4$). Οι περιπτώσεις κατά τις οποίες η εναλλακτική υπόθεση είναι η $H_1: \beta_j > 0$ ή $H_1: \beta_j < 0$ παρουσιάζονται στην πρώτη και δεύτερη σελίδα του πίνακα, αντίστοιχα. Τα αποτελέσματα των αναλύσεων διακύμανσης για τις διάφορες μορφές του F ελέγχου της από κοινού στατιστικής σημαντικότητας των παραμέτρων β_2, β_3 και β_4 παρουσιάζονται στην τρίτη σελίδα του Πίνακα 3.4. Κάθε γραμμή του πίνακα περιέχει τους βαθμούς ελευθερίας του αντιστοίχου F ελέγχου, την τιμή του F στατιστικού για αυτόν τον έλεγχο και το επίπεδο σημαντικότητας (p-value) που αντιστοιχεί σε αυτήν την τιμή του F στατιστικού. Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι, γενικά, κύριος ερμηνευτικός παράγων του μεγέθους της σχετικής υπεροχής των ελέγχων που βασίζονται στα τοπικά ακριβή κατά Cornish-Fisher διορθωμένα t και F στατιστικά, έναντι των υπολοίπων ελέγχων, είναι ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης των διαταρακτικών όρων του υποδείγματος. Αντίθετα, ο συντελεστής που μετρά την ένταση της πολυσυγγραμμικότητας και η αλληλεπίδρασή του με τον συντελεστή αυτοσυσχέτισης, γενικά, δεν συντελούν στην ερμηνεία του μεγέθους των διαφορών στην απόδοση των διαφόρων ελέγχων.

Έχοντας αποκτήσει μια σαφή εικόνα της συμπεριφοράς των διαφόρων διορθώσεων του μεγέθους των ελέγχων t και F που μελετήσαμε και των παραγόντων που επηρεάζουν την ποιότητά τους σε ένα δεδομένο μέγεθος δείγματος (20 παρατηρήσεις), αποφασίσαμε να διερευνήσουμε την επίδραση του μεγέθους του δείγματος στην απόδοση των διορθώσεων αυτών. Προς τον σκοπό αυτόν πραγματοποιήσαμε δύο

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.4

(ΘΕΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ		ΠΗΓΕΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ			
		ρ	A	ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ρ ΚΑΙ A	ΕΡΜΗΝΕΥΟΜΕΝΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ
ASN1 -ASCFT1	DF	5	3	15	23
	F	268.521	0.360	0.828	58.961
	PVALUE	0.000	0.782	0.643	0.000
ASNE1 -ASCFT1	DF	5	3	15	23
	F	147.509	0.376	0.522	32.457
	PVALUE	0.000	0.771	0.915	0.000
AST1 -ASCFT1	DF	5	3	15	23
	F	247.021	0.379	0.612	54.149
	PVALUE	0.000	0.769	0.851	0.000
ASTE1 -ASCFT1	DF	5	3	15	23
	F	122.665	0.303	0.269	26.881
	PVALUE	0.000	0.823	0.996	0.000
ASN2 -ASCFT2	DF	5	3	15	23
	F	20.040	0.277	0.926	4.997
	PVALUE	0.000	0.842	0.542	0.000
ASNE2 -ASCFT2	DF	5	3	15	23
	F	0.847	0.829	1.262	1.115
	PVALUE	0.523	0.485	0.263	0.365
AST2 -ASCFT2	DF	5	3	15	23
	F	22.811	1.437	1.102	5.865
	PVALUE	0.000	0.244	0.380	0.000
ASTE2 -ASCFT2	DF	5	3	15	23
	F	0.665	1.049	0.508	0.613
	PVALUE	0.652	0.380	0.924	0.898
ASN3 -ASCFT3	DF	5	3	15	23
	F	15.561	1.096	1.029	4.197
	PVALUE	0.000	0.360	0.444	0.000
ASNE3 -ASCFT3	DF	5	3	15	23
	F	1.212	2.159	1.115	1.272
	PVALUE	0.318	0.105	0.370	0.237
AST3 -ASCFT3	DF	5	3	15	23
	F	13.775	0.999	1.051	3.810
	PVALUE	0.000	0.402	0.424	0.000
ASTE3 -ASCFT3	DF	5	3	15	23
	F	1.703	2.212	1.218	1.453
	PVALUE	0.152	0.099	0.292	0.136
ASN4 -ASCFT4	DF	5	3	15	23
	F	13.682	1.153	1.067	3.821
	PVALUE	0.000	0.338	0.410	0.000
ASNE4 -ASCFT4	DF	5	3	15	23
	F	1.429	0.741	0.850	0.962
	PVALUE	0.231	0.533	0.620	0.526
AST4 -ASCFT4	DF	5	3	15	23
	F	8.518	0.609	0.644	2.351
	PVALUE	0.000	0.613	0.823	0.006
ASTE4 -ASCFT4	DF	5	3	15	23
	F	1.289	0.798	0.967	1.015
	PVALUE	0.284	0.501	0.503	0.467

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.4

(ΑΡΝΗΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ		ΠΗΓΕΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ			
		ρ	Α	ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ρ ΚΑΙ Α	ΕΡΜΗΝΕΥΟΜΕΝΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ
ASN1 -ASCFT1	DF	5	3	15	23
	F	530.894	1.468	1.530	116.601
	PVALUE	0.000	0.235	0.132	0.000
ASNE1 -ASCFT1	DF	5	3	15	23
	F	336.428	3.058	1.898	74.773
	PVALUE	0.000	0.037	0.047	0.000
AST1 -ASCFT1	DF	5	3	15	23
	F	514.177	1.641	1.309	112.845
	PVALUE	0.000	0.192	0.234	0.000
ASTE1 -ASCFT1	DF	5	3	15	23
	F	379.056	2.840	2.153	84.178
	PVALUE	0.000	0.048	0.023	0.000
ASN2 -ASCFT2	DF	5	3	15	23
	F	17.313	0.320	0.878	4.378
	PVALUE	0.000	0.811	0.592	0.000
ASNE2 -ASCFT2	DF	5	3	15	23
	F	1.581	1.438	1.149	1.280
	PVALUE	0.183	0.243	0.343	0.231
AST2 -ASCFT2	DF	5	3	15	23
	F	12.623	0.134	1.109	3.485
	PVALUE	0.000	0.939	0.374	0.000
ASTE2 -ASCFT2	DF	5	3	15	23
	F	3.012	0.758	1.073	1.453
	PVALUE	0.019	0.523	0.405	0.136
ASN3 -ASCFT3	DF	5	3	15	23
	F	15.831	0.979	1.038	4.246
	PVALUE	0.000	0.411	0.435	0.000
ASNE3 -ASCFT3	DF	5	3	15	23
	F	1.338	1.259	1.154	1.208
	PVALUE	0.264	0.299	0.338	0.284
AST3 -ASCFT3	DF	5	3	15	23
	F	18.025	3.536	0.335	4.598
	PVALUE	0.000	0.021	0.988	0.000
ASTE3 -ASCFT3	DF	5	3	15	23
	F	0.917	0.769	0.591	0.685
	PVALUE	0.478	0.517	0.867	0.837
ASN4 -ASCFT4	DF	5	3	15	23
	F	7.363	0.443	0.531	2.004
	PVALUE	0.000	0.723	0.910	0.021
ASNE4 -ASCFT4	DF	5	3	15	23
	F	2.717	1.082	1.021	1.398
	PVALUE	0.031	0.366	0.451	0.162
AST4 -ASCFT4	DF	5	3	15	23
	F	6.519	0.371	0.365	1.704
	PVALUE	0.000	0.774	0.982	0.060
ASTE4 -ASCFT4	DF	5	3	15	23
	F	1.459	1.373	0.831	1.038
	PVALUE	0.221	0.262	0.639	0.442

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.4

(F ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ		ΠΗΓΕΣ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ			
		ρ	A	ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ρ ΚΑΙ A	ΕΡΜΗΝΕΥΟΜΕΝΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ
ASX2 - ASCFF	DF	5	3	15	23
	F	68.640	2.783	1.760	16.433
	PVALUE	0.000	0.051	0.070	0.000
ASX2E - ASCFF	DF	5	3	15	23
	F	11.518	0.359	0.690	3.000
	PVALUE	0.000	0.783	0.782	0.001
ASF - ASCFF	DF	5	3	15	23
	F	25.962	0.614	1.011	6.384
	PVALUE	0.000	0.609	0.460	0.000
ASFE - ASCFF	DF	5	3	15	23
	F	2.602	1.254	0.806	1.255
	PVALUE	0.037	0.301	0.665	0.249

επιπλέον Monte Carlo πειράματα χρησιμοποιώντας δείγματα μεγέθους 15 και 30 παρατηρήσεων. Εφόσον μόνον ο συντελεστής αυτοσυσχέτησης, ρ, επηρεάζει στατιστικά σημαντικά την απόδοση των διαφόρων διορθώσεων, τα πειράματα πραγματοποιήθηκαν για έξι διαφορετικές τιμές του ρ (ρ = −.9, −.5, −.1, .1, .5, .9), ενώ για τον συντελεστή Α, που μετρά την ένταση της πολυσυγγραμμικότητας, χρησιμοποιήθηκε η ενδιάμεση τιμή Α = .5. Τα αποτελέσματα αυτών των πειραμάτων συμπληρωμένα με τα αντίστοιχα αποτελέσματα του πειράματος με δείγμα μεγέθους 20 παρατηρήσεων (βλ. Πίνακα 3.2) συνοψίζονται στον Πίνακα 3.5. Ο Πίνακας 3.5 διαβάζεται ακριβώς όπως ο Πίνακας 3.2.

Στις οκτώ πρώτες σελίδες του Πίνακα 3.5 παρουσιάζονται οι εκτιμημένες πιθανότητες απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης για τον t έλεγχο της στατιστικής σημαντικότητας καθεμιάς από τις παραμέτρους β_j (j = 1,...,4). Η περίπτωση κατά την οποία η εναλλακτική υπόθεση είναι η H_1: $\beta_j > 0$ παρουσιάζεται στις πρώτες τέσσερεις σελίδες του πίνακα, ενώ η περίπτωση με εναλλακτική υπόθεση την H_1: $\beta_j < 0$ δίνεται στις επόμενες τέσσερεις σελίδες του. Στην ένατη σελίδα του Πίνακα 3.5 περιέχονται οι εκτιμημένες πιθανότητες απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης για τον F έλεγχο της "στατιστικής σημαντικότητας" της εκτιμημένης εξίσωσης, δηλαδή της από κοινού στατιστικής σημαντικότητας των παραμέτρων β_2, β_3 και β_4. Ο πίνακας δείχνει ότι η σχετική απόδοση των διαφόρων μορφών των t και F ελέγχων δεν επηρεάζεται από το μέγεθος του δείγματος. Σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις, για μικρές και ενδιάμεσες τιμές του $|\rho|$ ($|\rho|$ = .1, .5) μια αύξηση του μεγέθους του δείγματος φαίνεται ότι βελτιώνει την απόδοση όλων των μορφών των t και F ελέγχων που εξετάσαμε, αλλά η διαβάθμιση των διαφόρων μορφών των ανωτέρω ελέγχων παραμένει ίδια. Αυτό δεν συμβαίνει πάντα για τιμές του $|\rho|$ κοντά στην μονάδα. Σε αρκετές περιπτώσεις, η ποιότητα των προσεγγίσεων χειροτερεύει καθώς το μέγεθος του δείγματος αυξάνεται.

Στο σημείο αυτό αξίζει να επισημάνουμε πως η σημασία των διαφόρων διορθώσεων του μεγέθους των t και F ελέγχων πρέπει, λογικά, να αναμένεται ότι θα μειώνεται, καθώς το μέγεθος του χρησιμοποιουμένου δείγματος θα τείνει στο άπειρο.

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5

ΕΚΤΙΜΗΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ

(ΘΕΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

H_o:		β_1														
Size:		1%					5%					10%				
Test:		N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT
ρ	SAMPLE	%					%					%				
	15	0.7	0.5	0.4	0.5	0.5	2.9	2.9	2.3	2.7	2.7	6.8	7.3	5.7	6.8	6.8
-.9	20	1.0	0.8	0.2	0.4	0.4	4.4	4.4	3.8	4.4	4.4	8.8	9.2	8.4	9.0	9.0
	30	0.6	0.6	0.4	0.6	0.5	3.4	3.7	2.9	3.6	3.6	7.1	7.8	6.6	7.8	7.7
	15	1.5	0.9	0.8	0.7	0.7	5.3	4.5	4.1	4.1	4.0	10.5	9.6	9.0	9.3	9.3
-.5	20	1.2	1.0	0.6	0.8	0.8	5.4	4.8	4.0	4.6	4.6	9.6	9.6	8.8	9.6	9.2
	30	1.2	0.8	0.8	0.7	0.7	5.1	4.9	4.7	4.8	4.8	9.9	9.7	9.2	9.6	9.6
	15	2.2	1.3	1.3	0.9	0.8	6.9	5.6	5.5	5.0	4.9	11.3	9.9	10.3	9.6	9.4
-.1	20	3.2	2.4	2.4	2.0	2.0	8.2	6.8	7.6	6.6	6.6	11.6	10.0	10.8	9.6	9.6
	30	2.0	1.3	1.5	1.2	1.2	6.0	5.3	5.6	5.2	5.2	10.6	9.7	10.0	9.7	9.7
	15	3.8	2.5	2.5	1.9	1.6	9.3	6.7	7.4	6.3	6.0	14.3	11.9	13.1	11.5	11.1
.1	20	1.0	0.4	0.8	0.4	0.4	7.0	4.4	5.6	4.2	3.8	13.0	10.8	12.2	10.4	9.8
	30	2.4	1.3	1.8	1.1	0.9	7.3	5.5	6.6	5.4	5.2	12.5	10.6	12.2	10.5	10.3
	15	6.5	3.9	4.7	2.7	1.2	12.8	8.3	11.0	7.3	4.8	18.4	13.3	17.0	12.9	9.9
.5	20	7.8	4.0	6.8	3.6	1.4	12.8	9.8	12.2	9.4	6.4	18.4	13.2	17.4	13.2	11.0
	30	4.6	2.4	3.9	2.2	0.8	10.6	7.0	9.8	6.7	4.8	16.1	11.6	15.6	11.5	10.2
	15	27.2	21.6	24.5	17.3	13.0	32.8	26.7	31.4	25.0	15.4	36.5	30.3	35.6	29.6	18.3
.9	20	22.0	16.6	20.2	14.0	10.8	28.2	21.4	27.2	20.6	13.4	32.4	25.8	32.0	25.4	18.0
	30	20.6	14.9	19.3	13.0	5.3	27.7	20.4	27.0	19.6	7.2	32.0	24.6	31.5	24.3	9.7

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5

ΕΚΤΙΜΗΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ

(ΘΕΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

H_o:									β_2								
Size:		1%					5%					10%					
Test:		N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT	
ρ	SAMPLE	%					%					%					
	15	1.0	0.8	0.6	0.7	0.7	4.3	3.6	3.0	3.2	3.2	7.7	7.2	6.8	6.9	6.9	
-.9	20	1.2	0.8	0.8	0.6	0.6	2.8	2.6	2.4	2.4	2.4	6.4	6.2	5.6	6.0	6.0	
	30	0.6	0.5	0.4	0.5	0.5	3.3	3.2	2.8	3.1	3.1	7.4	7.5	7.0	7.5	7.5	
	15	2.0	1.2	0.9	0.8	0.7	6.1	4.7	4.8	4.4	4.3	11.1	9.5	9.7	9.0	9.0	
-.5	20	3.2	1.4	1.6	0.6	0.4	9.2	7.2	7.6	7.0	6.6	15.8	12.4	15.0	12.2	12.2	
	39	1.1	0.9	0.9	0.8	0.8	5.8	5.1	5.1	4.9	4.9	10.5	10.0	10.1	9.9	9.9	
	15	3.0	1.5	1.6	1.0	0.7	7.6	5.0	6.2	4.5	4.2	13.2	9.6	12.0	9.2	8.8	
-.1	20	3.0	2.0	2.0	1.8	1.6	7.0	5.0	6.0	5.0	5.0	11.6	9.0	11.0	9.0	8.8	
	30	2.0	1.2	1.3	1.1	1.0	6.6	5.3	6.1	5.2	5.1	11.8	10.2	11.3	10.2	10.2	
	15	3.3	1.7	1.7	1.2	1.1	8.5	6.2	6.9	5.6	5.4	13.8	10.6	12.3	10.2	10.0	
.1	20	3.8	2.6	2.8	2.2	2.0	10.0	8.2	9.0	7.6	7.6	14.4	13.2	13.6	13.2	13.2	
	30	2.1	1.4	1.5	1.2	1.1	6.6	5.4	6.1	5.3	5.2	11.9	9.9	11.4	9.9	9.8	
	15	1.7	1.2	1.0	0.9	0.9	5.9	4.6	4.3	4.2	4.2	10.2	9.1	9.1	8.8	8.7	
.5	20	1.4	1.2	0.8	1.2	1.2	5.4	4.6	4.2	4.6	4.6	11.0	10.0	10.6	9.8	9.8	
	30	1.3	0.7	0.9	0.7	0.7	5.7	4.7	5.0	4.7	4.7	10.8	10.3	10.3	10.2	10.2	
	15	5.3	3.0	3.0	2.1	1.7	12.5	8.7	10.1	8.2	7.8	18.5	14.9	16.9	14.4	14.1	
.9	20	2.2	1.8	1.4	1.6	1.4	6.8	5.6	5.4	5.6	5.6	11.8	11.0	10.6	10.8	10.8	
	30	0.5	0.5	0.4	0.5	0.4	3.2	3.3	2.6	3.3	3.2	6.8	7.4	6.4	7.4	7.4	

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5

ΕΚΤΙΜΗΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ

(ΘΕΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

H_o:		β_3														
Size:		1%					5%					10%				
Test:		N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT
ρ	SAMPLE	%					%					%				
	15	1.0	0.7	0.5	0.6	0.6	3.8	3.2	2.7	2.9	2.9	8.0	7.4	6.7	7.0	7.0
-.9	20	1.0	0.8	0.8	0.8	0.8	5.8	5.0	5.0	5.0	5.0	10.2	9.8	9.4	9.6	9.6
	30	0.7	0.5	0.3	0.5	0.5	3.7	3.8	3.1	3.8	3.8	7.8	8.1	7.4	8.1	8.0
	15	2.4	1.3	1.1	1.0	0.9	7.0	5.0	5.4	4.7	4.6	12.6	10.3	11.1	9.9	9.7
-.5	20	1.8	1.0	1.0	0.6	0.6	6.2	4.6	5.4	4.0	4.0	11.4	8.4	10.4	8.2	7.8
	30	1.7	1.2	1.3	1.1	1.1	5.9	5.0	5.3	4.9	4.9	11.1	10.2	10.4	10.2	10.1
	15	2.8	1.5	1.6	1.0	0.8	7.6	5.4	6.3	5.0	4.8	12.9	9.3	11.5	9.1	8.9
-.1	20	2.6	2.0	2.2	2.0	1.8	6.4	5.4	5.8	5.2	4.6	12.8	9.6	11.6	9.4	9.4
	30	1.8	1.1	1.3	1.0	1.0	6.5	5.1	5.8	5.0	4.9	11.4	9.8	10.9	9.7	9.7
	15	2.2	1.3	1.2	1.0	0.9	6.9	5.0	5.6	4.6	4.6	11.4	9.8	10.4	9.5	9.4
.1	20	3.6	2.4	2.6	1.8	1.6	9.0	6.4	7.6	6.4	6.4	14.2	10.6	12.2	10.6	10.6
	30	1.7	1.0	1.2	1.0	1.0	6.2	4.6	5.4	4.5	4.4	11.4	9.8	10.7	9.7	9.6
	15	1.7	1.1	0.9	0.9	0.8	4.8	4.0	3.6	3.7	3.7	9.5	8.5	8.2	8.3	8.2
.5	20	1.4	0.8	0.8	0.8	0.8	7.4	4.4	6.2	4.4	4.2	11.2	9.8	10.6	9.6	9.6
	30	2.0	1.2	1.4	1.1	1.1	6.2	4.9	5.5	4.8	4.7	11.7	10.0	11.3	9.9	9.8
	15	1.5	0.7	0.6	0.4	0.4	4.8	3.8	3.6	3.4	3.4	9.5	8.8	8.3	8.4	8.2
.9	20	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.4	2.2	2.0	1.8	1.8	6.4	6.4	6.0	6.2	6.2
	30	0.7	0.6	0.5	0.6	0.6	4.1	4.1	3.5	4.0	4.0	8.8	9.1	8.3	9.0	9.0

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5

ΕΚΤΙΜΗΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ

(ΘΕΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

H_o:		β_4														
Size:		1%					5%					10%				
Test:		N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT
ρ	SAMPLE	%					%					%				
	15	1.9	1.0	1.0	0.7	0.7	5.6	4.0	4.6	3.7	3.6	9.9	7.7	8.7	7.4	7.2
-.9	20	0.4	0.4	0.2	0.4	0.4	2.8	3.0	2.0	2.8	2.8	6.8	7.2	5.6	6.6	6.6
	30	0.7	0.6	0.5	0.6	0.6	3.2	3.2	2.8	3.1	3.1	7.1	7.4	6.7	7.4	7.4
	15	2.1	1.3	1.2	1.0	0.9	7.0	5.6	5.5	5.1	5.0	12.2	10.6	10.7	10.2	10.1
-.5	20	2.2	1.4	1.6	1.4	1.4	6.4	5.2	5.6	5.0	5.0	12.2	10.2	11.6	10.2	10.2
	30	1.5	1.1	1.1	1.0	1.0	5.4	4.6	5.0	4.5	4.5	11.1	10.0	10.3	9.9	9.9
	15	2.8	1.4	1.4	0.9	0.8	8.0	5.5	6.4	5.0	4.8	13.4	10.5	12.2	10.2	9.9
-.1	20	2.6	1.2	1.2	0.6	0.6	9.2	6.8	8.8	6.2	6.0	12.8	12.0	12.2	12.0	11.6
	30	1.8	1.1	1.3	0.9	0.9	6.7	5.2	5.9	5.2	5.1	11.9	10.4	11.3	10.3	10.3
	15	2.8	1.7	1.6	1.2	1.1	7.6	5.6	6.1	5.2	5.1	13.0	10.7	11.6	10.3	10.2
.1	20	1.6	0.6	0.8	0.6	0.6	5.4	4.0	4.4	3.8	3.8	9.2	7.6	9.0	7.6	7.2
	30	1.7	0.9	1.2	0.8	0.8	6.2	4.9	5.6	4.8	4.7	11.3	9.7	10.6	9.6	9.5
	15	2.2	1.2	1.0	0.9	0.8	6.8	5.1	5.5	4.7	4.5	11.6	9.8	10.5	9.4	9.3
.5	20	1.6	1.0	0.8	1.0	0.8	5.4	4.6	4.8	4.4	4.2	9.8	9.4	8.8	9.2	9.2
	30	1.6	1.1	1.0	0.9	0.9	6.1	5.2	5.5	5.1	5.1	10.9	10.1	10.3	10.0	10.0
	15	1.4	0.7	0.6	0.5	0.5	5.9	4.8	4.6	4.4	4.3	10.5	9.8	9.5	9.4	9.4
.9	20	0.6	0.4	0.2	0.4	0.4	3.0	3.2	2.6	2.8	2.8	7.0	8.0	6.8	7.6	7.4
	30	0.8	0.7	0.5	0.7	0.7	3.6	3.9	3.3	3.8	3.7	8.0	8.6	7.6	8.5	8.4

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5

ΕΚΤΙΜΗΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ

(ΑΡΝΗΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

H_o:										β_1									
Size:		1%					5%					10%				
Test:		N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT
ρ	SAMPLE	%					%					%				
	15	0.7	0.6	0.3	0.4	0.4	3.5	3.5	2.4	3.2	3.1	7.2	7.6	6.1	7.3	7.2
-.9	20	0.8	0.6	0.6	0.6	0.6	4.2	4.4	3.4	4.0	4.0	8.4	8.8	7.4	8.8	8.8
	30	0.6	0.6	0.4	0.5	0.5	3.0	3.3	2.4	3.3	3.1	7.0	7.7	6.5	7.6	7.4
	15	1.9	1.3	1.0	1.0	1.0	5.4	4.8	4.3	4.5	4.5	10.2	9.7	8.6	9.2	9.2
-.5	20	1.8	1.2	0.8	1.0	1.0	6.0	5.6	5.0	5.6	5.6	11.8	11.6	10.8	11.2	11.2
	30	1.6	1.2	1.2	1.2	1.1	6.1	5.7	5.5	5.6	5.6	11.2	10.9	10.6	10.8	10.8
	15	2.5	1.4	1.4	1.1	1.0	6.8	5.4	5.5	4.9	4.8	12.1	10.3	10.5	9.9	9.8
-.1	20	2.4	1.8	1.6	1.6	1.4	7.0	5.4	5.8	4.8	4.8	11.2	9.8	10.6	9.4	9.4
	30	1.8	1.3	1.4	1.3	1.3	6.0	5.2	5.4	5.1	5.1	10.6	10.1	10.2	10.1	10.0
	15	3.9	2.5	2.3	1.6	1.3	9.4	6.8	7.6	6.3	5.9	14.6	12.1	13.3	11.7	11.2
.1	20	3.2	1.2	1.6	0.8	0.8	8.8	6.2	7.8	6.0	5.4	13.6	10.6	12.6	10.4	10.4
	30	2.6	1.7	2.1	1.4	1.0	7.0	5.3	6.4	5.2	5.0	12.0	10.2	11.3	10.1	10.0
	15	6.9	4.1	4.8	2.9	1.2	13.0	8.4	11.1	7.8	5.4	18.4	13.7	17.2	13.3	10.9
.5	20	6.0	2.2	3.6	1.6	1.0	13.0	9.8	12.0	9.4	6.6	17.4	13.8	16.6	13.6	11.4
	30	4.4	2.5	3.8	2.1	0.8	10.8	6.7	9.9	6.5	4.8	16.6	12.1	15.9	12.0	10.7
	15	28.1	21.8	24.7	17.0	12.6	34.2	27.6	32.9	25.4	14.8	37.7	31.6	36.8	30.6	17.5
.9	20	22.0	17.0	21.2	14.8	10.0	27.8	21.6	26.8	21.2	12.2	33.8	25.2	32.4	24.6	15.0
	30	19.5	13.9	18.3	12.3	6.0	26.6	19.7	25.9	18.8	8.0	31.3	23.8	30.8	23.6	10.8

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5

ΕΚΤΙΜΗΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ

(ΑΡΝΗΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

H_o:										β_2									
Size:		1%					5%					10%							
Test:		N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT			
ρ	SAMPLE	%					%					%							
	15	0.9	0.6	0.3	0.3	0.3	4.2	3.5	3.1	3.2	3.2	8.1	7.7	7.0	7.4	7.4			
-.9	20	1.2	0.8	0.6	0.4	0.4	4.4	4.0	3.4	3.6	3.6	7.8	8.0	7.8	8.0	8.0			
	30	0.6	0.6	0.4	0.5	0.5	3.5	3.3	3.1	3.3	3.3	7.3	7.3	6.8	7.2	7.2			
	15	1.8	1.0	0.9	0.8	0.7	6.5	4.7	4.9	4.3	4.2	11.7	10.3	10.5	9.7	9.6			
-.5	20	2.2	1.0	1.0	0.2	0.2	6.2	4.6	5.6	4.2	4.2	13.2	10.0	11.8	9.6	9.6			
	30	1.4	0.9	0.9	0.9	0.9	5.8	5.1	5.3	5.1	5.1	10.8	10.1	10.2	10.0	10.0			
	15	3.1	1.6	1.6	1.0	0.9	8.4	5.7	7.0	5.0	4.7	13.7	10.1	12.2	9.6	9.4			
-.1	20	2.6	1.2	1.2	1.2	1.2	6.4	4.6	4.8	4.4	4.2	12.2	9.6	11.0	9.6	9.6			
	30	1.8	1.1	1.3	1.0	1.0	6.7	5.3	6.1	5.2	5.1	12.2	10.3	11.6	10.2	10.2			
	15	3.8	2.2	2.1	1.6	1.5	9.1	6.9	7.4	6.3	6.2	14.2	11.4	12.8	11.2	11.0			
.1	20	3.0	2.4	2.4	1.2	1.0	7.6	5.6	6.6	5.0	4.6	11.6	9.2	10.4	9.2	9.2			
	30	1.7	1.1	1.3	1.0	1.0	6.8	5.1	6.1	5.0	5.0	12.1	10.1	11.3	10.0	9.9			
	15	1.6	1.0	0.8	0.7	0.7	5.6	4.6	4.4	4.1	4.0	10.5	9.3	9.0	8.9	8.9			
.5	20	1.4	0.8	0.8	0.6	0.6	5.6	5.0	4.8	4.8	4.8	11.2	10.0	10.2	10.0	9.8			
	30	1.8	1.4	1.4	1.2	1.2	5.8	5.1	5.2	5.1	5.0	10.3	10.0	9.8	9.8	9.7			
	15	5.3	3.1	3.2	2.1	1.8	12.3	8.9	10.4	8.2	7.7	18.0	14.5	16.7	14.1	13.8			
.9	20	1.4	0.4	0.4	0.4	0.4	4.8	4.0	4.4	3.6	3.6	9.8	8.8	8.6	8.4	8.4			
	30	0.6	0.6	0.5	0.6	0.6	3.4	3.4	2.9	3.3	3.2	7.2	7.6	6.6	7.6	7.6			

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5

ΕΚΤΙΜΗΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ

(ΑΡΝΗΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

H_o:																
									β_s							
Size:		1%					5%					10%				
Test:		N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT
ρ	SAMPLE			%					%					%		
	15	0.9	0.5	0.4	0.4	0.4	4.3	3.6	3.1	3.3	3.3	8.4	7.7	7.3	7.4	7.4
-.9	20	1.0	0.4	0.2	0.4	0.4	3.4	3.2	3.0	3.0	3.0	7.0	6.6	6.2	6.2	6.2
	30	0.6	0.5	0.4	0.4	0.4	3.5	3.6	3.0	3.5	3.5	7.7	7.9	7.2	7.9	7.9
	15	2.1	1.1	1.0	0.9	0.8	6.4	4.8	5.3	4.5	4.5	11.4	9.5	10.1	9.0	8.9
-.5	20	3.6	2.0	2.4	1.6	1.4	7.8	6.4	7.2	6.0	5.8	13.0	9.6	11.8	9.6	9.2
	30	1.4	0.8	0.9	0.8	0.8	5.8	4.8	5.1	4.8	4.7	10.5	9.8	10.1	9.7	9.7
	15	2.6	1.6	1.6	1.2	1.0	7.4	4.9	5.9	4.5	4.2	13.0	10.0	11.6	9.5	9.2
-.1	20	2.0	1.2	1.4	1.0	0.8	6.8	4.8	6.4	4.8	4.6	13.2	10.2	12.2	9.8	9.8
	30	1.8	1.2	1.4	1.1	1.1	6.1	4.7	5.6	4.6	4.6	11.4	9.5	11.0	9.4	9.4
	15	2.2	1.4	1.2	0.9	0.9	7.3	5.5	5.8	5.0	4.9	12.3	10.1	10.8	9.8	9.8
.1	20	3.6	2.4	2.6	2.0	1.8	9.2	6.2	7.8	5.8	5.6	13.4	10.6	12.6	10.4	10.4
	30	1.9	1.2	1.4	1.1	1.0	6.6	5.5	6.1	5.5	5,5	11.7	10.2	11.2	10.1	10.0
	15	1.7	1.0	0.8	0.8	0.8	5.7	4.8	4.5	4.4	4.3	10.2	9.2	9.0	8.9	8.8
.5	20	2.4	1.8	1.6	1.0	1.0	7.4	6.2	6.6	5.8	5.8	13.4	11.8	12.6	11.8	11.8
	30	2.2	1.4	1.5	1.3	1.3	6.6	5.4	6.1	5.2	5.2	12.2	10.5	11.6	10.4	10.3
	15	1.5	0.7	0.6	0.4	0.4	5.1	4.0	3.9	3.7	3.6	8.9	8.1	7.9	7.8	7.7
.9	20	1.2	1.2	1.2	1.2	1.2	4.2	4.0	3.6	4.0	4.0	9.8	10.0	8.4	10.0	9.8
	30	0.7	0.7	0.6	0.7	0.7	3.7	3.8	3.3	3.8	3.8	8.0	8.3	7.6	8.3	8.2

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5

ΕΚΤΙΜΗΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ

(ΑΡΝΗΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

H_o:		β_4														
Size:		1%					5%					10%				
Test:		N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT
ρ	SAMPLE	%					%					%				
	15	2.0	1.2	1.1	0.8	0.7	5.6	3.9	4.3	3.6	3.4	10.1	7.8	8.6	7.5	7.4
-.9	20	0.8	0.6	0.6	0.6	0.6	3.6	3.4	2.8	3.4	3.4	7.4	7.4	6.6	7.4	7.2
	30	0.8	0.8	0.7	0.8	0.8	3.6	3.7	3.2	3.6	3.6	7.4	7.6	6.9	7.6	7.5
	15	2.2	1.4	1.2	1.0	0.9	6.5	5.0	5.0	4.6	4.6	11.6	9.7	10.0	9.4	9.2
-.5	20	2.4	1.0	1.2	0.6	0.6	6.6	5.6	5.8	5.6	5.4	11.2	9.4	10.2	9.4	9.4
	30	1.4	1.1	1.1	1.0	1.0	5.8	5.0	5.2	4.9	4.9	10.7	9.9	10.2	9.8	9.8
	15	3.1	1.8	1.7	1.3	1.2	8.6	5.9	6.9	5.6	5.4	13.7	10.9	12.5	10.6	10.3
-.1	20	3.6	2.0	2.2	1.6	1.6	7.2	5.8	6.6	5.6	5.4	12.2	10.0	11.0	10.0	10.0
	30	1.8	1.4	1.5	1.2	1.2	7.2	5.5	6.3	5.5	5.4	12.4	10.9	11.8	10.8	10.8
	15	2.4	1.4	1.3	0.9	0.9	6.5	4.9	5.2	4.5	4.5	11.9	9.7	10.5	9.5	9.4
.1	20	2.6	1.4	1.6	1.4	1.4	10.0	7.2	7.8	6.8	6.8	16.2	12.6	14.4	12.0	12.0
	30	2.1	1.4	1.7	1.3	1.2	7.1	5.6	6.4	5.3	5.2	12.3	10.6	11.9	10.6	10.5
	15	2.5	1.4	1.3	1.1	1.0	6.4	4.8	5.2	4.5	4.4	11.3	9.3	10.0	8.9	8.9
.5	20	1.6	1.0	0.8	0.8	0.8	6.4	5.4	5.0	5.4	5.2	11.4	10.2	10.2	10.2	10.2
	30	1.4	1.0	1.1	1.0	1.0	5.8	4.7	5.1	4.7	4.7	10.7	9.8	10.2	9.8	9.8
	15	1.6	0.8	0.5	0.5	0.5	5.7	4.8	4.5	4.5	4.5	10.3	9.4	8.9	9.0	8.9
.9	20	0.6	0.4	0.2	0.4	0.4	4.0	3.4	3.0	3.2	3.0	8.2	7.8	6.0	7.8	7.6
	30	0.7	0.6	0.5	0.6	0.6	3.3	3.5	2.8	3.5	3.4	7.6	8.2	7.1	8.1	8.0

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.5

ΕΚΤΙΜΗΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ

(F ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

H_o:		$\beta_2, \beta_3, \beta_4$														
Size:		1%					5%					10%				
Test:		X2	X2E	F	FE	CFF	X2	X2E	F	FE	CFF	X2	X2E	F	FE	CFF
ρ	SAMPLE	%					%					%				
	15	2.8	1.5	0.9	0.6	0.5	6.9	4.0	3.1	2.9	2.7	10.8	7.1	6.7	6.2	6.0
-.9	20	1.2	0.6	0.0	0.4	0.4	4.6	2.6	2.4	2.6	2.6	8.8	6.2	4.8	5.8	5.2
	30	0.9	0.6	0.4	0.5	0.4	3.3	2.7	2.2	2.6	2.6	6.6	6.2	5.0	6.1	5.9
	15	4.9	2.2	1.1	0.8	0.7	11.9	6.6	5.6	4.5	4.1	18.1	11.5	11.5	9.3	8.8
-.5	20	4.6	3.0	3.0	2.0	1.6	11.2	6.2	6.4	5.0	4.6	17.8	10.2	12.6	8.8	8.6
	30	2.6	1.4	1.2	1.0	0.9	7.7	5.4	5.4	4.9	4.8	13.0	10.1	10.8	9.8	9.7
	15	7.1	3.5	2.0	1.1	0.8	14.9	8.2	8.0	5.4	4.5	21.2	13.0	14.4	10.4	9.3
-.1	20	6.6	3.4	2.8	1.8	1.0	13.6	8.4	9.2	6.4	5.6	19.0	12.8	15.0	12.2	11.4
	30	3.8	1.9	1.8	1.3	1.1	9.9	6.4	7.5	5.4	5.2	15.7	11.1	13.0	10.6	10.1
	15	7.8	4.1	2.3	1.5	1.3	16.4	9.2	8.7	6.3	5.5	23.4	14.5	15.7	11.8	11.0
.1	20	7.8	3.6	2.8	2.2	1.8	15.8	10.0	10.6	8.2	6.8	21.0	14.8	16.6	12.8	11.8
	30	3.7	2.0	1.9	1.1	1.1	9.9	6.0	6.9	5.3	5.0	16.1	10.8	13.1	10.2	9.9
	15	4.3	2.2	1.1	0.8	0.6	9.9	5.8	4.9	3.9	3.5	14.7	9.6	9.6	8.3	7.9
.5	20	3.8	2.2	1.6	1.2	1.2	10.0	6.2	6.2	5.2	5.0	15.8	10.4	11.2	8.8	8.6
	30	2.8	1.5	1.5	1.2	1.1	8.5	5.5	5.8	5.0	4.9	14.7	11.0	11.6	10.4	10.1
	15	6.1	3.1	1.8	1.2	1.0	13.3	8.0	6.9	5.5	5.1	20.3	13.0	12.8	10.9	10.3
.9	20	2.2	1.6	1.0	1.0	0.8	6.0	4.2	3.0	3.8	3.2	10.6	9.6	7.0	8.4	8.0
	30	1.1	0.7	0.5	0.6	0.6	4.6	3.7	2.7	3.5	3.3	8.4	7.9	6.5	7.6	7.5

Από τον Πίνακα 3.5 έπεται ότι το μέγεθος του δείγματος δεν επηρεάζει την ποιότητα των διαφόρων διορθώσεων του μεγέθους των t και F ελέγχων. Για αυτό, σε ότι ακολουθεί θα ασχοληθούμε με την απόδοση των διαφόρων διορθώσεων χρησιμοποιώντας ενδεικτικά τα αποτελέματα του πειράματος με δείγμα μεγέθους 20 παρατηρήσεων.

Με βάση τα αποτελέσματα των αναλύσεων διακύμανσης που πραγματοποιήσαμε συμπεραίνουμε ότι η συμπεριφορά των διαφόρων ελέγχων εξαρτάται, γενικά, μόνον από τον συντελεστή αυτοσυσχέτισης των διαταρακτικών όρων του υποδείγματος. Στην συνέχεια θα επικεντρώσουμε το ενδιαφέρον μας στην συμπεριφορά των τοπικά ακριβών (locally exact) κατά Cornish-Fisher διορθώσεων του μεγέθους των t και F ελέγχων. Διότι από αυτές προκύπτουν οι καλύτερες μορφές των t και F ελέγχων, σύμφωνα με τα αποτελέσματα των Monte Carlo πειραμάτων μας. Όμως, τα προηγούμενα αποτελέσματα καθιστούν σαφές ότι η απόδοση των τοπικά ακριβών (locally exact) κατά Cornish-Fisher διορθώσεων δεν είναι το ίδιο καλή σε κάθε σημείο του πειραματικού χώρου και ότι επηρεάζεται από τις τιμές της παραμέτρου ρ.

Οι τοπικά ακριβείς κατά Cornish-Fisher διορθώσεις των t και F στατιστικών οδηγούν σε t και F ελέγχους, των οποίων η διαφορά μεταξύ του πραγματικού και του ονομαστικού τους μεγέθους είναι, συνήθως, μικρότερη από την αντίστοιχη διαφορά των ελέγχων που βασίζονται στα συνήθη t και F στατιστικά. Ωστόσο, το πραγματικό μέγεθος των ελέγχων που χρησιμοποιούν τα διορθωμένα στατιστικά εξακολουθεί να διαφέρει από το ονομαστικό τους μέγεθος. Η διαφορά αυτή μετρημένη σε απόλυτους όρους δεν είναι κατατοπιστική, διότι δεν υπάρχει ένα αντικειμενικό μέτρο του "μικρού" ή του "μεγάλου". Επίσης, μια διαφορά του πραγματικού από το ονομαστικό μέγεθος ενός ελέγχου, έστω κατά 0.01, δεν μπορεί να θεωρηθεί το ίδιο σημαντική στις περιπτώσεις που το ονομαστικό μέγεθος ισούται με 0.01, 0.05 ή 0.10. Καθίσταται, λοιπόν, σαφές ότι η διαφορά του πραγματικού από το ονομαστικό μέγεθος των ελέγχων θα έπρεπε να μετράται ως ποσοστό της τιμής του ονομαστικού τους μεγέθους.

Επιπλέον, η στατιστική θεωρία μας πληροφορεί ότι το πραγματικό μέγεθος των ελέγχων που χρησιμοποιούν τα συνήθη t και F στατιστικά είναι, γενικά, διαφορετικό από το ονομαστικό μέγεθός

τους. Από την Monte Carlo μελέτη μας, αλλά και από άλλες μελέτες προσομοίωσης (βλ. Magee (1989)), είναι γνωστό ότι, συνήθως, το πραγματικό μέγεθος των ελέγχων που χρησιμοποιούν τα συνήθη t και F στατιστικά είναι μεγαλύτερο από το ονομαστικό μέγεθος αυτών των ελέγχων. Για αυτό, με τις κατά Cornish-Fisher (όπως, άλλωστε, και με τις κατά Edgeworth) διορθώσεις των t και F ελέγχων επιδιώκουμε να μειώσουμε το πραγματικό μέγεθός τους έτσι ώστε αυτό να προσεγγίσει το ονομαστικό τους μέγεθος. Υπάρχει, όμως, ο κίνδυνος της υπερδιόρθωσης του πραγματικού μεγέθους, δηλαδή της υπερβολικής μείωσης του πραγματικού μεγέθους ενός ελέγχου με αποτέλεσμα το τελευταίο να γίνει μικρότερο από το επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας του ελέγχου. Η περίπτωση της υπερδιόρθωσης του πραγματικού μεγέθους ενός ελέγχου είναι προβληματική, διότι τότε ο έλεγχος απορρίπτει την μηδενική υπόθεση σπανιότερα από ό,τι θα έπρεπε με βάση το επίπεδο στατιστικής του σημαντικότητας.

Θα ήταν, λοιπόν, πολύ χρήσιμο να γνωρίζαμε την κατανομή πιθανότητας των διαφόρων τιμών της ποσοστιαίας απόκλισης του πραγματικού από το ονομαστικό μέγεθος ενός ελέγχου. Αυτή η κατανομή θα μας παρείχε πληροφορίες και για την πιθανότητα υπερδιόρθωσης του πραγματικού μεγέθους του ελέγχου. Λόγω της χρησιμότητας τέτοιου είδους πληροφοριών, κατασκευάσαμε και παρουσιάζουμε στον Πίνακα 3.6 εμπειρικές κατανομές συχνοτήτων των τιμών της ποσοστιαίας απόκλισης του πραγματικού από το ονομαστικό μέγεθος των ελέγχων που βασίζονται στις προτεινόμενες κατά Cornish-Fisher διορθώσεις των t και F στατιστικών. Εφόσον η συμπεριφορά των ανωτέρω διορθώσεων εξαρτάται από τις τιμές της παραμέτρου ρ, για κάθε τιμή του ρ κατασκευάσαμε την αντίστοιχη εμπειρική κατανομή συχνοτήτων. Η ποσοστιαία απόκλιση του πραγματικού από το ονομαστικό μέγεθος ενός ελέγχου μετρήθηκε ως η διαφορά του πραγματικού μείον το ονομαστικό του μέγεθος διαιρεμένη δια του ονομαστικού μεγέθους. Οι περιπτώσεις κατά τις οποίες η ως άνω υπολογιζόμενη ποσοστιαία απόκλιση είναι αρνητική αντιστοιχούν σε υπερδιόρθωση του πραγματικού μεγέθους του ελέγχου. Ο Πίνακας 3.6 περιέχει εμπειρικές κατανομές συχνοτήτων που αντιστοιχούν σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας 0.05. Αντίστοιχους πίνακες κατασκευάσαμε και για επίπεδα στατιστικής

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.6

ΕΜΠΕΙΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΑΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ

(ΘΕΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

		ρ					
ΠΟΣΟΣΤΟ	ΣΤΗΛΗΣ	-0.9	-0.5	-0.1	0.1	0.5	0.9
	-80%	8.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	-70%	16.7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	-60%	16.7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	-50%	8.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	-40%	16.7	8.3	0.0	0.0	8.3	0.0
	-30%	8.3	8.3	0.0	0.0	0.0	0.0
	-20%	0.0	0.0	8.3	8.3	0.0	0.0
	-10%	16.7	16.7	8.3	0.0	25.0	0.0
	0%	8.3	50.0	16.7	16.7	8.3	0.0
	10%	0.0	0.0	8.3	25.0	0.0	0.0
	20%	0.0	0.0	16.7	33.3	0.0	0.0
ASCFT1-0.05 / 0.05	30%	0.0	8.3	16.7	8.3	16.7	0.0
	40%	0.0	8.3	16.7	0.0	16.7	0.0
	50%	0.0	0.0	0.0	8.3	0.0	0.0
	60%	0.0	0.0	8.3	0.0	16.7	8.3
	70%	0.0	0.0	0.0	0.0	8.3	0.0
	80%	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	8.3
	110%	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	8.3
	140%	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	8.3
	160%	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	16.7
	170%	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	25.0
	180%	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	16.7
	200%	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	8.3
ΣΥΝΟΛΟ	ΣΤΗΛΗΣ	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.6

ΕΜΠΕΙΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΑΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ

(ΘΕΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

		ρ					
ΠΟΣΟΣΤΟ	ΣΤΗΛΗΣ	-0.9	-0.5	-0.1	0.1	0.5	0.9
ASCFT2-0.05 / 0.05	-60%	8.3	0.0	0.0	0.0	0.0	8.3
	-50%	33.3	0.0	0.0	0.0	0.0	8.3
	-40%	25.0	16.7	8.3	0.0	8.3	8.3
	-30%	16.7	8.3	0.0	8.3	8.3	16.7
	-20%	8.3	16.7	8.3	16.7	8.3	8.3
	-10%	8.3	25.0	16.7	8.3	25.0	16.7
	0%	0.0	8.3	16.7	16.7	16.7	16.7
	10%	0.0	8.3	16.7	8.3	8.3	8.3
	20%	0.0	0.0	25.0	16.7	0.0	8.3
	30%	0.0	8.3	8.3	16.7	0.0	0.0
	40%	0.0	8.3	0.0	0.0	16.7	0.0
	50%	0.0	0.0	0.0	8.3	8.3	0.0
ΣΥΝΟΛΟ	ΣΤΗΛΗΣ	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.6

ΕΜΠΕΙΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΑΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ

(ΘΕΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

		ρ					
ΠΟΣΟΣΤΟ	ΣΤΗΛΗΣ	-0.9	-0.5	-0.1	0.1	0.5	0.9
	-60%	25.0	0.0	0.0	0.0	0.0	8.3
	-50%	16.7	0.0	0.0	0.0	0.0	25.0
	-40%	8.3	8.3	0.0	0.0	0.0	16.7
	-30%	8.3	8.3	0.0	0.0	8.3	0.0
	-20%	0.0	8.3	8.3	8.3	25.0	8.3
	-10%	25.0	0.0	25.0	8.3	25.0	25.0
$\frac{ASCFT3-0.05}{0.05}$	0%	16.7	25.0	25.0	41.7	25.0	16.7
	10%	0.0	25.0	33.3	16.7	0.0	0.0
	20%	0.0	8.3	0.0	16.7	8.3	0.0
	30%	0.0	0.0	0.0	8.3	0.0	0.0
	40%	0.0	16.7	0.0	0.0	0.0	0.0
	50%	0.0	0.0	0.0	0.0	8.3	0.0
	60%	0.0	0.0	8.3	0.0	0.0	0.0
ΣΥΝΟΛΟ	ΣΤΗΛΗΣ	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.6

ΕΜΠΕΙΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΑΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ

(ΘΕΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

		ρ					
ΠΟΣΟΣΤΟ	ΣΤΗΛΗΣ	-0.9	-0.5	-0.1	0.1	0.5	0.9
ASCFT4-0.05 / 0.05	-60%	25.0	0.0	0.0	0.0	0.0	16.7
	-40%	41.7	0.0	8.3	0.0	8.3	41.7
	-30%	25.0	8.3	0.0	0.0	8.3	8.3
	-20%	8.3	8.3	0.0	25.0	16.7	8.3
	-10%	0.0	25.0	25.0	0.0	8.3	0.0
	0%	0.0	33.3	41.7	25.0	8.3	8.3
	10%	0.0	8.3	8.3	25.0	41.7	16.7
	20%	0.0	0.0	16.7	0.0	0.0	0.0
	30%	0.0	8.3	0.0	8.3	0.0	0.0
	40%	0.0	8.3	0.0	16.7	8.3	0.0
ΣΥΝΟΛΟ	ΣΤΗΛΗΣ	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.6

ΕΜΠΕΙΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΑΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ

(ΑΡΝΗΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

		ρ					
ΠΟΣΟΣΤΟ	ΣΤΗΛΗΣ	-0.9	-0.5	-0.1	0.1	0.5	0.9
	-80%	8.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	-60%	16.7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	-50%	8.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	-40%	8.3	0.0	0.0	0.0	8.3	0.0
	-30%	16.7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	-20%	25.0	41.7	16.7	0.0	0.0	0.0
	-10%	8.3	25.0	16.7	16.7	0.0	0.0
	0%	8.3	8.3	16.7	8.3	41.7	0.0
	10%	0.0	16.7	8.3	33.3	0.0	0.0
$\frac{ASCFT1-0.05}{0.05}$	20%	0.0	8.3	33.3	25.0	25.0	0.0
	30%	0.0	0.0	0.0	8.3	8.3	0.0
	40%	0.0	0.0	0.0	8.3	0.0	0.0
	50%	0.0	0.0	8.3	0.0	0.0	0.0
	80%	0.0	0.0	0.0	0.0	8.3	0.0
	90%	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	8.3
	100%	0.0	0.0	0.0	0.0	8.3	8.3
	110%	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	25.0
	130%	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	8.3
	140%	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	41.7
	150%	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	8.3
ΣΥΝΟΛΟ	ΣΤΗΛΗΣ	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.6

ΕΜΠΕΙΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΑΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ (ΑΡΝΗΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

		ρ					
ΠΟΣΟΣΤΟ	ΣΤΗΛΗΣ	-0.9	-0.5	-0.1	0.1	0.5	0.9
ASCFT2-0.05 / 0.05	-60%	8.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	-50%	16.7	0.0	0.0	0.0	0.0	8.3
	-40%	50.0	0.0	0.0	0.0	0.0	16.7
	-30%	16.7	0.0	16.7	0.0	0.0	41.7
	-20%	8.3	33.3	41.7	16.7	0.0	33.3
	-10%	0.0	8.3	0.0	8.3	8.3	0.0
	0%	0.0	25.0	33.3	16.7	58.3	0.0
	10%	0.0	25.0	8.3	25.0	8.3	0.0
	20%	0.0	8.3	0.0	8.3	16.7	0.0
	30%	0.0	0.0	0.0	25.0	8.3	0.0
ΣΥΝΟΛΟ	ΣΤΗΛΗΣ	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.6

ΕΜΠΕΙΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΑΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ

(ΑΡΝΗΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

		ρ					
ΠΟΣΟΣΤΟ	ΣΤΗΛΗΣ	-0.9	-0.5	-0.1	0.1	0.5	0.9
ASCFT3-0.05 / 0.05	-60%	25.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	-50%	16.7	0.0	8.3	0.0	0.0	8.3
	-40%	33.3	0.0	0.0	0.0	0.0	16.7
	-30%	8.3	0.0	8.3	8.3	16.7	25.0
	-20%	8.3	33.3	8.3	8.3	16.7	33.3
	-10%	8.3	0.0	33.3	16.7	16.7	8.3
	0%	0.0	25.0	16.7	16.7	8.3	0.0
	10%	0.0	8.3	0.0	16.7	8.3	8.3
	20%	0.0	33.3	25.0	16.7	16.7	0.0
	30%	0.0	0.0	0.0	8.3	0.0	0.0
	40%	0.0	0.0	0.0	8.3	8.3	0.0
	80%	0.0	0.0	0.0	0.0	8.3	0.0
ΣΥΝΟΛΟ	ΣΤΗΛΗΣ	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.6

ΕΜΠΕΙΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΑΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ

(ΑΡΝΗΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

		ρ					
ΠΟΣΟΣΤΟ	ΣΤΗΛΗΣ	-0.9	-0.5	-0.1	0.1	0.5	0.9
	-60%	16.7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	-50%	16.7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	-40%	16.7	8.3	0.0	8.3	0.0	25.0
	-30%	33.3	0.0	8.3	8.3	25.0	0.0
	-20%	0.0	8.3	0.0	0.0	0.0	33.3
ASCFT4-0.05 / 0.05	-10%	8.3	8.3	16.7	0.0	16.7	25.0
	0%	0.0	16.7	25.0	25.0	33.3	8.3
	10%	8.3	25.0	25.0	16.7	8.3	0.0
	20%	0.0	16.7	16.7	8.3	0.0	8.3
	30%	0.0	16.7	8.3	0.0	16.7	0.0
	40%	0.0	0.0	0.0	33.3	0.0	0.0
ΣΥΝΟΛΟ	ΣΤΗΛΗΣ	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.6

ΕΜΠΕΙΡΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΤΗΣ ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΑΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΚΑΙ ΟΝΟΜΑΣΤΙΚΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ

(F ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

		ρ					
ΠΟΣΟΣΤΟ	ΣΤΗΛΗΣ	-0.9	-0.5	-0.1	0.1	0.5	0.9
	-80%	8.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	-70%	8.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	-60%	41.7	0.0	0.0	0.0	0.0	8.3
	-50%	8.3	0.0	0.0	0.0	0.0	16.7
	-40%	25.0	8.3	0.0	0.0	16.7	25.0
	-30%	8.3	16.7	0.0	0.0	16.7	8.3
ASCFF-0.05 / 0.05	-20%	0.0	0.0	8.3	8.3	16.7	41.7
	-10%	0.0	25.0	16.7	0.0	0.0	0.0
	0%	0.0	16.7	33.3	33.3	8.3	0.0
	10%	0.0	8.3	16.7	33.3	8.3	0.0
	20%	0.0	16.7	8.3	8.3	25.0	0.0
	30%	0.0	8.3	16.7	8.3	0.0	0.0
	40%	0.0	0.0	0.0	8.3	0.0	0.0
	80%	0.0	0.0	0.0	0.0	8.3	0.0
ΣΥΝΟΛΟ	ΣΤΗΛΗΣ	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0

σημαντικότητας ίσα με 0.01 και 0.10, αλλά δεν τους παρουσιάζουμε διότι είναι καθ' όλα όμοιοι προς τους πίνακες που αντιστοιχούν σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας 0.05.

Στις οκτώ πρώτες σελίδες του Πίνακα 3.6 παρουσιάζονται οι εμπειρικές κατανομές συχνοτήτων των τιμών της ποσοστιαίας απόκλισης του πραγματικού από το ονομαστικό μέγεθος του t ελέγχου της στατιστικής σημαντικότητας καθεμιάς από τις παραμέτρους β_j (j = 1,...,4). Η περίπτωση κατά την οποία η εναλλακτική υπόθεση είναι η H_1: $\beta_j > 0$ παρουσιάζεται στις πρώτες τέσσερεις σελίδες του πίνακα, ενώ η περίπτωση με εναλλακτική υπόθεση την H_1: $\beta_j < 0$ δίνεται στις επόμενες τέσσερεις σελίδες του. Η ένατη σελίδα του Πίνακα 3.6 περιέχει τις εμπειρικές κατανομές συχνοτήτων των τιμών της ποσοστιαίας απόκλισης του πραγματικού από το ονομαστικό μέγεθος του F ελέγχου της από κοινού στατιστικής σημαντικότητας των παραμέτρων β_2, β_3 και β_4. Από την εξέταση του πίνακα προκύπτει ότι όταν το $|\rho|$ παίρνει τιμές κοντά στην μονάδα συμβαίνει υπερδιόρθωση του πραγματικού μεγέθους των ελέγχων, εξαιρουμένων των t ελέγχων που αντιστοιχούν στην σταθερά του υποδείγματος, για τους οποίους, καθώς η τιμή του ρ μεγαλώνει προς την θετική μονάδα, η ποσοστιαία απόκλιση του πραγματικού από το ονομαστικό τους μέγεθος παίρνει, με όλο και μεγαλύτερη συχνότητα, θετικές τιμές. Από τον πίνακα φαίνεται ότι για τιμές του ρ κοντά στο 1 οι έλεγχοι που αναφέρονται στην σταθερά δεν παρουσιάζουν υπερδιόρθωση του πραγματικού τους μεγέθους. Γενικά, για μικρές και ενδιάμεσες τιμές του $|\rho|$, δηλαδή $|\rho| = .1$ ή $|\rho| = .5$, η ποσοστιαία απόκλιση του πραγματικού από το ονομαστικό μέγεθος παίρνει σχετικά μέτριες θετικές ή αρνητικές τιμές με σχεδόν ίσες συχνότητες.

3.5 ΤΕΛΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Κλίνοντας αυτό το κεφάλαιο κρίνουμε αναγκαίο να αναφέρουμε μερικές τελικές παρατηρήσεις σχετικά με τα αποτελέσματα των τυχαίων πειραμάτων που παρουσιάσαμε πιο πριν.

Από τα τυχαία πειράματα που πραγματοποιήσαμε φαίνεται ότι, για την περίπτωση του γραμμικού υποδείγματος με αυτοσυσχέτιση πρώτου βαθμού, οι τοπικά ακριβείς (locally exact) κατά Edgeworth διορθώσεις του μεγέθους των t και F ελέγχων είναι καλύτερες για μικρές και ενδιάμεσες τιμές του $|\rho|$, ενώ οι κατά Edgeworth

διορθώσεις από τις ασυμπτωτικές κατανομές (κανονική και χ^2) αποδίδουν καλύτερα για τιμές του $|\rho|$ κοντά στην μονάδα. Επιπλέον, από τα ίδια πειράματα προκύπτει ότι οι τοπικά ακριβείς κατά Cornish-Fisher διορθώσεις του μεγέθους των ελέγχων t και F αποδίδουν καλύτερα από τις αντίστοιχες τοπικά ακριβείς κατά Edgeworth διορθώσεις σχεδόν παντού στον παραμετρικό χώρο. Αξίζει, μάλιστα, να σημειώσουμε ότι τα ανωτέρω αποτελέσματα δεν επηρεάζονται από αλλαγές του μεγέθους του χρησιμοποιουμένου δείγματος.

'Οπως έχουμε ήδη αναφέρει, από ένα πλήθος 36000 κατά Cornish-Fisher διορθωμένων F στατιστικών, που υπολογίσθησαν κατά την εκτέλεση των τυχαίων πειραμάτων με δείγμα μεγέθους 20 παρατηρήσεων, μόνον ένα ήταν αρνητικό παρουσιάζοντας το πρόβλημα της υπερδιόρθωσης του F στατιστικού. Μελετώντας τις κατά Cornish-Fisher διορθώσεις κατανοούμε ότι η υπερδιόρθωση του F στατιστικού είναι δυνατόν να συμβεί μόνον αν το σύνηθες F στατιστικό πάρει πολύ μεγάλη τιμή, γεγονός που σημαίνει ότι η υπερδιόρθωση του F στατιστικού ισοδυναμεί με σχεδόν βέβαιη απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης. Επιπλέον, ένα αρνητικό κατά Cornish-Fisher διορθωμένο F στατιστικό αποτελεί ένδειξη πως το μέγεθος του δείγματος είναι πολύ μικρό σε σχέση με τις παρατηρούμενες συσχετίσεις και συνεπώς οι ασυμπτωτικές μέθοδοι δεν μπορούν να εφαρμοστούν. Σε τέτοιες περιπτώσεις δεν χρειάζεται να διορθώνουμε το F στατιστικό για να διενεργήσουμε τον έλεγχο. Αντίθετα, σε περιπτώσεις κατά τις οποίες το σύνηθες F στατιστικό παίρνει τιμές "κοντά" στην κριτική τιμή (περιπτώσεις που κυρίως μας ενδιαφέρουν) το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο F στατιστικό δεν παρουσιάζει το πρόβλημα της υπερδιόρθωσης. 'Ομως, λαμβάνοντας υπόψη την μορφή των κατά Cornish-Fisher διορθώσεων και το γεγονός ότι το F στατιστικό παίρνει πάντα μικρότερη τιμή από το αντίστοιχο χ^2 στατιστικό, είναι φανερό πως το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο χ^2 στατιστικό μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές με πιθανότητα μεγαλύτερη από ό,τι το αντίστοιχο κατά Cornish-Fisher διορθωμένο F στατιστικό. Επομένως, το πρόβλημα της υπερδιόρθωσης είναι οξύτερο για το χ^2 στατιστικό. Δηλαδή, ακόμα και σε περιπτώσεις κατά τις οποίες το σύνηθες χ^2 στατιστικό παίρνει τιμές "κοντά" στην κριτική

τιμή, είναι δυνατόν το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο χ^2 στατιστικό να πάρει αρνητική τιμή, με αποτέλεσμα να γίνει δυσκολότερο το έργο του ελέγχου της μηδενικής υπόθεσης. Αυτή είναι η αιτία για την οποία δεν εξετάσαμε πειραματικά τη συμπεριφορά του κατά Cornish-Fisher διορθωμένου χ^2 στατιστικού.

Το ανωτέρω πρόβλημα υπερδιόρθωσης μπορεί να εμφανιστεί με την μορφή αρνητικών "κριτικών τιμών" και στην περίπτωση των κατά Edgeworth διορθώσεων όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό. Και σε αυτήν την περίπτωση η χρήση της F, αντί της χ^2, κατανομής μειώνει την πιθανότητα τέτοιας υπερδιόρθωσης, διότι οι κριτικές τιμές της F κατανομής είναι μικρότερες από τις κριτικές τιμές της χ^2 κατανομής.

Στην εφαρμοσμένη έρευνα, η χρήση των κατά Cornish-Fisher διορθώσεων, όπως εξειδικεύθησαν σε αυτό το κεφάλαιο, είναι πάρα πολύ απλή. Από την στιγμή που θα υπολογισθούν, τα κατά Cornish-Fisher διορθωμένα στατιστικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν ακριβώς όπως τα αντίστοιχα συνήθη στατιστικά του κλασσικού γραμμικού υποδείγματος. Τα ίδια ισχύουν και για τα κατά Edgeworth διορθωμένα χωρία εμπιστοσύνης, όπως αυτά μπορούν να εξειδικευθούν με βάση τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου. Για αυτούς τους λόγους θεωρούμε ότι οι ανωτέρω διορθώσεις μπορούν να γίνουν ένα χρήσιμο εργαλείο στην εφαρμοσμένη στατιστική και οικονομετρική έρευνα στα πλαίσια του γραμμικού υποδείγματος, του οποίου οι διαταρακτικοί όροι υπόκεινται σε αυτοσυσχέτιση πρώτου βαθμού.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΤΕΡΟΣΚΕΔΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟΙ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό εξειδικεύονται οι αναλυτικοί τύποι των κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher διορθώσεων του μεγέθους των t και F ελέγχων για την περίπτωση του γραμμικού υποδείγματος με ετεροσκεδαστικό στοχαστικό όρο ή στοχαστικούς συντελεστές. Σκοπός μας είναι η ανάπτυξη απλών, πρακτικά εφαρμόσιμων τύπων για τον υπολογισμό των διαφόρων διορθώσεων που να χρησιμοποιούν, στο μέτρο του δυνατού, ποσότητες που έχουν ήδη υπολογισθεί κατά την εκτιμητική διαδικασία. Οι τύποι που δίνονται στις Προτάσεις 4.1 και 4.2, κατωτέρω, αποτελούν, πράγματι, σημαντική βελτίωση σε σχέση με τους τύπους του Rothenberg (1984b), (1988) και απλοποιούν τον υπολογισμό των κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher διορθώσεων στην περίπτωση του γραμμικού υποδείγματος με ετεροσκεδαστικά σφάλματα ή στοχαστικούς συντελεστές. Επιπλέον, Monte Carlo πειράματα χρησιμοποιούνται για να διερευνηθεί η ποιότητα των ανωτέρω διορθώσεων. Τα αποτελέσματα αυτών των πειραμάτων παρουσιάζονται και σχολιάζονται διεξοδικά.

Ένα υπόδειγμα που περιλαμβάνει πολλές από τις οικονομετρικές εξειδικεύσεις ετεροσκεδαστικότητας και στοχαστικών συντελεστών χρησιμοποιείται οποτεδήποτε η διακύμανση των διαταρακτικών όρων υποτίθεται πως είναι μια γραμμική συνάρτηση ενός συνόλου εξωγενών μεταβλητών (βλ. Hildreth and Houck (1968), Goldfeld and Quandt (1972), Amemiya (1977)). Σ' αυτήν την περίπτωση υποθέτουμε ότι οι διαταρακτικοί όροι, u_t $(t = 1,\ldots,T)$, της εξίσωσης (2.1) είναι ανεξάρτητες κανονικές μεταβλητές με μέση τιμή το μηδέν και διακυμάνσεις

$$\sigma_t^2 = z_t'\gamma \quad (t = 1,\ldots,T), \tag{4.1}$$

όπου

$$z_t' = (1, z_{t2}, \ldots, z_{tx}) \tag{4.2}$$

είναι η t-παρατήρηση για κ εξωγενείς μεταβλητές και $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_x)'$ είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα αγνώστων παραμέτρων.

Στο Κεφάλαιο 2 έγινε η υπόθεση ότι η μήτρα συνδιακυμάνσεων των διαταρακτικών όρων, έστω Ω^{-1}, εκτός από έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα, ανήκει σε μια σφαίρα ακτίνας θ. Συνεπώς, ο ορισμός της τοπικά ακριβούς προσέγγισης προϋποθέτει την ύπαρξη ενός βαθμωτού πολλαπλασίου, σ^2, της μήτρας Ω^{-1} που μπορεί να εξετασθεί ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες παραμέτρους της. Όταν έχουμε ετεροσκεδαστικούς διαταρακτικούς όρους, από τις υποθέσεις του Κεφαλαίου 2 και τις σχέσεις (4.1) και (4.2) είναι φανερό ότι, χωρίς την επιβολή επιπλέον περιορισμών οι παράμετροι σ και γ δεν είναι ταυτόχρονα ταυτοποιημένες. Ένας λογικός περιορισμός, ο οποίος συνήθως χρησιμοποιείται από τους ερευνητές, είναι να θέσουμε σ = 1, και αυτή είναι η εξειδίκευση που χρησιμοποιήθηκε σε αυτό το κεφάλαιο κατά τον υπολογισμό των διορθώσεων του μεγέθους των ασυμπτωτικών μορφών των ελέγχων t και F από προσεγγίσεις με την κανονική και την χ^2 κατανομή, αντίστοιχα. Όμως, κάτω από τον ανωτέρω περιορισμό υποτίθεται ότι τα λάθη του μετασχηματισμένου υποδείγματος έχουν ταυτοτική μήτρα συνδιακυμάνσεων. Αυτό αληθεύει μόνον αν το διάνυσμα των παραμέτρων γ μπορεί να εκτιμηθεί με ακρίβεια, δηλαδή αν το μέγεθος του δείγματος είναι άπειρο. Αντίθετα, σε μικρά δείγματα οι εκτιμήσεις των διακυμάνσεων των λαθών του μετασχηματισμένου υποδείγματος συνήθως διαφέρουν από την μονάδα (στα πειράματα που κάναμε παρατηρήθηκαν διακυμάνσεις μικρές, της τάξης του 0.5, και μεγάλες, της τάξης του 2.3), υποδεικνύοντας ότι η μήτρα συνδιακυμάνσεων των λαθών στο μετασχηματισμένο υπόδειγμα διαφέρει σημαντικά από την ταυτοτική μήτρα. Μια λογική μέθοδος για να λάβουμε υπόψη μας αυτό το γεγονός είναι να εκτιμήσουμε τις διακυμάνσεις των καταλοίπων του μετασχηματισμένου υποδείγματος και να χρησιμοποιήσουμε τους συνήθεις τύπους (2.11) και (2.35) για τα t και F στατιστικά ελέγχου, αντίστοιχα. Είναι φανερό ότι η μέθοδος δέν έχει νόημα από άποψη εκτιμητικής, αφού δεν είναι δυνατόν να εκτιμήσουμε μια μη ταυτοποιημένη παράμετρο. Χρησιμοποιείται, όμως, για να βελτιώσει το μέγεθος των ελέγχων και η επιτυχία ή αποτυχία της στο έργο αυτό πρέπει να αποτελέσει το μόνο κριτήριο αξιολόγησής της. Οι έλεγχοι που προκύπτουν είναι τοπικά ακριβείς (locally exact) και, όπως φαίνεται από τα Monte Carlo πειράματα που πραγματοποιήσαμε, το

πραγματικό τους μέγεθος διαφέρει από το ονομαστικό λιγότερο από ό,τι το πραγματικό μέγεθος των ασυμπτωτικών μορφών αυτών των ελέγχων.

4.2 ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ

Το υπόδειγμα (2.1), εξειδικευμένο για τις περιπτώσεις ετεροσκεδαστικότητας και στοχαστικών συντελεστών, γράφεται ως

$$y_t = x_t'\beta + u_t \quad (t = 1,\ldots,T), \tag{4.3}$$

όπου τα διανύσματα x_t' $(t = 1,\ldots,T)$ είναι οι γραμμές της $T\times n$ μήτρας X των εξωγενών μεταβλητών του υποδείγματος και οι διαταρακτικοί όροι, u_t, είναι ανεξάρτητες κανονικές μεταβλητές με μέση τιμή το μηδέν και διακυμάνσεις που δίνονται από την σχέση (4.1). Τα διανύσματα z_t' στην σχέση (4.1) είναι οι γραμμές της $T\times k$ μήτρας Z, της οποίας τα στοιχεία είναι παρατηρήσεις επί ενός συνόλου εξωγενών μεταβλητών μερικές από τις οποίες ενδέχεται να περιλαμβάνονται στην μήτρα X. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $\beta \in R^n$, $\gamma \in \Theta = R^k - \{0\}$, όπου 0 είναι το μηδενικό διάνυσμα.

Μερικοί από τους εκτιμητές του γ που χρησιμοποιούνται συχνότερα στην εφαρμοσμένη έρευνα είναι:

(i) Ο Goldfeld-Quandt (GQ) εκτιμητής του γ

$$\hat{\gamma}_{GQ} = \Big[\sum_{t=1}^{T} z_t z_t'\Big]^{-1} \sum_{t=1}^{T} z_t (y_t - x_t'\tilde{\beta})^2, \tag{4.4}$$

όπου $\tilde{\beta}$ είναι ο εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων (OLS) του β.

(ii) Ο Amemiya (A) εκτιμητής του γ

$$\hat{\gamma}_A = \Big[\sum_{t=1}^{T} (z_t'\hat{\gamma}_{GQ})^{-2} z_t z_t'\Big]^{-1} \sum_{t=1}^{T} (z_t'\hat{\gamma}_{GQ})^{-2} z_t (y_t - x_t'\tilde{\beta})^2. \tag{4.5}$$

(iii) Ο επαναληπτικός Amemiya (IA) εκτιμητής του γ

$$\hat{\gamma}_\alpha = \Big[\sum_{t=1}^{T} (z_t'\hat{\gamma}_{\alpha-1})^{-2} z_t z_t'\Big]^{-1} \sum_{t=1}^{T} (z_t'\hat{\gamma}_{\alpha-1})^{-2} z_t (y_t - x_t'\hat{\beta}_{\alpha-1})^2, \tag{4.6}$$

όπου $\alpha = 2, 3,\ldots$ και $\hat{\gamma}_{\alpha-1}$, $\hat{\beta}_{\alpha-1}$ είναι ο εκτιμητής του γ και ο αντίστοιχος εφικτός (feasible) GLS εκτιμητής του β από την προηγούμενη επανάληψη. Φυσικά $\hat{\gamma}_1 = \hat{\gamma}_A$.

(iv) Ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας (ML) του γ, ο οποίος μεγιστοποιεί την συνάρτηση

$$L(\beta,\gamma) = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(z_t'\gamma) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(y_t-x_t'\beta)^2/(z_t'\gamma). \qquad (4.7)$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι οι συνθήκες κανονικότητας του Κεφαλαίου 2 ικανοποιούνται για όλους αυτούς τους εκτιμητές, αρκεί οι ποσότητες $|z_{ti}|$, $|\sigma_t^2|$, $|\sigma_t^{-2}|$ να είναι φραγμένες και οι μήτρες

$$A = \sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-2}x_tx_t'/T,\quad \bar{A} = \sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}z_tz_t'/T,$$
$$F = \sum_{t=1}^{T}x_tx_t'/T,\quad \bar{F} = \sum_{t=1}^{T}z_tz_t'/T \qquad (4.8)$$

να συγκλίνουν σε μη ιδιάζουσες μήτρες καθώς το $T\longrightarrow\infty$. Επιπλέον, ορίζουμε τις μήτρες

$$\Gamma = \sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{2}x_tx_t'/T,\quad \bar{\Gamma} = \sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{4}z_tz_t'/T,$$
$$G = A^{-1},\ \bar{G} = \bar{A}^{-1},\ B = F^{-1},\ \bar{B} = \bar{F}^{-1}. \qquad (4.9)$$

Είναι γνωστό ότι οι εκτιμητές A, IA και ML είναι ασυμπτωτικά αποτελεσματικοί, ενώ ο εκτιμητής GQ δεν είναι. Επιπλέον, εύκολα αποδεικνύεται ότι ο εκτιμητής IA συγκλίνει στον ML εκτιμητή καθώς ο αριθμός των επαναλήψεων, α, τείνει στο άπειρο.

4.3 ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΤΩΝ t ΚΑΙ F ΕΛΕΓΧΩΝ

Ο υπολογισμός των διανυσμάτων l και c και των μητρών L, C και D από τους ορισμούς (2.12), (2.13), (2.14), (2.28) και (2.29) είναι άμεσος, αλλά είναι υπολογιστικά ακριβός όταν το κ είναι μεγάλο. Τότε είναι προτιμότερο να χρησιμοποιηθεί η ακόλουθη υπολογιστική διαδικασία:

Με δεδομένο ένα αυθαίρετο n×1 διάνυσμα h, ορίζουμε τις μήτρες

$$L(h) = \sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-6}(x_t'h)^2z_tz_t'/T,\quad C(h) = \sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}(x_t'h)z_tx_t'/T, \qquad (4.10)$$

οι οποίες είναι οι μήτρες των ροπών των μετασχηματισμένων μεταβλητών

$$z_t^* = z_t(x_t'h)/\sigma_t^3,\quad x_t^* = x_t/\sigma_t \qquad (4.11)$$

και επομένως μπορούν να υπολογισθούν με την χρησιμοποίηση συνηθισμένων μεθόδων.

Στην συνέχεια, ακολουθώντας την προηγούμενη διαδικασία, θα αναπτύξουμε ασυμπτωτικούς τύπους για τον υπολογισμό των ποσοτήτων l, c, L, C και D.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.1: *Το διάνυσμα* l *και η μήτρα* L *στην* (2.12) *μπορούν να υπολογισθούν από τους τύπους*

$$l = -L(h)\gamma, \quad L = 2\left[L(h) - C(h)GC'(h)\right],$$

όπου (4.12)

$$h = Ge/(e'Ge)^{1/2},$$

$$L(h) = \sum_{t=1}^{T} \sigma_t^{-6}(x_t'h)^2 z_t z_t'/T, \quad C(h) = \sum_{t=1}^{T} \sigma_t^{-4}(x_t'h) z_t x_t'/T.$$

Όμοια, το διάνυσμα c *και οι μήτρες* C *και* D *στη* (2.28) *μπορούν να υπολογισθούν από τους τύπους*

$$c = -C_1\gamma, \quad D = C_3/2, \quad C = 2(C_1 - C_2),$$

όπου (4.13)

$$C_1 = \sum_{i=1}^{r} L(h_i), \quad C_2 = \sum_{i=1}^{r} C(h_i)GC'(h_i), \quad C_3 = \sum_{i=1}^{r} C(h_i)PC'(h_i),$$

$$L(h_i) = \sum_{t=1}^{T} \sigma_t^{-6}(x_t'h_i)^2 z_t z_t'/T, \quad C(h_i) = \sum_{t=1}^{T} \sigma_t^{-4}(x_t'h_i) z_t x_t'/T$$

και $h_i = \lambda_i^{1/2} w_i$, *όπου* λ_i $(i = 1, \ldots, r)$ *είναι οι* r *ιδιοτιμές της μήτρας* P, *οι οποίες είναι διάφορες του μηδενός και* w_i *είναι τα αντίστοιχα ορθοκανονικοποιημένα (orthonormalized) ιδιοδιανύσματα της μήτρας* P.

Ορίζουμε τα κ×1 διανύσματα

$$\xi = \sum_{t=1}^{T} v_t z_t/T, \quad \xi_1 = \sum_{t=1}^{T} \sigma_t^{-4} v_t z_t/T, \quad \xi_2 = \sum_{t=1}^{T} \sigma_t^{-4} x_t'Gx_t z_t/T,$$

όπου (4.14)

$$v_t = 2\sigma_t^2 x_t'Bx_t - x_t'B\Gamma Bx_t.$$

Το μόνο που απομένει είναι να βρούμε τις τιμές των παραμέτρων (2.8), οι οποίες είναι δυνατό να εκφραστούν σε όρους των μητρών (4.8) και (4.9) και των διανυσμάτων (4.14). Αυτές οι τιμές μπορούν να εκτιμηθούν σύμφωνα με τα αποτελέσματα της ακόλουθης πρότασης:

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.2: *Κάτω από τις υποθέσεις αυτού του κεφαλαίου, οι παράμετροι* (2.8) *για τον GQ εκτιμητή του* γ *μπορούν να εκτιμηθούν*

ως

$$\Lambda = 2\bar{B}\Gamma\bar{B}, \quad \mu = -\bar{B}\xi, \quad \lambda = 2\gamma - \Lambda\bar{A}\gamma, \tag{4.15}$$

$$\lambda_o = 2(1 - \gamma'\bar{A}\gamma) - \gamma'\bar{A}\lambda, \quad \mu_o = tr(\Lambda\bar{A}) - 2\kappa - \gamma'\bar{A}\mu$$

και για τον Α εκτιμητή μπορούν να εκτιμηθούν ως

$$\Lambda = 2\bar{G}, \quad \lambda = 0, \quad \lambda_o = 2(1 - \gamma'\bar{A}\gamma), \quad \mu_o = -\gamma'\bar{A}\mu, \tag{4.16}$$

$$\mu = -\bar{G}\xi_1 - 4\sum_{i=1}^{\infty}\bar{G}\left[\bar{A}_i\bar{g}_i - (Z'\Omega_i\Omega^{-1}Z/T)\bar{b}_i\right],$$

όπου $\bar{g}_i$ *και* $\bar{b}_i$ *είναι οι i-στήλες των μητρών* $\bar{G}$ *και* $\bar{B}$, *αντίστοιχα, και* $\bar{A}_i = (Z'\Omega\Omega_i Z/T)$. *Για τους ΙΑ και ML εκτιμητητές του* γ *μπορούμε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους (2.8) χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.16) με*

$$\mu = -\bar{G}\xi_2. \tag{4.17}$$

Χρησιμοποιώντας τις Προτάσεις 4.1 και 4.2 είναι εύκολο να υπολογίσουμε τις παραμέτρους (2.16) και (2.37) των κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher αναπτυγμάτων. Αξίζει να σημειώσουμε ότι όλες οι μήτρες που εμφανίζονται στις Προτάσεις 4.1 και 4.2 είναι n×n ή κ×κ και, εκτός από τις μήτρες $\bar{A}_i$ και $(Z'\Omega_i\Omega^{-1}Z/T)$, υπολογίζονται κατά την εκτιμητική διαδικασία. Επιπλέον, το ίχνος της μήτρας $\Lambda\bar{A}$ μπορεί να υπολογισθεί ευκολώτατα. Από υπολογιστική άποψη, οι τύποι που αναπτύχθησαν στο κεφάλαιο αυτό αποτελούν σημαντική απλοποίηση των αρχικών τύπων του Κεφαλαίου 2 καθώς και μεγάλη βελτίωση σε σχέση με τους τύπους του Rothenberg (1984b), (1988) και καθιστούν απλούστερο τον υπολογισμό των κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher διορθώσεων του μεγέθους των t και F ελέγχων στην περίπτωση του γραμμικού υποδείγματος με ετεροσκεδαστικά λάθη ή στοχαστικούς συντελεστές. Φυσικά, το διάνυσμα παραμέτρων γ θα πρέπει να αντικατασταθεί από τον αντίστοιχο συνεπή εκτιμητή του για να αποκτήσουμε πρακτικά εφαρμόσιμους τύπους.

4.4 ΤΟ MONTE CARLO ΠΕΙΡΑΜΑ

Στο τμήμα αυτό θα περιγράψουμε το Monte Carlo πείραμα με το οποίο διερευνήθηκε η απόδοση των κατά Edgeworth και κατά

Cornish-Fisher διορθώσεων του μεγέθους των ελέγχων t και F στην περίπτωση του γραμμικού υποδείγματος με ετεροσκεδαστικούς διαταρακτικούς όρους. Εφόσον το τυχαίο πείραμα αυτού του κεφαλαίου έχει πολλά κοινά χαρακτηριστικά με τα Monte Carlo πειράματα του Κεφαλαίου 3, η περιγραφή του θα είναι συντομότερη, σε ότι αφορά τα κοίνα τους σημεία.

Η απόδοση των κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher διορθώσεων του μεγέθους των ελέγχων t και F μπορεί να μετρηθεί ως η διαφορά του ονομαστικού από το πραγματικό μέγεθος των διορθωμένων ελέγχων, δεδομένου ότι οι ανωτέρω διορθώσεις έχουν ως σκοπό να μειώσουν την απόκλιση του πραγματικού από το ονομαστικό μέγεθος αυτών των ελέγχων. Επομένως, όσο μικρότερη είναι η διαφορά μεταξύ του ονομαστικού και του πραγματικού μεγέθους ενός ελέγχου, τόσο καλύτερη είναι η απόδοσή του.

'Οπως έχει ήδη επισημανθεί κατά την συζήτηση των τυχαίων πειραμάτων του προηγουμένου κεφαλαίου, η έννοια της απόδοσης που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη παράγραφο δεν είναι πολύ κατατοπιστική για την ποιότητα ενός ελέγχου και είναι προτιμότερο να καταφύγουμε στην σύγκριση των αποδόσεων των διαφόρων ελέγχων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν εναλλακτικά. 'Ετσι, μπορούμε να συγκρίνουμε τον έλεγχο που βασίζεται στο κατά Cornish-Fisher διορθωμένο t στατιστικό, το οποίο κατανέμεται σύμφωνα με την t-Student κατανομή, με τους ελέγχους που στηρίζονται στο σύνηθες t στατιστικό ή στις (τύπου) Edgeworth διορθωμένες κριτικές τιμές του και χρησιμοποιούν την t-Student ή (ασυμπτωτικά) την κανονική κατανομή. 'Ομοια μπορούμε να συγκρίνουμε τον έλεγχο που βασίζεται στο κατά Cornish-Fisher διορθωμένο F στατιστικό, το οποίο κατανέμεται σύμφωνα με την F κατανομή, με τους ελέγχους που στηρίζονται στο σύνηθες χ^2 στατιστικό ή στις τύπου Edgeworth διορθωμένες κριτικές τιμές του και χρησιμοποιούν την χ^2 κατανομή, καθώς και με τους ελέγχους που βασίζονται στο σύνηθες F στατιστικό ή στις τύπου Edgeworth διορθωμένες κριτικές τιμές του και χρησιμοποιούν την F κατανομή.

'Εχοντας υπόψη τα ανωτέρω, σχεδιάσαμε ένα πείραμα ικανό να μας βοηθήσει να υπολογίσουμε το πραγματικό μέγεθος των ελέγχων που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, για δεδομένη την τιμή του

ονομαστικού τους μεγέθους, δηλαδή του επιπέδου στατιστικής τους σημαντικότητας.

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι σκοπός του πειράματός μας ήταν η αξιολόγηση της απόδοσης των κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher διορθώσεων του μεγέθους των t και F ελέγχων στην περίπτωση κατά την οποία οι διαταρακτικοί όροι του γραμμικού υποδείγματος είναι ετεροσκεδαστικοί. Ωστόσο, στην εφαρμοσμένη οικονομετρική έρευνα, εκτός από την ετεροσκεδαστικότητα των λαθών, αντιμετωπίζουμε, τις περισσότερες φορές, και το πρόβλημα της πολυσυγγραμμικότητας των ερμηνευτικών μεταβλητών. Για αυτό, αποφασίσαμε να εκτελέσουμε το πείραμα συνδυάζοντας την ετεροσκεδαστικότητα του στοχαστικού όρου με διάφορες τιμές του (κοινού) συντελεστή συσχέτισης μεταξύ δύο οποιωνδήποτε διαφορετικών ερμηνευτικών μεταβλητών, έστω A.

Για τις ανάγκες του πειράματος θεωρήσαμε το υπόδειγμα

$$y_t = \sum_{j=1}^{4} x_{tj}\beta_j + u_t \quad (t = 1,\ldots,20), \tag{4.18}$$

όπου β_j είναι οι προς εκτίμηση παράμετροι και $x_{t1} = 1$. Το θεωρούμενο μέγεθος δείγματος είναι 20 παρατηρήσεις. Για τον διαταρακτικό όρο υποθέσαμε ότι

$$E(u_t) = 0, \quad Var(u_t) = \sigma_t^2 = z_t'\gamma \quad (t = 1,\ldots,20), \tag{4.19}$$

όπου

$$z_t' = (1, x_{t2}, x_{t3}, z_{t4}), \quad \gamma' = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4). \tag{4.20}$$

Είναι φανερό ότι, με δεδομένα τα διανύσματα z_t' $(t = 1,\ldots,20)$, οι διακυμάνσεις σ_t^2, και επομένως και η ένταση της θεωρούμενης ετεροσκεδαστικότητας, εξαρτώνται από τις τιμές των συντεταγμένων του διανύσματος γ.

Κάθε συνδυασμός των τιμών των παραμέτρων γ και A αποτέλεσε ένα σημείο του πειραματικού μας χώρου, τον οποίο προσπαθήσαμε να κάνουμε όσο γίνεται περισσότερο αντιπροσωπευτικό του παραμετρικού χώρου που ορίζεται από τα σύνολα των δυνατών τιμών των παραμέτρων γ και A. Για τον σκοπό αυτό θεωρήσαμε έξι τιμές του διανύσματος γ:

$\gamma_{(1)}' = (\gamma_1, 0, 0, 0)$, $\gamma_{(2)}' = (\gamma_1, 1, 0, 0)$, $\gamma_{(3)}' = (\gamma_1, 0, 0, 1)$,

$\gamma_{(4)}' = (\gamma_1, 1, 1, 0)$, $\gamma_{(5)}' = (\gamma_1, 1, 0, 1)$, $\gamma_{(6)} = (\gamma_1, 1, 1, 1)$

και τέσσερεις διαφορετικές τιμές του συντελεστή που δηλώνει την

ένταση της πολυσυγγραμμικότητας μεταξύ δύο οποιωνδήποτε ερμηνευτικών μεταβλητών, εξαιρουμένης της σταθεράς, δηλαδή A = .0, .1, .5, .9. Σε κάθε πειραματικό σημείο η τιμή της σταθεράς γ_1 προσδιορίζεται με τον τρόπο που περιγράφεται λεπτομερέστερα κατωτέρω. Συνδυάζοντας ανά δύο τις τιμές των παραμέτρων γ και A δημιουργήσαμε τον πειραματικό μας χώρο, ο οποίος αποτελείτο από 24 σημεία. Ο πειραματικός χώρος που χρησιμοποιήσαμε ήταν πραγματικά αντιπροσωπευτικός του συνόλου των συνδυασμών ετεροσκεδαστικότητας και πολυσυγγραμμικότητας που είναι δυνατόν να αντιμετωπίσει κανείς στην εφαρμοσμένη οικονομετρική έρευνα. Διότι περιείχε σημεία που παρουσιάζουν μεγάλη, μέτρια, μικρή ή ανύπαρκτη πολυσυγγραμμικότητα σε συνδυασμό με ετεροσκεδαστικότητα οφειλόμενη σε μια ή περισσότερες εξωγενείς μεταβλητές εξαιρουμένης της σταθεράς. Οι περιπτώσεις με $\gamma' = (\gamma_1, 0, 0, 0)$ μελετήθηκαν πειραματικά, διότι μας ενδιέφερε να διερευνήσουμε τις συνέπειες των κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher διορθώσεων των t και F ελέγχων στην περίπτωση κατά την οποία ο διαταρακτικός όρος είναι ομοσκεδαστικός. Οι περιπτώσεις με A = .0 είναι πολύ σπάνιες στην εφαρμοσμένη έρευνα αλλά μελετήθηκαν πειραματικά διότι μας δίνουν πληροφορίες για την συμπεριφορά των κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher διορθώσεων των t και F ελέγχων στην "ιδανική" εκείνη περίπτωση κατά την οποία ο ερευνητής έχει να αντιμετωπίσει μόνον το πρόβλημα της ετεροσκεδαστικότητας των διαταρακτικών όρων σε ένα γραμμικό υπόδειγμα.

Για κάθε συνδυασμό των τιμών των παραμέτρων γ και A δημιουργήθηκε μια μήτρα ερμηνευτικών μεταβλητών ως εξής: Χρησιμοποιώντας την IMSL (International Mathematical and Statistical Library), δημιουργήσαμε 20 ανεξάρτητες παρατηρήσεις για τους τέσσερεις ανεξάρτητους N(0,1) ψευτοτυχαίους αριθμούς ζ_{t1}, ζ_{t2}, ζ_{t3} και ζ_{t4} (t = 1,...,20). Ακολουθώντας τους McDonald και Galarneau ((1975), σελ. 409) κατασκευάσαμε τα στοιχεία, x_{tj}, της μήτρας των ερμηνευτικών μεταβλητών, X, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$x_{tj} = 1 \quad (t = 1,...,20 \text{ και } j = 1)$$

και (4.21)

$$x_{tj} = (1-A)^{1/2}\zeta_{t(j-1)} + \sqrt{A}\zeta_{t4} \quad (t = 1,...,20 \text{ και } j = 2,3,4),$$

από τις οποίες έπεται ότι ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ δύο οποιωνδήποτε ερμηνευτικών μεταβλητών, εξαιρουμένης της σταθεράς, είναι Α. Πρέπει να σημειώσουμε ότι η μήτρα Χ γινόταν δεκτή και χρησιμοποιόταν στην συνέχεια του πειράματος υπό την προϋπόθεση ότι η μήτρα (Χ'Χ) ήταν μη ιδιάζουσα και συνεπώς μπορούσε να αντιστραφεί. Αν η μήτρα Χ απορριπτόταν, η διαδικασία κατασκευής της επαναλαμβανόταν μέχρις ότου να προκύψει μια μήτρα Χ τέτοια ώστε η μήτρα (Χ'Χ) να είναι μη ιδιάζουσα.

Εφόσον η διακύμανση σ_t^2 για κάθε παρατήρηση του στοχαστικού όρου, u_t, δίνεται από την (4.19), έπεται ότι για τον υπολογισμό όλων των σ_t^2 ($t = 1,\ldots,20$) απαιτείται η γνώση της μήτρας Ζ με γραμμές $z_t' = (z_{t1}, z_{t2}, z_{t3}, z_{t4})$. Από την (4.20) είναι φανερό πως οι τρείς πρώτες στήλες των μητρών Ζ και Χ ταυτίζονται. Για την κατασκευή της τέταρτης στήλης της μήτρας Ζ δημιουργήσαμε 20 ανεξάρτητες N(0,1) ψευτοτυχαίες παρατηρήσεις χρησιμοποιώντας την IMSL. Συνεπώς, για κάθε μήτρα Χ κατασκευάσαμε και από μια μήτρα Ζ. Σημειώνουμε ότι η μήτρα Ζ γινόταν δεκτή και χρησιμοποιόταν στην συνέχεια του πειράματος υπό την προϋπόθεση ότι η μήτρα (Ζ'Ζ) ήταν μη ιδιάζουσα και συνεπώς μπορούσε να αντιστραφεί. Αν η μήτρα Ζ απορριπτόταν, η διαδικασία κατασκευής της επαναλαμβανόταν μέχρις ότου η προκύπτουσα μήτρα (Ζ'Ζ) ήταν μη ιδιάζουσα.

Κάθε ζεύγος μητρών Χ και Ζ που δημιουργήσαμε για δεδομένο συνδυασμό των τιμών των παραμέτρων γ και Α το χρησιμοποιήσαμε σε 500 επαναλήψεις του πειράματος. Για καθεμιά από τις επαναλήψεις αυτές κατασκευάσαμε από ένα διάνυσμα y. Στην συνέχεια θα περιγράψουμε την κατασκευή καθενός από αυτά τα 500 διανύσματα.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας το ενδιαφέρον μας περιορίστηκε στην μελέτη της περίπτωσης με $\sigma_t^2 \geq 1$ ($t = 1,\ldots,20$). (Περιπτώσεις με $0 < \sigma_t^2 \leq 1$ αντιμετωπίζονται χρησιμοποιώντας την αντίστροφη της σ_t^2, αντί της σ_t^2, για κάθε t). Προς τον σκοπό αυτό, έπρεπε για κάθε επανάληψη του πειράματος να δημιουργήσουμε από ένα διάνυσμα διαταρακτικών όρων, u, με στοιχεία, u_t, τέτοια ώστε

$$\mathrm{Var}(u_t) = \sigma_t^2 \geq 1 \quad (t = 1,\ldots,20). \tag{4.22}$$

Όμως, από την (4.19) γίνεται κατανοητό ότι, με δεδομένο το διάνυσμα z_t', η σχέση $z_t'\gamma \geq 1$ δεν ικανοποιείται για κάθε διάνυσμα γ. Το πρόβλημα αυτό λήθηκε ως εξής: Κατ' αρχήν, θεωρήσαμε ότι το

διάνυσμα γ είναι της μορφής $\gamma' = (0, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, οπότε

$$\sigma_t^* = z_t'\gamma = \sum_{j=2}^{4} z_{tj}\gamma_j \quad (t = 1,\ldots,20). \tag{4.23}$$

Στην συνέχεια θέσαμε $\sigma_{min} = \min\{\sigma_t^* \ (t = 1,\ldots,20)\}$ και υπολογίσαμε την πρώτη συντεταγμένη του διανύσματος γ ως $\gamma_1 = 1 - \sigma_{min}$, οπότε $\gamma' = (1 - \sigma_{min}, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$. Εφόσον ισχύει ότι $z_{t1} = 1$ $(t = 1,\ldots,20)$, από την (4.23) έχουμε:

$$\sigma_t^2 = z_t'\gamma = \sum_{j=1}^{4} z_{tj}\gamma_j = 1 - \sigma_{min} + \sigma_t^* \geq 1 \quad (t = 1,\ldots,20). \tag{4.24}$$

Ο υπολογισμός της πρώτης συντεταγμένης του διανύσματος γ ως $\gamma_1 = 1 - \sigma_{min}$ μας εξασφαλίζει ότι οι διακυμάνσεις σ_t^2 θα είναι όλες μεγαλύτερες ή ίσες της μονάδας. Δημιουργεί, όμως, σοβαρά προβλήματα αυξάνοντας την επίδραση της σταθεράς z_{t1} στην διαμόρφωση της τιμής της σ_t^2 και συνεπώς μειώνοντας την ένταση του προβλήματος της ετεροσκεδαστικότητας. Επομένως, για να καταφέρουμε να συνδυάσουμε την ύπαρξη σημαντικής ετεροσκεδαστικότητας με διακυμάσεις $\sigma_t^2 \geq 1$, θέσαμε ένα ανώτατο όριο στην τιμή της πρώτης συντεταγμένης του διανύσματος γ. Συγκεκριμένα, εφόσον οι συντεταγμένες γ_2, γ_3 και γ_4 παίρνουν τιμές μηδέν ή μονάδα, αποφασίσαμε να απορρίπτουμε κάθε διάνυσμα γ για το οποίο η συντεταγμένη γ_1 ήταν μεγαλύτερη ή ίση του 4 και να επαναλαμβάνουμε όλη την διαδικασία από την δημιουργία της μήτρας X ως τον υπολογισμό του διανύματος γ που ικανοποιεί την (4.24).

Έχοντας υπολογίσει τις διακυμάνσεις σ_t^2 από την (4.24), είναι πολύ εύκολο να κατασκευάσουμε ένα διάνυσμα ετεροσκεδαστικών διαταρακτικών όρων, u. Χρησιμοποιώντας την IMSL κατασκευάσαμε 20 ανεξάρτητες παρατηρήσεις για τον N(0,1) ψευτοτυχαίο αριθμό ε_t $(t = 1,\ldots,20)$. Τα στοιχεία, u_t, του διανύσματος των διαταρακτικών όρων, u, τα κατασκευάσαμε χρησιμοποιώντας την σχέση

$$u_t = \sigma_t\varepsilon_t, \quad \sigma_t = \sqrt{\sigma_t^2} \quad (t = 1,\ldots,20), \tag{4.25}$$

από την οποία συνεπάγεται ότι η διακύμανση του κάθε u_t ισούται με $\sigma_t^2 \geq 1$.

Γνωρίζοντας το διάνυσμα u δημιουργήσαμε το διάνυσμα της εξαρτημένης μεταβλητής, y, με στοιχεία, y_t, χρησιμοποιώντας την σχέση (4.18), όπου β_j είναι οι προς εκτίμηση παράμετροι του

υποδείγματος. Από το θεώρημα 5 του Breusch ((1980), σελ 336) και λαμβάνοντας υπόψη ότι τα t και F στατιστικά προκύπτουν ως ειδικές περιπτώσεις του στατιστικού του Wald, έπεται ότι οι κατανομές των t και F στατιστικών για τον έλεγχο των υποθέσεων (2.10) και (2.26) είναι ανεξάρτητες από τις αληθείς τιμές των παραμέτρων β_j (j = 1,...,4) του υποδείγματός μας (4.18), όταν οι ελεγχόμενες υποθέσεις ισχύουν. Εφόσον η μελέτη του πραγματικού μεγέθους ενός ελέγχου γίνεται υπό την προϋπόθεση ότι η ελεγχόμενη υπόθεση είναι αληθής, είναι φανερό πως τα αποτελέσματα του πειράματος δέν εξαρτώνται από τις τιμές των παραμέτρων β_j (j = 1,...,4). Στηριζόμενοι στην ανωτέρω διαπίστωση θέσαμε $\beta_j = 0$ (j = 1,...,4). Έτσι, απλοποιήσαμε την υπολογιστική διαδικασία του πειράματος, ενώ τα αποτελέσματά μας δεν έχασαν την γενικότητά τους. Θέτοντας $\beta_j = 0$ (j = 1,...,4) στην σχέση (4.18) παίρνουμε

$$y_t = u_t \quad (t = 1,...,20), \tag{4.26}$$

από την οποία υπολογίσαμε τα στοιχεία των διανυσμάτων y της εξαρτημένης μεταβλητής για καθεμιά από τις 500 επαναλήψεις του πειράματος, με δεδομένη την μήτρα των εξωγενών μεταβλητών.

Εφόσον, εξ' υποθέσεως, $\beta_j = 0$ (j = 1,...,4), για τον t έλεγχο θεωρήσαμε τέσσερεις υποθέσεις της μορφής (2.10):

$$\beta_1 = 0,\ \beta_2 = 0,\ \beta_3 = 0,\ \beta_4 = 0, \tag{4.27}$$

ενώ για τον F έλεγχο θεωρήσαμε μιαν υπόθεση της μορφής (2.26):

$$H\beta = h, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } h = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.28}$$

Χρησιμοποιώντας την μήτρα των ερμηνευτικών μεταβλητών, X, την μήτρα Z και τα 500 διαφορετικά διανύσματα της εξαρτημένης μεταβλητής, y, που δημιουργήσαμε για καθένα από τα 24 σημεία του πειραματικού χώρου, πραγματοποιήσαμε σε κάθε πειραματικό σημείο 500 επαναλήψεις της διαδικασίας που θα περιγράψουμε στην συνέχεια.

Κάθε διάνυσμα τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής παλινδρομήθηκε με την μέθοδο OLS πάνω στην μήτρα των ερμηνευτικών μεταβλητών και εκτιμήθηκαν οι παράμετροι του υποδείγματος (4.18) από τον τύπο

$$\tilde{\beta} = \left[\sum_{t=1}^{20} x_t x_t' \right]^{-1} \sum_{t=1}^{20} x_t y_t, \tag{4.29}$$

όπου $\tilde{\beta}$ είναι ο OLS εκτιμητής της παραμέτρου $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ και x_t' είναι η t-γραμμή της μήτρας X. Χρησιμοποιώντας τις OLS εκτιμήσεις των παραμέτρων, την μήτρα των ερμηνευτικών μεταβλητών και το διάνυσμα της εξαρτημένης μεταβλητής, υπολογίσαμε τα OLS κατάλοιπα, $\tilde{u}_t$ $(t = 1,\ldots,20)$, και την OLS (Golfeld-Quandt) εκτίμηση του γ, έστω $\hat{\gamma}_{GQ}$, από την σχέση

$$\hat{\gamma}_{GQ} = \left[\sum_{t=1}^{20} z_t z_t' \right]^{-1} \sum_{t=1}^{20} z_t \tilde{u}_t^2, \qquad (4.30)$$

όπου z_t' είναι η t-γραμμή της μήτρας Z. Χρησιμοποιώντας τα OLS κατάλοιπα, $\tilde{u}$, την μήτρα Z και την Golfeld-Quandt εκτίμηση του γ, $\hat{\gamma}_{GQ}$, υπολογίσαμε την GLS (Amemiya) εκτίμηση του γ, έστω $\hat{\gamma}_A$, από τον τύπο

$$\hat{\gamma}_A = \left[\sum_{t=1}^{20} (z_t'\hat{\gamma}_{GQ})^{-2} z_t z_t' \right]^{-1} \sum_{t=1}^{20} (z_t'\hat{\gamma}_{GQ})^{-2} z_t \tilde{u}_t^2. \qquad (4.31)$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειωθεί ότι ο υπολογισμός του $\hat{\gamma}_A$ από την (4.31) είναι εφικτός μόνον αν η μήτρα $\sum_{t=1}^{20} (z_t'\hat{\gamma}_{GQ})^{-2} z_t z_t'$ είναι μη ιδιάζουσα. Σε αντίθετη περίπτωση, θα απορρίπταμε το διάνυσμα γ, θα δημιουργούσαμε αντ' αυτού ένα άλλο και θα επαναλαμβάναμε όλη την διαδικασία μέχρις ότου η μήτρα $\sum_{t=1}^{20} (z_t'\hat{\gamma}_{GQ})^{-2} z_t z_t'$ γινόταν μη ιδιάζουσα και συνεπώς μπορούσε να αντισταφεί. Αξίζει, όμως, να αναφερθεί ότι το ανωτέρω πρόβλημα δεν παρουσιάστηκε ούτε μια φορά στις 12000 παλινδρομήσεις που εκτελέσαμε κατά την διενέργεια του τυχαίου πειράματος.

Χρησιμοποιήσαμε τον εκτιμητή Amemiya του γ διότι είναι ο απλούστερος από όλους τους ασυμπτωτικά αποτελεσματικούς εκτιμητές του γ που μελετήσαμε σε αυτό το κεφάλαιο και οι οποίοι αναμένεται να δώσουν όμοια αποτελέσματα.

Έχοντας στην διάθεσή μας την GLS εκτίμηση του γ, $\hat{\gamma}_A$, μας ήταν εύκολο να εκτιμήσουμε την παράμετρο $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ του υποδείγματος (4.18) με την GLS μέθοδο. Η GLS εκτίμηση του β, έστω $\hat{\beta}$, δίνεται από την σχέση

$$\hat{\beta} = \left[\sum_{t=1}^{20} (z_t'\hat{\gamma}_A)^{-1} x_t x_t' \right]^{-1} \sum_{t=1}^{20} (z_t'\hat{\gamma}_A)^{-1} x_t y_t. \qquad (4.32)$$

Ο υπολογισμός του $\hat{\beta}$ δεν είναι εφικτός αν η μήτρα $\sum_{t=1}^{20} (z_t'\hat{\gamma}_A)^{-1} x_t x_t'$ είναι ιδιάζουσα. Το πρόβλημα αυτό, που δεν

προέκυψε ούτε μια φορά κατά την εκτέλεση του πειράματος, θα μπορούσε να αντιμετωπιστεί με την απόρριψη του διανύσματος y, την κατασκευή ενός νέου και την επανάληψη ολόκληρης της διαδικασίας έως ότου η μήτρα $\sum_{t=1}^{20} (z_t'\hat{\gamma}_A)^{-1} x_t x_t'$ γίνει μη ιδιάζουσα.

Έχοντας στην διάθεσή μας την κατά Amemiya εκτίμηση του γ, $\hat{\gamma}_A$, και τις GLS εκτιμήσεις των παραμέτρων του υποδείγματος (4.18) και χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα 2.2 και 2.4 του Κεφαλαίου 2, υπολογίσαμε τις τιμές των συνήθων t, χ^2 και F στατιστικών καθώς και τις τιμές των τοπικά ακριβών (locally exact) κατά Cornish-Fisher διορθωμένων t και F στατιστικών για τον έλεγχο των υποθέσεων (4.27) και (4.28) έναντι των εναλλακτικών υποθέσεων

$$\beta_j > 0 \text{ ή } \beta_j < 0 \quad (j = 1,\ldots,4) \tag{4.33}$$

και

$$H\beta \neq h, \tag{4.34}$$

αντίστοιχα, όπου η μήτρα H και το διάνυσμα h έχουν οριστεί στη σχέση (4.28). Στην συνέχεια, χρησιμοποιώντας τις τιμές των στατιστικών αυτών και τις συναρτήσεις πυκνότητας της κανονικής, t-Student, χ^2 και F κατανομής, υπολογίσαμε τα αντίστοιχα επίπεδα σημαντικότητας (p-values). Πιο συγκεκριμένα, υπολογίσαμε τα επίπεδα σημαντικότητας του συνήθους t στατιστικού υπό την υπόθεση ότι αυτό κατανέμεται σύμφωνα με την t-Student ή (ασυμπτωτικά) την κανονική κατανομή και τα επίπεδα σημαντικότητας των συνήθων χ^2 και F στατιστικών υπό την υπόθεση ότι αυτά κατανέμονται σύμφωνα με την χ^2 και την F κατανομή, αντίστοιχα. Επιπλέον, υπολογίσθησαν τα επίπεδα σημαντικότητας των τοπικά ακριβών (locally exact) κατά Cornish-Fisher διορθωμένων t και F στατιστικών υπό την υπόθεση ότι αυτά ακολουθούν την t-Student και την F κατανομή, αντίστοιχα. Στο σημείο αυτό πρέπει να παρατηρηθεί ότι το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο F στατιστικό (2.39) είναι δυνατόν να πάρει και αρνητικές τιμές (υπερδιόρθωση του F στατιστικού), οπότε έχουμε σημαντικό πρόβλημα, λαμβανομένου υπόψην ότι το κατά Cornish-Fisher διορθωνένο F στατιστικό (2.39) υποτίθεται πως κατανέμεται ως μια F μεταβλητή.

Απέμενε μόνον ο υπολογισμός των επιπέδων σημαντικότητας που αντιστοιχούν στις (τύπου) Edgeworth διορθωμένες κριτικές τιμές των

συνήθων t, χ^2 και F στατιστικών. Ο υπολογισμός αυτός είναι δυνατόν να γίνει με δύο ισοδύναμους τρόπους (βλ. την σχετική συζήτηση στο Τμήμα 3.4 του Κεφαλαίου 3) από τους οποίους προτιμήθηκε ο απλούστερος από υπολογιστική άποψη: Όπως και στα τυχαία πειράματα του Κεφαλαίου 3, κατ' αρχήν υπολογίσαμε τις τιμές των κατά Edgeworth αναπτυγμάτων των συναρτήσεων κατανομής των συνήθων t, χ^2 και F στατιστικών σε όρους της t-Student (βλ. (2.19)) ή (ασυμπτωτικά) της κανονικής (βλ. (2.15)), της χ^2 (βλ. (2.30)) και της F (βλ. (2.36)) κατανομής, αντίστοιχα, για τις συγκεκριμένες τιμές των στατιστικών αυτών. Τα ζητούμενα επίπεδα σημαντικότητας για τα χ^2, τα F και τα θετικά t στατιστικά προκύπτουν αν από την μονάδα αφαιρεθούν οι τιμές των κατά Edgeworth αναπτυγμάτων των συναρτήσεων κατανομής τους, ενώ τα ζητούμενα επίπεδα σημαντικότητας για τα αρνητικά t στατιστικά ισούνται με τις τιμές των κατά Edgeworth αναπτυγμάτων των συναρτήσεων κατανομής των στατιστικών αυτών.

Τελειώνοντας την αναφορά μας στον τρόπο υπολογισμού των διαφόρων στατιστικών και των αντιστοίχων επιπέδων σημαντικότητας, κρίνουμε σκόπιμο να τονίσουμε ότι χρησιμοποιήσαμε τις μονόπλευρες (one-sided) εναλλακτικές υποθέσεις (4.33) για δύο λόγους: Πρώτον, διότι ο t έλεγχος για καθεμιά από τις υποθέσεις (4.27) έναντι δίπλευρων (two-sided) εναλλακτικών υποθέσεων είναι ειδική περίπτωση του F ελέγχου και δεύτερον, διότι τα κατά Edgeworth αναπτύγματα των συναρτήσεων πυκνότητας της t-Student ή (ασυμπτωτικά) της κανονικής κατανομής δέν είναι συμμετρικά περί το μηδέν και επομένως το επίπεδο σημαντικότητας που αντιστοιχεί στην (τύπου) Edgeworth διορθωμένη κριτική τιμή του συνήθους t στατιστικού για $t = t_o$ είναι γενικά διαφορετικό από το αντίστοιχο επίπεδο σημαντικότητας για $t = -t_o$.

Η διαδικασία που μόλις περιγράψαμε επαναλήφθηκε 500 φορές σε καθένα από τα 24 σημεία του πειραματικού χώρου. Σε κάθε πειραματικό σημείο 500 διαφορετικά διανύσματα τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής παλινδρομήθηκαν πάνω στην ίδια μήτρα των ερμηνευτικών μεταβλητών. Δηλαδή, η μήτρα των ερμηνευτικών μεταβλητών διατηρήθηκε "σταθερή σε επαναλαμβανόμενα δείγματα" των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής, όπως ακριβώς υποτίθεται στην

οικονομετρική θεωρία. Όμως, η μήτρα των ερμηνευτικών μεταβλητών ήταν διαφορετική σε καθένα από τα πειραματικά σημεία, γεγονός που κατέστησε τα αποτελέσματα του πειράματος ανεξάρτητα από την εκλογή μιας συγκεκριμένης μήτρας ερμηνευτικών μεταβλητών.

Από τον τρόπο κατασκευής των μητρών των ερμηνευτικών μεταβλητών, Χ, των μητρών Ζ και των διανυσμάτων της εξαρτημένης μεταβλητής, γ, τον οποίον έχουμε ήδη εκθέσει, γίνεται φανερό ότι για την διενέργεια του πειράματος απαιτείτο η δημιουργία μεγάλου πλήθους ψευτοτυχαίων αριθμών από την N(0,1) κατανομή. Το πρόβλημα της δημιουργίας ψευτοτυχαίων αριθμών καθώς και αυτό του ελέγχου της "τυχαιότητάς" τους μελετάται σχετικά λεπτομερώς στο Παράρτημα Η. Για τους σκοπούς αυτού του κεφαλαίου αρκεί να αναφέρουμε ότι η ποιότητα μιας ακολουθίας ψευτοτυχαίων αριθμών δεν είναι παντού ομοιόμορφη. Οι αρχικοί αριθμοί κάθε ψευτοτυχαίας ακολουθίας δεν εμφανίζουν επαρκώς "τυχαία" συμπεριφορά. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο συνηθίζεται σε Monte Carlo εφαρμογές να μην χρησιμοποιείται κάποιο πλήθος από τους αρχικούς αριθμούς της χρησιμοποιούμενης ψευτοτυχαίας ακολουθίας. Στο πείραμα που πραγματοποιήσαμε αφήσαμε αχρησιμοποίητους τους πρώτους 1600 αριθμούς της ψευτοτυχαίας ακολουθίας που δημιουργήσαμε. Για την κατασκευή της ψευτοτυχαίας ακολουθίας χρησιμοποιήσαμε την υπορουτίνα GGNPM της IMSL (βλ Παράρτημα Η). Ως σπόρος (seed) χρησιμοποιήθηκε ο αριθμός 314159.

Οι έλεγχοι "τυχαιότητας" που πραγματοποιήσαμε αλλά και η γνωστή ποιότητα των αλγορίθμων της IMSL αποτελούν επαρκείς εγγυήσεις της καλής ποιότητας των ψευτοτυχαίων αριθμών που χρησιμοποιήσαμε. Παρ' όλα αυτά, είναι πιθανό να υπάρχουν τμήματα της ψευτοτυχαίας ακολουθίας στα οποία η ποιότητα των αριθμών να είναι καλύτερη από ό,τι σε άλλα. Το ενδεχόμενο αυτό δημιουγεί, όπως έχουμε ήδη επισημάνει στην συζήτηση του Monte Carlo πειράματος του Κεφαλαίου 3, σημαντικά προβλήματα αξιολόγησης των αποτελεσμάτων του πειράματος. Είναι φανερό ότι τα αποτελέσματα του πειράματος σε κάθε πειραματικό σημείο εξαρτώνται από τον συνδυασμό των τιμών των παραμέτρων γ και Α, που χαρακτηρίζει αυτό το συγκεκριμένο σημείο του πειραματικού χώρου. Διότι από την θεωρία της παλινδρόμησης και από την μορφή των κατά Edgeworth και κατά

Cornish-Fisher διορθώσεων γίνεται κατανοητό πως η ακρίβεια των υπολογισμών και επομένως η ποιότητα των αποτελεσμάτων του πειράματος χειροτερεύει σε εκείνα τα πειραματικά σημεία, τα οποία χαρακτηρίζονται από σοβαρή ετεροσκεδαστικότητα του στοχαστικού όρου ή από έντονη πολυσυγγραμμικότητα των ερμηνευτικών μεταβλητών. Επομένως, αν κατά την εκτέλεση του πειράματος σε τέτοια "δυσμενή" πειραματικά σημεία χρησιμοποιηθούν τμήματα της ψευτοτυχαίας ακολουθίας με σχετικά χαμηλής ποιότητας αριθμούς, τα αποτελέσματα του πειράματος στα συγκεκριμένα πειραματικά σημεία θα γίνουν ακόμα χειρότερης ποιότητας. Σε μια τέτοια περίπτωση το έργο της αξιολόγησης των αποτελεσμάτων του πειράματος δυσχεραίνεται σημαντικά, εφόσον δεν γνωρίζουμε αν μια ενδεχομένως κακή συμπεριφορά των κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher διορθώσεων πρέπει να αποδοθεί στον συγκεκριμένο συνδυασμό των τιμών των παραμέτρων γ και Α ή στην κακή ποιότητα των ψευτοτυχαίων αριθμών που χρησιμοποιήθηκαν ως πρώτη ύλη για το τυχαίο πείραμα. Για να απαλλαγούμε από το ενδεχόμενο της συστηματικής επίδρασης της ποιότητας των ψευτοτυχαίων αριθμών στα αποτελέσματα του πειράματος, καταφύγαμε στην τυχαιοποίηση της σειράς με την οποία πραγματοποιήθηκε το πείραμα στα διάφορα σημεία του πειραματικού χώρου. Η τυχαιοποίηση αυτή έγινε με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, με τον οποίο πραγματοποιήθηκε η αντίστοιχη τυχαιοποίηση της σειράς εκτέλεσης του Monte Carlo πειράματος στα διάφορα πειραματικά σημεία για την περίπτωση του γραμμικού υποδείγματος με αυτοσυσχέτιση πρώτου βάθμου (βλ. την σχετική συζήτηση στο Τμήμα 3.4 του Κεφαλαίου 3). Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίον στο παρόν τμήμα δεν θα επαναλάβουμε την περιγραφή της διαδικασίας με την οποία πραγματοποιήθηκε η ανωτέρω τυχαιοποίηση. Η προκύψασα σειρά, με την οποία εκτελέστηκε στα διάφορα σημεία του πειραματικού χώρου το πείραμα για την περίπτωση του γραμμικού υποδείγματος με ετεροσκεδαστικό σταχαστικό όρο, παρουσιάζεται συνοπτικά στον Πίνακα 4.1 που παρατίθεται κατωτέρω.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1

ΤΥΧΑΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ

		γ						ΣΕΙΡΑ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ
		$\gamma_{(1)}$	$\gamma_{(2)}$	$\gamma_{(3)}$	$\gamma_{(4)}$	$\gamma_{(5)}$	$\gamma_{(6)}$	ΤΟΥ ΠΕΙΡΑΜΑΤΟΣ.
A	0.0	5	3	4	6	2	1	2
	0.1	3	5	1	2	4	6	1
	0.5	2	5	4	1	3	6	4
	0.9	5	4	3	1	6	2	3

Το πείραμα εκτελέστηκε σε όλα τα σημεία του πειραματικού χώρου, τα αποτελέσματά του έγιναν αντικείμενο επεξεργασίας και οι πληροφορίες που περιείχαν συνοψίστηκαν στον Πίνακα 4.2 και στα Διαγράμματα 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 και 4.6. Η κατασκευή του πίνακα και των διαγραμμάτων και τα συμπεράσματα που προκύπτουν από αυτά θα παρουσιαστούν στην συνέχεια.

'Οπως έχουμε ήδη πεί, η μήτρα των ερμηνευτικών μεταβλητών του υποδείγματος που δημιουργήθηκε κατά την εκτέλεση του πειράματος περιείχε τρείς ερμηνευτικές μεταβλητές και την σταθερά, δηλαδή συνολικά τέσσερεις μεταβλητές. Συνεπώς, σε κάθε επανάληψη του πειράματος υπολογίζονταν τέσσερα t στατιστικά (2.11) και τέσσερα κατά Cornish-Fisher διορθωμένα t στατιστικά (2.21), από ένα για κάθε ερμηνευτική μεταβλητή. Επιπλέον, σε κάθε επανάληψη του πειράματος υπολογίζονταν οι τιμές του χ^2 στατιστικού (2.27), του F στατιστικού (2.35) και του κατά Cornish-Fisher διορθωμένου F στατιστικού (2.39).

Με δεδομένες τις τιμές αυτών των στατιστικών, σε κάθε επανάληψη του πειράματος υπολογίζαμε τα επίπεδα σημαντικότητας (p-values) που αντιστοιχούν στους ελέγχους που εξετάσαμε και σε καθεμιά από τις μεθόδους διόρθωσης του μεγέθους τους. Για τον t έλεγχο τα επίπεδα σημαντικότητας που αντιστοιχούν στις προσεγγίσεις με την κανονική (N) και την t-Student (T) κατανομή είναι τα ολοκληρώματα της κανονικής και της t_{T-n} πυκνότητας,

αντίστοιχα, από την τιμή του στατιστικού (2.11) μέχρι το άπειρο. Χρησιμοποιώντας τις (2.15) και (2.19) παίρνουμε τα επίπεδα σημαντικότητας από τις κατά Edgeworth προσεγγίσεις της κανονικής (NE) και της t-Student (TE) κατανομής, αντίστοιχα. Το επίπεδο σημαντικότητας που αντιστοιχεί στην τοπικά ακριβή κατά Cornish-Fisher μέθοδο διόρθωσης του t ελέγχου (CFT) βρίσκεται με ολοκλήρωση της t_{T-n} πυκνότητας από την τιμή του στατιστικού (2.21) μέχρι το άπειρο. Όμοια υπολογίζονται τα επίπεδα σημαντικότητας που αντιστοιχούν στις μεθόδους διόρθωσης του μεγέθους του F ελέγχου. Ολοκληρώνοντας την χ^2_{n-1} πυκνότητα από την τιμή του στατιστικού (2.27) μέχρι το άπειρο παίρνουμε το επίπεδο σημαντικότητας που αντιστοιχεί στην προσέγγιση με την χ^2 κατανομή (X2) και χρησιμοποιώντας την (2.30) βρίσκουμε το επίπεδο σημαντικότητας από την κατά Edgeworth προσέγγιση της χ^2 κατανομής (X2E). Ολοκληρώνοντας την F^{n-1}_{T-n} πυκνότητα από την τιμή του στατιστικού (2.35) μέχρι το άπειρο παίρνουμε το επίπεδο σημαντικότητας που αντιστοιχεί στην προσέγγιση με την F κατανομή (F) και χρησιμοποιώντας την (2.36) βρίσκουμε το επίπεδο σημαντικότητας από την κατά Edgeworth προσέγγιση της F κατανομής (FE). Τέλος, το επίπεδο σημαντικότητας που αντιστοιχεί στην τοπικά ακριβή κατά Cornish-Fisher μέθοδο διόρθωσης του F ελέγχου (CFF) βρίσκεται με ολοκλήρωση της F^{n-1}_{T-n} πυκνότητας από την τιμή του στατιστικού (2.39) μέχρι το άπειρο. Στο σημείο αυτό πρέπει να διευκρινίσουμε ότι οι παράμετροι p_i (i = 1, 2) στις σχέσεις (2.15), (2.19) και (2.21) και οι παράμετροι h_i και q_i (i = 1, 2) στις σχέσεις (2.30) και (2.36) ή (2.39), αντίστοιχα, υπολογίσθησαν με βάση τα αποτελέσματα που δίνονται στις Προτάσεις 4.1 και 4.2.

Χρησιμοποιώντας τα ανωτέρω επίπεδα σημαντικότητας κατασκευάσαμε τον Πίνακα 4.2 ως εξής: Για κάθε σημείο του πειραματικού χώρου, δηλαδή για κάθε συνδυασμό των τιμών των παραμέτρων γ και Α, υπολογίσαμε το πραγματικό μέγεθος (actual size) του ελέγχου των υποθέσεων (4.27) (για όλες τις ερμηνευτικές μεταβλητές και την σταθερά) και (4.28), έναντι των υποθέσεων (4.33) και (4.34), αντίστοιχα, σε δεδομένο επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας (nominal size). Ειδικότερα, αν τα συνήθη ή τα κατά Cornish-Fisher διορθωμένα t στατιστικά ήσαν θετικά ή αρνητικά,

χρησιμοποιόταν η εναλλακτική υπόθεση (4.33) με > ή <, αντίστοιχα. Εφόσον για κάθε συνδυασμό των τιμών των παραμέτρων γ και Α πραγματοποιήθηκαν 500 επαναλήψεις του πειράματος, το πραγματικό μέγεθος καθενός ελέγχου προκύπτει με διαίρεση δια 500 του πλήθους των περιπτώσεων κατά τις οποίες το αντίστοιχο επίπεδο σημαντικότητας (p-value) είναι κατ' απόλυτη τιμή μικρότερο από το δεδομένο επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας (nominal size). Το πραγματικό μέγεθος των ελέγχων υπολογίσθηκε για όλες τις διαφορετικές μεθόδους υπολογισμού των επιπέδων σημαντικότητας που αντιστοιχούν είτε στα συνήθη t και F στατιστικά, είτε στις κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher διορθώσεις του μεγέθους των αντιστοίχων ελέγχων. Ο υπολογισμός του πραγματικού μεγέθους των ελέγχων έγινε ξεχωριστά για τα θετικά και τα αρνητικά t στατιστικά και πραγματοποιήθηκε για τρείς διαφορετικές τιμές του επιπέδου στατιστικής σημαντικότητας: 0.01, 0.05, 0.10.

Τα πραγματικά μεγέθη των t και F ελέγχων, που υπολογίσθησαν όπως περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο, παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.2. Τα κυριότερα συμπεράσματα που συνάγονται από την εξέταση αυτού του πίνακα δίνονται στην συνέχεια.

Είναι γνώστο από την στατιστική θεωρία ότι, αν, κατά την διενέργεια των ελέγχων t και F, αντί των ακριβών (exact) κατανομών (t-Student και F), χρησιμοποιηθούν οι ασυμπτωτικές κατανομές (κανονική και χ^2, αντίστοιχα), οι ασυμπτωτικοί έλεγχοι που θα προκύψουν είναι πιο αυστηροί από τους αντιστοίχους ακριβείς, δηλαδή, απορρίπτουν την μηδενική υπόθεση συχνότερα από ό,τι οι ακριβείς έλεγχοι. Αυτό το θεωρητικό αποτέλεσμα, πως το πραγματικό μέγεθος των ασυμπτωτικών ελέγχων είναι μεγαλύτερο από το πραγματικό μέγεθος των αντιστοίχων ακριβών (exact) ελέγχων, επαληθεύεται από τα αποτελέσματα του πειράματος, όπως φαίνεται στον Πίνακα 4.2.

Στις οκτώ πρώτες σελίδες του Πίνακα 4.2 παρουσιάζονται οι εκτιμημένες πιθανότητες απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης για τον t έλεγχο της στατιστικής σημαντικότητας καθεμιάς από τις παραμέτρους β_j (j = 1,...,4). Η περίπτωση κατά την οποία η εναλλακτική υπόθεση είναι η H_1: $\beta_j > 0$ παρουσιάζεται στις πρώτες τέσσερεις σελίδες του Πίνακα 4.2, ενώ η περίπτωση με εναλλακτική υπόθεση την H_1: $\beta_j < 0$

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2

ΕΚΤΙΜΗΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ

(ΘΕΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

H_o:		β_1														
Size:		1%					5%					10%				
Test:		N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT
γ	A	%					%					%				
	.0	5.0	2.6	2.4	1.8	1.2	11.8	7.8	6.8	6.0	5.0	18.6	12.6	13.4	10.8	10.4
	.1	4.6	3.0	2.0	1.8	0.8	10.6	7.6	7.0	5.4	4.8	16.6	11.4	12.2	10.0	9.0
$\gamma_{(1)}$	.5	4.2	2.2	1.6	1.4	1.2	10.4	6.0	6.0	5.2	4.4	15.4	10.8	12.0	9.0	8.6
	.9	4.0	2.4	1.6	1.2	1.2	8.2	6.0	6.2	4.0	4.0	13.6	9.4	11.0	7.8	7.2
	.0	4.6	2.2	1.8	1.2	0.8	10.0	6.0	7.0	5.0	3.8	15.6	10.6	10.6	8.4	7.8
	.1	5.2	3.8	2.8	1.4	1.0	11.0	7.8	7.4	5.8	4.4	15.8	12.4	12.8	10.8	9.4
$\gamma_{(2)}$	.5	3.6	3.0	1.6	2.2	1.4	11.4	6.6	5.6	4.4	3.8	17.6	12.8	12.8	9.8	9.2
	.9	6.8	3.0	2.8	2.0	1.2	13.6	8.0	10.0	6.4	4.0	18.4	13.4	15.0	12.8	10.2
	.0	3.2	1.8	1.2	0.8	0.6	7.2	4.6	4.8	4.0	3.4	15.8	8.6	9.8	6.6	6.4
	.1	5.0	2.6	1.8	1.6	1.6	10.8	8.2	8.2	5.6	4.8	16.2	12.2	12.6	10.4	9.6
$\gamma_{(3)}$	.5	5.4	2.4	1.8	0.8	0.4	11.4	8.0	8.4	6.4	5.6	16.8	12.0	13.0	10.8	10.2
	.9	2.4	1.6	1.2	0.4	0.2	10.2	5.2	6.0	3.6	2.2	15.2	11.4	12.0	8.4	8.0
	.0	4.6	2.8	2.2	1.2	1.2	10.2	6.6	7.2	5.6	5.0	15.8	11.6	12.0	10.0	9.2
	.1	4.0	3.4	1.8	1.8	1.6	8.8	6.2	6.0	5.0	4.8	13.2	10.6	9.4	8.0	8.0
$\gamma_{(4)}$	.5	5.2	3.2	2.6	1.8	0.8	10.6	7.0	7.4	5.0	4.0	18.0	12.0	13.4	9.2	8.6
	.9	4.4	2.2	1.0	0.6	0.2	9.8	5.4	6.0	4.2	3.4	14.6	10.6	11.0	7.8	6.6
	.0	3.2	2.2	2.0	0.8	0.8	8.2	5.6	5.6	4.4	3.6	15.8	9.8	11.0	7.6	7.4
	.1	3.6	3.0	0.8	1.2	0.4	8.2	6.4	5.6	5.0	3.8	14.2	10.4	10.6	8.8	8.4
$\gamma_{(5)}$	.5	4.0	2.0	1.4	1.4	1.2	9.2	6.0	6.8	4.6	4.0	14.2	10.6	10.8	8.2	8.2
	.9	3.8	1.8	1.4	1.0	1.2	10.4	6.0	6.4	4.0	3.8	16.4	11.0	13.0	9.6	8.2
	.0	3.6	2.8	2.0	1.6	1.2	9.2	5.8	4.0	4.4	3.6	14.8	10.8	10.8	8.6	7.6
	.1	4.2	2.6	1.4	0.8	0.6	10.8	6.0	6.0	4.4	4.2	16.6	12.0	13.2	9.8	8.8
$\gamma_{(6)}$	.5	4.4	2.6	1.0	1.8	0.8	11.4	8.4	6.6	5.8	4.0	16.8	12.2	13.0	10.8	10.4
	.9	3.2	2.4	0.8	1.0	0.4	6.6	5.2	5.2	4.6	4.4	13.8	9.2	9.8	7.2	6.4

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2

ΕΚΤΙΜΗΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ

(ΘΕΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

H_o:		β_2														
Size:		1%					5%					10%				
Test:		N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT
γ	A	%					%					%				
$\gamma_{(1)}$	.0	2.8	1.4	0.6	0.6	0.4	8.6	4.6	5.2	2.6	2.4	15.0	9.4	11.2	7.0	6.6
	.1	6.2	5.8	2.4	5.2	3.2	13.6	10.8	10.6	8.0	5.8	18.8	14.8	16.6	13.0	9.4
	.5	3.2	2.4	1.4	0.8	0.6	9.2	5.2	4.8	3.8	3.2	13.6	9.8	10.6	6.4	6.0
	.9	4.8	3.4	2.8	1.6	0.8	13.2	7.6	7.6	5.6	4.2	17.2	12.4	15.2	9.8	8.6
$\gamma_{(2)}$	.0	3.6	3.2	1.8	1.2	0.8	10.2	6.4	5.8	5.2	4.4	15.8	11.8	12.0	9.6	8.0
	.1	5.4	4.6	2.8	4.0	2.6	10.4	8.4	6.8	6.8	5.4	17.6	13.8	13.0	11.4	10.0
	.5	7.4	3.8	2.2	1.4	1.0	14.8	10.6	10.6	7.6	6.4	19.8	14.6	15.6	12.6	11.6
	.9	6.6	3.6	3.6	2.2	1.6	12.4	8.8	9.6	6.6	5.8	18.2	12.8	14.0	10.8	10.2
$\gamma_{(3)}$	.0	7.0	4.2	2.6	3.2	2.2	12.8	11.0	9.6	7.6	5.8	17.8	13.8	14.8	11.8	10.2
	.1	5.6	2.8	1.8	1.6	1.2	11.4	8.0	8.0	5.4	4.0	17.0	12.6	13.2	10.8	9.4
	.5	5.4	4.4	1.6	1.8	1.0	13.2	9.6	8.8	6.8	6.4	19.6	14.2	16.4	11.0	10.6
	.9	5.0	4.0	2.2	2.6	1.4	12.2	8.0	7.8	5.8	4.6	16.6	13.4	13.6	10.4	8.8
$\gamma_{(4)}$	.0	4.4	3.0	1.6	1.8	1.2	11.6	8.6	7.4	6.0	4.4	16.0	14.0	13.4	11.6	11.0
	.1	4.0	2.6	1.4	1.4	1.2	10.6	7.8	6.2	5.0	4.8	15.4	12.6	12.0	10.4	10.0
	.5	6.4	4.8	2.8	3.0	2.4	11.6	9.2	8.2	7.0	6.4	16.2	13.4	13.0	12.0	11.0
	.9	3.6	3.6	1.6	1.8	1.2	10.2	7.8	6.6	6.4	5.8	15.4	11.4	11.4	9.2	9.0
$\gamma_{(5)}$	.0	5.0	5.2	1.6	3.0	2.0	10.8	8.4	7.4	6.6	5.8	17.8	12.2	13.4	9.8	8.8
	.1	3.0	2.4	1.4	1.0	0.6	9.2	6.8	6.6	3.6	3.6	12.8	9.8	10.4	8.2	7.0
	.5	4.8	4.4	2.8	2.6	1.0	11.0	8.2	6.8	6.0	5.4	16.0	12.6	11.2	10.0	9.0
	.9	5.4	4.0	2.6	1.8	1.2	10.8	8.8	8.6	7.2	6.2	17.2	13.0	13.4	11.6	11.0
$\gamma_{(6)}$	.0	5.8	4.6	3.2	2.8	1.8	11.6	7.4	8.2	6.2	5.4	17.0	12.2	13.6	11.0	9.8
	.1	3.0	3.0	1.0	1.2	0.6	8.4	6.6	5.4	4.6	3.4	14.4	9.8	9.8	7.8	6.8
	.5	5.8	3.2	2.0	1.4	0.4	13.6	9.8	9.8	5.8	3.2	21.6	15.8	16.8	12.4	10.4
	.9	3.4	3.2	1.2	2.0	1.6	9.8	6.2	6.6	4.4	4.0	15.6	12.2	12.4	9.6	7.8

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2

ΕΚΤΙΜΗΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ

(ΘΕΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

H_o:		β_s														
Size:		1%					5%					10%				
Test:		N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT
γ	A	%					%					%				
$\gamma_{(1)}$	.0	5.6	4.0	3.0	2.0	1.0	12.4	8.8	9.6	7.4	6.6	18.0	13.2	14.0	12.0	10.8
	.1	5.0	2.8	2.2	1.2	0.6	11.0	7.0	7.4	5.8	4.4	15.8	10.8	12.4	8.8	7.8
	.5	5.6	4.6	2.6	3.0	2.2	13.0	9.4	9.0	7.0	6.2	18.3	14.4	15.0	13.0	10.8
	.9	5.0	3.4	2.6	2.4	1.6	14.0	8.6	8.4	5.6	4.6	19.4	13.4	14.4	10.8	9.2
$\gamma_{(2)}$	.0	5.2	4.6	2.8	3.0	2.2	11.8	9.4	7.6	7.2	4.8	17.4	14.4	13.6	12.0	10.4
	.1	5.6	3.4	2.0	1.6	1.4	11.0	8.2	8.4	6.6	5.0	17.2	13.0	13.8	11.6	11.0
	.5	6.4	2.8	2.2	1.8	1.4	14.6	8.8	9.8	7.0	5.8	21.4	15.2	17.0	12.4	11.2
	.9	4.0	2.8	1.8	1.8	1.2	10.0	6.4	6.6	5.0	4.2	15.0	10.4	11.0	9.0	7.2
$\gamma_{(3)}$	.0	5.6	4.6	2.6	1.8	1.4	11.8	8.6	7.6	6.4	5.6	20.0	12.6	14.2	10.4	9.6
	.1	5.4	4.2	3.0	2.6	2.0	11.2	7.6	8.8	6.0	4.8	16.4	11.8	12.4	11.0	9.2
	.5	6.4	4.6	3.6	2.4	2.4	12.0	8.4	8.4	6.6	5.8	16.8	12.6	13.6	11.0	9.8
	.9	4.2	4.0	1.4	2.6	2.0	12.0	8.4	7.2	6.0	5.6	18.6	14.2	14.6	11.6	10.2
$\gamma_{(4)}$	.0	5.6	5.6	3.4	3.8	2.2	12.0	8.0	8.0	7.2	6.4	16.6	13.8	13.6	11.8	9.8
	.1	4.4	3.4	1.8	1.8	1.2	11.0	8.4	6.8	6.0	5.2	15.8	12.2	12.6	11.0	10.6
	.5	6.6	5.4	3.4	3.4	2.6	12.6	10.2	10.0	8.4	5.8	17.8	15.2	15.0	13.6	11.0
	.9	2.8	4.0	1.6	2.4	1.8	8.4	6.6	5.4	5.4	4.8	12.0	10.6	9.2	8.4	7.8
$\gamma_{(5)}$	.0	5.0	3.6	2.8	1.6	0.8	13.6	8.8	8.4	6.2	4.8	18.6	16.2	15.2	12.2	11.0
	.1	4.6	3.8	1.6	2.4	1.8	10.6	8.0	7.0	5.8	4.8	16.4	12.0	11.8	9.4	8.4
	.5	4.2	4.2	2.2	2.6	1.2	11.6	8.6	7.6	6.0	5.2	16.8	13.4	12.8	10.8	9.6
	.9	4.0	3.0	2.0	1.6	1.6	13.2	8.6	7.8	6.4	5.2	19.0	13.2	14.8	10.4	9.6
$\gamma_{(6)}$	.0	5.8	3.8	3.0	1.6	1.4	11.2	8.4	7.2	6.2	5.4	15.4	11.6	11.8	9.4	8.4
	.1	4.8	3.4	1.6	2.0	1.6	11.4	8.8	7.8	5.8	5.4	16.8	13.6	14.2	11.0	10.0
	.5	7.6	5.2	2.4	2.2	1.0	16.0	11.0	10.8	8.0	4.6	21.4	15.8	18.2	13.4	10.4
	.9	4.6	3.6	2.0	1.8	0.4	11.8	8.0	8.0	6.2	5.2	17.4	12.6	13.8	10.4	10.0

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2

ΕΚΤΙΜΗΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ

(ΘΕΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

H_o:																
									β_4							
Size:		1%					5%					10%				
Test:		N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT
γ	A			%					%					%		
	.0	5.0	3.4	2.6	2.2	1.4	11.4	7.4	8.6	5.0	4.8	16.8	11.2	13.0	10.6	9.0
	.1	4.0	2.8	1.4	1.0	1.0	11.8	8.0	8.4	5.2	4.8	16.8	12.6	13.2	10.2	9.2
$\gamma_{(1)}$	.5	2.8	2.4	1.4	0.8	0.4	8.8	6.2	5.8	3.2	2.4	16.8	10.8	11.8	8.6	7.2
	.9	4.2	2.4	1.8	1.2	0.8	9.8	6.8	6.4	4.0	3.6	15.6	10.8	11.6	8.4	7.2
	.0	4.2	3.4	2.2	1.4	1.0	10.6	7.0	6.8	5.6	4.6	15.4	11.0	13.0	9.4	8.8
	.1	4.4	3.4	2.4	1.8	1.2	10.0	6.2	6.4	4.0	3.8	15.0	10.4	11.8	8.8	8.2
$\gamma_{(2)}$	.5	4.0	3.2	2.0	2.0	0.6	10.4	6.8	7.6	4.4	3.8	16.4	11.0	12.0	8.4	8.2
	.9	4.0	2.4	2.0	1.6	1.4	11.4	7.2	7.0	5.4	5.0	18.0	12.6	13.4	10.0	8.8
	.0	6.6	4.4	3.0	2.6	2.0	13.2	9.4	8.6	7.8	7.0	18.4	13.4	14.0	11.6	10.8
	.1	4.8	3.2	2.4	1.8	1.8	12.4	8.2	8.0	5.2	4.8	17.2	12.4	13.8	10.4	9.6
$\gamma_{(3)}$	.5	7.2	5.6	2.4	4.4	2.2	14.4	11.4	10.0	10.0	7.4	21.4	17.4	17.2	14.6	13.6
	.9	3.6	2.4	1.8	1.4	1.2	10.2	7.2	6.0	4.0	3.8	14.0	12.4	11.0	9.4	8.2
	.0	6.6	5.8	3.8	3.6	3.0	16.2	10.4	10.6	8.0	6.6	22.4	17.2	19.4	14.2	12.6
	.1	6.0	3.4	2.8	1.8	1.0	11.8	8.6	8.6	6.0	5.2	17.8	13.2	13.8	10.6	9.6
$\gamma_{(4)}$	.5	5.4	3.4	2.0	1.6	1.4	12.2	9.8	8.8	6.6	4.6	16.0	13.6	13.2	12.0	10.6
	.9	7.8	5.4	3.2	3.8	2.4	12.6	10.6	10.0	8.6	7.4	17.6	14.0	15.0	11.6	11.2
	.0	4.0	1.8	1.6	0.6	0.4	9.6	5.8	6.4	3.4	2.8	15.2	10.4	11.0	8.2	6.6
	.1	6.6	3.8	2.2	1.2	0.8	14.2	9.0	8.4	6.8	5.6	21.0	14.8	15.2	12.4	10.8
$\gamma_{(5)}$	.5	4.6	4.4	1.8	3.0	1.8	10.6	9.8	7.2	7.2	6.2	18.0	14.6	14.0	12.4	11.6
	.9	5.6	3.6	2.0	1.4	0.8	13.0	9.2	9.2	6.6	5.6	18.0	15.0	15.4	12.6	11.6
	.0	6.0	5.2	3.0	2.4	1.2	12.2	8.4	8.4	7.4	7.0	19.4	14.0	15.0	11.2	10.0
	.1	3.8	2.2	1.4	0.8	0.8	9.0	5.8	5.2	4.4	4.2	15.0	9.8	10.8	8.4	8.2
$\gamma_{(6)}$	.5	5.8	5.2	3.2	3.2	2.0	12.8	9.8	10.2	8.2	7.2	19.2	13.2	14.2	12.0	11.4
	.9	3.2	2.0	1.8	1.0	0.6	8.4	6.4	6.2	4.6	3.6	15.0	10.8	10.6	9.0	8.2

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2

ΕΚΤΙΜΗΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ

(ΑΡΝΗΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

H_o:										β_1									
Size:		1%					5%					10%				
Test:		N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT
γ	A	%					%					%				
	.0	4.4	2.4	2.0	0.8	0.4	10.0	6.6	7.0	5.4	4.6	16.0	10.4	11.6	9.0	8.4
	.1	3.0	2.6	1.8	0.8	0.4	7.6	4.6	5.2	4.0	3.6	13.8	8.2	9.4	7.0	6.2
$\gamma_{(1)}$	.5	6.0	3.8	3.4	2.0	1.6	11.4	8.0	9.2	6.0	5.6	16.0	12.2	12.4	10.8	10.2
	.9	4.6	3.2	2.6	1.6	1.0	9.8	7.0	6.4	5.0	4.6	15.4	11.0	12.0	9.8	8.8
	.0	3.6	2.6	1.8	0.4	0.4	9.4	6.0	6.2	4.6	4.0	15.8	11.4	12.8	9.6	7.8
	.1	3.0	2.4	1.6	1.0	1.0	7.8	5.0	5.2	4.8	3.8	13.0	8.6	9.8	7.8	6.8
$\gamma_{(2)}$	.5	4.4	2.8	2.4	1.6	1.0	10.0	7.0	6.8	4.8	4.0	15.8	11.0	12.0	8.8	8.6
	.9	6.4	3.8	3.6	2.8	0.6	11.2	7.8	8.4	6.6	4.8	17.0	12.2	14.0	10.8	8.2
	.0	4.6	3.2	1.8	1.2	0.8	10.8	8.6	7.6	6.2	5.6	16.6	12.4	12.0	10.4	10.0
	.1	4.2	2.6	1.0	0.8	0.8	10.0	7.4	6.4	4.6	4.6	17.4	12.0	11.6	9.4	9.4
$\gamma_{(3)}$	.5	5.2	3.2	2.4	1.6	1.0	11.8	6.6	7.6	5.2	4.4	18.6	13.4	13.6	10.2	9.6
	.9	4.2	2.8	2.0	1.8	1.6	11.4	5.8	6.2	5.0	4.2	15.2	11.8	12.0	8.0	8.0
	.0	4.0	3.0	2.6	1.6	1.2	9.8	7.0	6.2	5.0	4.6	16.6	11.0	11.6	9.6	9.2
	.1	3.2	1.2	0.8	0.6	0.4	10.4	7.4	6.2	4.2	3.2	15.4	11.2	12.0	8.8	8.2
$\gamma_{(4)}$	.5	4.0	2.0	1.6	1.2	0.8	9.8	6.2	6.6	4.4	4.0	16.0	10.4	12.0	8.6	8.2
	.9	5.6	3.8	2.0	2.0	1.8	9.8	7.6	6.8	6.0	5.0	17.4	10.8	11.0	9.4	9.2
	.0	4.8	2.6	1.8	0.6	0.0	13.4	7.8	9.0	5.2	4.8	18.2	14.2	14.8	12.2	11.0
	.1	3.6	2.6	1.0	0.8	0.8	10.8	6.8	5.6	4.8	4.6	17.4	12.6	13.2	10.4	10.2
$\gamma_{(5)}$	.5	4.4	2.4	1.4	1.4	1.2	10.2	7.0	7.2	5.4	4.6	16.4	11.8	12.6	9.0	8.8
	.9	4.2	2.6	1.6	1.0	0.8	11.2	6.0	6.2	4.2	3.8	17.2	12.2	13.8	10.2	9.2
	.0	3.0	3.2	1.6	2.0	1.6	10.0	5.6	5.6	3.8	3.8	17.4	11.4	12.8	9.2	9.0
	.1	4.0	2.8	1.8	1.2	0.4	10.4	7.0	6.8	4.2	3.6	16.2	11.8	11.8	10.0	9.2
$\gamma_{(6)}$	.5	3.4	2.8	1.0	2.0	1.6	10.0	7.0	7.0	5.2	4.6	16.2	12.6	11.8	10.4	9.4
	.9	4.2	2.8	2.4	1.6	0.8	7.6	6.6	5.8	5.2	4.4	12.8	9.6	8.8	8.4	7.4

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2

ΕΚΤΙΜΗΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ

(ΑΡΝΗΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

H_o:							β_2									
Size:		1%					5%					10%				
Test:		N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT
γ	A	%					%					%				
	.0	3.6	1.6	1.0	0.4	0.4	10.0	6.0	6.4	4.0	3.2	16.6	10.6	11.6	8.4	8.0
	.1	5.8	3.6	3.8	2.2	1.4	13.4	8.2	9.0	6.0	3.0	17.4	13.0	15.0	10.8	7.2
$\gamma_{(1)}$	.5	4.4	3.2	1.8	1.6	1.0	10.4	7.2	6.8	5.0	3.6	16.8	11.2	13.2	9.2	7.8
	.9	5.4	3.2	2.2	1.2	1.0	12.8	7.4	8.8	5.8	4.8	19.6	12.6	15.2	10.8	9.8
	.0	4.6	3.4	2.0	2.4	1.0	12.2	8.8	8.0	5.6	4.2	17.4	12.6	14.6	10.6	9.6
	.1	4.0	4.6	1.4	2.8	1.8	10.0	9.2	6.8	8.0	6.8	15.0	13.4	11.4	11.0	10.2
$\gamma_{(2)}$	.5	5.4	3.4	2.2	1.6	1.2	13.4	8.4	8.4	5.8	5.2	18.2	13.0	14.6	10.6	9.8
	.9	5.0	3.4	3.0	2.2	1.2	10.6	8.0	7.6	6.0	4.6	16.8	12.4	13.6	9.6	9.0
	.0	5.4	3.8	2.6	2.4	1.4	10.8	8.4	8.6	6.0	4.4	16.8	12.8	13.8	11.0	8.8
	.1	5.6	3.8	2.4	2.2	1.2	12.6	9.6	9.0	7.0	5.6	19.2	13.6	15.2	11.2	10.6
$\gamma_{(3)}$	.5	5.8	4.0	2.8	2.2	1.6	14.0	9.0	10.0	7.0	6.4	19.4	15.2	16.4	12.8	11.4
	.9	3.0	3.0	1.2	2.0	1.8	7.4	5.8	4.8	4.2	4.0	13.6	9.2	9.4	7.4	7.4
	.0	6.6	5.2	3.2	3.0	2.0	13.4	10.6	9.2	7.8	6.4	18.2	14.8	14.2	13.0	12.2
	.1	4.6	3.8	2.2	2.6	2.0	10.6	7.8	7.0	5.6	4.8	17.4	11.4	12.8	9.4	8.2
$\gamma_{(4)}$	.5	5.4	4.6	2.4	3.2	2.6	10.4	8.2	7.6	7.0	6.2	16.8	12.2	13.2	10.4	10.0
	.9	5.0	4.0	2.4	1.4	1.4	11.2	7.4	7.2	5.4	5.0	16.6	11.8	12.0	10.0	8.6
	.0	6.0	4.4	2.8	2.2	1.4	14.6	10.8	8.8	7.4	6.4	17.8	16.2	15.8	12.2	11.0
	.1	6.4	5.0	3.4	2.2	1.8	13.8	9.6	9.4	7.2	6.4	20.2	14.0	14.6	12.0	10.8
$\gamma_{(5)}$	.5	5.4	3.2	2.2	1.8	0.6	11.6	7.8	8.4	5.6	4.8	17.0	13.2	13.8	11.2	9.6
	.9	5.6	3.8	2.0	2.4	1.6	12.0	8.2	8.4	6.4	5.2	18.2	14.0	14.2	12.0	11.0
	.0	6.8	4.6	4.0	2.6	1.4	13.8	9.6	9.6	7.0	6.2	19.2	13.6	15.6	11.6	10.8
	.1	4.6	2.2	0.6	0.8	0.4	10.8	7.6	6.6	4.8	3.2	14.2	11.6	11.2	9.2	8.4
$\gamma_{(6)}$	.5	6.2	3.8	3.0	1.6	1.2	12.6	8.2	8.4	5.8	4.2	17.0	11.6	13.8	9.6	9.0
	.9	4.6	3.4	1.4	1.8	1.4	9.6	7.6	7.8	5.6	5.2	14.0	11.6	11.4	10.0	8.0

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2

ΕΚΤΙΜΗΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ

(ΑΡΝΗΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

H_o:		β_3														
Size:		1%					5%					10%				
Test:		N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT
γ	A	%					%					%				
	.0	2.8	2.2	1.0	1.2	1.0	8.2	4.6	5.6	3.8	3.2	15.0	10.0	11.0	7.4	6.2
	.1	4.2	1.8	0.8	0.4	0.0	11.0	7.4	7.0	5.4	3.8	16.4	11.8	13.4	9.0	8.2
$\gamma_{(1)}$	.5	6.4	4.4	2.6	2.8	2.0	11.6	8.8	8.4	6.8	5.6	17.8	13.6	14.2	11.4	10.0
	.9	5.2	3.4	1.8	1.6	1.2	12.6	9.0	8.2	6.4	4.4	17.2	13.2	13.8	10.8	10.0
	.0	4.8	4.2	2.2	3.2	2.4	12.0	7.6	7.6	6.4	5.4	16.8	12.8	13.2	10.6	8.8
	.1	3.4	2.6	1.4	1.4	0.8	11.2	6.4	6.2	4.2	4.0	17.4	12.2	12.8	9.2	8.6
$\gamma_{(2)}$	.5	6.8	5.8	3.6	3.2	2.0	12.6	8.4	8.6	6.6	5.8	19.2	13.2	14.8	11.2	9.6
	.9	5.0	4.8	2.8	2.8	2.4	10.2	7.6	6.8	6.2	5.4	16.4	11.8	12.8	10.0	9.4
	.0	5.6	4.0	2.4	2.2	1.6	13.0	8.0	9.0	6.2	5.6	17.8	13.4	14.0	10.6	9.2
	.1	9.2	7.6	5.4	4.4	3.2	14.4	11.8	12.0	9.8	8.8	21.4	15.6	15.8	13.6	12.0
$\gamma_{(3)}$	.5	7.8	6.4	3.4	3.8	1.8	15.6	11.8	10.6	9.2	7.4	20.0	16.6	17.2	13.6	11.8
	.9	5.8	5.4	3.2	3.2	2.8	12.0	8.6	8.2	7.4	6.8	18.2	13.4	14.0	10.8	9.4
	.0	7.4	5.2	2.8	3.0	2.0	15.6	10.0	10.2	8.0	6.4	21.2	17.0	16.8	13.2	11.6
	.1	3.2	2.4	1.2	1.2	0.8	11.8	8.4	8.2	5.2	4.6	16.6	12.4	13.4	10.4	9.8
$\gamma_{(4)}$	.5	6.6	7.8	3.6	5.0	2.8	13.2	11.4	9.0	9.4	6.4	19.0	15.8	15.2	12.4	10.6
	.9	4.8	4.6	2.6	3.8	2.6	10.4	9.0	8.0	7.2	6.2	17.0	12.4	12.2	10.6	9.8
	.0	5.8	3.4	2.2	2.0	1.2	12.2	8.6	9.2	6.2	5.6	17.6	13.2	14.2	12.0	10.0
	.1	4.8	4.2	1.6	2.4	1.6	13.2	9.4	7.2	7.0	5.2	17.0	14.4	13.8	12.4	11.6
$\gamma_{(5)}$	.5	6.0	4.8	3.0	2.6	1.0	13.6	9.8	9.4	7.2	5.6	18.0	14.4	14.8	12.4	10.4
	.9	5.2	3.8	2.6	2.2	1.4	11.4	9.6	8.0	6.4	6.0	17.4	13.6	14.0	11.6	11.2
	.0	5.4	3.6	2.8	2.0	1.8	14.6	9.4	9.8	6.6	5.0	21.8	14.4	16.8	12.6	10.4
	.1	3.0	2.6	0.6	1.4	1.4	8.8	6.0	4.6	3.8	3.4	15.4	11.8	10.6	8.0	7.2
$\gamma_{(6)}$	.5	7.4	6.6	4.0	4.2	2.4	15.6	12.4	11.0	9.0	6.4	21.4	16.6	17.8	13.8	11.6
	.9	7.4	4.6	3.0	2.8	1.6	12.0	9.0	9.0	7.2	6.8	16.4	13.4	13.4	11.6	10.0

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2

ΕΚΤΙΜΗΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ

(ΑΡΝΗΤΙΚΑ t ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

H_o:		β_4														
Size:		1%					5%					10%				
Test:		N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT	N	NE	T	TE	CFT
γ	A	%					%					%				
$\gamma_{(1)}$	.0	3.8	2.6	2.0	1.6	1.4	10.8	5.6	6.8	4.0	3.6	14.6	10.0	11.0	8.2	7.6
	.1	5.4	3.4	2.4	1.6	1.0	11.4	7.0	7.2	5.8	5.0	16.6	11.6	13.2	10.0	8.8
	.5	4.0	3.2	2.0	1.6	1.4	10.0	7.2	7.2	4.2	4.0	17.6	11.2	12.2	9.0	8.8
	.9	4.4	2.2	1.6	1.4	1.4	10.8	6.0	6.6	5.4	4.4	16.4	12.4	12.4	9.8	8.6
$\gamma_{(2)}$	.0	4.2	3.6	1.8	1.8	1.0	10.0	7.6	6.6	5.6	5.0	17.2	12.2	13.4	10.6	9.6
	.1	3.8	2.0	1.4	0.6	0.2	10.2	6.6	7.0	4.4	3.8	17.2	11.4	12.2	8.6	7.8
	.5	5.2	3.4	2.2	1.8	1.4	13.6	7.8	7.2	5.8	4.4	18.2	13.4	14.0	9.8	9.0
	.9	3.2	2.6	1.0	1.4	0.4	10.6	6.4	6.0	5.4	4.8	19.0	13.6	15.6	10.0	9.4
$\gamma_{(3)}$	.0	4.6	3.2	2.0	2.0	1.6	11.0	8.2	7.6	5.2	3.6	18.2	12.8	12.6	10.4	10.2
	.1	4.8	2.6	2.2	2.0	1.8	13.0	7.8	8.0	5.4	5.0	18.2	14.4	14.4	12.0	10.8
	.5	6.8	6.8	2.2	5.4	4.2	14.0	13.2	10.0	9.8	8.0	18.8	16.2	15.8	14.2	14.0
	.9	4.6	3.4	1.4	2.2	1.0	11.6	8.6	6.8	6.4	5.4	18.0	14.4	14.0	12.2	10.8
$\gamma_{(4)}$	.0	5.6	4.4	2.6	2.6	1.6	11.0	8.4	7.6	6.0	5.4	14.8	12.2	12.2	10.2	9.4
	.1	4.8	3.4	2.6	1.2	1.0	10.8	7.6	6.6	5.2	4.2	17.0	12.4	13.0	9.6	8.8
	.5	5.8	3.4	2.8	2.2	1.6	11.8	9.0	9.0	6.6	5.8	16.4	13.6	13.4	11.0	10.8
	.9	4.8	4.2	2.2	2.0	1.6	11.6	8.4	6.6	5.8	5.4	16.4	12.6	12.8	11.0	10.4
$\gamma_{(5)}$	.0	5.0	3.8	2.2	1.4	0.8	11.4	7.0	6.8	6.2	5.0	16.2	11.2	12.4	9.4	8.4
	.1	4.4	1.8	1.6	0.8	0.8	11.0	6.6	6.4	4.2	3.8	15.6	11.4	11.6	8.8	8.2
	.5	6.0	4.6	2.8	2.8	1.6	10.4	7.6	7.6	6.4	6.2	14.8	11.2	12.4	8.6	8.2
	.9	5.6	3.8	3.0	2.4	2.2	11.8	9.0	8.8	6.4	5.8	17.6	13.2	14.4	11.2	10.6
$\gamma_{(6)}$	.0	5.2	3.4	2.2	1.4	0.8	12.6	9.0	8.0	6.2	5.0	16.2	13.2	13.8	10.8	9.0
	.1	3.4	2.2	1.4	1.0	0.8	9.4	6.0	6.2	4.2	3.6	14.2	11.0	11.4	9.0	8.2
	.5	3.6	5.2	1.4	3.6	3.2	13.4	9.2	8.6	7.0	6.2	18.6	15.0	15.2	12.6	10.8
	.9	4.8	2.2	1.8	0.8	0.8	11.0	7.4	8.0	5.4	4.4	16.4	12.0	13.0	9.6	8.6

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2

ΕΚΤΙΜΗΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ

(F ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ)

H_o:		$\beta_2, \beta_3, \beta_4$														
Size:		1%					5%					10%				
Test:		X2	X2E	F	FE	CFF	X2	X2E	F	FE	CFF	X2	X2E	F	FE	CFF
γ	A	%					%					%				
	.0	22.2	16.2	9.2	6.4	1.8	34.2	23.8	19.0	15.8	7.0	41.2	29.8	30.4	21.8	12.0
	.1	23.2	15.6	8.4	5.4	2.2	34.6	24.0	20.2	14.2	7.0	41.4	30.4	29.6	20.2	11.4
$\gamma_{(1)}$	.5	20.0	15.6	8.0	6.4	3.2	34.0	22.4	17.8	13.8	7.4	41.0	31.0	27.6	20.0	12.8
	.9	19.0	14.2	9.8	5.8	3.0	32.4	20.0	17.6	13.0	6.8	39.4	29.0	25.8	18.6	9.8
	.0	20.4	14.6	8.0	6.8	3.2	32.6	22.6	16.8	13.0	8.4	43.2	28.8	26.0	19.4	13.2
	.1	20.4	14.6	7.6	6.2	3.6	31.4	22.4	17.4	12.6	7.4	40.2	27.6	24.0	19.6	13.0
$\gamma_{(2)}$	.5	24.6	17.8	10.6	7.8	1.6	34.8	25.2	19.6	16.4	8.8	43.4	30.6	27.0	21.0	14.8
	.9	22.8	16.6	8.8	5.2	2.6	35.4	25.8	20.4	15.4	8.6	44.4	32.0	29.4	21.8	12.6
	.0	23.4	17.2	8.4	6.8	1.6	35.4	26.2	19.2	16.0	9.6	44.8	32.6	27.4	21.8	16.2
	.1	22.4	18.0	9.8	8.4	3.4	33.2	23.8	20.0	17.4	9.4	42.2	29.6	26.8	22.0	15.4
$\gamma_{(3)}$	.5	24.4	18.8	9.0	9.0	5.2	39.8	27.4	21.4	17.0	11.0	47.2	36.0	32.0	26.0	18.0
	.9	22.2	16.8	8.2	7.2	2.0	34.6	24.6	20.0	15.6	8.0	41.8	31.6	28.2	22.2	13.4
	.0	23.4	19.2	9.0	7.6	3.2	35.6	28.0	20.0	16.2	10.0	44.4	35.2	29.2	23.2	14.4
	.1	19.0	15.4	8.2	8.0	3.6	34.2	24.8	16.6	15.2	8.8	43.8	30.8	25.2	21.8	16.0
$\gamma_{(4)}$	.5	25.2	18.0	10.6	8.6	4.4	36.0	27.6	22.0	18.2	10.8	42.6	33.8	30.6	24.8	17.4
	.9	22.2	17.6	8.2	8.4	3.8	34.4	27.4	18.8	16.2	9.4	43.4	32.2	27.0	22.0	14.6
	.0	24.0	20.0	7.6	8.0	4.0	36.2	28.2	19.6	15.2	8.6	45.0	35.8	28.4	22.8	14.2
	.1	20.8	16.4	6.4	6.0	2.4	34.8	24.6	16.8	12.8	7.2	43.6	31.4	27.2	20.8	14.8
$\gamma_{(5)}$	.5	21.6	16.6	8.6	7.2	2.8	36.4	25.2	19.4	16.2	9.0	44.2	34.2	28.4	23.0	13.6
	.9	24.2	16.6	8.2	6.6	2.6	38.2	27.8	21.8	15.4	8.6	46.0	32.8	31.2	22.4	15.4
	.0	26.0	18.6	11.0	6.6	2.0	38.0	27.8	22.4	17.2	7.0	45.2	34.4	31.8	24.2	12.8
	.1	17.8	14.6	7.8	5.8	2.8	28.6	20.6	15.8	12.6	7.2	34.6	26.6	23.4	17.8	10.0
$\gamma_{(6)}$	.5	21.8	17.0	7.0	7.0	3.8	34.6	25.2	19.8	15.6	7.4	44.4	31.8	27.6	22.2	12.2
	.9	23.6	17.0	7.0	6.0	1.8	34.2	26.4	21.6	14.6	7.4	44.2	33.6	29.6	24.0	13.2

δίνεται στις επόμενες τέσσερεις σελίδες του. Ο πίνακας δείχνει ότι ο έλεγχος CFT είναι σχεδόν ομοιομόρφως καλύτερος από όλους τους άλλους, ακολουθούμενος από τους ελέγχους TE και T που κατατάσσονται δεύτερος και τρίτος, αντίστοιχα. Χειρότερος από όλους τους ελέγχους είναι ο N. Εξετάζοντας τον Πίνακα 4.2 παρατηρούμε ότι οι ασυμπτωτικοί έλεγχοι (N, NE) είναι, γενικά, χειρότεροι από τους ακριβείς ελέγχους (T, TE, CFT), με την εξαίρεση μερικών περιπτώσεων κατά τις οποίες η NE διόρθωση αποδίδει καλύτερα από την αδιόρθωτη T μέθοδο ελέγχου. Υπάρχουν λίγες περιπτώσεις όπου ο N έλεγχος είναι καλύτερος από τον NE ή οι έλεγχοι T και TE αποδίδουν καλύτερα από τον CFT έλεγχο. Αξίζει να σημειωθεί ότι για ονομαστικό μέγεθος ίσο με 10% ο NE έλεγχος αποδίδει, τις περισσότερες φορές, καλύτερα από τον έλεγχο T.

Η ένατη σελίδα του Πίνακα 4.2 περιέχει τις εκτιμημένες πιθανότητες απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης για τον F έλεγχο της "στατιστικής σημαντικότητας" της εκτιμημένης εξίσωσης, δηλαδή της από κοινού στατιστικής σημαντικότητας των παραμέτρων β_2, β_3 και β_4. Ο πίνακας δείχνει ότι, για κάθε συνδυασμό των τιμών των παραμέτρων γ και A, ο έλεγχος CFF αποδίδει καλύτερα από τους ελέγχους FE και F που είναι ο δεύτερος και τρίτος καλύτερος, αντίστοιχα. Αμέσως μετά κατατάσσεται ο έλεγχος X2E, ενώ ο έλεγχος X2 είναι ο χειρότερος από όλους. Πρέπει να τονίσουμε ότι ο αδιόρθωτος F έλεγχος, όχι μόνον είναι καλύτερος από τον X2 έλεγχο, αλλά, με την εξαίρεση μιας περίπτωσης, αποδίδει καλύτερα και από τον X2E έλεγχο.

Οι διάφορες μέθοδοι με τις οποίες μπορούμε να πραγματοποιήσουμε τους t και F ελέγχους συγκρίθηκαν και διαγραμματικά. Τον τρόπο κατασκευής των διαγραμμάτων θα τον περιγράψουμε στην συνέχεια.

Είναι γνωστό ότι στην ιδανική περίπτωση το πραγματικό μέγεθος ενός ελέγχου ισούται με το ονομαστικό του μέγεθος. Συνεπώς, όσο μικρότερη είναι η διαφορά μεταξύ του ονομαστικού και του πραγματικού μεγέθους ενός ελέγχου, τόσο καλύτερος είναι ο έλεγχος αυτός. Με βάση τα ανωτέρω, σκεφθήκαμε να παρουσιάσουμε σε ένα τετράγωνο διάγραμμα (βλ. την σχετική συζήτηση του Τμήματος 3.4 του Κεφαλαίου 3) την σχέση μεταξύ του ονομαστικού και του πραγματικού

μεγέθους των ελέγχων που μας ενδιέφεραν. Εφόσον, υπό ιδανικές συνθήκες, το πραγματικό και το ονομαστικό μέγεθος ενός ελέγχου ταυτίζονται, έπεται ότι στην ιδανική περίπτωση όλες οι παρατηρήσεις πρέπει να βρίσκονται πάνω στην διαγώνιο των 45 μοιρών του διαγράμματος, η οποία είναι η συνάρτηση κατανομής μιας U(0,1) τυχαίας μεταβλητής. Φυσικά, αν είχαμε ένα τυχαίο δείγμα από την U(0,1) κατανομή, τότε, λόγω του δειγματοληπτικού σφάλματος, οι παρατηρήσεις δεν θα βρίσκονταν ακριβώς πάνω στην γραμμή των 45 μοιρών, αλλά μέσα σε μια ταινία, συμμετρική γύρω από την γραμμή των 45 μοιρών και με εύρος που δίνεται από τον πίνακα της μονοδειγματικής (one-sample) κατανομής Kolmogorov-Sirnov (βλ. Durbin (1973)). Αυτό σημαίνει ότι, αν μια συγκεκριμένη καμπύλη βρίσκεται μέσα στην ταινία, τότε οι αποκλίσεις της από την διαγώνιο μπορούν να αποδοθούν στο δειγματοληπτικό σφάλμα, δηλαδή, είναι στατιστικά ασήμαντες. Αντίθετα, αν η καμπύλη τέμνει τα όρια της ταινίας, τότε απορρίπτουμε την υπόθεση ότι οι αποκλίσεις της από την διαγώνιο οφείλονται στην τυχαία δειγματοληψία. Είναι φανερό ότι η ταινία αντιπροσωπεύει ένα είδος διαστήματος εμπιστοσύνης που μας βοηθά να ερμηνεύσουμε τις πληροφορίες που περιέχονται στα διαγράμματα και την κατασκευάσαμε έτσι ώστε να αντιστοιχεί στο 95% διάστημα εμπιστοσύνης.

Για κάθε τιμή του ονομαστικού μεγέθους κάθε ελέγχου που εξετάσαμε, βρήκαμε το αντίστοιχο πραγματικό μέγεθος και τα προκύψαντα ζεύγη των τιμών του ονομαστικού και πραγματικού μεγέθους τα απεικονίσαμε στο διάγραμμα. Έτσι, για κάθε έλεγχο κατασκευάσαμε μια καμπύλη που ενώνει την κάτω αριστερή με την άνω δεξιά γωνία του τετραγώνου διαγράμματος. Με βάση τα διαγράμματα αυτά, καλύτερος πρέπει να θεωρηθεί εκείνος ο έλεγχος που η καμπύλη του απέχει σχετικά λιγότερο από την γραμμή των 45 μοιρών για εκείνες τις τιμές του επιπέδου στατιστικής σημαντικότητας που χρησιμοποιούνται συχνότερα στην εφαρμοσμένη έρευνα, που είναι, δηλαδή, μεταξύ του 0.01 και του 0.10. Ωστόσο, από τα διαγράμματα μπορούμε να αντλήσουμε πληροφορίες για την συμπεριφορά των εξεταζομένων ελέγχων σε οποιαδήποτε τιμή του ονομαστικού μεγέθους τους.

Οι κλίμακες μέτρησης και του ονομαστικού και του πραγματικού

μεγέθους των ελέγχων ήσαν ίδιες. Θεωρήσαμε ότι και τα δύο μεγέθη των ελέγχων παίρνουν τιμές μεταξύ του 0 και του 1. Αυτό δεν δημιουργεί κανένα πρόβλημα στην περίπτωση των ελέγχων που χρησιμοποιούν την χ^2 ή την F κατανομή, ενώ τα προβλήματα που δημιουργήθηκαν στην περίπτωση των ελέγχων που χρησιμοποιούν την t-Student ή (ασυμπτωτικά) την κανονική κατανομή λύθηκαν όπως ακριβώς και στα πειράματα για το γραμμικό υπόδειγμα με αυτοσυσχέτιση πρώτου βαθμού (βλ. την σχετική συζήτηση στο Τμήμα 3.4 του Κεφαλαίου 3).

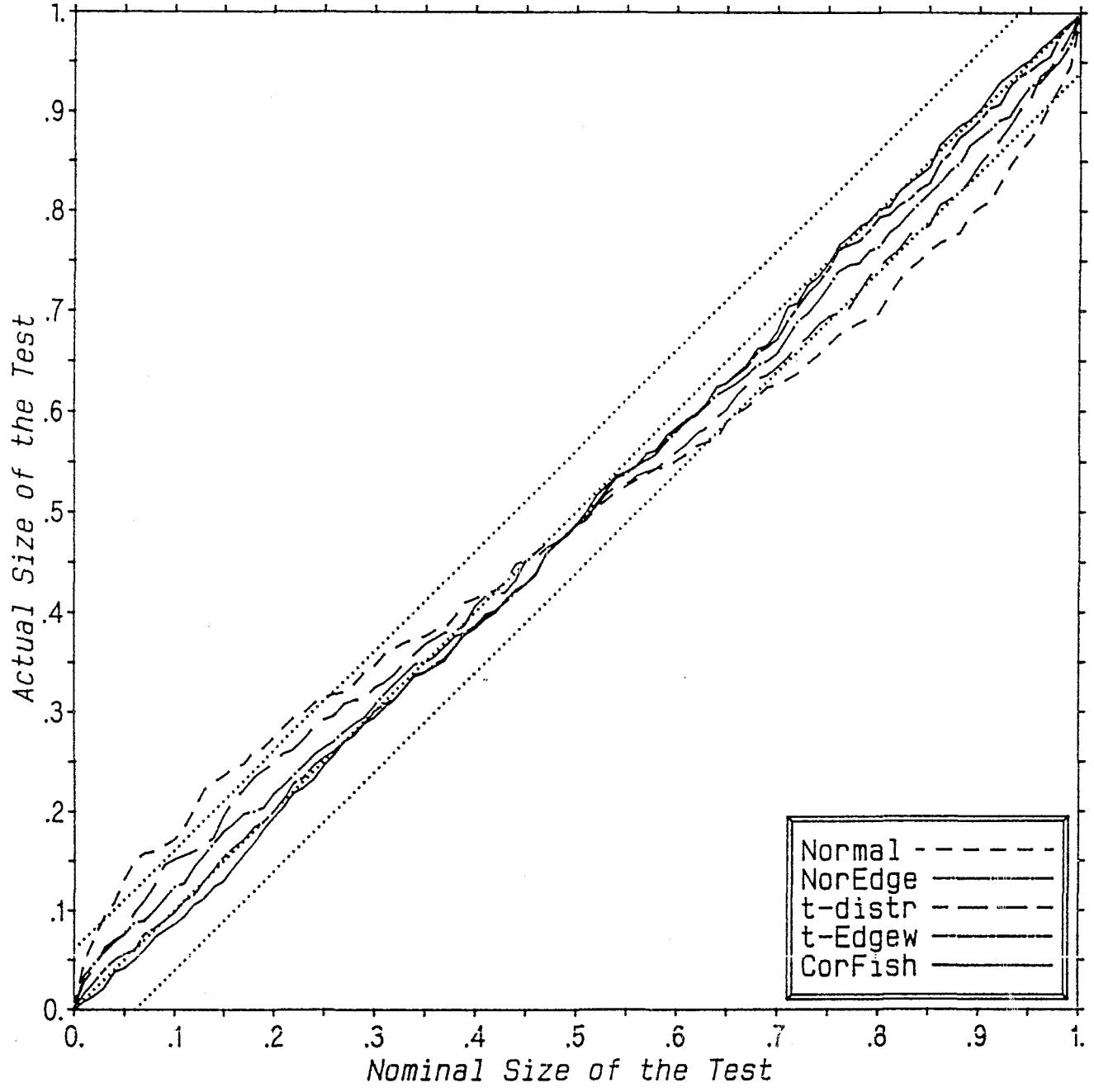
Από τα εκατόν είκοσι διαγράμματα που κατασκευάσαμε κατά την διενέργεια του Monte Carlo πειράματος παρουσιάζουμε μόνον έξι, εκείνα που επιδεικνύουν με την μεγαλύτερη ευκρίνεια το γενικό πρότυπο συμπεριφοράς των διαφόρων ελέγχων που εξετάσαμε. Τα Διαγράμματα 4.1, 4.2 και 4.3 παρουσιάζουν την απόδοση των διαφόρων μορφών του t ελέγχου, ενώ τα Διαγράμματα 4.4, 4.5 και 4.6 δείχνουν την απόδοση των εναλλακτικών μορφών του F ελέγχου. Στα Διαγράμματα 4.1 και 4.4 απεικονίζεται η συμπεριφορά των διαφόρων διορθώσεων του μεγέθους των ελέγχων σε εκείνες τις περιπτώσεις κατά τις οποίες ο στοχαστικός όρος του υποδείγματος είναι ομοσκεδαστικός στον πληθυσμό. Το κύριο πλεονέκτημα των Διαγραμμάτων 4.1 ως 4.6 έναντι του Πίνακα 4.2 είναι ότι τα διαγράμματα περιέχουν πληροφορίες για την απόδοση των διαφόρων μορφών των t και F ελέγχων σε κάθε επίπεδο του ονομαστικού τους μεγέθους.

Στα Διαγράμματα 4.1 και 4.3 όλες οι καμπύλες κείνται εξ' ολοκλήρου στο εσωτερικό της ταινίας με την εξαίρεση της καμπύλης που αντιστοιχεί στον N έλεγχο και με την επιπλέον εξαίρεση ενός πολύ μικρού τμήματος της καμπύλης του T ελέγχου στο Διάγραμμα 4.1. Αντίθετα, στο Διάγραμμα 4.2 μόνον οι καμπύλες που αντιστοιχούν στις διορθώσεις CFT και TE κείνται ολόκληρες μέσα στα όρια της ταινίας. Στο σημείο αυτό πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι, σύμφωνα με τις ιδιότητες της ταινίας τις οποίες συζητήσαμε προηγουμένως, όλες οι καμπύλες που κείνται εξ' ολοκλήρου μέσα στην ταινία είναι, σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας 5%, στατιστικά ταυτόσημες και συνεπώς κάθε προσπάθεια να κατατάξουμε τους αντιστοίχους ελέγχους ανάλογα με την απόδοση τους είναι χωρίς νόημα. Ωστόσο, από τα

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.1

ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΤΟΥ t ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΤΟ β_2

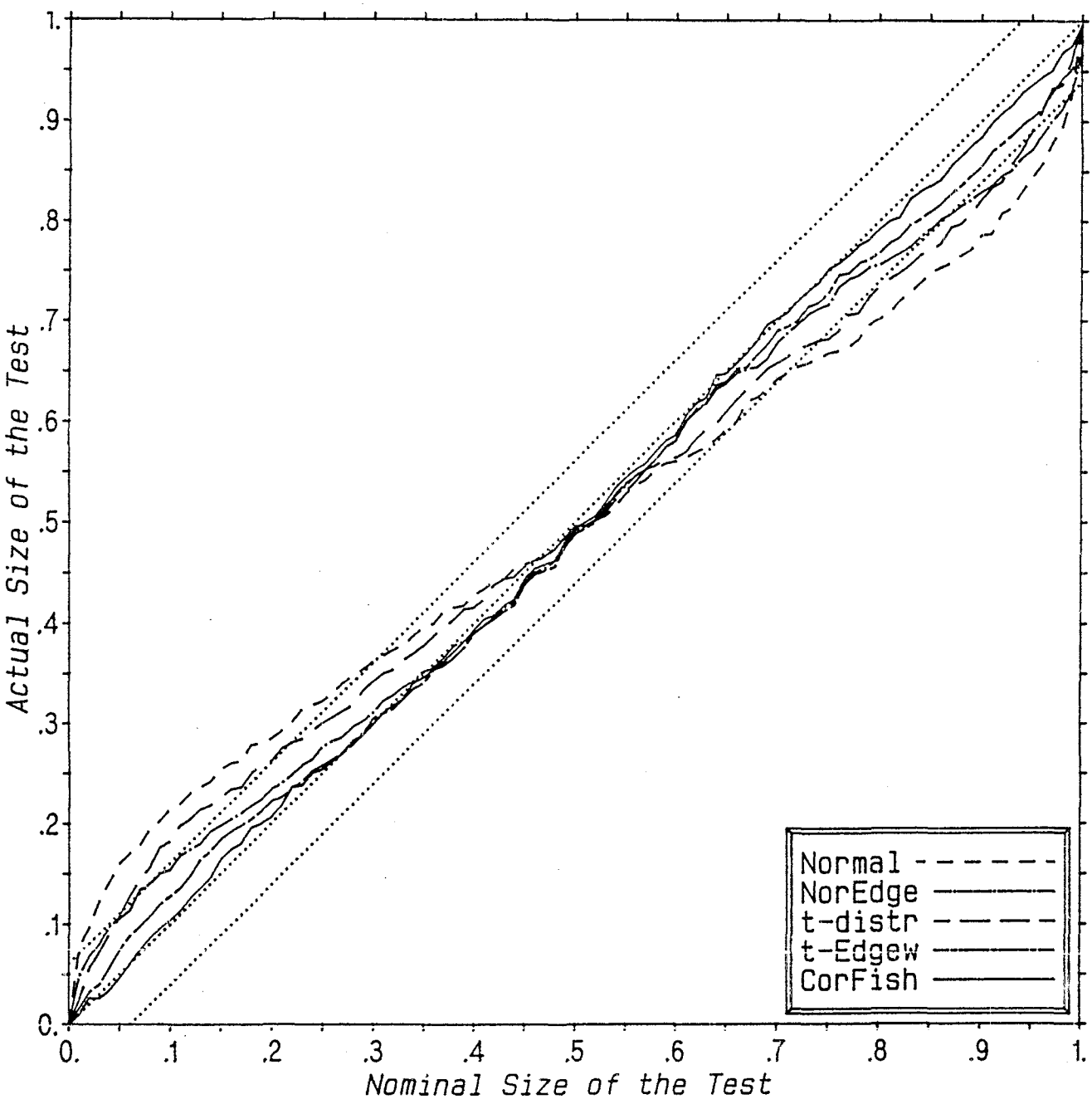
$\gamma' = (\gamma_1, 0, 0, 0)$ και $A = .9$



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.2

ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΤΟΥ t ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΤΟ β_3

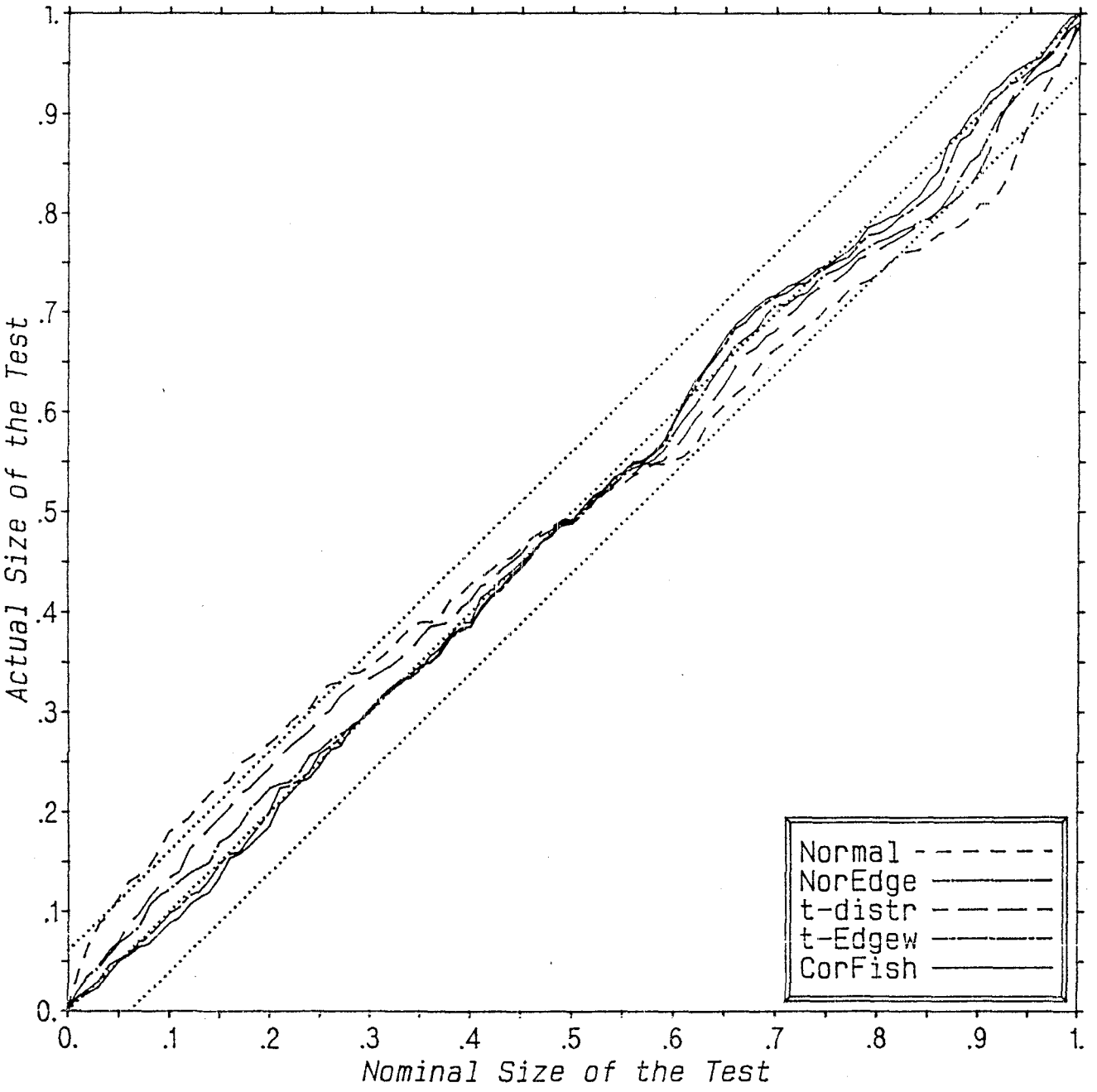
$\gamma' = (\gamma_1, 1, 1, 1)$ και A = .5



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.3

ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΤΟΥ t ΕΛΕΓΧΟΥ ΓΙΑ ΤΟ β_4

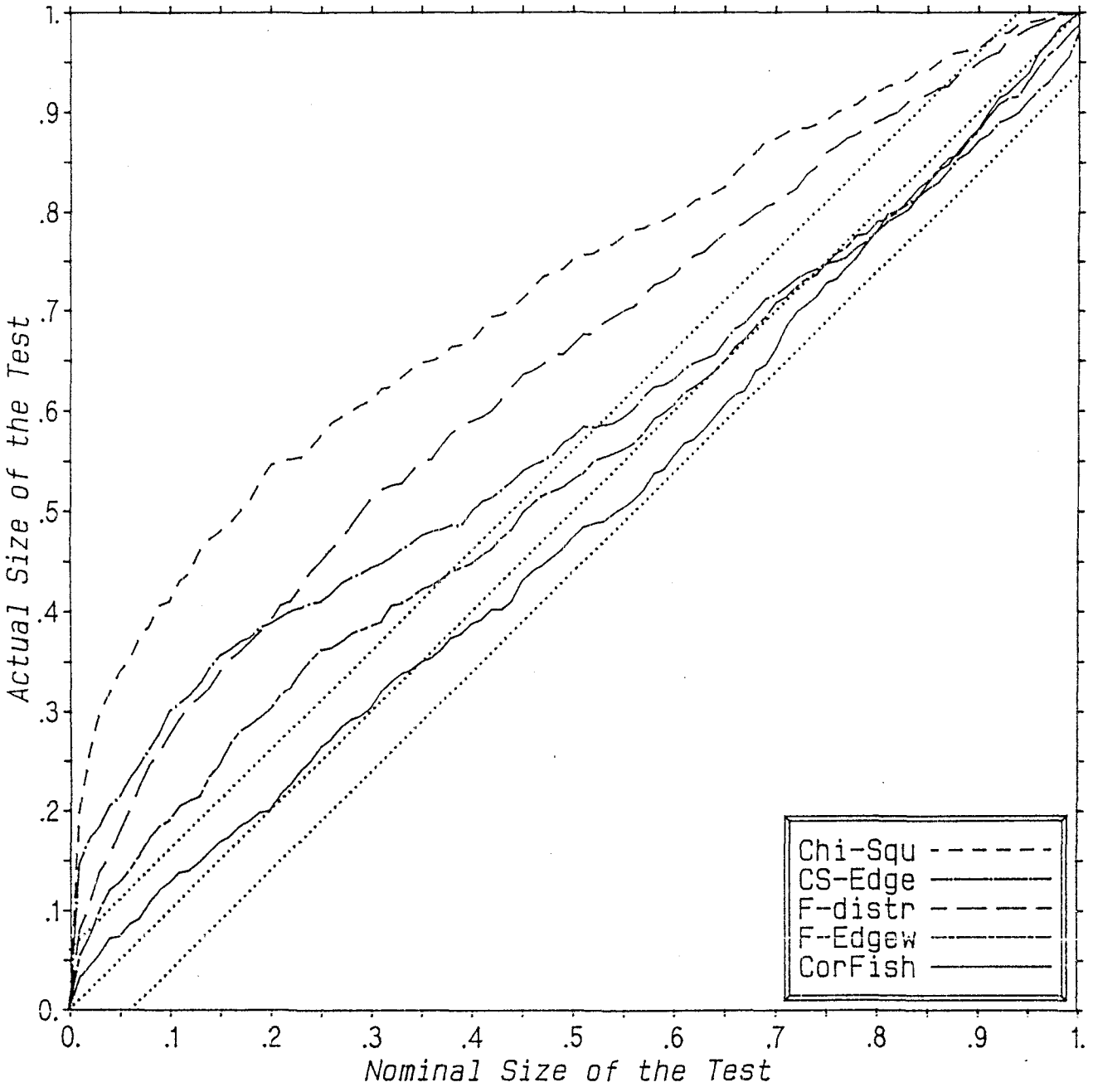
$\gamma' = (\gamma_1, 1, 0, 0)$ και $A = .9$



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.4

ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΤΟΥ F ΕΛΕΓΧΟΥ

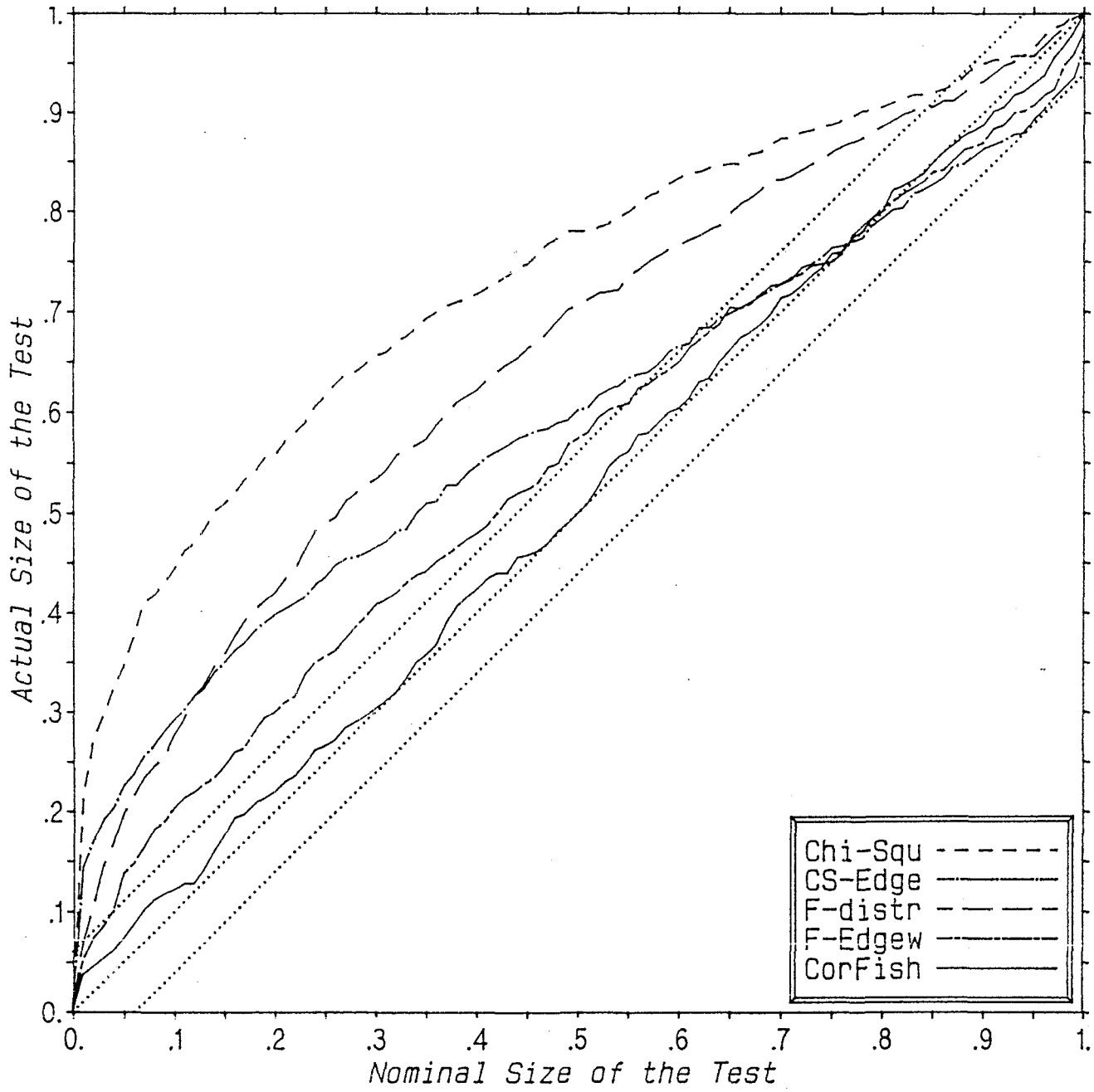
$\gamma' = (\gamma_1, 0, 0, 0)$ και A = .5



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.5

ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΤΟΥ F ΕΛΕΓΧΟΥ

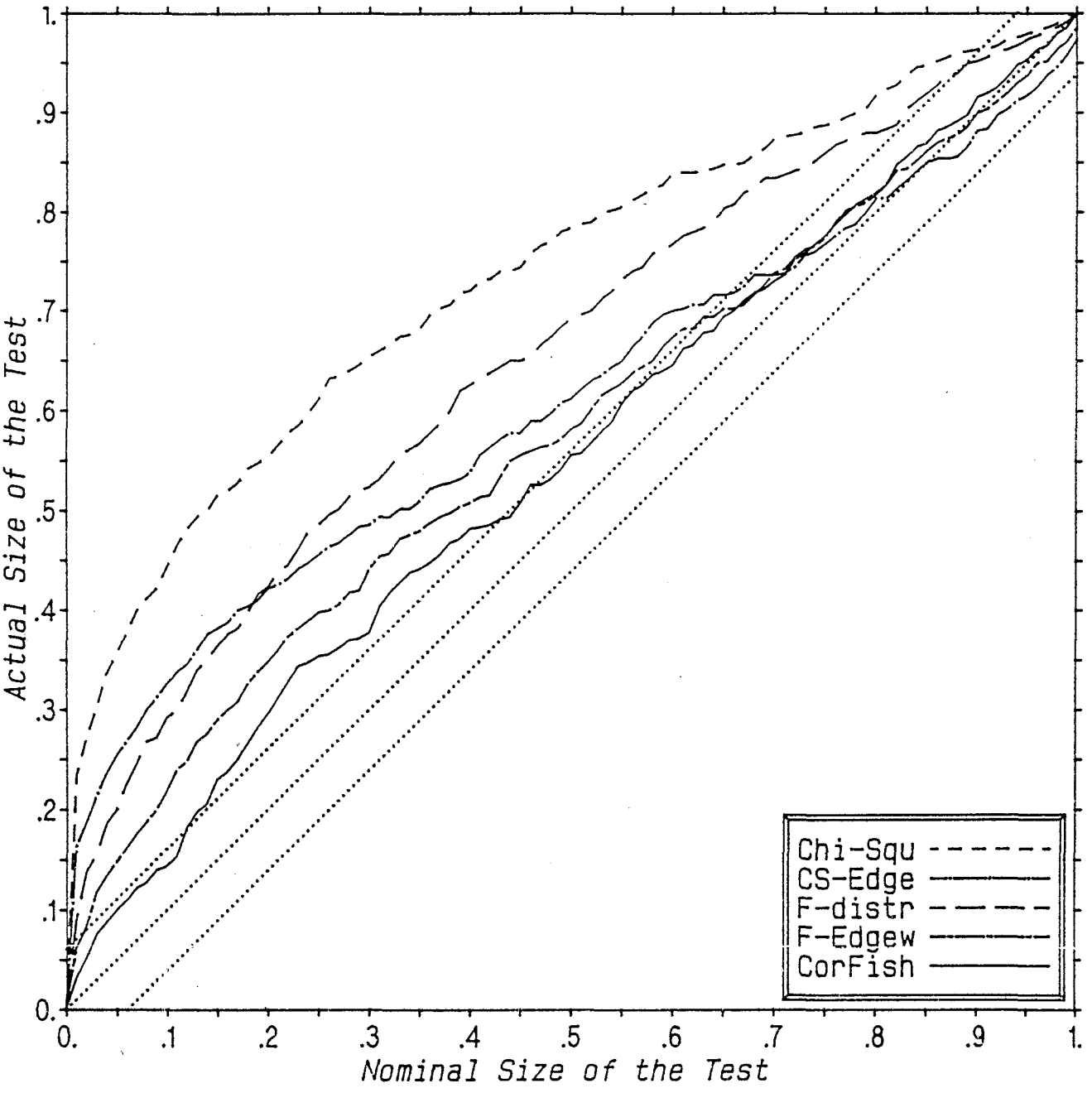
$\gamma' = (\gamma_1, 1, 1, 1)$ και A = .5



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 4.6

ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΤΟΥ F ΕΛΕΓΧΟΥ

$\gamma' = (\gamma_1, 1, 1, 0)$ και A = 0.



διαγράμματα βλέπουμε ότι για εκείνους τους ελέγχους των οποίων οι καμπύλες τέμνουν τα όρια της ταινίας προκύπτει, ανάλογα με την απόδοση τους, μια κατάταξη που είναι συνεπής με τις πληροφορίες του Πίνακα 4.2. Αξίζει να σημειωθεί ότι για ονομαστικό μέγεθος μεγαλύτερο από ή ίσο με 7.5% περίπου η NE διόρθωση του μεγέθους του t ελέγχου αποδίδει καλύτερα από τον συνήθη t έλεγχο (T) και για τα θετικά και για τα αρνητικά t στατιστικά, γεγονός που συμφωνεί με τις πληροφορίες του Πίνακα 4.2.

Στα Διαγράμματα 4.4 και 4.5 μόνον η καμπύλη που αντιστοιχεί στον CFF έλεγχο κείται ολόκληρη μέσα στα όρια της ταινίας, ενώ στο Διάγραμμα 4.6 όλες οι καμπύλες έχουν μεγάλα τμήματα έξω από την ταινία. Επομένως, στα Διαγράμματα 4.4 και 4.5 η διαφορά μεταξύ του πραγματικού και του ονομαστικού μεγέθους του CFF ελέγχου είναι στατιστικά ασήμαντη, σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας 5%. Τα Διαγράμματα 4.4 ως 4.6 επιβεβαιώνουν την από τον Πίνακα 4.2 προκύπτουσα κατάταξη των διαφόρων F ελέγχων ανάλογα με την απόδοσή τους. Όμως, από τα διαγράμματα αυτά παρατηρούμε ότι για ονομαστικό μέγεθος κάπως μεγαλύτερο από 10% ο X2E έλεγχος αποδίδει καλύτερα από τον έλεγχο F.

Τα Διαγράμματα 4.1 και 4.4 δείχνουν ότι η απόδοση των κατά Edgeworth και των τοπικά ακριβών (locally exact) κατά Cornish-Fisher διορθώσεων του μεγέθους των t και F ελέγχων είναι καλή ακόμα και σε περιπτώσεις κατά τις οποίες οι διαταρακτικοί όροι είναι ομοσκεδαστικοί στον πληθυσμό, δηλαδή η μήτρα συνδιακυμάνσεών τους είναι μια βαθμωτή μήτρα.

Μπορούμε, λοιπόν, από τα διαγράμματα που κατασκευάσαμε να συμπεράνουμε ότι, γενικά, οι έλεγχοι που βασίζονται στα τοπικά ακριβή κατά Cornish-Fisher διορθωμένα t και F στατιστικά υπερέχουν από τους ελέγχους που στηρίζονται είτε στα αντίστοιχα συνήθη στατιστικά (t, χ^2 και F), είτε στις (τύπου) Edgeworth διορθωμένες κριτικές τιμές τους.

Επιπλέον, είναι, ίσως, μεγαλύτερης σημασίας το γεγονός ότι ο Πίνακας 4.2 και τα Διαγράμματα 4.1 ως 4.6 επιβεβαιώνουν τις θεωρητικές μας απόψεις για την υπεροχή των τοπικά ακριβών (locally exact) ελέγχων (δηλαδή των ελέγχων που έχουν προσαρμοσθεί για τους βαθμούς ελευθερίας) έναντι των ασυμπτωτικών ελέγχων (που δεν έχουν

υποστεί τέτοιες προσαρμογές). Το γεγονός ότι συχνά οι συνήθεις (χωρίς διορθώσεις μεγέθους) t και F έλεγχοι που χρησιμοποιούν τις ακριβείς κατανομές (t-Student και F, αντίστοιχα) είναι καλύτεροι από τους κατά Edgeworth διορθωμένους t και F ελέγχους που χρησιμοποιούν τις ασυμπτωτικές κατανομές (κανονική και χ^2, αντίστοιχα) είναι αρκετά απρόσμενο και πρέπει να ληφθεί σοβαρά υπόψη στην εφαρμοσνένη οικονομετρική έρευνα.

Από τον Πίνακα 4.2 και τα Διαγράμματα 4.1 ως 4.6 μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η απόδοση των διαφόρων μορφών των t και F ελέγχων δεν επηρεάζεται ούτε από τις εξειδικεύσεις του διανύσματος παραμέτρων γ, ούτε από τις θεωρούμενες τιμές της παραμέτρου A. Το τελευταίο αποτέλεσμα ήταν αναμενόμενο, με βάση τα αποτελέσματα της ανάλυσης διακύμανσης που πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια του τυχαίου πειράματος για την περίπτωση της αυτοσυσχέτισης πρώτου βαθμού. Διότι το γραμμικό υπόδειγμα με ετεροσκεδαστικό στοχαστικό όρο είναι ειδική περίπτωση του γενικευμένου γραμμικού υποδείγματος, όπως και το γραμμικό υπόδειγμα με αυτοσυσχέτιση πρώτου βαθμού. Εφόσον, λοιπόν, στην περίπτωση της αυτοσυσχέτισης η παράμετρος A δεν αποτελεί προσδιοριστικό παράγοντα της ποιότητας των διαφόρων μορφών των t και F ελέγχων, είναι λογικό να αναμένουμε πως το ίδιο θα συμβαίνει και σε κάθε άλλο οικονομετρικό υπόδειγμα που είναι ειδική περίπτωση του γενικευμένου γραμμικού υποδείγματος. Με την ίδια επιχειρηματολογία μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι, όπως στην περίπτωση του γραμμικού υποδείγματος με αυτοσυσχέτιση πρώτου βαθμού, έτσι και στην περίπτωση της ετεροσκεδαστικότητας το μέγεθος του χρησιμοποιουμένου δείγματος, με την προϋπόθεση πως δεν είναι υπερβολικά μεγάλο, δεν αναμένεται να επηρεάσει την ποιοτική διαβάθμιση των διαφόρων ελέγχων που εξετάσαμε. Αντίθετα, όταν το δείγμα είναι πολύ μεγάλου μεγέθους, οι διάφορες μέθοδοι διόρθωσης του μεγέθους των ελέγχων αναμένεται να μην έχουν μεγάλη σημασία. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίον στην περίπτωση της ετεροσκεδαστικότητας δεν μελετήσαμε πειραματικά την πιθανή επίδραση του μεγέθους του δείγματος στην ποιότητα των εξεταζομένων διορθώσεων του μεγέθους των ελέγχων t και F.

4.5 ΤΕΛΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Τελειώνοντας την παρουσίαση και τον σχολιασμό των

αποτελεσμάτων του τυχαίου πειράματος, θεωρούμε αναγκαία την αναφορά μερικών τελικών παρατηρήσεων.

Από το τυχαίο πείραμα που πραγματοποιήσαμε φαίνεται ότι, για την περίπτωση του γραμμικού υποδείγματος με ετεροσκεδαστικό στοχαστικό όρο, οι τοπικά ακριβείς κατά Edgeworth διορθώσεις του μεγέθους των t και F ελέγχων είναι γενικά καλύτερες από τις αντίστοιχες συνήθεις κατά Edgeworth διορθώσεις, που χρησιμοποιούν προσεγγίσεις με βάση τις ασυμπτωτικές κατανομές (κανονική και χ^2). Επιπλέον, από το ίδιο πείραμα προκύπτει ότι οι τοπικά ακριβείς κατά Cornish-Fisher διορθώσεις του μεγέθους των ελέγχων t και F αποδίδουν καλύτερα από τις αντίστοιχες τοπικά ακριβείς κατά Edgeworth διορθώσεις σχεδόν παντού στον παραμετρικό χώρο. Και αξίζει να σημειώσουμε ότι τα ανωτέρω αποτελέσματα αναμενέται ότι δεν επηρεάζονται από αλλαγές του μεγέθους του χρησιμοποιουμένου δείγματος.

'Οπως έχουμε ήδη αναφέρει στην σχετική συζήτηση του Τμήματος 3.5 του Κεφαλαίου 3, το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο F στατιστικό μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές. Τότε έχουμε υπερδιόρθωση του F στατιστικού, η οποία μπορεί να συμβεί μόνον αν το σύνηθες F στατιστικό πάρει πολύ μεγάλη τιμή, οπότε είναι σχεδόν βέβαιη η απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης. Παρ' όλα αυτά, ένα αρνητικό κατά Cornish-Fisher διορθωμένο F στατιστικό μπορεί να θεωρηθεί ως μια χρήσιμη προειδοποίηση ότι το μέγεθος του δείγματος είναι υπερβολικά μικρό σχετικά με τις παρατηρούμενες συσχετίσεις, με αποτέλεσμα να μην είναι εφαρμόσιμες οι ασυμπτωτικές μέθοδοι. Σε τέτοιες περιπτώσεις δεν χρειάζεται να διορθώνουμε το F στατιστικό για να διενεργήσουμε τον έλεγχο. Αντίθετα, οποτεδήποτε το σύνηθες F στατιστικό παίρνει τιμές "κοντά" στην κριτική τιμή (περιπτώσεις για τις οποίες ενδιαφερόμαστε περισσότερο) το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο F στατιστικό δεν παρουσιάζει το πρόβλημα της υπερδιόρθωσης. 'Ομως, από το γεγονός ότι το F στατιστικό παίρνει πάντα μικρότερη τιμή από το αντίστοιχο χ^2 στατιστικό και από την μορφή των κατά Cornish-Fisher διορθώσεων προκύπτει ότι, το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο χ^2 στατιστικό μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές με μεγαλύτερη πιθανότητα από ό,τι το αντίστοιχο κατά Cornish-Fisher διορθωμένο F στατιστικό. Αυτό σημαίνει ότι το

πρόβλημα της υπερδιόρθωσης είναι οξύτερο για το χ^2 στατιστικό, διότι το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο χ^2 στατιστικό μπορεί να πάρει αρνητική τιμή ακόμα και σε περιπτώσεις κατά τις οποίες το σύνηθες χ^2 στατιστικό παίρνει τιμές "κοντά" στην κριτική τιμή. Αυτός είναι ο λόγος που δεν εξετάσαμε πειραματικά τη συμπεριφορά του κατά Cornish-Fisher διορθωμένου χ^2 στατιστικού.

Όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό, το πρόβλημα της υπερδιόρθωσης μπορεί να εμφανιστεί με την μορφή αρνητικών "κριτικών τιμών" και στην περίπτωση των κατά Edgeworth διορθώσεων. Όμως, εφόσον οι κριτικές τιμές της F κατανομής είναι μικρότερες από τις κριτικές τιμές της χ^2 κατανομής, η χρήση της F, αντί της χ^2, κατανομής μειώνει, και σε αυτήν την περίπτωση, την πιθανότητα τέτοιας υπερδιόρθωσης.

Στην εφαρμοσμένη έρευνα, η χρήση των κατά Cornish-Fisher διορθώσεων, όπως εξειδικεύθησαν σε αυτό το κεφάλαιο, είναι πάρα πολύ απλή . Από την στιγμή που θα τα υπολογίσει, ο ερευνητής μπορεί να χρησιμοποιήσει τα κατά Cornish-Fisher διορθωμένα στατιστικά ακριβώς όπως τα αντίστοιχα συνήθη στατιστικά του κλασσικού γραμμικού υποδείγματος. Τα ίδια ισχύουν και για τα κατά Edgeworth διορθωμένα χωρία εμπιστοσύνης, όπως αυτά μπορούν να εξειδικευθούν σύμφωνα με τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου. Επομένως, οι ανωτέρω διορθώσεις μπορούν να γίνουν ένα χρήσιμο εργαλείο στην εφαρμοσμένη στατιστική και οικονομετρική έρευνα στα πλαίσια του γραμμικού υποδείγματος με ετεροσκεδαστικό στοχαστικό όρο ή τυχαίους συντελεστές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΦΑΙΝΟΜΕΝΙΚΑ ΑΣΥΣΧΕΤΙΣΤΕΣ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΕΙΣ (S.U.R.)

5.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο Zellner (1962) εισήγαγε μιαν αποτελεσματική μέθοδο για την εκτίμηση των παραμέτρων μιας κατηγορίας οικονομετρικών συστημάτων αλληλεξαρτημένων εξισώσεων, των οποίων οι διαταρακτικοί όροι όλων των εξισώσεων για κάθε συγκεκριμένη παρατήρηση συσχετίζονται (contemporaneously correlated disturbances). Αυτά τα υποδείγματα, που είναι γνωστά ως υποδείγματα φαινομενικά ασυσχέτιστων παλινδρομήσεων (Seemingly Unrelated Regressions (S.U.R.)), αποτελούν ειδική περίπτωση του γενικευμένου γραμμικού υποδείγματος, το οποίο παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 2.

Στο κεφάλαιο αυτό εξειδικεύονται οι αναλυτικοί τύποι των κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher διορθώσεων του μεγέθους των t και F ελέγχων για την περίπτωση των S.U.R. υποδειγμάτων. Σκοπός μας είναι να αναπτύξουμε απλούς λειτουργικούς τύπους για τον υπολογισμό των διαφόρων διορθώσεων, οι οποίοι να χρησιμοποιούν, όσο αυτό είναι δυνατό, ποσότητες που έχουν ήδη υπολογισθεί κατά την εκτιμητική διαδικασία. Οι τύποι που δίνονται στις Προτάσεις 5.1, 5.2 και 5.3, κατωτέρω, αποτελούν πραγματικά σημαντική βελτίωση σε σχέση με τους τύπους του Rothenberg (1984b), (1988) και απλοποιούν τον υπολογισμό των κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher διορθώσεων στην περίπτωση των S.U.R. υποδειγμάτων.

Στο Κεφάλαιο 2 έγινε η υπόθεση ότι η μήτρα συνδιακυμάνσεων των διαταρακτικών όρων, έστω Ω^{-1}, εκτός από έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα, ανήκει σε μια σφαίρα ακτίνας θ. Επομένως, ο ορισμός της τοπικά ακριβούς προσέγγισης προϋποθέτει ότι υπάρχει ένα βαθμωτό πολλαπλάσιο, σ^2, της μήτρας Ω^{-1} που μπορεί να εξετασθεί ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες παραμέτρους της. Ωστόσο, στην περίπτωση των S.U.R. υποδειγμάτων, οι παράμετροι σ και γ δεν είναι ταυτόχρονα ταυτοποιημένες, χωρίς την επιβολή επιπλέον περιορισμών. Ένας λογικός περιορισμός, που χρησιμοποιείται συνήθως στην οικονομετρία, είναι να θέσουμε σ = 1. Αυτήν την εξειδίκευση χρησιμοποιήσαμε σε αυτό το κεφάλαιο για να υπολογίσουμε τις διορθώσεις του μεγέθους των ασυμπτωτικών μορφών των ελέγχων t και F από προσεγγίσεις με την κανονική και την χ^2 κατανομή,

αντίστοιχα. Όμως, κάτω από τον ανωτέρω περιορισμό, υποτίθεται ότι είναι γνωστή με ακρίβεια η μήτρα συνδιακυμάνσεων του διανύσματος των λαθών όλων των εξισώσεων του εκτιμημένου υποδείγματος για κάθε συγκεκριμένη παρατήρηση. Αυτό αληθεύει μόνον αν το διάνυσμα των παραμέτρων γ μπορεί να εκτιμηθεί με ακρίβεια, δηλαδή αν το μέγεθος του δείγματος είναι άπειρο. Αντίθετα, σε μικρά δείγματα, η μήτρα συνδιακυμάνσεων του διανύσματος των λαθών όλων των εξισώσεων του εκτιμημένου υποδείγματος για κάθε συγκεκριμένη παρατήρηση δεν είναι, συνήθως, γνωστή με ακρίβεια. Μια λογική μέθοδος για να λάβουμε υπόψη μας αυτό το γεγονός είναι να εκτιμήσουμε την παράμετρο σ και να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους (2.11) και (2.35) που δίνουν τα συνήθη t και F στατιστικά ελέγχου, αντίστοιχα. Είναι προφανές ότι η μέθοδος δεν έχει νόημα από άποψη εκτιμητικής, αφού δεν είναι δυνατόν να εκτιμήσουμε μια μη ταυτοποιημένη παράμετρο. Όμως, η μέθοδος χρησιμοποιείται για να βελτιώσει το μέγεθος των ελέγχων και η επιτυχία ή αποτυχία της στο έργο αυτό πρέπει να αποτελέσει το μόνο κριτήριο αξιολόγησής της. Οι έλεγχοι που προκύπτουν με αυτόν τον τρόπο είναι τοπικά ακριβείς (locally exact) και η διαφορά του πραγματικού από το ονομαστικό τους μέγεθος αναμένεται να είναι μικρότερη από την αντίστοιχη διαφορά των ασυμπτωτικών μορφών αυτών των ελέγχων.

5.2 ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ

Θεωρούμε ένα σύστημα **k** εξισώσεων

$$Y = ZB + U, \qquad (5.1)$$

όπου Y, Z είναι οι T×**k**, T×m μήτρες των παρατηρήσεων των ενδογενών και εξωγενών μεταβλητών, αντίστοιχα, και οι γραμμές της T×**k** μήτρας των διαταρακτικών όρων U είναι ανεξάρτητα $N_k(0,\Sigma)$ διανύσματα. Οι στήλες, b_i, της m×**k** μήτρας παραμέτρων B ικανοποιούν τους περιορισμούς

$$b_i = R_i\beta_i \quad (i = 1,\ldots,k), \qquad (5.2)$$

όπου R_i είναι μια m×n_i γνωστή μήτρα και β_i είναι ένα n_i×1 διάνυσμα αγνώστων παραμέτρων.

Ορίζουμε την **k**m×n μήτρα R και το n×1 ($n = \sum_{i=1}^{k} n_i$) διάνυσμα β ως

$$R = \left[(\delta_{ij}R_i)_{i,j=1,\ldots,k}\right], \quad \beta = \left[(\beta_i)_{i=1,\ldots,k}\right], \tag{5.3}$$

όπου δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker. Διανυσματίζοντας την (5.1) βρίσκουμε

$$y = X\beta + u, \tag{5.4}$$

όπου

$$y = vec(Y), \quad u = vec(U), \quad X = (I_k \otimes Z)R. \tag{5.5}$$

Η $Tk \times Tk$ μήτρα

$$\Omega = \left[E(uu')\right]^{-1} = \Sigma^{-1} \otimes I_T \tag{5.6}$$

είναι συνάρτηση του $k^2 \times 1$ διανύσματος

$$\gamma = vec(\Sigma^{-1}) \in \Theta = R^{k^2} - V, \tag{5.7}$$

όπου V είναι ο υποχώρος του R^{k^2} στον οποίο η μήτρα Σ δεν είναι θετικά ορισμένη.

Γενικά, το διάνυσμα γ εκτιμάται από την σχέση

$$\hat{\gamma} = vec\left[(Y-Z\hat{B})'(Y-Z\hat{B})/T\right]^{-1}, \tag{5.8}$$

όπου $\hat{B}$ είναι κάθε συνεπής εκτιμητής της μήτρας B. Οι εκτιμητές της μήτρας B που χρησιμοποιούνται συχνότερα στην εφαρμοσμένη έρευνα είναι οι ακόλουθοι:

(i) Ο εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων χωρίς περιορισμούς (UL)

$$\hat{B}_{UL} = (Z'Z)^{-1}Z'Y. \tag{5.9}$$

(ii) Ο εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων με περιορισμούς (RL)

$$vec(\hat{B}_{RL}) = R(X'X)^{-1}X'y. \tag{5.10}$$

(iii) Ο εκτιμητής των γενικευμένων ελαχίστων τετραγώνων (GL)

$$vec(\hat{B}_{GL}) = R(X'\hat{\Omega}X)^{-1}X'\hat{\Omega}y, \tag{5.11}$$

όπου $\hat{\Omega}$ είναι ο RL ή ο GL εκτιμητής της μήτρας Ω.

(iv) Ο επαναληπτικός εκτιμητής των γενικευμένων ελαχίστων τετραγώνων (IG), $\hat{B}_{IG}$, ο οποίος προκύπτει από την επαναληπτική χρησιμοποίηση της εκτιμητικής διαδικασίας με την μέθοδο των γενικευμένων ελαχίστων τετραγώνων (GLS).

(v) Ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας (ML), $\hat{B}_{ML}$, για τον οποίον ο Dhrymes (1971) έδειξε ότι προκύπτει αν επαναλάβουμε την GLS εκτιμητική διαδικασία μέχρι να συγκλίνει.

Αποδεικνύεται ότι οι συνθήκες κανονικότητας του Κεφαλαίου 2 ικανοποιούνται για όλους τους ανωτέρω εκτιμητές, υπό την προϋπόθεση ότι οι μήτρες

$$A = X'\Omega X/T, \quad \Gamma = Z'Z/T \tag{5.12}$$

συγκλίνουν σε μη ιδιάζουσες μήτρες, καθώς το $T \longrightarrow \infty$.

Επιμερίζουμε τις $n \times n$ μήτρες

$$G = A^{-1}, \quad P = GQG \tag{5.13}$$

σε k^2 $n_i \times n_j$ υπομήτρες G_{ij} και P_{ij} $(i, j = 1,\ldots,k)$. Επίσης ορίζουμε τις $n_i \times n_j$ μήτρες

$$B_{ij} = X_i'X_j/T, \quad B_{iklj} = B_{ik}G_{kl}B_{lj} \quad (i, j, k, l = 1,\ldots,k), \tag{5.14}$$

όπου

$$X_i = ZR_i \tag{5.15}$$

είναι η $T \times n_i$ μήτρα των παλινδρομητών (regressors) στην i-εξίσωση.

Επιπλέον, για οποιουσδήποτε δείκτες i, j $(i, j = 1,\ldots,k)$ ορίζουμε τον σύνθετο δείκτη

$$(ij) = i + k(j-1) \quad ((ij) = 1,\ldots,k^2). \tag{5.16}$$

Προφανώς το $\gamma_{(ij)}$, δηλαδή το (ij)-στοιχείο του διανύσματος γ, ισούται με το (i,j)-στοιχείο της μήτρας Σ^{-1}.

5.3 ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΤΩΝ t ΚΑΙ F ΕΛΕΓΧΩΝ

Όταν ο αριθμός των εξισώσεων είναι μεγάλος, ο υπολογισμός των διανυσμάτων l και c και των μητρών L, C και D από τους ορισμούς (2.12), (2.13), (2.14), (2.28) και (2.29) είναι αρκετά πολύπλοκος και είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε τους τύπους που δίνονται στις ακόλουθες πρότασεις.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.1: *Τα στοιχεία του* $k^2 \times 1$ *διανύσματος* l *και της* $k^2 \times k^2$ *μήτρας* L, *που ορίσθηκαν στην* (2.12), *μπορούν να υπολογισθούν από τους τύπους*

$$l_{(ij)} = \sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{k} h_\alpha' G_{\alpha i} B_{ij} G_{j\beta} h_\beta,$$

$$l_{(ik)(lj)} = \sigma_{kl} l_{(ij)} - 2\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{k} h_\alpha' G_{\alpha i} B_{iklj} G_{j\beta} h_\beta, \tag{5.17}$$

αντίστοιχα, όπου $h = e/(e'Ge)^{1/2}$, h_α *είναι το υποδιάνυσμα του*

διανύσματος h, το οποίο αντιστοιχεί στους περιορισμούς της α-εξίσωσης και σ_{ij} είναι το (i,j)-στοιχείο της μήτρας Σ. Όμοια, τα στοιχεία του $k^2 \times 1$ διανύσματος c και των $k^2 \times k^2$ μητρών C και D, που ορίσθηκαν στην (2.28), μπορούν να υπολογισθούν από τους τύπους

$$c_{(ij)} = tr(B_{ij}P_{ji}),$$

$$c_{(ik)(lj)} = \sigma_{kl}c_{(ij)} - 2tr(B_{ikl}P_{ji}), \qquad (5.18)$$

$$d_{(ik)(lj)} = tr(B_{ik}P_{kl}B_{lj}P_{ji})/2,$$

αντίστοιχα.

Στην εφαρμοσμένη οικονομετρική έρευνα σπάνια ελέγχονται περιορισμοί που αναφέρονται σε περισσότερες από μιαν εξισώσεις ενός οικονομετρικού συστήματος (cross-equation restrictions). Αν υποθέσουμε ότι οι προς έλεγχον περιορισμοί αναφέρονται σε μια μόνον εξίσωση, έστω την πρώτη, οι υποθέσεις (2.10) και (2.26) μπορούν να γραφούν ως

$$e_1'\beta_1 - e_o = 0$$

και (5.19)

$$H_{11}\beta_1 - h = 0,$$

αντίστοιχα, όπου β_1 είναι οι διαρθρωτικές παράμετροι της πρώτης εξίσωσης, οι οποίες δεν υπόκεινται σε περιορισμούς. Σε μιαν τέτοια περίπτωση είναι δυνατόν να επιτύχουμε σημαντικές απλοποιήσεις, οι οποίες συνοψίζονται στην πρόταση που ακολουθεί.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.2: Αν οι προς έλεγχον υποθέσεις πάρουν την μορφή (5.19), οι τύποι (5.17) μπορούν να γραφούν ως

$$l_{(ij)} = e_*'G_{1i}B_{ij}G_{j1}e_*,$$

(5.20)

$$l_{(ik)(lj)} = \sigma_{kl}l_{(ij)} - 2e_*'G_{1i}B_{ikl}G_{j1}e_*,$$

όπου $e_* = e_1/(e_1'G_{11}e_1)^{1/2}$. Επιπλέον, στους τύπους (5.18) η μήτρα P_{ij} μπορεί να αντικατασταθεί από την μήτρα

$$P^1_{ij} = G_{i1}H_{11}'(H_{11}G_{11}H_{11}')^{-1}H_{11}G_{1j}. \qquad (5.21)$$

Αυτό που απομένει είναι ο υπολογισμός των παραμέτρων (2.8), οι οποίες μπορούν να εκφραστούν σε όρους της $k \times k$ μήτρας

$$\Delta_I = \lim_{T\to\infty} TE\left[(\hat{B}_I-\hat{B}_{UL})'\Gamma(\hat{B}_I-\hat{B}_{UL})\right] \quad (I = UL, RL, GL, IG, ML) \quad (5.22)$$

και σε όρους της $k^2\times k^2$ μήτρας N, της οποίας το ((ij),(kl))-στοιχείο είναι

$$v_{(ij)(kl)} = \sigma_{ik}\sigma_{jl} + \sigma_{il}\sigma_{jk} \quad (i, j, k, l = 1,\ldots,k), \quad (5.23)$$

όπου σ_{ij} είναι το (i,j)-στοιχείο της μήτρας Σ.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.3: *Κάτω από τις υποθέσεις αυτού του κεφαλαίου, οι παράμετροι (2.8), για κάθε εκτιμητή του γ από την (5.8) με* $\hat{B} = \hat{B}_I$ (I = UL, RL, GL, IG, ML), *μπορούν να υπολογισθούν από τους τύπους*

$$\Lambda = (\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})N(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1}), \quad \lambda = 0, \quad \lambda_o = 0,$$

$$\mu = vec\left[-\Sigma^{-1}\Delta_I\Sigma^{-1} + (m+k+1)\Sigma^{-1}\right], \quad (5.24)$$

$$\mu_o = tr\left[\Sigma^{-1}(\Delta_{GL}-\Delta_I)\right]/k + n/k = tr\left[(M_I-M_{GL})\Sigma\right]/k + n/k,$$

όπου

$$M_I = (m+k+1)\Sigma^{-1} - \Sigma^{-1}\Delta_I\Sigma^{-1},$$

$$M_{GL} = (m+k+1)\Sigma^{-1} - \Sigma^{-1}\Delta_{GL}\Sigma^{-1}, \quad (5.25)$$

$$\Delta_{UL} = 0, \quad \Delta_{RL} = \left[\left[(tr(B_{ii}^{-1}B_{ij}B_{jj}^{-1}B_{ji}) - n_i - n_j + m)\sigma_{ji}\right]_{i,j=1,\ldots,k}\right],$$

$$\Delta_{GL} = \Delta_{IG} = \Delta_{ML} = m\Sigma - \left[(tr(G_{ij}B_{ji}))_{i,j=1,\ldots,k}\right].$$

Χρησιμοποιώντας τις Προτάσεις 5.1 (ή 5.2) και 5.3 είναι εύκολο να υπολογίσουμε τις παραμέτρους (2.16), (2.31) και (2.37) των κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher αναπτυγμάτων για την περίπτωση ενός οικονομετρικού συστήματος φαινομενικά ασυσχέτιστων παλινδρομήσεων. Φυσικά, στην εφαρμοσμένη έρευνα η μήτρα Σ και τα στοιχεία της, σ_{ij} (i, j = 1,...,k), πρέπει να αντικατασταθούν από τους αντίστοιχους εκτιμητές.

5.4 ΤΕΛΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Τελειώνοντας αυτό το κεφάλαιο κρίνουμε αναγκαίο να αναφέρουμε μερικές τελικές παρατηρήσεις.

Έχουμε, ήδη, επισημάνει ότι, στην περίπτωση του υποδείγματος φαινομενικά ασυσχέτιστων παλινδρομήσεων οι παράμετροι σ και γ δεν

είναι, γενικά, ταυτόχρονα ταυτοποιημένες. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και στην περίπτωση του γραμμικού υποδείγματος με ετεροσκεδαστικό στοχαστικό όρο. Επιπλέον, και τα δύο ανωτέρω οικονομετρικά υποδείγματα είναι ειδικές περιπτώσεις του γενικευμένου γραμμικού υποδείγματος. Είναι, λοιπόν, λογικό να αναμένουμε ότι η ποιότητα των διαφόρων διορθώσεων του μεγέθους των t και F ελέγχων θα είναι παρόμοια και για τα δύο προαναφερθέντα οικονομετρικά υποδείγματα. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο δεν μελετήσαμε πειραματικά την απόδοση των διαφόρων μορφών των ελέγχων t και F για την περίπτωση του συστήματος φαινομενικά ασυσχέτιστων παλινδρομήσεων.

Στην εφαρμοσμένη έρευνα, η χρήση των κατά Cornish-Fisher διορθώσεων, όπως εξειδικεύθησαν με βάση τα αποτελέσματα των Προτάσεων 5.1 (ή 5.2) και 5.3, είναι πάρα πολύ απλή. Από την στιγμή που θα υπολογισθούν, τα κατά Cornish-Fisher διορθωμένα στατιστικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν ακριβώς όπως τα αντίστοιχα συνήθη στατιστικά του κλασσικού γραμμικού υποδείγματος. Τα ίδια ισχύουν και για τα κατά Edgeworth διορθωμένα χωρία εμπιστοσύνης, όπως αυτά μπορούν να εξειδικευθούν με βάση τις προτάσεις που παρουσιάστηκαν σε αυτό το κεφάλαιο. Επομένως, μπορούμε να αναμένουμε ότι οι ανωτέρω διορθώσεις μπορούν να γίνουν ένα χρήσιμο εργαλείο της εφαρμοσμένης στατιστικής και οικονομετρικής έρευνας, στα πλαίσια των S.U.R. υποδειγμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΕΛΕΓΧΟΣ ΤΗΣ ΕΞΩΓΕΝΕΙΑΣ ΤΩΝ ΒΟΗΘΗΤΙΚΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΕΝΟΣ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

6.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μέθοδος των Βοηθητικών Μεταβλητών (Instrumental Variables) είναι πολύ σημαντική για την εκτίμηση των παραμέτρων στοχαστικών εξισώσεων, οποτεδήποτε μερικές ή όλες οι ερμηνευτικές μεταβλητές συσχετίζονται με τους διαταρακτικούς όρους. Κατά την εφαρμογή της μεθόδου, δύο σημαντικά και ενδιαφέροντα θέματα τίθενται προς έρευνα: (α) κατά πόσον οι επιλεγείσες βοηθητικές μεταβλητές είναι "εξωγενείς" ("exogenous"), δηλαδή ανεξάρτητες από τους στοχαστικούς όρους της εξίσωσης και (β) κατά πόσον το διαθέσιμο σύνολο των βοηθητικών μεταβλητών χρησιμοποιείται "αποτελεσματικά" ("efficiently"). Το ζήτημα της αποτελεσματικής χρησιμοποίησης των βοηθητικών μεταβλητών έχει λυθεί τελειωτικά από τους Durbin (1954), Sargan (1958), (1959) και Hansen (1982). Το θέμα της "εξωγένειας" ("exogeneity") των βοηθητικών μεταβλητών έχει εξετασθεί κυρίως στην ειδική περίπτωση κατά την οποία το θεωρούμενο υποσύνολο των βοηθητικών μεταβλητών είναι επίσης και υποσύνολο του συνόλου των ερμηνευτικών μεταβλητών της εξίσωσης. Το πρόβλημα του ελέγχου της "ορθογωνιότητας" ("orthogonality") των παλινδρομητών (regressors) προς τους διαταρακτικούς όρους έχει ερευνηθεί εκτενώς από πολλούς ερευνητές, σημαντικότεροι των οποίων είναι οι Revankar και Hartley (1973), Wu (1973), (1974), Hausman (1978), Revankar (1978), Hwang (1980), Richard (1980), Engle (1982), Holly (1982a), (1982b) και Smith (1983).

Είναι σχετικά μικρότερη η ερευνητική προσπάθεια που αφιερώθηκε στην γενική περίπτωση του ελέγχου της ορθογωνιότητας των διαταρακτικών όρων προς ένα υποσύνολο των βοηθητικών μεταβλητών, οι οποίες ενεδέχεται να περιλαμβάνονται ή όχι στην εξίσωση παλινδρόμησης. Εξετάζοντας αυτήν την περίπτωση οι Hausman και Taylor (1981) πρότειναν ένα γενικευμένο έλεγχο εξειδίκευσης και ο Newey (1985) έναν έλεγχο εξειδίκευσης με την γενικευμένη μέθοδο των ροπών (generalised method of moments).

Σε αυτό το κεφάλαιο αναπτύσσονται έλεγχοι της ορθογωνιότητας των βοηθητικών μεταβλητών μιας υπερταυτοποιημένης (overidentified)

διαρθρωτικής εξίσωσης ενός οικονομετρικού συστήματος. Συνήθως, η ορθογωνιότητα των βοηθητικών μεταβλητών προς τους διαταρακτικούς όρους είναι αποτέλεσμα της εξωγένειας των βοηθητικών μεταβλητών. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίον οι όροι "ορθογωνιότητα" και "εξωγένεια" χρησιμοποιούνται ως ταυτόσημοι σε αυτήν την διατριβή.

Χρησιμοποιώντας συμβατικές μεθόδους με περιορισμένες πληροφορίες (limited information methods) είναι εύκολο να πάρουμε το κριτήριο του λόγου πιθανοφανειών (likelyhood ratio (LR)) (βλ. Anderson and Rubin (1949)) για τον έλεγχο των υπερταυτοποιητικών διαρθρωτικών περιορισμών (overidentifying structural restrictions) μιας εξίσωσης ενός οικονομετρικού συστήματος και δύο χρήσιμες γραμμικοποιήσεις του. Η πρώτη είναι το κριτήριο "υπερταυτοποίησης" ("overidentifiability" test) (βλ. Anderson and Rubin (1949)), που είναι ένα ασυμπτωτικά ισοδύναμο κριτήριο μικρού δείγματος. Η δεύτερη είναι το κριτήριο κακής εξειδίκευσης (misspecification test) του Sargan (1958) που, όπως απέδειξε ο Μαγδαληνός (1988), ελέγχει τους υπερταυτοποιητικούς περιορισμούς με βάση την αρχή των πολλαπλασιαστών Lagrange (Lagrange multiplier principle). Αποδεικνύται ότι τα τρία ανωτέρω κριτήρια έχουν, με ακρίβεια τρίτης τάξης προσέγγισης, την ίδια συνάρτηση τοπικής ισχύος (local power function) (βλ. Μαγδαληνός (1988)). Τα ανωτέρω κριτήρια μπορούν να γενικευθούν αν, αντί του εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας με περιορισμένες πληροφορίες (LIML), χρησιμοποιηθεί οποιοσδήποτε άλλος ασυμπτωτικά ισοδύναμος εκτιμητής.

Οι κατά μέγεθος διορθωμένοι έλεγχοι των Anderson, Rubin και Sargan είναι ασυμπτωτικά αδιάκριτοι (asymptotically indistinguishable), δηλαδή έχουν το ίδιο πρώτης τάξης (first order) μέγεθος (size) και την ίδια πρώτης τάξης συνάρτηση τοπικής ισχύος. Επομένως, για να μελετήσουμε την σχετική απόδοση αυτών των ελέγχων, χρειαζόμαστε εκλεπτυσμένες (refined) ασυμπτωτικές μεθόδους που χρησιμοποιούν ανώτερης τάξης ασυμπτωτικές προσεγγίσεις του μεγέθους και της συνάρτησης τοπικής ισχύος τους. Ωστόσο, η παραδοσιακή προσέγγιση με ανάπτυξη του στατιστικού του ελέγχου σε μια σειρά τύπου Nagar (1959) οδηγεί σε υπερβολικά περίπλοκα αναπτύγματα. Σημαντικές απλοποιήσεις προκύπτουν με την χρήση υπό συνθήκην (conditional) αναπτυγμάτων ως προς όλες τις

στοχαστικές ποσότητες του υποδείγματος που είναι ανεξάρτητες από τους διαταρακτικούς όρους της εξίσωσης. Τότε οι όροι του αναπτύγματος είναι πολυώνυμα του στοχαστικού όρου της εξίσωσης με συντελεστές ανεξάρτητους από αυτόν τον στοχαστικό όρο. Τέτοια αναπτύγματα οδηγούν, υπό κανονικές συνθήκες, σε προσεγγίσεις κατά Edgeworth της αντίστοιχης υπό συνθήκην συνάρτησης κατανομής του στατιστικού του ελέγχου (βλ. Michel (1979)). Όμως, στην περίπτωση που εξετάζουμε σε αυτό το κεφάλαιο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το σχετικά απλό ανάπτυγμα της υπό συνθήκην χαρακτηριστικής συνάρτησης για να πάρουμε ένα ανάπτυγμα της μη δεσμευμένης (unconditional) χαρακτηριστικής συνάρτησης και, κατά συνέπειαν, ένα ανάπτυγμα κατά Edgeworth της μη δεσμευμένης συνάρτησης κατανομής του στατιστικού του ελέγχου. Μια παρόμοια τεχνική χρησιμοποιήθηκε από τον Phillips (1977b).

Ο Sargan ((1958), σελ. 404) βεβαιώνει ότι το κριτήριο που εισηγείται "ελέγχει την υπόθεση ότι υφίσταται μια σχέση μεταξύ των προτεινομένων μεταβλητών και του καταλοίπου που είναι ανεξάρτητο από όλες τις βοηθητικές μεταβλητές". Η ανωτέρω ερμηνεία είναι φυσική, αν ληφθεί υπόψην ότι το κριτήριο του Sargan είναι ειδική περίπτωση του κριτηρίου του Hansen ((1982), σελ. 1049) για τον έλεγχο των υπερταυτοποιητικών συνθηκών ορθογωνιότητας (orthogonality conditions). Επιπλέον, η ερμηνεία αυτή μπορεί να θεωρηθεί έγκυρη και για τα κριτήρια LR και υπερταυτοποίησης, λόγω της ασυμπτωτικής ισοδυναμίας αυτών των δύο κριτηρίων προς το κριτήριο του Sargan.

Από αυτήν την ερμηνεία ανακύπτουν πολλά ενδιαφέροντα ερωτήματα. Το πρώτο σχετίζεται με το κατά πόσον οι έλεγχοι των Anderson, Rubin και Sargan είναι συνεπείς κάτω από την εναλλακτική υπόθεση των αναληθών (false) συνθηκών ορθογωνιότητας των βοηθητικών μεταβλητών. Αυτό που αναμένουμε διαισθητικά είναι ότι μόνον υπερταυτοποιητικές συνθήκες ορθογωνιότητας μπορούν να ελεγχθούν, αν και στην πράξη δεν γνωρίζουμε ποιοί περιορισμοί ταυτοποιούν και ποιοί υπερταυτοποιούν την εξίσωση. Στην συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την πρώτης τάξης τοπική ισχύ του κριτηρίου για να τυποποιήσουμε την επαγόμενη ελεγχόμενη υπόθεση (implicit null hypothesis) του ελέγχου, δηλαδή την υπόθεση της οποίας κάθε

εναλλακτική οδηγεί σε συνεπείς ελέγχους. Το δεύτερο ερώτημα είναι σχετικό με την δυνατότητα σύγκρισης της απόδοσης των ελέγχων των Anderson, Rubin και Sargan κάτω από τις δύο εναλλακτικές υποθέσεις, δηλαδή, κάτω από την υπόθεση των αναληθών διαρθρωτικών περιορισμών και την υπόθεση των αναληθών συνθηκών ορθογωνιότητας. Θα δείξουμε ότι, με ακρίβεια δεύτερης τάξης (second order) προσέγγισης, οι έλεγχοι των διαρθρωτικών περιορισμών είναι μεροληπτικοί σε ένα υποσύνολο του παραμετρικού χώρου, ενώ οι έλεγχοι των συνθηκών ορθογωνιότητας είναι αμερόληπτοι. Το τρίτο ερώτημα σχετίζεται με το κατά πόσον κάποιος από τους ελέγχους των Anderson, Rubin και Sargan είναι ισχυρότερος από τους άλλους έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης των αναληθών συνθηκών ορθογωνιότητας. Αποδεικνύεται ότι η τρίτης τάξης (third order) τοπική ισχύς όλων των κατά μέγεθος διορθωμένων ανωτέρω ελέγχων είναι η ίδια και ότι δεν εξαρτάται από τον συγκεκριμένο εκτιμητή με περιορισμένες πληροφορίες που χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό του αντιστοίχου στατιστικού.

'Οταν το μέγεθος του χρησιμοποιουμένου δείγματος είναι μικρό δημιουργούνται σοβαρά προβλήματα, διότι σε αυτήν την περίπτωση το πραγματικό μέγεθος ενός ελέγχου διαφέρει σημαντικά από το ονομαστικό του μέγεθος, γεγονός που ενδέχεται να οδηγήσει σε εσφαλμένα συμπεράσματα. Για αυτόν τον λόγο στο παρόν κεφάλαιο αναπτύσσονται, επιπλέον, αναλυτικοί τύποι για τις κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher διορθώσεις του μεγέθους των προτεινομένων ελέγχων εξωγένειας των βοηθητικών μεταβλητών. Η φύση και η συγκριτική αξιολόγηση των κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher διορθώσεων καθώς και το πρόβλημα της χρησιμοποίησης της ασυμπτωτικής ή της ακριβούς (exact) μορφής του ελέγχου είναι ζητήματα που έχουν συζητηθεί στο Κεφάλαιο 1. Καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια έτσι ώστε οι ανωτέρω διορθώσεις να επιτυγχάνονται με την χρήση απλών λειτουργικών τύπων, στηριζόμενων, όσο αυτό είναι δυνατό, σε ποσότητες που έχουν ήδη υπολογισθεί κατά την εκτιμητική διαδικασία.

Παρά το γεγονός ότι οι κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher μέθοδοι διόρθωσης έχουν και οι δύο ένα σφάλμα τάξης $O(T^{-3/2})$, σε πεπερασμένα δείγματα το σφάλμα των δύο μεθόδων διόρθωσης μπορεί να

διαφέρει σημαντικά. Για αυτόν τον λόγο πραγματοποιήσαμε Monte Carlo πειράματα για να διερευνήσουμε την απόδοση των προτεινομένων ελέγχων εξωγένειας των βοηθητικών μεταβλητών και των εναλλακτικών μεθόδων διόρθωσης του μεγέθους τους.

6.2 ΤΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ

Θεωρούμε την ακόλουθη απλή διαρθρωτική εξίσωση

$$y = Y\beta + \sigma u, \tag{6.1}$$

όπου y είναι το $T\times 1$ διάνυσμα των παρατηρήσεων της εξαρτημένης ενδογενούς μεταβλητής, Y είναι η $T\times n$ μήτρα των παλινδρομητών (regressors) της εξίσωσης, β είναι το $n\times 1$ διάνυσμα των αγνώστων παραμέτρων της εξίσωσης και σu ($\sigma > 0$) είναι το $T\times 1$ διάνυσμα των διαταρακτικών όρων. Επιπλέον, θεωρούμε την $T\times m$ ($m > n$) μήτρα H του συνόλου των βοηθητικών μεταβλητών (instruments) του συστήματος. Συνεπώς, ο "βαθμός υπερταυτοποίησης" ("degree of overidentification") της εξίσωσης (6.1), έστω $l = m-n$, είναι μεγαλύτερος από το μηδέν. Υποθέτουμε ότι οι γραμμές της μήτρας $(u:Y:H)$ είναι ανεξάρτητα $N(\mu_t', \Sigma)$ διανύσματα, όπου

$$\mu_t' = [0,\ E(y_t'),\ E(h_t')], \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & q' & p' \\ q & C & R' \\ p & R & Q \end{bmatrix}, \tag{6.2}$$

όπου y_t' και h_t' είναι οι t-γραμμές των μητρών Y και H, αντίστοιχα, και q, p, C, R, Q είναι, αντίστοιχα, $n\times 1$, $m\times 1$, $n\times n$, $m\times n$, $m\times m$ σταθερά διανύσματα και σταθερές μήτρες.

Η ανωτέρω υπόθεση ικανοποιείται αν η (6.1) είναι μια διαρθρωτική εξίσωση από ένα οικονομετρικό σύστημα για το οποίο ισχύουν οι "κλασσικές υποθέσεις", δηλαδή έχει κανονικούς (normal) διαταρακτικούς όρους και ενδογενείς μεταβλητές χωρίς χρονική υστέρηση (no lagged endogenous variables).

Ορίζουμε τις $T\times n$ και $T\times m$ μήτρες

$$X = Y - uq', \qquad Z = H - up', \tag{6.3}$$

αντίστοιχα, οι οποίες είναι ασυσχέτιστες με (και συνεπώς ανεξάρτητες από) το διάνυσμα u. Έστω

$$X = X_o + V, \qquad Z = Z_o + W, \tag{6.4}$$

όπου X_o, Z_o είναι τα μή στοχαστικά (non-stochastic) και V, W είναι τα στοχαστικά (stochastic) μέρη των μητρών X, Z, αντίστοιχα. Από τους ορισμούς(6.2), (6.3) και (6.4) έπεται ότι

$$X_o = E(X) = E(Y), \quad Z_o = E(Z) = E(H). \tag{6.5}$$

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι οι γραμμές της μήτρας (V:W) είναι ανεξάρτητα $N(0,\Sigma_o)$ διανύσματα, όπου 0 είναι το μηδενικό διάνυσμα και

$$\Sigma_o = \begin{bmatrix} C-qq' & R'-qp' \\ R-pq' & Q-pp' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_o & R_o' \\ R_o & Q_o \end{bmatrix}, \tag{6.6}$$

όπου C_o, R_o, Q_o είναι n×n, m×n, m×m σταθερές μήτρες, αντίστοιχα.

Υποθέτουμε ότι οι μήτρες Z'Z/T, Z'X/T έχουν πλήρη στηλοβαθμό (column rank) και ότι, καθώς το $T\longrightarrow\infty$, συγκλίνουν σε πεπερασμένες μήτρες που έχουν πλήρη στηλοβαθμό. Επίσης, υποθέτουμε ότι η μήτρα X'X/T παραμένει φραγμένη, καθώς το $T\longrightarrow\infty$, δηλαδή $X'X/T=O_p(1)$.

Οι υποθέσεις της προηγουμένης παραγράφου συνεπάγονται τις συνθήκες βαθμού (rank conditions) για την ταυτοποίηση της εξίσωσης (6.1) με την χρησιμοποίηση του συνόλου των βοηθητικών μεταβλητών του συστήματος. Ωστόσο, οι υποθέσεις αυτές είναι πολύ πιο γενικές. Διότι δεν υποθέτουμε καμία σχέση μεταξύ των εξωγενών μεταβλητών που ενδεχομένως περιλαμβάνονται στην εξίσωση και των υπολοίπων, μη περιλαμβανομένων, εξωγενών μεταβλητών του συστήματος. Αυτό σημαίνει ότι είναι επιτρεπτή η ύπαρξη εναλλακτικών υποδειγμάτων ανηγμένης μορφής (reduced form models) στα οποία οι ενδογενείς μεταβλητές καθορίζονται από διαφορετικά υποσύνολα του συνόλου των εξωγενών μεταβλητών, κάτι που συμβαίνει συχνά σε υποδείγματα ορθολογικών προσδοκιών (rational expectations models) (βλ. Turkington (1985)). Επιπλέον, οι βοηθητικές μεταβλητές <u>δεν</u> υποτίθενται ότι είναι αποτελεσματικές (efficient) και συνεπώς η ανάλυση που ακολουθεί περιλαμβάνει και τις περιπτώσεις υποδειγμάτων με "λάθη στις μεταβλητές" ("errors in variables") καθώς και την περίπτωση εκτιμητών που χρησιμοποιούν ως βοηθητικές μεταβλητές ένα υποσύνολο των προκαθορισμένων μεταβλητών, ή ένα υποσύνολο των κυρίων συνιστωσών (principal components) τους, ή κάποιο συνδυασμό προκαθορισμένων μεταβλητών και κυρίων συνιστωσών (βλ. Kloek and Mennes (1960)). Επειδή σε τέτοια υποδείγματα η υπόθεση της ύπαρξης

άριστων βοηθητικών μεταβλητών (optimal instruments) είναι συχνά μη ρεαλιστική, οι υποθέσεις του υποδείγματός μας είναι απολύτως συμβιβαστές με τις συνήθεις οικονομετρικές εξειδικεύσεις.

Για να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό, δεν υποθέτουμε ρητά ότι μερικοί παλινδρομητές στην (6.1) είναι εξωγενείς μεταβλητές, δηλαδή ότι μερικές στήλες της μήτρας Y μπορεί να ανήκουν και στην μήτρα H. Αυτή η εξειδίκευση μπορεί να συμπεριληφθεί στο υπόδειγμά μας με την χρήση του κατάλληλου ορισμού της μήτρας Σ. Π.χ., ορισμένα στοιχεία των διανυσμάτων p και q και τα αντίστοιχα στοιχεία των μητρών C και Q θα πρέπει να είναι ίσα.

Για κάθε μήτρα Ω συμβολίζουμε με $R(\Omega)$, $N(\Omega)$ τον χώρο που δημιουργείται από τις στήλες της μήτρας Ω και το ορθογώνιο συμπλήρωμά του, αντίστοιχα (βλ. Seber (1980), σελ. 2). Επιπλέον, συμβολίζουμε με P_{Ω}, $\bar{P}_{\Omega}$ τους ορθογώνιους προβολικούς τελεστές στους χώρους $R(\Omega)$ και $N(\Omega)$, αντίστοιχα.

Οι βοηθητικές μεταβλητές είναι εξωγενείς αν και μόνον αν ισχύει η (μηδενική) υπόθεση

$$H_o: p = 0. \tag{6.7}$$

Στην συνέχεια αυτού του τμήματος θα μελετήσουμε την συνάρτηση κατανομής των στατιστικών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ελεγχθεί η υπόθεση (6.7) έναντι της ακολουθίας των τοπικών εναλλακτικών υποθέσεων (local alternatives)

$$H_1: p = \tau\delta, \tag{6.8}$$

όπου $\tau = 1/\sqrt{T}$ είναι η "ασυμπτωτική κλίμακα" ("asymptotic scale") των αναπτυγμάτων μας και δ είναι ένα σταθερό m×1 διάνυσμα.

Ακολουθώντας τους Anderson και Rubin (1949), μπορούμε να δείξουμε ότι το κριτήριο του λόγου πιθανοφανειών (likelyhood ratio (LR) test) για τον έλεγχο της εξωγένειας των βοηθητικών μεταβλητών (δηλαδή της υπόθεσης (6.7)) είναι

$$LR = T\log\lambda(\hat{\beta}), \tag{6.9}$$

όπου

$$\lambda(\hat{\beta}) = \hat{u}'\hat{u}/\hat{u}'\bar{P}_{H}\hat{u}, \quad \hat{u} = y - Y\hat{\beta}, \tag{6.10}$$

και $\hat{\beta}$ είναι ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας με περιορισμένες πληροφορίες (LIML) του β, αν χρησιμοποιηθεί το πλήρες σύνολο των

βοηθητικών μεταβλητών.

Δύο πολύ χρήσιμες γραμμικοποιήσεις του στατιστικού (6.9) είναι το στατιστικό υπερταυτοποίησης (βλ. Anderson and Rubin (1949))

$$L = T(\lambda(\hat{\beta}) - 1) = \frac{\hat{u}'P_H\hat{u}}{\hat{u}'\bar{P}_H\hat{u}/T} \qquad (6.11)$$

και το στατιστικό του Sargan (1958)

$$S = T\,\frac{\lambda(\hat{\beta}) - 1}{\lambda(\hat{\beta})} = \frac{\hat{u}'P_H\hat{u}}{\hat{u}'\hat{u}/T}\,. \qquad (6.12)$$

Γενικεύσεις των ανωτέρω στατιστικών προκύπτουν με αντικατάσταση του $\hat{\beta}$ από οποιονδήποτε k-τάξης (k-class) εκτιμητή του β, με $T(k-1) = O_p(1)$. Αξίζει να σημειωθεί ότι, σύμφωνα με την τυπική (standard) θεωρία της μεγίστης πιθανοφάνειας, $L = O_p(1)$ κάτω και από την H_o και από την H_1. Το ίδιο είναι αληθές και στην περίπτωση της εκτίμησης k-τάξης. Επιπλέον, σημειώνουμε ότι

$$\begin{aligned} LR &= T\log\lambda(\hat{\beta}) = T\log(1 + \tau^2 L) = \\ &= T[\tau^2 L - (\tau^2 L)^2/2 + (\tau^2 L)^3/3 + \ldots] = \\ &= T[\tau^2 L - \tau^4 L^2/2 + \omega(\tau^6)] = L - \tau^2 L^2/2 + \omega(\tau^4)\,. \end{aligned} \qquad (6.13)$$

Ακόμα, από το Λήμμα A.1 (I) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} S &= T\,\frac{\lambda(\hat{\beta}) - 1}{\lambda(\hat{\beta})} = \frac{L}{1 + \tau^2 L} = L(1 + \tau^2 L)^{-1} = \\ &= L[1 - \tau^2 L + \omega(\tau^4)] = L - \tau^2 L^2 + \omega(\tau^4)\,. \end{aligned} \qquad (6.14)$$

Προφανώς, τα τρία στατιστικά ελέγχου (6.9), (6.11) και (6.12) ανήκουν στην οικογένεια

$$S(k,j,\mathcal{K}) = (T-\mathcal{K})\,g_j(\hat{\lambda}_k) \quad (j = 0, 1, 2), \qquad (6.15)$$

όπου $g_0(x) = x - 1$, $g_1(x) = \log(x)$, $g_2(x) = 1 - 1/x$. Το $\mathcal{K}$ είναι ένα αυθαίρετο βαθμωτό που χρησιμοποιείται για να βελτιώσει το μέγεθος του ελέγχου και $\hat{\lambda}_k = \lambda(\hat{\beta}_k)$, όπου $\hat{\beta}_k$ είναι οποιοσδήποτε k-τάξης εκτιμητής του β. Είναι φανερό ότι η οικογένεια των στατιστικών (6.15) αντιστοιχεί στα στατιστικά L, LR και S για $j = 0$, $j = 1$ και $j = 2$, αντίστοιχα. Πράγματι, οι γραμμικοποιήσεις

(6.11) και (6.12) του στατιστικού (6.9) προκύπτουν με την χρήση των Taylor αναπτυγμάτων

$$\log(1+x) = x - x^2/2 + \ldots \quad (-1 < x \leq 1),$$

$$\log(x) = (x-1)/x + ((x-1)/x)^2/2 + \ldots \quad (x \geq 1/2),$$

αντίστοιχα.

Χρησιμοποιώντας τις (6.13) και (6.14), το στατιστικό (6.15) μπορεί να παρασταθεί ως

$$S(k,j,\varkappa) = L_k - \tau^2(\varkappa + jL_k/2)L_k + \omega(\tau^4), \qquad (6.16)$$

όπου L_k είναι το στατιστικό (6.11) υπολογισμένο από τα k-τάξης κατάλοιπα της εξίσωσης (6.1). Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι (βλ. Λήμμα Z.2), το στατιστικό (6.15) γράφεται ως

$$S(k,j,\varkappa) = L_1 + \tau^2\left[\alpha(\alpha - 2L_1)c_1^* - (\varkappa + jL_1/2)L_1\right] + \omega(\tau^3), \qquad (6.17)$$

όπου L_1 είναι το στατιστικό (6.11) υπολογισμένο από τα κατάλοιπα των ελαχίστων τετραγώνων σε δύο στάδια (TSLS) της εξίσωσης (6.1) και

$$\alpha = T(k-1) = O_p(1), \quad c_1^* = q'G_*q, \quad G_* = (F_*'F_*/T)^{-1}, \quad F_* = P_H X. \qquad (6.18)$$

Από τις υποθέσεις του υποδείγματός μας προκύπτει ότι η μήτρα Z έχει πλήρη στηλοβαθμό (column rank). Συνεπώς, μπορούμε να βρούμε ένα T×1 διάνυσμα ξ τέτοιο ώστε

$$Z'\xi/\sqrt{T} = \delta, \qquad (6.19)$$

όπου το m×1 διάνυσμα δ έχει ορισθεί στην σχέση (6.8). Επιπλέον, ορίζουμε τις ποσότητες

$$u_o = u + \xi, \quad F_Z = P_Z X, \quad N = P_Z - P_{F_Z}, \quad S_o = u_o'Nu_o. \qquad (6.20)$$

Αποδεικνύεται ότι (βλ. Λήμμα Z.4)

$$L_1 = S_o + \omega(\tau). \qquad (6.21)$$

Από την (6.17) είναι σαφές ότι η χρήση διαφορετικών εκτιμητών k-τάξης επηρεάζει μόνον τον τελευταίο όρο του αναπτύγματος του στατιστικού (6.15). Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνον τον πρώτο όρο του αναπτύγματος του α χωρίς να αλλάξουμε την τάξη μεγέθους του υπολοίπου του αναπτύγματος (6.17). Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα

$$\alpha = \alpha_o S_o + \alpha_1 + \omega(\tau), \qquad (6.22)$$

όπου τα α_o και α_1 είναι σταθεροί αριθμοί. Ειδικότερα, για τον TSLS εκτιμητή του β, $\alpha_o = \alpha_1 = 0$, ενώ για τον LIML εκτιμητή του β $\alpha_o = 1$, $\alpha_1 = 0$. Ακόμα, θα λέγομε ότι ένας εκτιμητής $\tilde{\beta}_k$ είναι k-τάξης εκτιμητής δεύτερης τάξης προσέγγισης (second order k-class (SOKC) setimator) αν υπάρχει ένας εκτιμητής k-τάξης, τέτοιος ώστε

$$\tilde{\beta}_k = \hat{\beta}_k + \omega(\tau^3), \qquad (6.23)$$

όπου το k ικανοποιεί την σχέση $T(k-1) = O_p(1)$.

Έχουν ορισθεί πολλοί εκτιμητές με περιορισμένες πληροφορίες (limited information estimators) (βλ. Anderson et.al. (1986)). Εκτός λίγων εξαιρέσεων (π.χ. οι εκτιμητές διπλής k-τάξης), οι ανωτέρω εκτιμητές είναι ειδικές περιπτώσεις του εκτιμητή SOKC. Πιο συγκεκριμένα, για τον συνδυασμένο OLS-TSLS εκτιμητή του Sawa (1973) $\alpha_o = 0$, $\alpha_1 > 0$ ($\alpha_1 = l-1$ για την ειδική περίπτωση αμερόληπτου ως προς τον μέσο (mean unbiased) και $\alpha_1 = 1$ για την ειδική περίπτωση του αμερόληπτου ως προς την διάμεσο (median unbiased) εκτιμητή). Για τον Μπεϋζιανό (Bayesian) εκτιμητή του Dreze (1976) το $\alpha_o = 1$, ενώ το α_1 ισούται με τον αριθμό των εξωγενών μεταβλητών που δεν περιλαμβάνονται στην εκτιμούμενη εξίσωση. Για τον εκτιμητή MELO του Zellner (1978) $\alpha_o = 0$, $\alpha_1 = m$. Τέλος, για τον εκτιμητή του Fouller (1977), που είναι ένας εκτιμητής k-τάξης με

$$k = \lambda + \vartheta/(T-m), \qquad (6.24)$$

όπου το λ έχει ορισθεί στην (6.10) και το ϑ είναι ένας σταθερός αριθμός, $\alpha_o = 1$, $\alpha_1 > 0$ ($\alpha_1 = 1$ για την ειδική περίπτωση αμερόληπτου ως προς τον μέσο (mean unbiased) εκτιμητή).

Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε (όπως στην απόδειξη του Λήμματος Z.2) ότι το ανάπτυγμα (6.17) είναι έγκυρο και στην περίπτωση που το στατιστικό (6.15) υπολογίζεται από οποιαδήποτε SOKC κατάλοιπα της εξίσωσης (6.1).

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς αυτού του τμήματος μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο λήμμα.

ΛΗΜΜΑ 6.1: *Έστω $F_{l,\gamma}(\cdot)$, $f_{l,\gamma}(\cdot)$ οι συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας, αντίστοιχα, μιας μη κεντρικής χ^2 μεταβλητής με μη*

κεντρική παράμετρο γ και l βαθμούς ελευθερίας. Κάτω από την εναλλακτική υπόθεση (6.8), η υπό συνθήκη (ως προς τις μήτρες X, Z) συνάρτηση κατανομής του στατιστικού (6.15) δέχεται το ανάπτυγμα τύπου Edgeworth

$$\Pr\left\{S(k,j,\mathcal{K}) \le x \mid X,Z\right\} = F_{l,\gamma}(x) - \tau^2 \sum_{i=0}^{4} d_i f_{l+2i,\gamma}(x) + O(\tau^3), \qquad (6.25)$$

όπου $j = 0, 1, 2$ και

$$d_0 = h_0,\ d_1 = lh_1 - p_1,\ d_2 = l(l+2)h_2 + \gamma h_1 - p_2,$$

$$d_3 = 2(l+2)\gamma h_2 - p_3,\quad d_4 = \gamma^2 h_2,$$

$$h_0 = \alpha_1^2 c_1,\quad h_1 = 1/2 + 2n + 1 - c_2 - \mathcal{K} + 2(\alpha_0-1)\alpha_1 c_1,$$

$$h_2 = (\alpha_0-2)\alpha_0 c_1 + c_1 + (1-j)/2 = (1-j)/2 + (\alpha_0-1)^2 c_1, \qquad (6.26)$$

$$p_1 = l\gamma_3 + (1+4\gamma+2n-1)\gamma,\ p_2 = (l/2+1+\gamma_3-2\gamma)\gamma,\ p_3 = \gamma^2/2,$$

$$\gamma = \xi' N \xi,\ \gamma_3 = \xi' \Delta_* \xi,\ c_1 = q' G q,\ c_2 = \mathrm{tr}\left[(F_Z'F_Z)^{-1}X'X\right],$$

$$\Delta_* = F_Z (F_Z'F_Z)^{-1} X'X (F_Z'F_Z)^{-1} F_Z',$$

όπου το $T\times 1$ διάνυσμα ξ έχει οριοθεί στην (6.19) και οι μήτρες N και F_Z έχουν οριοθεί στην (6.20).

6.3 Η ΕΠΑΓΟΜΕΝΗ ΜΗΔΕΝΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΗ

Από το Λήμμα 6.1 έπεται ότι ο έλεγχος με το στατιστικό (6.15) είναι ασυμπτωτικά ισχυρός (powerful) έναντι της ακολουθίας των τοπικών εναλλακτικών υποθέσεων (6.8) μόνον για εκείνα τα $\delta \in R^m$ που ικανοποιούν την σχέση

$$\gamma_0 = \mathrm{plim}\ \gamma > 0. \qquad (6.27)$$

Παίρνοντας όρια στην (6.26) είναι εύκολο να δείξουμε ότι κάτω από την (6.8) ισχύει η σχέση

$$\gamma_0 = d' \bar{P}_\Gamma d, \qquad (6.28)$$

όπου

$$d = A^{-1/2}\delta,\quad \Gamma = A^{-1/2}B,\quad A = Q + Z_0'Z_0/T,\quad B = R + Z_0'X_0/T. \qquad (6.29)$$

Η επαγόμενη (implicit) μηδενική υπόθεση του ελέγχου είναι το υποσύνολο του παραμετρικού χώρου στο οποίο ισχύει ότι $\gamma_0 = 0$,

δηλαδή το υποσύνολο του παραμετρικού χώρου στο οποίο το $d \in R(\Gamma)$ ή, ισοδύναμα,

$$H_o^{\sim}: \delta \in R(B) = R(R + Z_o'X_o/T). \qquad (6.30)$$

Από τις υποθέσεις του υποδείγματός μας προκύπτει ότι ο βαθμός της μήτρας B ισούται με n και συνεπώς μπορούμε να ελέγξουμε μόνον $l = m-n$ περιορισμούς ορθογωνιότητας.

Για σταθερές εναλλακτικές υποθέσεις (fixed alternatives), οι έλεγχοι των Anderson, Rubin και Sargan (με το στατιστικό (6.15)) είναι συνεπείς όταν ελέγχουν την υπόθεση

$$H_o^{+}: p \in R(B - pq') = R(R + Z_o'X_o/T - pq') \qquad (6.31)$$

έναντι των εναλλακτικών υποθέσεων

$$H_1^{+}: p \notin R(B - pq'). \qquad (6.32)$$

Παρ' όλο που η ανωτέρω ερμηνεία των ελέγχων των Anderson, Rubin και Sargan είναι στατιστικά σωστή, δεν έχει καμία χρησιμότητα για τις οικονομετρικές εφαρμογές. Φυσικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι δυνατόν να ελέγξουμε τους περιορισμούς ορθογωνιότητας μόνον εκείνων των βοηθητικών μεταβλητών που υπερταυτοποιούν την εξίσωση. Ανακύπτει, όμως, το ερώτημα: Ποιές από τις βοηθητικές μεταβλητές ταυτοποιούν και ποιές υπερταυτοποιούν την εξίσωση;

Μπορούμε να αποφύγουμε αυτό το ερώτημα κάνοντας έναν αυθαίρετο διαμερισμό των βοηθητικών μεταβλητών H σε ένα υποσύνολο που περιέχει n και σε ένα υποσύνολο που περιέχει $l = m-n$ βοηθητικές μεταβλητές, δηλαδή

$$H = (H_1 : H_2),$$

οπότε διαμερίζουμε αντίστοιχα και τα διανύσματα p και δ ως εξής:

$$p' = (p_1', p_2'), \quad \delta' = (\delta_1', \delta_2').$$

Υποθέτουμε ότι $p_1 = 0$ και ότι θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση

$$H_o^{*}: p_2 = 0 \qquad (6.33)$$

έναντι των τοπικών εναλλακτικών υποθέσεων

$$H_1^{*}: p_2 = \tau\delta_2. \qquad (6.34)$$

Τότε είναι εύκολο να δείξουμε ότι (βλ. Λήμμα Z.9)

$$\gamma = \delta_2' \Lambda^{-1} \delta_2, \qquad (6.35)$$

όπου

$$\Lambda = \Delta + B_+ A^{-1} B_+', \quad A = X' P_{H_1} X/T,$$

$$B_+ = Z_2' \bar{P}_{H_1} X/T, \quad \Delta = Z_2' \bar{P}_{H_1} Z_2/T \qquad (6.36)$$

και οι μήτρες A, B_+, Δ και Λ έχουν διαστάσεις n×n, 1×n, 1×1 και 1×1, αντίστοιχα. Μπορούμε να δείξουμε (βλ. Λήμμα Z.8) ότι μήτρα Λ συγκλίνει σε μια θετικά ορισμένη μήτρα, καθώς το T⟶∞. Κατά συνέπεια, οι έλεγχοι των Anderson, Rubin και Sargan είναι συνεπείς για την εναλλακτική υπόθεση (6.34).

'Ομως, ο διαμερισμός που κάναμε ήταν αυθαίρετος και επομένως ο έλεγχος είναι συνεπής για οποιαδήποτε εναλλακτική υπόθεση της μορφής (6.34). Με άλλα λόγια, μπορούμε να πούμε ότι η επαγόμενη εναλλακτική υπόθεση του ελέγχου είναι η ορθογωνιότητα (εξωγένεια) οποιουδήποτε υποσυνόλου των βοηθητικών μεταβλητών, υπό την προϋπόθεση, βέβαια, ότι οι υπόλοιπες βοηθητικές μεταβλητές είναι ορθογώνιες προς τον στοχαστικό όρο (εξωγενείς) και ταυτοποιούν την εξίσωση.

Βέβαια, όπως φαίνεται από τον τύπο (6.35), η μή κεντρική παράμετρος γ της χ^2 κατανομής αλλάζει ανάλογα με το υποσύνολο των βοηθητικών μεταβλητών, των οποίων ελέγχεται η ορθογωνιότητα. Επομένως, και η δύναμη του ελέγχου αλλάζει ανάλογα. Από την στιγμή, όμως, που ο έλεγχος είναι συνεπής για όλα τα υποσύνολα των βοηθητικών μεταβλητών, το φαινόμενο αυτό δεν θα πρέπει να μας προβληματίζει διότι είναι κοινό σε όλους τους ελέγχους κακής εξειδίκευσης (misspecification tests).

Επιπλέον, η ανωτέρω ερμηνεία του ελέγχου της ορθογωνιότητας των βοηθητικών μεταβλητών είναι απολύτως ανάλογη με την ερμηνεία που προτείνει ο Μαγδαληνός (1988) για την περίπτωση που τα κριτήρια των Anderson, Rubin και Sargan χρησιμοποιούνται για να ελέγξουν υπερταυτοποιητικούς διαρθρωτικούς περιορισμούς. Το γεγονός της δυνατότητας ύπαρξης περισσοτέρων από μια εναλλακτικών υποθέσεων δεν θα πρέπει να μας εκπλήσσει καθώς είναι κοινό χαρακτηριστικό των ελέγχων κακής εξειδίκευσης.

6.4 Η ΝΕΑ ΕΛΕΓΧΟΜΕΝΗ ΥΠΟΘΕΣΗ

Με βάση τα εκτεθέντα στο Τμήμα 6.3 είναι αδύνατο να ελεγχθεί η εξωγένεια όλων των βοηθητικών μεταβλητών ενός οικονομετρικού συστήματος. Μπορούμε, όμως, να ελέγξουμε την εξωγένεια ενός υποσυνόλου των βοηθητικών μεταβλητών, οι οποίες υπερταυτοποιούν μια συγκεκριμένη διαρθρωτική εξίσωση, έστω την (6.1), του υπό συζήτηση οικονομετρικού συστήματος.

Το σύνολο των βοηθητικών μεταβλητών είναι δυνατόν να χωρισθεί σε ένα υποσύνολο ακριβώς ταυτοποιητικών (just-identifying) και ένα υποσύνολο υπερταυτοποιητικών (overidentifying) βοηθητικών μεταβλητών, Z_1 και H_2, αντίστοιχα. Έτσι, η T×m μήτρα H μπορεί να γραφεί ως

$$H = (Z_1 : H_2), \tag{6.37}$$

όπου Z_1, H_2 είναι οι T×n, T×l (l = m−n) μήτρες των ακριβώς ταυτοποιητικών και υπερταυτοποιητικών βοηθητικών μεταβλητών, αντίστοιχα. Χωρίς απώλεια της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η μήτρα Z_1 είναι μη στοχαστική, ενώ η μήτρα H_2 είναι στοχαστική. Σε αντιστοιχία με την (6.3) γράφουμε

$$H_2 = Z_2 + up_2', \tag{6.38}$$

όπου το p_2 είναι το l×1 διάνυσμα των συντελεστών συσχέτισης μεταξύ της μήτρας H_2 και του διανύσματος u. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (6.37) και (6.38) η μηδενική υπόθεση (6.7) γράφεται ως

$$H_o: p_2 = 0 \tag{6.39}$$

και η ακολουθία των τοπικών εναλλακτικών υποθέσεων (local alternatives) (6.8) γράφεται ως

$$H_1: p_2 = \tau\delta_2, \tag{6.40}$$

όπου δ_2 είναι ένα σταθερό l×1 υποδιάνυσμα του διανύσματος δ ($\delta' = (0', \delta_2')$, 0 είναι το n×1 μηδενικό διάνυσμα). Σύμφωνα με τις (6.4) και (6.5) γράφουμε

$$X = X_o + V, \quad Z_2 = Z_o + W, \quad Z = (Z_1 : Z_2),$$

όπου (6.41)

$$X_o = E(X) = E(Y), \quad Z_o = E(Z_2) = E(H_2)$$

και οι γραμμές της μήτρας (V:W) είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους (και ανεξάρτητα από το u) $N(0,\Sigma_2)$ διανύσματα, όπου 0 είναι το μηδενικό διάνυσμα και

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} C_2 & R_2' \\ R_2 & Q_2 \end{bmatrix}, \tag{6.42}$$

όπου C_2, R_2, Q_2 είναι n×n, 1×n, 1×1 σταθερές μήτρες, αντίστοιχα. Σε έναν συμβολισμό όμοιο με αυτόν της σχέσης (6.6) έχουμε ότι $C_2 = C - qq'$ και R_2, Q_2 είναι οι υπομήτρες των $R - pq'$, $Q - pp'$ που αντιστοιχούν στα μη μηδενικά στοιχεία του διανύσματος p.

Ορίζουμε τις μήτρες

$$A = X'P_{Z_1}X/T, \quad B_+ = Z_2'\bar{P}_{Z_1}X/T, \quad G_+ = X'P_Z X/T,$$

$$\Delta = Z_2'\bar{P}_{Z_1}Z_2/T, \quad \Lambda = \Delta + B_+A^{-1}B_+', \quad G = (F_Z'F_Z/T)^{-1}, \tag{6.43}$$

όπου οι μήτρες A, B_+, G_+, Δ, Λ και G έχουν διαστάσεις n×n, 1×n, n×n, 1×1, 1×1 και n×n, αντίστοιχα. Σημειώνουμε ότι από την (6.20) έπεται ότι (βλ. και Λήμμα Z.4)

$$G_+ = F_Z'F_Z/T = G^{-1}. \tag{6.44}$$

Κάτω από την μηδενική υπόθεση (6.39) ισχύουν οι σχέσεις

$$Y'P_{Z_1}Y/T = X'P_{Z_1}X/T + \omega(\tau^2),$$

$$Y'P_Z Y/T = X'P_Z X/T + \omega(\tau^2) \tag{6.45}$$

και οι δύο μήτρες συγκλίνουν σε θετικά ορισμένες μήτρες (λόγω της συνέπειας των εκτιμητών των βοηθητικών μεταβλητών (instrumental variables (IV) estimators)). Για επαρκώς μεγάλο T μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι μήτρες A^{-1} και G_+^{-1} υπάρχουν με πιθανότητα 1. Επίσης, εφόσον οι βοηθητικές μεταβλητές είναι γραμμικά ανεξάρτητες (με πιθανότητα 1), η μήτρα Δ είναι μη ιδιάζουσα. Από τον Pollock ((1979), σελ. 54) παίρνουμε

$$P_Z = P_{Z_1} + \bar{P}_{Z_1}Z_2(Z_2'\bar{P}_{Z_1}Z_2)^{-1}Z_2'\bar{P}_{Z_1}, \tag{6.46}$$

έτσι ώστε

$$G_+ = X'P_Z X/T = X'P_{Z_1}X/T + (X'\bar{P}_{Z_1}Z_2/T)(Z_2'\bar{P}_{Z_1}Z_2/T)^{-1}(Z_2'\bar{P}_{Z_1}X/T) =$$

$$= A + B_+'\Delta^{-1}B_+. \qquad (6.47)$$

6.5 ΤΟΠΙΚΗ ΙΣΧΥΣ ΚΑΙ ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΤΩΝ ΕΛΕΓΧΩΝ ΤΗΣ ΕΞΩΓΕΝΕΙΑΣ ΤΩΝ ΒΟΗΘΗΤΙΚΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Το Λήμμα 6.1 ισχύει και στην περίπτωση που η ελεγχόμενη υπόθεση είναι η (6.39), με την διαφορά ότι τα βαθμωτά γ και γ_3, που ορίζονται στην (6.26), υπολογίζονται διαφορετικά. Διότι, κάτω από την νέα εναλλακτική υπόθεση (6.40), το $T\times 1$ διάνυσμα ξ ορίζεται έτσι ώστε

$$Z'\xi/\sqrt{T} = \begin{bmatrix} Z_1' \\ Z_2' \end{bmatrix}\xi/\sqrt{T} = \delta = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_1'\xi/T = 0, \\ Z_2'\xi/T = \delta_2. \end{cases} \qquad (6.48)$$

όπου 0 είναι το μηδενικό διάνυσμα, το $m\times 1$ διάνυσμα δ έχει ορισθεί στην (6.8) και το 1×1 διάνυσμα δ_2 έχει ορισθεί στην (6.40).

Από το Λήμμα 6.1 προκύπτει το ακόλουθο λήμμα.

ΛΗΜΜΑ 6.2: *Έστω $F_{l,\gamma_0}(\cdot)$, $f_{l,\gamma_0}(\cdot)$ οι συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας, αντίστοιχα, μιας μη κεντρικής χ^2 μεταβλητής με μη κεντρική παράμετρο γ_0 και l βαθμούς ελευθερίας. Κάτω από την εναλλακτική υπόθεση (6.40), η μη δεσμευμένη (unconditional) συνάρτηση κατανομής του στατιστικού (6.15) δέχεται το ανάπτυγμα τύπου Edgeworth*

$$\Pr\{S(k,j,\mathcal{K}) \le x\} = F_{l,\gamma_0}(x) - \tau^2 \sum_{i=0}^{4} \bar{d}_i f_{l+2i,\gamma_0}(x) + O(\tau^3), \qquad (6.49)$$

όπου $j = 0, 1, 2$ *και*

$$\bar{d}_0 = \bar{h}_0, \quad \bar{d}_1 = l\bar{h}_1 + \bar{p}_1, \quad \bar{d}_2 = l(l+2)\bar{h}_2 + \gamma_0\bar{h}_1 + \bar{p}_2,$$

$$\bar{d}_3 = 2(l+2)\gamma_0\bar{h}_2 + \bar{p}_3, \quad \bar{d}_4 = \gamma_0^2\bar{h}_2,$$

$$\bar{h}_0 = \alpha_1^2\bar{c}_1, \quad \bar{h}_1 = 1/2 + 2n + 1 - \bar{c}_2 - \mathcal{K} + 2(\alpha_0-1)\alpha_1\bar{c}_1,$$

$$\bar{h}_2 = (1-j)/2 + (\alpha_0-1)^2\bar{c}_1, \qquad (6.50)$$

$$\bar{p}_1 = -l\bar{\gamma}_3 - (1+4\gamma_0+2n-l)\gamma_0 + \gamma_1^* - \gamma_2^*,$$

$$\bar{p}_2 = -(l/2+1+\bar{\gamma}_3-2\gamma_0)\gamma_0 + \gamma_2^*, \quad \bar{p}_3 = -\gamma_0^2/2,$$

$$\bar{c}_i = \operatorname{plim} c_i \ (i = 1, 2) \quad \bar{\gamma}_3 = \operatorname{plim}\gamma_3, \quad \gamma_0 = \operatorname{plim}\gamma = \delta_2'\Lambda_0^{-1}\delta_2,$$

όπου

$$\gamma_1^* = (m+2)\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_4\Lambda_o^{-1}\delta_2+\left[(tr\Lambda_o^{-1}Q_4)-(trG_oC_2)\right]\delta_2'\Lambda_o^{-1}\delta_2+$$

$$+\left[n+2(trG_oC_2)-(trG_oE_o)+(tr\Lambda_o^{-1}KE_oK')\right]\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_2\Lambda_o^{-1}\delta_2-$$

$$-(tr\Lambda_o^{-1}Q_3)\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_3\Lambda_o^{-1}\delta_2+2(tr\Lambda_o^{-1}R_2K')\delta_2'\Lambda_o^{-1}R_2K'\Lambda_o^{-1}\delta_2+$$

$$+(tr\Lambda_o^{-1}Q_2)\delta_2'\Lambda_o^{-1}KE_oK'\Lambda_o^{-1}\delta_2-\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_3\Lambda_o^{-1}Q_3\Lambda_o^{-1}\delta_2+$$

$$+2\delta_2'\Lambda_o^{-1}KE_oK'\Lambda_o^{-1}Q_2\Lambda_o^{-1}\delta_2+4\delta_2'\Lambda_o^{-1}KR_2'\Lambda_o^{-1}KR_2'\Lambda_o^{-1}\delta_2-$$

$$-2\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_2\Lambda_o^{-1}KR_2'Q_2^{-1}R_2K'\Lambda_o^{-1}\delta_2+3\delta_2'\Lambda_o^{-1}R_2G_oR_2'\Lambda_o^{-1}\delta_2-$$

$$-2\delta_2'\Lambda_o^{-1}KR_2'\Lambda_o^{-1}\delta_2-(n+2)\delta_2'\Lambda_o^{-1}KC_2K'\Lambda_o^{-1}\delta_2, \qquad (6.51)$$

$$\gamma_2^* = \delta_2'\Lambda_o^{-1}\delta_2\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_4\Lambda_o^{-1}\delta_2-(1/2)(\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_3\Lambda_o^{-1}\delta_2)^2+$$

$$+\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_2\Lambda_o^{-1}\delta_2\delta_2'\Lambda_o^{-1}KE_oK'\Lambda_o^{-1}\delta_2+(3/2)(\delta_2'\Lambda_o^{-1}KR_2'\Lambda_o^{-1}\delta_2)^2-$$

$$-(1/2)\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_2\Lambda_o^{-1}\delta_2\delta_2'\Lambda_o^{-1}KR_2'Q_2^{-1}R_2K'\Lambda_o^{-1}\delta_2,$$

$$\Lambda_o = \Delta_o + B_o^+A_o^{-1}B_o^{+\prime}, \quad A_o = F_o'F_o/T, \quad B_o^+ = R_2 + Z_*'X_*/T,$$

$$\Delta_o = Q_2 + Z_*'Z_*/T, \quad F_o = P_{Z_1}X_o, \quad X_* = \bar{P}_{Z_1}X_o, \quad Z_* = \bar{P}_{Z_1}Z_o.$$

Σημειώνουμε ότι, κάτω από την μηδενική υπόθεση (6.39), οι παράμετροι γ, γ_o, γ_3, $\bar{\gamma}_3$, γ_1^* και γ_2^* ισούνται με το μηδέν.

ΠΟΡΙΣΜΑ 6.1: Από το Λήμμα 6.2 έπεται ότι η τύπου Edgeworth διορθωμένη κριτική τιμή του στατιστικού (6.15) είναι

$$\chi_\alpha^{2*} = \chi_\alpha^{2*}(k,j,\mathcal{K}) = \chi_\alpha^2 + \tau^2\sum_{i=0}^{2}\bar{h}_i(\chi_\alpha^2)^i \quad (j = 0, 1, 2), \qquad (6.52)$$

όπου τα $\bar{h}_i$ έχουν οριστεί στην (6.50) και χ_α^2 είναι η άνω α κριτική τιμή μιας κεντρικής χ^2 κατανομής με 1 βαθμούς ελευθερίας.

ΛΗΜΜΑ 6.3: Μέχρι την τάξη μεγέθους 1/T, κάτω από την εναλλακτική υπόθεση (6.40), η τοπική ισχύς (local power) του ελέγχου που βασίζεται στις τύπου Edgeworth διορθωμένες κριτικές τιμές του στατιστικού (6.15) είναι

$$Pr\left\{S(k,j,\mathcal{K}) > \chi_\alpha^{2*}(k,j,\mathcal{K})\right\} = \pi_2(\chi_\alpha^2) + O(\tau^3) \quad (j = 0, 1, 2), \quad (6.53)$$

όπου

$$\pi_2(x) = \pi_0(x) + \tau^2 \sum_{i=0}^{3} \bar{p}_i f_{l+2i,\gamma_0}(x), \quad \pi_0(x) = 1 - F_{l,\gamma_0}(x) \qquad (6.54)$$

είναι η τρίτης τάξης (third order) και η πρώτης τάξης (ονομαστική) συνάρτηση τοπικής ισχύος, αντίστοιχα, τα $\bar{p}_i$ *έχουν οριοθεί στην (6.50) και* χ^2_α *είναι η άνω α κριτική τιμή μιας κεντρικής* χ^2 *κατανομής με 1 βαθμούς ελευθερίας. Επειδή,*

$$\pi_0(\chi^2_\alpha) = 1 - F_{l,\gamma_0}(\chi^2_\alpha) \geq \alpha \quad \forall\, \gamma_0 \geq 0, \qquad (6.55)$$

λέγομε ότι, οι έλεγχοι των Anderson, Rubin και Sargan είναι, με πρώτης τάξης ακρίβεια, αμερόληπτοι (first order unbiased), με την έννοια ότι η πρώτης τάξης τοπική ισχύς τους δεν είναι ποτέ μικρότερη από το πρώτης τάξης μέγεθός τους. Επιπλέον, οι έλεγχοι των Anderson, Rubin και Sargan είναι, με ακρίβεια δεύτερης τάξης, αμερόληπτοι (second order unbiased) έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης των αναληθών συνθηκών ορθογωνιότητας.

Αντίθετα, οι έλεγχοι των Anderson, Rubin και Sargan είναι, με ακρίβεια δεύτερης τάξης, μεροληπτικοί (second order biased) έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης των αναληθών διαρθρωτικών περιορισμών. Το θεώρημα 1 (ή η εξίσωση (5.1) για τους κατά μέγεθος μη διορθωμένους ελέγχους) του Μαγδαληνού (1988) συνεπάγεται ότι, κάτω από την εναλλακτική υπόθεση των αναληθών διαρθρωτικών περιορισμών, υπάρχει ένα υποσύνολο του παραμετρικού χώρου όπου η δεύτερης τάξης τοπική ισχύς των ελέγχων των Anderson, Rubin και Sargan είναι μικρότερη από το δεύτερης τάξης μέγεθός τους. Δηλαδή, υπάρχει ένα υποσύνολο του παραμετρικού χώρου όπου οι έλεγχοι των Anderson, Rubin και Sargan οδηγούν σε εσφαλμένα συμπεράσματα.

Από τις δύο ερμηνείες των ελέγχων των Anderson, Rubin και Sargan ως ελέγχων έναντι των αναληθών διαρθρωτικών περιορισμών, είτε έναντι των αναληθών συνθηκών ορθογωνιότητας, με βάση τα ανωτέρω αποτελέσματα για την δεύτερης τάξης τοπική ισχύ τους, η δεύτερη ερμηνεία πρέπει να θεωρηθεί πιο φυσική. Παρ' όλα αυτά, η επιλογή μεταξύ των δύο ερμηνειών έχει νόημα μόνον για παιδαγωγικούς σκοπούς. Διότι οι έλεγχοι των Anderson, Rubin και Sargan είναι, με ακρίβεια πρώτης τάξης, ισχυροί κάτω και από τις δύο εμηνείες.

Το γεγονός ότι, τα τρίτης τάξης μεγέθη των ελέγχων των

Anderson, Rubin και Sargan διαφέρουν, καθιστά αδύνατη την σύγκριση της τρίτης τάξης τοπικής ισχύος τους. Διότι οι συγκρίσεις ισχύος έχουν νόημα μόνον μεταξύ ελέγχων που έχουν το ίδιο μέγεθος. Προς τον σκοπόν αυτόν μπορούμε να διορθώσουμε το μέγεθος των ανωτέρω ελέγχων χρησιμοποιώντας τις τύπου Edgeworth διορθωμένες κριτικές τιμές τους (6.52). Εφόσον οι παράμετροι p_i (i = 1, 2, 3) στην (6.50) δεν εξαρτώνται από τις παραμέτρους j και k, η τρίτης τάξης τοπική ισχύς του κριτηρίου (6.15) δεν εξαρτάται ούτε από την συγκεκριμένη μορφή του (κριτήριο LR, υπερταυτοποίησης, ή Sargan), ούτε από τον συγκεκριμένο εκτιμητή k-τάξης που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του αντιστοίχου στατιστικού. Το Λήμμα 6.3 σημαίνει ότι, όλες οι κατά μέγεθος διορθωμένες μορφές των ελέγχων των Anderson, Rubin και Sargan, με την ακρίβεια της προσέγγισής μας, δεν μπορούν να διακριθούν ως προς την τοπική ισχύ τους και συνεπώς πρέπει να θεωρηθούν ως ο ίδιος έλεγχος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.1: *Κάτω από την μηδενική υπόθεση (6.39) το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο στατιστικό*

$$\hat{S}(k,j,\mathcal{K}) = S(k,j,\mathcal{K}) - \tau^2 \sum_{i=0}^{2} \bar{h}_i \left[S(k,j,\mathcal{K})\right]^i \qquad (j = 0, 1, 2) \qquad (6.56)$$

καταναέμεται, με ένα λάθος τάξης $O(\tau^3)$, *ως μια κεντρική* χ^2 *μεταβλητή με 1 βαθμούς ελευθερίας. Επιπλέον, η τοπική ισχύς του στατιστικού (6.56) ισούται με την τοπική ισχύ του ελέγχου που βασίζεται στις τύπου Edgeworth διορθωμένες κριτικές τιμές του στατιστικού (6.15) (βλ. την σχέση (6.53)), δηλαδή*

$$\Pr\left\{\hat{S}(k,j,\mathcal{K}) > \chi^2_\alpha\right\} = \pi_2(\chi^2_\alpha) + O(\tau^3) \qquad (j = 0, 1, 2), \qquad (6.57)$$

όπου χ^2_α *είναι η άνω α κριτική τιμή μιας κεντρικής* χ^2 *μεταβλητής και η συνάρτηση* $\pi_2(x)$ *έχει οριοθεί στην σχέση (6.54).*

Θεωρούμε το στατιστικό υπερταυτοποίησης (6.11) και το στατιστικό του Sargan και υποθέτουμε ότι για την εξίσωση (6.1) ισχύει ότι

$$P_H Y = Y \text{ και οι } H, Y \text{ είναι μη στοχαστικές,} \qquad (6.58)$$

ότι, δηλαδή, οι βοηθητικές μεταβλητές είναι αποτελεσματικές (efficient instruments) και ότι τόσο οι βοηθητικές μεταβλητές του συστήματος όσο και οι παλινδρομητές της εξίσωσης (6.1) είναι μη

στοχαστικές μεταβλητές. Τότε, είναι εύκολο να δειχθεί ότι τα k-τάξης κατάλοιπα της εξίσωσης (6.1) είναι $\hat{u} = \sigma P_H u$. Επομένως, το στατιστικό (6.11) διαιρεμένο δια T κατανέμεται ακριβώς ως $1/(T-m)$ επί μιαν F μεταβλητή με 1 και T-m βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή

$$L/T = S(k,0,\mathcal{K})/T \sim \left[1/(T-m)\right]F^{1}_{T-m}.$$

Ακόμα, το στατιστικό (6.12) διαιρεμένο δια T κατανέμεται ακριβώς ως μια Βήτα μεταβλητή με 1/2 και (T-m)/2 βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή

$$S/T = S(k,2,\mathcal{K})/T \sim \text{Beta}\left[1/2,\ (T-m)/2\right].$$

Χρησιμοποιώντας μονότονους ένα-προς-ένα μετασχηματισμούς των στατιστικών (6.11) και (6.12) βρίσκουμε το στατιστικό

$$B = \frac{T-m}{1}\ \frac{S/T}{1-S/T} = \frac{T-m}{1}\ \frac{\hat{u}'P_Z\hat{u}}{\hat{u}'\bar{P}_Z\hat{u}}, \qquad (6.59)$$

το οποίο, κάτω από την υπόθεση (6.58) κατανέμεται ακριβώς ως μια F μεταβλητή με 1 και T-m βαθμούς ελευθερίας. Το στατιστικό (6.59) έχει προταθεί από τον Basmann (1960).

ΛΗΜΜΑ 6.4: *Έστω* $F^{1}_{T-m}(\cdot)$, $f^{1}_{T-m}(\cdot)$ *οι συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας, αντίστοιχα, μιας* F *μεταβλητής με* 1 *και* T-m *βαθμούς ελευθερίας. Τότε, κάτω από την μηδενική υπόθεση* (6.39) *η συνάρτηση κατανομής του στατιστικού* (6.59) *δέχεται το στοχαστικό ανάπτυγμα τύπου Edgeworth*

$$\Pr\left\{B \le x\right\} = F^{1}_{T-m}(x) - \tau^{2}\sum_{i=0}^{2}\zeta_i x^i f^{1}_{T-m}(x) + O(\tau^{3}), \qquad (6.60)$$

όπου

$$\zeta_0 = \bar{h}_0/1, \quad \zeta_1 = \bar{h}_1 - m + 1/2 - 1, \quad \zeta_2 = (\bar{h}^{S}_2 + 1/2)1,$$

$$\bar{h}_0 = \alpha_1^2\bar{c}_1, \quad \bar{h}_1 = 1/2 + 2n + 1 - \bar{c}_2 - \mathcal{K} + 2(\alpha_0 - 1)\alpha_1\bar{c}_1, \qquad (6.61)$$

$$\bar{h}^{S}_2 = -1/2 + (\alpha_0 - 1)^2\bar{c}_1.$$

Επιπλέον, η προσέγγιση είναι τοπικά ακριβής (locally exact), *δηλαδή, κάτω από την υπόθεση* (6.58), *η ασυμπτωτική προσέγγιση* (6.60) *ισούται με την* $F^{1}_{T-m}(x)$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 6.2: Το Λήμμα 6.4 *συνεπάγεται ότι η τύπου Edgeworth*

διορθωμένη κριτική τιμή του στατιστικού (6.59) είναι

$$F^{*}_{\alpha} = F^{*}_{\alpha}(k,j,\mathcal{K}) = F_{\alpha} + \tau^{2}\sum_{i=0}^{2}\zeta_{i}F^{i}_{\alpha}, \qquad (6.62)$$

όπου οι ποσότητες ζ_1, ζ_2 και ζ_3 έχουν οριοθεί στην σχέση (6.61) και F_α είναι η άνω α κριτική τιμή μιας F κατανομής με 1 και T-m βαθμούς ελευθερίας. Επιπλέον, η προσέγγιση είναι τοπικά ακριβής (locally exact), δηλαδή, κάτω από την υπόθεση (6.58), η τύπου Edgeworth διορθωμένη κριτική τιμή (6.62) ισούται με την F_α.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.2: Κάτω από την μηδενική υπόθεση (6.39) το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο στατιστικό

$$\hat{B} = B - \tau^{2}\sum_{i=0}^{2}\zeta_{i}B^{i}, \qquad (6.63)$$

όπου

$$\zeta_0 = \bar{h}_0/1, \quad \zeta_1 = \bar{h}_1 - m + 1/2 - 1, \quad \zeta_2 = (\bar{h}^{S}_2 + 1/2)1,$$

$$\bar{h}_0 = \alpha_1^2\bar{c}_1, \quad \bar{h}_1 = 1/2 + 2n + 1 - \bar{c}_2 - \mathcal{K} + 2(\alpha_0 - 1)\alpha_1\bar{c}_1, \qquad (6.64)$$

$$\bar{h}^{S}_2 = -1/2 + (\alpha_0 - 1)^2\bar{c}_1,$$

κατανέμεται, με ένα λάθος τάξης $O(\tau^3)$, ως μια F μεταβλητή με 1 και T-m βαθμούς ελευθερίας. Επιπλέον, η προσέγγιση είναι τοπικά ακριβής (locally exact), δηλαδή, κάτω από την υπόθεση (6.58), το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο στατιστικό (6.63) ισούται με το στατιστικό (6.59) του Basmann.

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι, κάτω από την εναλλακτική υπόθεση (6.40), η τοπική ισχύς των ελέγχων που βασίζονται στις τύπου Edgeworth διορθωμένες κριτικές τιμές του στατιστικού (6.59) ή στο κατά Cornish-Fisher διορθωμένο στατιστικό (6.63) ισούνται με την τοπική ισχύ του ελέγχου που βασίζεται στις τύπου Edgeworth διορθωμένες κριτικές τιμές του στατιστικού (6.15). Δηλαδή ισχύει ότι

$$\Pr\left\{\hat{B} > F_{\alpha}\right\} = \Pr\left\{B > F^{*}_{\alpha}\right\} + O(\tau^3) = \pi_2(\chi^2_\alpha) + O(\tau^3), \qquad (6.65)$$

όπου $\pi_2(x)$ είναι η τρίτης τάξης συνάρτηση τοπικής ισχύος (βλ. την σχέση (6.54)) όλων των κατά μέγεθος διορθωμένων ελέγχων των Anderson, Rubin και Sargan.

6.6 ΤΟ MONTE CARLO ΠΕΙΡΑΜΑ

Σε αυτό το τμήμα θα περιγράψουμε το Monte Carlo πείραμα με το οποίο διερευνήθηκε η ποιότητα των προτεινομένων ελέγχων εξωγένειας των βοηθητικών μεταβλητών ενός οικονομετρικού συστήματος και η απόδοση των διαφόρων διορθώσεων του μεγέθους τους.

Εφόσον οι διορθώσεις αυτές έχουν σκοπό να μειώσουν την απόκλιση του πραγματικού από το ονομαστικό μέγεθος των ελέγχων, η απόδοση των διαφόρων διορθώσεων του μεγέθους των ανωτέρω ελέγχων μπορεί να μετρηθεί ως η διαφορά του ονομαστικού από το πραγματικό τους μέγεθος. Από τα προηγούμενα καθίσταται σαφές ότι, όσο μικρότερη είναι η διαφορά μεταξύ του ονομαστικού και του πραγματικού μεγέθους ενός ελέγχου, τόσο καλύτερη είναι η απόδοση του ελέγχου αυτού.

Η έννοια της απόδοσης, που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, είναι σχετική ως προς την φύση της, διότι δεν έχουμε στην διάθεσή μας ένα γενικά αποδεκτό μέτρο του "μεγάλου" ή του "μικρού", προκειμένου να κρίνουμε την διαφορά μεταξύ του ονομαστικού και του πραγματικού μεγέθους ενός ελέγχου. Επομένως, είναι προτιμότερο να καταφύγουμε στην σύγκριση των αποδόσεων των διαφόρων ελέγχων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν εναλλακτικά. Έτσι, μπορούμε να συγκρίνουμε τον έλεγχο που βασίζεται στο κατά Cornish-Fisher διορθωμένο στατιστικό του Basmann (6.63), το οποίο κατανέμεται σύμφωνα με την F κατανομή, με τους ελέγχους που στηρίζονται στα συνήθη στατιστικά των Anderson, Rubin και Sargan (6.15) ή στις τύπου Edgeworth διορθωμένες κριτικές τιμές τους από την χ^2 κατανομή, καθώς και με τους ελέγχους που βασίζονται στο σύνηθες στατιστικό του Basmann (6.59) ή στις τύπου Edgeworth διορθωμένες κριτικές τιμές του από την F κατανομή.

Σχεδιάσαμε, λοιπόν, ένα πείραμα ικανό να μας βοηθήσει να υπολογίσουμε το πραγματικό μέγεθος των ελέγχων που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, για δεδομένη την τιμή του ονομαστικού τους μεγέθους, δηλαδή του επιπέδου στατιστικής σημαντικότητάς τους.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, σκοπός του πειράματος ήταν η αξιολόγηση της απόδοσης των εναλλακτικών μορφών των ελέγχων της ανεξαρτησίας των βοηθητικών μεταβλητών από τους διαταρακτικούς όρους μιας διαρθρωτική εξίσωσης ενός οικονομετρικού συστήματος.

Είναι γνωστό οτι ο βαθμός υπερταυτοποίησης, $l = m-n$, είναι χαρακτηριστικός κάθε συγκεκριμένης διαρθρωτικής μορφής και ως εκ τούτου διαφέρει κατά περίπτωση στην εφαρμοσμένη έρευνα. Για αυτό αποφασίσαμε να πραγματοποιήσουμε Monte Carlo πειράματα με διαρθρωτικές εξισώσεις, οι οποίες περιέχουν τις ίδιες ενδογενείς μεταβλητές, αλλά ανήκουν σε οικονομετρικά συστήματα με διαφορετικό πλήθος βοηθητικών μεταβλητών και επομένως έχουν διαφορετικό βαθμό υπερταυτοποίησης. Με αυτόν τον τρόπο καταφέραμε να διερευνήσουμε την επίδραση του βαθμού υπερταυτοποίησης στην απόδοση των εναλλακτικών μορφών των ελέγχων εξωγένειας των βοηθητικών μεταβλητών ενός οικονομετρικού συστήματος. Χρησιμοποιήσαμε δύο διαρθρωτικές μορφές που αντιστοιχούν σε δύο τιμές του βαθμού υπερταυτοποίησης: $l = 2, 7$.

Στα τυχαία πειράματα που πραγματοποιήσαμε, χρησιμοποιήσαμε την πρώτη διαρθρωτική εξίσωση ενός οικονομετρικού συστήματος τριών εξισώσεων:

$$Y_{*}B' = Z\Gamma' + \sigma U, \quad Y_{*} = (y:Y), \tag{6.66}$$

όπου y είναι το $T\times 1$ διάνυσμα των παρατηρήσεων της εξαρτημένης ενδογενούς μεταβλητής της πρώτης εξίσωσης, Y είναι η $T\times 2$ μήτρα των παρατηρήσεων των υπολοίπων ενδογενών μεταβλητών του συστήματος, Z είναι η $T\times m$ μήτρα των παρατηρήσεων όλων των βοηθητικών μεταβλητών του συστήματος, B και Γ είναι οι 3×3 και $3\times m$ μήτρες, αντίστοιχα, των παραμέτρων του συστήματος και σU ($\sigma > 0$) είναι η $T\times 3$ μήτρα των διαταρακτικών όρων, της οποίας η i-στήλη είναι το $T\times 1$ διάνυσμα των διαταρακτικών όρων της i-διαρθρωτικής εξίσωσης. Ο βαθμός υπερταυτοποίησης της πρώτης διαρθρωτικής εξίσωσης είναι $l = m-n$, όπου n είναι το πλήθος των ερμηνευτικών μεταβλητών (ενδογενών και βοηθητικών) της εξίσωσης αυτής. Σημειώνουμε οτι $n = 5$, σε όλα τα πειράματα που διεξήγαμε. Χρησιμοποιήσαμε δύο διαρθρωτικές μορφές που αντιστοιχούν σε δύο τιμές της παραμέτρου m, δηλαδή $m = 7, 12$.

Η πρώτη διαρθρωτική μορφή είναι αυτή που χρησιμοποίησε ο Cragg ((1967), σελ. 92) με αλλαγή της σειράς των βοηθητικών μεταβλητών έτσι ώστε στην πρώτη εξίσωση να ανήκουν μόνον οι τρείς πρώτες βοηθητικές μεταβλητές του συστήματος. Οι συντελεστές των μεταβλητών αυτής της διαρθρωτικής μορφής πάρθηκαν από τον Cragg ((1967), Table I, Structure 1) και οι μήτρες B και Γ είναι

οι εξής:

$$B = \begin{bmatrix} 1.0 & -.89 & -.16 \\ -.74 & 1.0 & .0 \\ .0 & -.29 & 1.0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 44 & .74 & .13 & .0 & .0 & .0 & .0 \\ 62 & .0 & .96 & .0 & .7 & .0 & .06 \\ 40 & .0 & .0 & .11 & .53 & .56 & .0 \end{bmatrix}. \qquad (6.67)$$

Η πρώτη εξίσωση της διαρθρωτικής μορφής που προκύπτει από τις σχέσεις (6.66) και (6.67) είναι υπερταυτοποιημένη με βαθμό υπερταυτοποίησης $l = 2$. Η δεύτερη διαρθρωτική μορφή που χρησιμοποιήσαμε προκύπτει από την (6.66) και την σχέση

$$B = \begin{bmatrix} 1.0 & -.89 & -.16 \\ -.74 & 1.0 & .0 \\ .0 & -.29 & 1.0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 44 & .74 & .13 & .0 & .0 & .0 & .0 & .0 & .0 & .0 & .0 & .0 \\ 62 & .0 & .96 & .0 & .7 & .0 & .06 & .0 & .0 & .32 & .65 & .52 \\ 40 & .0 & .0 & .11 & .53 & .56 & .0 & .18 & .68 & .0 & .0 & .0 \end{bmatrix} \qquad (6.68)$$

και είναι μια επέκταση της διαρθρωτικής μορφής που προκύπτει απο τις σχέσεις (6.66) και (6.67). Οι συντελεστές των επιπρόσθετων βοηθητικών μεταβλητών προέκυψαν, με κάποιες αλλαγές, από τον Cragg ((1967), Table I, Structure 2). Η πρώτη εξίσωση του συστήματος που προκύπτει απο τις (6.66) και (6.68) είναι υπερταυτοποιημένη με βαθμό υπερταυτοποίησης $l = 7$.

Από τις σχέσεις (6.67) και (6.68) έπεται ότι η πρώτη διαρθρωτική εξίσωση του συστήματος (6.66) είναι

$$y = Y\beta + Z_1\gamma + \sigma u, \qquad (6.69)$$

όπου

$$\beta' = (.89, .16), \quad \gamma' = (44, .74, .13) \qquad (6.70)$$

και y είναι το $T\times 1$ διάνυσμα των παρατηρήσεων της εξαρτημένης ενδογενούς μεταβλητής της πρώτης εξίσωσης, Y είναι η $T\times 2$ μήτρα των παρατηρήσεων των υπολοίπων ενδογενών μεταβλητών του συστήματος, Z_1 είναι η $T\times 3$ μήτρα των παρατηρήσεων των βοηθητικών μεταβλητών του συστήματος που περιέχονται στην πρώτη εξίσωση και σu ($\sigma > 0$) είναι το $T\times 1$ διάνυσμα των διαταρακτικών όρων της πρώτης εξίσωσης.

Εκτός από την επίδραση του βαθμού υπερταυτοποίησης, μας ενδιέφερε να διερευνήσουμε και την επίδραση του μεγέθους του

χρησιμοποιουμένου δείγματος στην απόδοση των διαφόρων μορφών των ελέγχων της ανεξαρτησίας των βοηθητικών μεταβλητών από τον στοχαστικόν όρο μιας διαρθρωτικής εξίσωσης. Για αυτόν τον λόγο πραγματοποιήσαμε το τυχαίο πείραμα χρησιμοποιώντας τρία μεγέθη δείγματος με 50, 100 και 200 παρατηρήσεις, αντίστοιχα.

Επομένως, ο πειραματικός μας χώρος αποτελείτο από 6 πειραματικά σημεία, ένα για κάθε συνδυασμό των τιμών του βαθμού υπερταυτοποίησης, l, και του μεγέθους του δείγματος, T, και ήταν αντιπροσωπευτικός των συνθηκών που είναι δυνατόν να αντιμετωπίσει στην πράξη ο οικονομέτρης ερευνητής, όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό. Διότι περιείχε πειραματικά σημεία που αντιστοιχούν σε μικρό ή μεγάλο βαθμό υπερταυτοποίησης (l = 2 ή 7, αντίστοιχα) και μεγέθη δείγματος που ήσαν μικρά σε σχέση με το πλήθος των προς εκτίμηση παραμέτρων των χρησιμοποιηθεισών διαρθρωτικών μορφών. Σε κάθε σημείο του πειραματικού χώρου εκτελέσαμε το πείραμα που θα περιγράψουμε στην συνέχεια.

Για κάθε μέγεθος δείγματος, T, και κάθε τιμή της παραμέτρου l (ή ισοδύναμα της παραμέτρου m) δημιουργήσαμε μια μήτρα Z, των βοηθητικών μεταβλητών (instruments), ως εξής: Χρησιμοποιώντας την υπορουτίνα G05DAF της NAG (Numerical Algorithms Group), δημιουργήσαμε T ανεξάρτητες παρατηρήσεις για τους m ψευτοτυχαίους αριθμούς z^{*}_{tj} (t = 1,...,T και j = 1,...,m) από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [-10, 10]. Επειδή στην εφαρμοσμένη οικονομετρική έρευνα ο ερευνητής αντιμετωπίζει συχνά το πρόβλημα της πολυσυγγραμμικότητας των ερμηνευτικών μεταβλητών μιας διαρθρωτικής εξίσωσης, κατασκευάσαμε την μήτρα Z, των βοηθητικών μεταβλητών του οικονομετρικού συστήματος (6.66), έτσι ώστε να υπάρχει συσχέτιση μεταξύ δύο οποιωνδήποτε διαφορετικών βοηθητικών μεταβλητών, εξαιρουμένης της σταθεράς. Ακολουθώντας τους McDonald και Galarneau ((1975), σελ. 409) κατασκευάσαμε τα στοιχεία, z_{tj} (t = 1,...,T και j = 1,...,m), της μήτρας των βοηθητικών μεταβλητών, Z, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$z_{tj} = 1 \quad (t = 1,\ldots,T \text{ και } j = 1)$$

και (6.71)

$$z_{tj} = (1-A)^{1/2} z^{*}_{t(j-1)} + \sqrt{A}\, z^{*}_{t4} \quad (t = 1,\ldots,T \text{ και } j = 2,\ldots,m),$$

από τις οποίες έπεται ότι ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ δύο οποιωνδήποτε βοηθητικών μεταβλητών, εξαιρουμένης της σταθεράς, είναι A. Σε όλα τα πειράματα που εκτελέσαμε χρησιμοποιήσαμε την ενδιάμεση τιμή A = .5. Πρέπει να σημειώσουμε ότι η μήτρα Z γινόταν δεκτή και χρησιμοποιόταν στην συνέχεια του πειράματος υπό την προϋπόθεση ότι η μήτρα (Z'Z/T) ήταν μη ιδιάζουσα και συνεπώς μπορούσε να αντιστραφεί. Σε αντίθετη περίπτωση δημιουργούσαμε μια νέα μήτρα Z με τον τρόπο που εκθέσαμε ανωτέρω.

Χρησιμοποιώντας την μήτρα των συντελεστών ανηγμένης μορφής

$$\Pi = B^{-1}\Gamma \tag{6.72}$$

του συστήματος (6.66) δημιουργήσαμε την μήτρα

$$E(Y_*) = [E(y):E(Y)] = (x:X_o) = X_* \ , \tag{6.73}$$

που περιέχει τις αναμενόμενες τιμές του T×1 διανύσματος y, της εξαρτημένης ενδογενούς μεταβλητής της πρώτης εξίσωσης, και της T×2 μήτρας Y, των παρατηρήσεων των υπολοίπων ενδογενών μεταβλητών του συστήματος.

Στην συνέχεια δημιουργήσαμε την 3×3 μήτρα Σ_*, των συνδιακυμάνσεων των γραμμών της μήτρας $(\sigma u:V_1)$, όπου $V_1 = Y-X_o$, έτσι ώστε ο ασυμπτωτικός συντελεστής πολλαπλού προσδιορισμού ανηγμένης μορφής (asymptotic reduced-form multiple correlation coefficient), έστω R^2, να ισούται με .85 για όλες τις εξισώσεις του συστήματος (6.66). Οι προκύπτουσες τιμές των στοιχείων της μήτρας Σ_* θεωρήθησαν ότι δεν είναι ούτε υπερβολικά μικρές, ώστε οι διάφορες μέθοδοι εκτίμησης (OLS, TSLS κ.τ.λ.) να μην διαφέρουν σημαντικά, ούτε υπερβολικά υψηλές, ώστε οι διακυμάνσεις (fluctuations) των διαταρακτικών όρων να αποκρύπτουν ή να υπερκαλύπτουν τις διαφορές των εναλλακτικών εκτιμητικών μεθόδων, ή να δημιουργούν ακραίες παρατηρήσεις (outliers) σε αριθμούς που να καθιστούν αμφίβολη την εγκυρότητα (validity) των προσομοιώσεων (βλ. Mikhail (1972), σελ. 620 και Mikhail (1975), σελ. 94). Η κατασκευή της μήτρας Σ_*, με την ιδιότητα που αναφέραμε, έγινε ως εξής:

Κατ' αρχήν δημιουργήσαμε την 3×3 μήτρα Ω, των συνδιακυμάνσεων των γραμμών της μήτρας των διαταρακτικών όρων ανηγμένης μορφής, $(v:V_1)$, του συστήματος (6.66) από τον τύπο

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_1' \\ \omega_1 & C_* \end{bmatrix} = \frac{1-R^2}{R^2}\,\frac{X_*'X_*}{T} = \frac{1-R^2}{R^2}\begin{bmatrix} x'x/T & x'X_o/T \\ X_o'x/T & X_o'X_o/T \end{bmatrix}, \qquad (6.74)$$

όπου οι ποσότητες ω_{11}, ω_1 και C_* έχουν διαστάσεις 1×1, 2×1 και 2×2, αντίστοιχα. Η μήτρα C_* είναι η 2×2 μη μηδενική υπομήτρα της μήτρας C στην (6.2). Χρησιμοποιώντας τις ποσότητες ω_{11}, ω_1, C_* και το διάνυσμα β (βλ. την σχέση (6.70)) υπολογίσαμε τις ποσότητες σ^2 και q_* από τους τύπους

$$\sigma^2 = \omega_{11} - 2\beta'\omega_1 + \beta'C_*\beta, \quad q_* = (\omega_1 - C_*\beta)/\sigma, \qquad (6.75)$$

όπου σq_* είναι το 2×1 διάνυσμα των συντελεστών συσχέτισης του διανύσματος των διαταρακτικών όρων της εξίσωσης (6.69) με την T×2 μήτρα V_1, η οποία είναι το στοχαστικό μέρος της μήτρας Y. Το διάνυσμα q_* είναι το 2×1 μη μηδενικό υποδιάνυσμα του διανύσματος q στην (6.2). Τέλος, η μήτρα Σ_* των συνδιακυμάνσεων των γραμμών της μήτρας $(\sigma u{:}V_1)$ υπολογίστηκε από τον τύπο

$$\Sigma_* = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \sigma q_*' \\ \sigma q_* & C_* \end{bmatrix} \qquad (6.76)$$

και αντιστοιχεί στην 3×3 μη μηδενική υπομήτρα της μήτρας Σ (βλ. την σχέση (6.2)).

Για κάθε ζεύγος μητρών Z και X_o και για κάθε διάνυσμα x, που δημιουργήσαμε για δεδομένο συνδυασμό των τιμών των παραμέτρων l και T, πραγματοποιήσαμε σε 5000 επαναλήψεις του πειράματος. Σε καθεμιά από τις επαναλήψεις αυτές κατασκευάσαμε από ένα διάνυσμα y και μια μήτρα Y. Η κατασκευή αυτών των διανυσμάτων και μητρών περιγράφεται στη συνέχεια.

Σε κάθε επανάληψη του πειράματος χρησιμοποιήσαμε το ζεύγος των υπορουτινών G05EAF και G05EZF της NAG για να δημιουργήσουμε μιαν T×3 μήτρα $(\sigma u{:}V_1)$, οι γραμμές της οποίας είναι διανύσματα από την $N(0,\Sigma_*)$ κατανομή, όπου 0 είναι το μηδενικό διάνυσμα και η μήτρα Σ_* έχει ορισθεί στον τύπο (6.76). Χρησιμοποιώντας τις T×2 μήτρες X_o και V_1 υπολογίσαμε την μήτρα Y από τον τύπο

$$Y = X_o + V_1 \qquad (6.77)$$

και το διάνυσμα y από τις σχέσεις (6.69) και (6.70).

Χρησιμοποιώντας τις 5000 μήτρες $Y_* = (y:Y)$, που αντιστοιχούν από μια σε κάθε σημείο του πειραματικού μας χώρου, πραγματοποιήσαμε 5000 επαναλήψεις της ακόλουθης διαδικασίας.

Η εξίσωση (6.69) εκτιμήθηκε με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων σε δύο στάδια (TSLS). Χρησιμοποιώντας τις εκτιμήσεις των παραμέτρων β και γ, έστω $\hat{\beta}_{TSLS}$ και $\hat{\gamma}_{TSLS}$, τις μήτρες Y και Z_1, των ερμηνευτικών μεταβλητών, και το διάνυσμα y, της εξαρτημένης μεταβλητής, υπολογίσαμε τα TSLS κατάλοιπα, $\hat{u}_{TSLS}$, από την σχέση

$$\hat{u}_{TSLS} = y - Y\hat{\beta}_{TSLS} - Z_1\hat{\gamma}_{TSLS}. \qquad (6.78)$$

Κατόπιν, υπολογίσθησαν δύο χ^2 και ένα F στατιστικό για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης (6.39) ως προς την εναλλακτική υπόθεση (6.40): το στατιστικό υπερταυτοποίησης (6.11) και το στατιστικό του Sargan (6.12) από τους τύπους

$$L = \frac{\hat{u}'_{TSLS}P_Z\hat{u}_{TSLS}}{\hat{u}'_{TSLS}\bar{P}_Z\hat{u}_{TSLS}/T}, \qquad S = \frac{\hat{u}'_{TSLS}P_Z\hat{u}_{TSLS}}{\hat{u}'_{TSLS}\hat{u}_{TSLS}/T}, \qquad (6.79)$$

αντίστοιχα, και το στατιστικό του Basmann (6.59) από τον τύπο

$$F = \frac{T-m}{l}\,\frac{\hat{u}'_{TSLS}P_Z\hat{u}_{TSLS}}{\hat{u}'_{TSLS}\bar{P}_Z\hat{u}_{TSLS}}. \qquad (6.80)$$

Στην συνέχεια υπολογίσθησαν οι εκτιμήσεις των ποσοτήτων q, $\bar{c}_1 = \text{plim}\, c_1$ και $\bar{c}_2 = \text{plim}\, c_2$ από τους τύπους

$$\hat{q} = (Y:Z_1)'\hat{u}_{TSLS}/T\hat{\sigma}, \qquad \hat{\sigma} = (\hat{u}'_{TSLS}\hat{u}_{TSLS}/T)^{1/2},$$

$$\hat{c}_1 = \hat{q}'\left[(Y:Z_1)'P_Z(Y:Z_1)/T\right]^{-1}\hat{q}, \qquad (6.81)$$

$$\hat{c}_2 = \text{tr}\left[\left[(Y:Z_1)'P_Z(Y:Z_1)/T\right]^{-1}\left[(Y:Z_1)'(Y:Z_1)/T - \hat{q}\hat{q}'\right]\right],$$

όπου κατά τον υπολογισμό του $\hat{q}$ ελήφθη υπόψη το γεγονός ότι η μήτρα Z_1 είναι εξ ορισμού ασυσχέτιστη με τον διαταρακτικό όρο της εξίσωσης (6.69).

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (6.50), (6.64) και (6.81) υπολογίσαμε τις ποσότητες $\bar{h}_i$ και ζ_i (i = 0, 1, 2), θέτοντας $\mathcal{K} = 0$, και το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο στατιστικό του Basmann (6.63) για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης (6.39) ως προς την

εναλλακτική υπόθεση (6.40).

Εν συνεχεία, χρησιμοποιώντας τις τιμές των στατιστικών (6.11), (6.12) και (6.59), του κατά Cornish-Fisher διορθωμένου στατιστικού του Basmann (6.63) και τις συναρτήσεις πυκνότητας της χ^2 και F κατανομής, υπολογίσαμε τα επίπεδα σημαντικότητας (p-values) που αντιστοιχούν στους ελέγχους που μελετήσαμε και σε καθεμιά από τις μεθόδους διόρθωσης του μεγέθους τους. Ολοκληρώνοντας την χ^2_l πυκνότητα από την τιμή του στατιστικού υπερταυτοποίησης (6.11) ή του στατιστικού του Sargan (6.12) μέχρι το άπειρο παίρνουμε τα επίπεδα σημαντικότητας που αντιστοιχούν στην προσέγγιση με την χ^2 κατανομή (I ή S, αντίστοιχα) και χρησιμοποιώντας την (6.49) για $\gamma_0 = \bar{\gamma}_3 = \gamma^*_1 = \gamma^*_2 = 0$ βρίσκουμε τα επίπεδα σημαντικότητας από την κατά Edgeworth προσέγγιση της χ^2 κατανομής (IE ή SE, αντίστοιχα). Ολοκληρώνοντας την F^l_{T-m} πυκνότητα από την τιμή του στατιστικού του Basmann (6.59) (που υπολογίσαμε χρησιμοποιώντας το στατιστικό υπερταυτοποίησης) μέχρι το άπειρο παίρνουμε το επίπεδο σημαντικότητας που αντιστοιχεί στην προσέγγιση με την F κατανομή (B) και χρησιμοποιώντας στην (6.60) βρίσκουμε το επίπεδο σημαντικότητας από την κατά Edgeworth προσέγγιση της F κατανομής (BE). Τέλος, το επίπεδο σημαντικότητας που αντιστοιχεί στην Cornish-Fisher μέθοδο διόρθωσης του ελέγχου του Basmann (CFB) βρίσκεται με ολοκλήρωση της F^l_{T-m} πυκνότητας από την τιμή του στατιστικού (6.63) μέχρι το άπειρο. Στο σημείο αυτό πρέπει να διευκρινίσουμε ότι οι παράμετροι $\bar{h}_i$ και ζ_i (i = 0, 1, 2) στις σχέσεις (6.49) και (6.60) ή (6.63), αντίστοιχα, αντικαθίστανται από τις εκτιμήσεις τους. Μια λεπτομερής συζήτηση των εναλλακτικών μεθόδων υπολογισμού των επιπέδων σημαντικότητας, που αντιστοιχούν στις τύπου Edgeworth διορθωμένες κριτικές τιμές διαφόρων χ^2 και F στατιστικών, δίνεται στο Τμήμα 3.4, όπου παρουσιάζονται τα Monte Carlo πειράματα του Κεφαλαίου 3.

Στο σημείο αυτό πρέπει να παρατηρηθεί ότι, το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο στατιστικό του Basmann (6.63) είναι δυνατόν να πάρει και αρνητικές τιμές, οπότε λέγομε ότι έχουμε υπερδιόρθωση του στατιστικού του Basmann. Ένα τέτοιο ενδεχόμενο δημιουργεί σοβαρά προβλήματα εφόσον το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο στατιστικό του Basmann υποτίθεται ότι κατανέμεται ως

μια F μεταβλητή. Αξίζει να σημειώσουμε ότι, από ένα πλήθος 15000 κατά Cornish-Fisher διορθωμένων στατιστικών του Basmann, που υπολογίσαμε κατά την διενέργεια των πειραμάτων για l = 7, μόνο 55, δηλαδή 0.37% περίπου, ήσαν αρνητικά, ενώ τα αρνητικά κατά Cornish-Fisher διορθωμένα στατιστικά του Basmann, στις 15000 επαναλήψεις για l = 2, ήσαν 273, δηλαδή 1.82% περίπου. Το δεύτερο από τα ανωτέρω ποσοστά είναι απρόσμενα υψηλό και το γεγονός αυτό ελήφθη σοβαρά υπόψη στην περαιτέρω επεξεργασία και αξιολόγηση των αποτελεσμάτων του πειράματος.

Η διαδικασία που μόλις περιγράψαμε επαναλήφθηκε 5000 φορές σε κάθε πειραματικό σημείο (συνδυασμό των τιμών των παραμέτρων l και T). Σε κάθε πειραματικό σημείο 5000 διαφορετικά διανύσματα y και μήτρες Y χρησιμοποιηθήκαν σε συνδυασμό με την ίδια μήτρα βοηθητικών μεταβλητών Z. Όμως, η μήτρα των βοηθητικών μεταβλητών ήταν διαφορετική σε καθένα από τα πειραματικά σημεία, έτσι ώστε τα αποτελέσματα του πειράματός μας να είναι ανεξάρτητα από την εκλογή μιας συγκεκριμένης μήτρας βοηθητικών μεταβλητών.

Από τον τρόπο κατασκευής των μητρών Y και Z, των ερμηνευτικών μεταβλητών, και των διανυσμάτων y, της εξαρτημένης μεταβλητής της εξίσωσης (6.69), τον οποίον έχουμε ήδη εκθέσει, είναι φανερό πως για την διενέργεια των πειραμάτων ήταν αναγκαία η δημιουργία μεγάλου πλήθους ψευτοτυχαίων αριθμών. Το πρόβλημα της δημιουργίας ψευτοτυχαίων αριθμών καθώς και αυτό του ελέγχου της "τυχαιότητάς" τους μελετάται σχετικά λεπτομερώς στο Παράρτημα Η. Για την συζήτηση που ακολουθεί αρκεί να σημειώσουμε ότι, όπως είναι γνωστό, η ποιότητα μιας ακολουθίας ψευτοτυχαίων αριθμών δεν είναι παντού ομοιόμορφη και πως οι αρχικοί αριθμοί κάθε ψευτοτυχαίας ακολουθίας δεν εμφανίζουν επαρκώς "τυχαία" συμπεριφορά. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίον συνηθίζεται σε Monte Carlo εφαρμογές να μην χρησιμοποιείται κάποιο πλήθος από τους αρχικούς αριθμούς της χρησιμοποιούμενης ψευτοτυχαίας ακολουθίας. Σε καθένα από τα πειράματα που πραγματοποιήσαμε αφήσαμε αχρησιμοποίητους τους πρώτους 2400 ομοιόμορφους ψευτοτυχαίους αριθμούς που δημιουργήσαμε. Ως σπόρος (seed) χρησιμοποιήθηκε σε όλα τα πειράματα ο αριθμός 1 και η ποιότητα των παραχθέντων ψευτοτυχαίων αριθμών κρίνεται ικανοποιητική με βάση την γνωστή ποιότητα των

αλγορίθμων της NAG και τους ελέγχους που διεξήγαμε.

Η πειραματική διαδικασία εκτελέστηκε σε όλα τα σημεία του πειραματικού χώρου. Τα αποτελέσματα του πειράματος έγιναν αντικείμενο επεξεργασίας και οι πληροφορίες που περιείχαν συνοψίστηκαν σε πίνακα και διαγράμματα. Η κατασκευή του πίνακα και των διαγραμμάτων και τα συμπεράσματα που προκύπτουν από αυτά θα παρουσιαστούν στην συνέχεια.

Έχουμε ήδη πεί ότι σε κάθε επανάληψη του πειράματος υπολογίζονταν οι τιμές των στατιστικών (6.11), (6.12) και (6.59), του κατά Cornish-Fisher διορθωμένου στατιστικού (6.63) καθώς και τα επίπεδα σημαντικότητας (p-values) που αντιστοιχούν στους ελέγχους που μελετήσαμε και σε καθεμιά από τις μεθόδους διόρθωσης του μεγέθους τους.

Χρησιμοποιώντας τα ανωτέρω επίπεδα σημαντικότητας κατασκευάσαμε τον Πίνακα 6.1 ως εξής: Για κάθε σημείο του πειραματικού χώρου, δηλαδή για κάθε συνδυασμό των τιμών των παραμέτρων l και T, υπολογίσαμε το πραγματικό μέγεθος (actual size) του ελέγχου της υπόθεσης (6.39) έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης (6.40) σε δεδομένο επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας (nominal size). Εφόσον για κάθε συνδυασμό των τιμών των παραμέτρων l και T πραγματοποιήθηκαν 5000 επαναλήψεις του πειράματος, το πραγματικό μέγεθος καθενός ελέγχου ισούται με την σχετική συχνότητα των περιπτώσεων κατά τις οποίες το αντίστοιχο επίπεδο σημαντικότητας (p-value) είναι κατ' απόλυτη τιμή μικρότερο από το δεδομένο επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας (nominal size), δηλαδή με το πλήθος αυτών των περιπτώσεων διαιρεμένο δια 5000. Το πραγματικό μέγεθος των ελέγχων υπολογίστηκε για όλες τις διαφορετικές μεθόδους υπολογισμού των επιπέδων σημαντικότητας που αντιστοιχούν είτε στα συνήθη στατιστικά υπερταυτοποίησης, Sargan και Basmann, είτε στις εναλλακτικές μεθόδους διόρθωσης του μεγέθους των αντιστοίχων ελέγχων. Ο υπολογισμός του πραγματικού μεγέθους των ελέγχων πραγματοποιήθηκε για τέσσερεις διαφορετικές τιμές του επιπέδου στατιστικής σημαντικότητας: 0.0, 0.01, 0.05, 0.10. Την τιμή 0.0 του επιπέδου στατιστικής σημαντικότητας την συμπεριλάβαμε στην μελέτη μας για να μπορέσουμε να εκτιμήσουμε την πιθανότητα να συμβεί υπερδιόρθωση του μεγέθους των ελέγχων που

εξετάσαμε. Τέτοια υπερδιόρθωση συμβαίνει οποτεδήποτε η κατά Edgeworth προσέγγιση παράγει αρνητικά επίπεδα σημαντικότητας (p-values) (που συνήθως ισοδυναμούν με αρνητικές κριτικές τιμές), είτε όταν η κατά Cornish-Fisher μέθοδος διόρθωσης παράγει αρνητικά κατά Cornish-Fisher διορθωμένα στατιστικά. Η εκτιμηθείσα πιθανότητα του τελευταίου ενδεχομένου (1.82% περίπου για l = 2) είναι, όπως έχουμε ήδη επισημάνει, απρόσμενα υψηλή, γεγονός που εξηγεί το ενδιαφέρον μας για την περίπτωση της υπερδιόρθωσης του μεγέθους των εξεταζομένων ελέγχων.

Τα πραγματικά μεγέθη των F ελέγχων (του Basmann) ή (ασυμπτωτικά) των χ^2 ελέγχων (των Anderson, Rubin και Sargan), που υπολογίστηκαν όπως περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο, παρουσιάζονται στον Πίνακα 6.1. Τα κυριότερα συμπεράσματα που συνάγονται από την εξέταση του πίνακα αυτού είναι τα ακόλουθα.

Είναι γνωστό από την στατιστική θεωρία (βλ. και την σχετική συζήτηση στο Κεφάλαιο 1) ότι, αν, κατά την διενέργεια του F ελέγχου , χρησιμοποιήσουμε την ασυμπτωτική κατανομή (χ^2), αντί της ακριβούς (exact) κατανομής (F), οι ασυμπτωτικοί έλεγχοι που θα προκύψουν είναι πιο αυστηροί από τους αντιστοίχους ακριβείς. Δηλαδή, οι έλεγχοι που χρησιμοποιούν την χ^2 κατανομή απορρίπτουν την μηδενική υπόθεση συχνότερα από ό,τι οι έλεγχοι που βασίζονται στην F κατανομή. Επομένως, το πραγματικό μέγεθος της ασυμπτωτικής μορφής του F ελέγχου είναι μεγαλύτερο από το πραγματικό μέγεθος της ακριβούς μορφής του. Επιπλέον, από τους τύπους (6.11) και (6.12) είναι φανερό ότι το στατιστικό υπερταυτοποίησης είναι εξ' ορισμού μεγαλύτερο από το στατιστικό του Sargan. Λαμβανομένου υπόψη του γεγονότος ότι και τα δύο ανωτέρω στατιστικά κατανέμονται σύμφωνα με την χ^2 κατανομή με l βαθμούς ελευθερίας, είναι σαφές ότι το στατιστικό υπερταυτοποίησης απορρίπτει την μηδενική υπόθεση συχνότερα από ό,τι το στατιστικό του Sargan. Δηλαδή, το πραγματικό μέγεθος του ελέγχου που χρησιμοποιεί το στατιστικό του Sargan είναι μικρότερο από το πραγματικό μέγεθος του ελέγχου που βασίζεται στο στατιστικό υπερταυτοποίησης. Και τα δύο αυτά θεωρητικά συμπεράσματα επαληθεύονται από τα αποτελέσματα του πειράματος, όπως φαίνεται στον Πίνακα 6.1.

Ο Πίνακας 6.1 περιέχει τις εκτιμημένες πιθανότητες απόρριψης

ΠΙΝΑΚΑΣ 6.1

ΕΚΤΙΜΗΜΕΝΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ ΤΗΣ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ

(ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ: ΥΠΕΡΤΑΥΤΟΠΟΙΗΣΗΣ, SARGAN, BASMANN)

H_o:			$p_2 = 0$						
A = .5									
Test:			I	IE	S	SE	B	BE	CFB
Size	l	SAMPLE				%			
0%	2	50	0.0	6.3	0.0	7.4	0.0	7.7	1.9
		100	0.0	5.1	0.0	5.8	0.0	6.0	1.9
		200	0.0	5.2	0.0	5.3	0.0	5.3	1.6
	7	50	0.0	0.1	0.0	3.2	0.0	2.6	0.4
		100	0.0	0.3	0.0	2.2	0.0	1.9	0.4
		200	0.0	0.4	0.0	1.2	0.0	1.1	0.3
1%	2	50	1.2	7.5	0.4	8.2	0.3	8.5	3.9
		100	0.9	6.5	0.7	7.1	0.5	7.2	4.0
		200	0.7	6.1	0.5	6.4	0.5	6.5	3.4
	7	50	6.0	3.3	0.7	4.9	0.7	4.5	2.1
		100	3.0	2.6	0.9	3.8	0.9	3.8	2.2
		200	2.7	2.8	1.5	3.4	1.5	3.4	2.5
5%	2	50	4.0	10.7	2.9	11.4	2.2	11.5	7.7
		100	3.4	9.5	2.8	9.8	2.6	10.0	7.9
		200	3.2	9.2	2.8	9.4	2.9	9.7	7.8
	7	50	13.5	9.1	4.7	9.2	3.6	8.7	6.8
		100	8.9	7.7	5.1	8.3	4.4	8.2	6.7
		200	8.6	8.2	6.5	8.6	6.1	8.6	7.6
10%	2	50	7.0	14.1	5.6	14.5	4.6	14.5	12.1
		100	6.8	13.4	6.0	13.6	5.4	13.9	12.4
		200	6.5	13.1	6.2	13.1	6.4	14.0	12.4
	7	50	20.2	14.1	9.9	14.1	7.5	13.3	11.5
		100	15.0	13.2	9.8	13.8	8.6	13.6	12.2
		200	14.6	13.8	12.0	14.0	11.2	14.0	13.0

της μηδενικής υπόθεσης για τον έλεγχο της ανεξαρτησίας των υπερταυτοποιητικών βοηθητικών μεταβλητών από τον στοχαστικό όρο της διαρθρωτικής εξίσωσης (6.69). Όταν ο βαθμός υπερταυτοποίησης είναι μικρός (l = 2), ο πίνακας δείχνει ότι, γενικά, το πραγματικό μέγεθος των κατά μέγεθος μη διορθωμένων ελέγχων υπερταυτοποίησης και Sargan είναι σημαντικά μικρότερο από το ονομαστικό τους

μέγεθος και ότι η κατάσταση χειροτερεύει, καθώς το επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας μεγαλώνει. Η χρησιμοποίηση του διορθωμένου για τους βαθμούς ελευθερίας στατιστικού του Basmann (6.59) φαίνεται να χειροτερεύει ακόμα περισσότερο τα πράγματα. Όλες οι κατά Edgeworth διορθώσεις διορθώνουν το μέγεθος προς την σωστή κατεύθυνση. Ωστόσο, όλες τους υπερδιορθώνουν το μέγεθος και, τουλάχιστον σε μικρά επίπεδα σημαντικότητας, μεγαλώνουν την διαφορά μεταξύ του ονομαστικού και του πραγματικού μεγέθους των εξεταζομένων ελέγχων. Το πρόβλημα πρέπει να αποδοθεί στην ύπαρξη αρνητικών "πιθανοτήτων" στις ουρές των Edgeworth προσεγγίσεων, οι οποίες παράγουν αρνητικές "κριτικές τιμές". Πράγματι, κατά την εκτέλεση των πειραμάτων που αντιστοιχούν στην διαρθρωτική μορφή (6.69) με μικρό βαθμό υπερταυτοποίησης, παρατηρήθησαν αρνητικά επίπεδα σημαντικότητας (p-values) της τάξης ακόμα και του 20% ως 25%. Προβλήματα υπερδιόρθωσης, που μπορούν να αποδοθούν στην παραγωγή αρνητικών διορθωμένων στατιστικών, παρουσιάζει και η κατά Cornish-Fisher μέθοδος διόρθωσης του ελέγχου του Basmann. Όμως, οι κατά Cornish-Fisher διορθώσεις αποδίδουν πολύ καλύτερα από τις κατά Edgeworth διορθώσεις σε όλα τα επίπεδα στατιστικής σημαντικότητας που εξετάσαμε. Τέλος, αξίζει να επισημάνουμε ότι, οι αδιόρθωτοι έλεγχοι υπερταυτοποίησης, Sargan και Basmann είναι, με την σειρά που αναφέρονται, οι καλύτεροι σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας 1% και 5%, ενώ σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας 10% την καλύτερη απόδοση έχει ο κατά Cornish-Fisher διορθωμένος έλεγχος του Basmann. Επιπλέον, σημειώνουμε ότι τα ανωτέρω αποτελέσματα δεν εξαρτώνται από το μέγεθος του χρησιμοποιουμένου δείγματος. Όταν ο βαθμός υπερ-ταυτοποίησης είναι μεγάλος ($l = 7$), ο Πίνακας 6.1 δείχνει ότι, σε όλες τις περιπτώσεις, το πραγματικό μέγεθος του κατά μέγεθος μη διορθωμένου ελέγχου υπερταυτοποίησης υπερεκτιμά το ονομαστικό του μέγεθος, όλο και περισσότερο καθώς το επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας μεγαλώνει. Το ίδιο συμβαίνει και με το πραγματικό μέγεθος των αδιόρθωτων ελέγχων του Sargan και του Basmann για δείγμα 200 παρατηρήσεων. Αντίθετα, όταν το χρησιμοποιούμενο δείγμα έχει 50 ή 100 παρατηρήσεις, ο αδιόρθωτος έλεγχος του Basmann έχει πραγματικό μέγεθος όλο και μικρότερο από το ονομαστικό του

μέγεθος, καθώς το επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας μεγαλώνει, ενώ το ονομαστικό και το πραγματικό μέγεθος του μη διορθωμένου ελέγχου του Sargan δεν διαφέρουν σχεδόν καθόλου. Και σε αυτήν την περίπτωση, όλες οι κατά Edgeworth διορθώσεις διορθώνουν το μέγεθος προς την σωστή κατεύθυνση, αλλά και πάλι όλες τους το υπερδιορθώνουν και, τουλάχιστον σε μικρά επίπεδα σημαντικότητας, μεγαλώνουν, σχεδόν πάντοτε, την διαφορά μεταξύ του ονομαστικού και του πραγματικού μεγέθους των ελέγχων που εξετάζουμε. Προβλήματα υπερδιόρθωσης (ομολογουμένως πάρα πολύ μικρά) παρουσιάζει και η κατά Cornish-Fisher μέθοδος διόρθωσης του ελέγχου του Basmann, η οποία αποδίδει πολύ καλύτερα από τις κατά Edgeworth διορθώσεις σε κάθε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας. Τέλος, αξίζει να αναφέρουμε ότι, ο αδιόρθωτος έλεγχος του Sargan είναι ο καλύτερος, ακολουθούμενος από τον συνήθη και τον κατά Cornish-Fisher διορθωμένο έλεγχο του Basmann, για δείγματα 50 και 100 παρατηρήσεων. Αντίθετα, για δείγμα 200 παρατηρήσεων ο αδιόρθωτος έλεγχος του Basmann έχει την καλύτερη απόδοση.

Οι έλεγχοι που εξετάζουμε σε αυτό το κεφάλαιο μπορούν να συγκριθούν και διαγραμματικά. Σε ένα τετράγωνο διάγραμμα σχεδιάζουμε το πραγματικό μέγεθος ενός ελέγχου ως συνάρτηση του ονομαστικού του μεγέθους. Υπό ιδανικές συνθήκες, τα δύο αυτά μεγέθη ταυτίζονται και, συνεπώς, όλες οι παρατηρήσεις πρέπει να βρίσκονται πάνω στην διαγώνιο των 45 μοιρών του διαγράμματος, η οποία είναι η συνάρτηση κατανομής μιας U(0,1) τυχαίας μεταβλητής. Φυσικά, αν είχαμε ένα τυχαίο δείγμα από την U(0,1) κατανομή, τότε, λόγω του δειγματοληπτικού σφάλματος, οι παρατηρήσεις δεν θα βρίσκονταν ακριβώς πάνω στην γραμμή των 45 μοιρών, αλλά, με πιθανότητα 95%, μέσα σε μια ταινία, συμμετρική γύρω από την γραμμή των 45 μοιρών και με εύρος που δίνεται από τον πίνακα της μονοδειγματικής (one-sample) κατανομής Kolmogorov-Sirnov (βλ. Durbin (1973)). Άρα, αν μια συγκεκριμένη καμπύλη βρίσκεται μέσα στην ταινία, τότε οι αποκλίσεις της από την γραμμή των 45 μοιρών μπορούν να αποδοθούν στο δειγματοληπτικό σφάλμα, ενώ μια τέτοια υπόθεση απορρίπτεται αν η καμπύλη τέμνει τα όρια της ταινίας. Εφόσον στα διαγράμματα η προσοχή μας περιορίστηκε στην περιοχή πρακτικού ενδιαφέροντος, που αντιστοιχεί σε ονομαστικό μέγεθος

μικρότερο από ή ίσο με 20%, η ανωτέρω ταινία δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέσο πραγματοποίησης του ελέγχου που αναφέραμε προηγουμένως. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνον ως μια ένδειξη του μεγέθους των αποκλίσεων των διαφόρων καμπύλων του διαγράμματος από την διαγώνιο των 45 μοιρών.

Επιπλέον, από τον τρόπο κατασκευής των διαγραμμάτων προκύπτει ότι, τα σημεία που βρίσκονται δεξιά της διαγωνίου των 45 μοιρών αντιστοιχούν σε ονομαστικό μέγεθος μεγαλύτερο του πραγματικού, ενώ το αντίθετο συμβαίνει στα σημεία που βρίσκονται αριστερά απο την ανωτέρω διαγώνιο. Για όλους τους ελέγχους που εξετάσαμε, για κάθε τιμή του ονομαστικού μεγέθους (επιπέδου στατιστικής σημαντικότητας) βρήκαμε το αντίστοιχο πραγματικό μέγεθος, με τον τρόπο που έχουμε ήδη αναφέρει. Τα ζεύγη των τιμών του ονομαστικού και πραγματικού μεγέθους, που προέκυψαν με αυτό τον τρόπο, απεικονίσθησαν στο διάγραμμα με την μορφή μιας καμπύλης. Με βάση τα διαγράμματα αυτά, καλύτερος πρέπει να θεωρηθεί εκείνος ο έλεγχος, του οποίου η καμπύλη απέχει σχετικά λιγότερο από την γραμμή των 45 μοιρών για το εύρος των τιμών του επιπέδου σημαντικότητας που χρησιμοποιούνται συχνότερα στην εφαρμοσμένη έρευνα, δηλαδή για τιμές του επιπέδου σημαντικότητας μεταξύ του 0.01 και του 0.10. Ωστόσο, τα διαγράμματα που κατασκευάσαμε μας παρέχουν πληροφορίες για την συμπεριφορά των εξεταζομένων ελέγχων σε κάθε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας μικρότερο από ή ίσο με 20%. Είναι προφανές ότι οι κλίμακες μέτρησης και του ονομαστικού και του πραγματικού μεγέθους των ελέγχων ήσαν ίδιες.

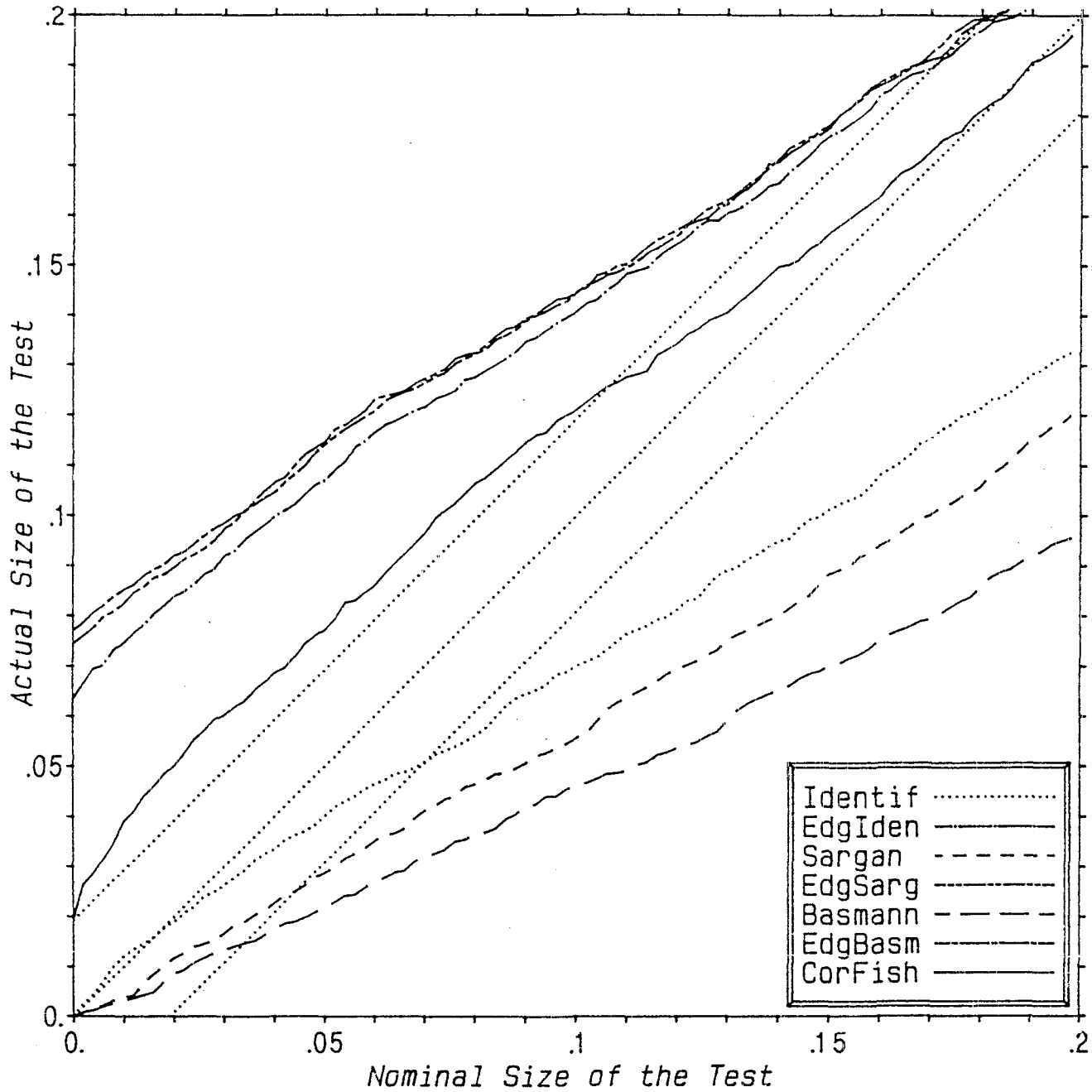
Κατά την εκτέλεση των Monte Carlo πειραμάτων κατασκευάστηκαν έξι διαγράμματα, ένα για κάθε πείραμα. Τα Διαγράμματα 6.1, 6.2 και 6.3 απεικονίζουν την απόδοση των εναλλακτικών μορφών του ελέγχου της εξώγενειας των βοηθητικών μεταβλητών, όταν ο βαθμός υπερταυτοποίησης ισούται με 2, ενώ η συμπεριφορά των εναλλακτικών μορφών του ανωτέρω ελέγχου, όταν ο βαθμός υπερταυτοποίησης είναι 7, παρουσιάζεται στα Διαγράμματα 6.4, 6.5 και 6.6.

Στα Διαγράμματα 6.1, 6.2 και 6.3 όλες οι καμπύλες έχουν μεγάλα τμήματά τους έξω από τα όρια της συμμετρικής ταινίας των διαγραμμάτων. Οι καμπύλες που αντιστοιχούν στους ελέγχους υπερταυτοποίησης, Sargan και Basmann βρίσκονται μέσα στην ταινία

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 6.1

ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΕΞΩΓΕΝΕΙΑΣ ΤΩΝ ΒΟΗΘ. ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

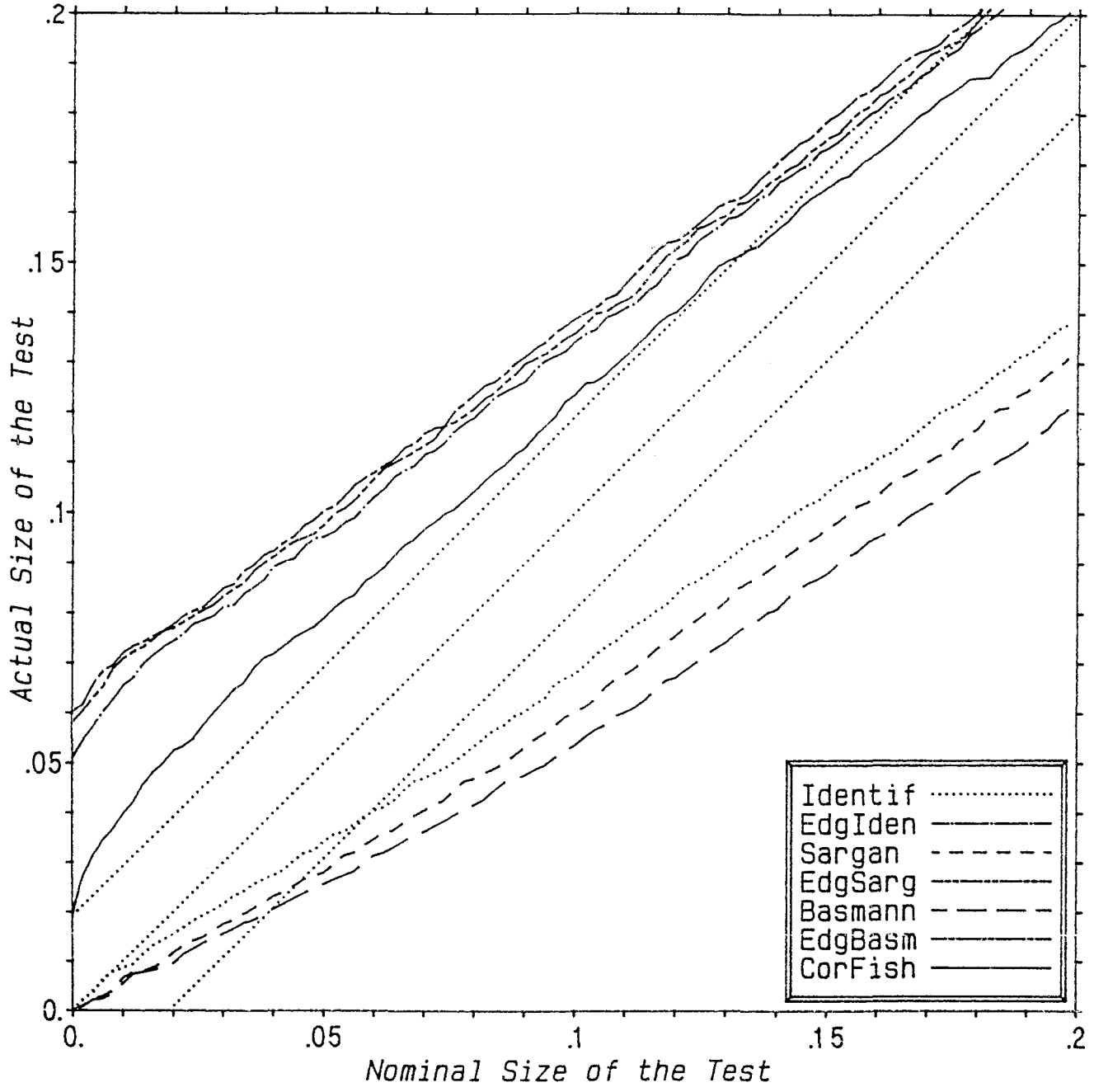
l = 2, T = 50 και A = .5



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 6.2

ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΕΞΩΓΕΝΕΙΑΣ ΤΩΝ ΒΟΗΘ. ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

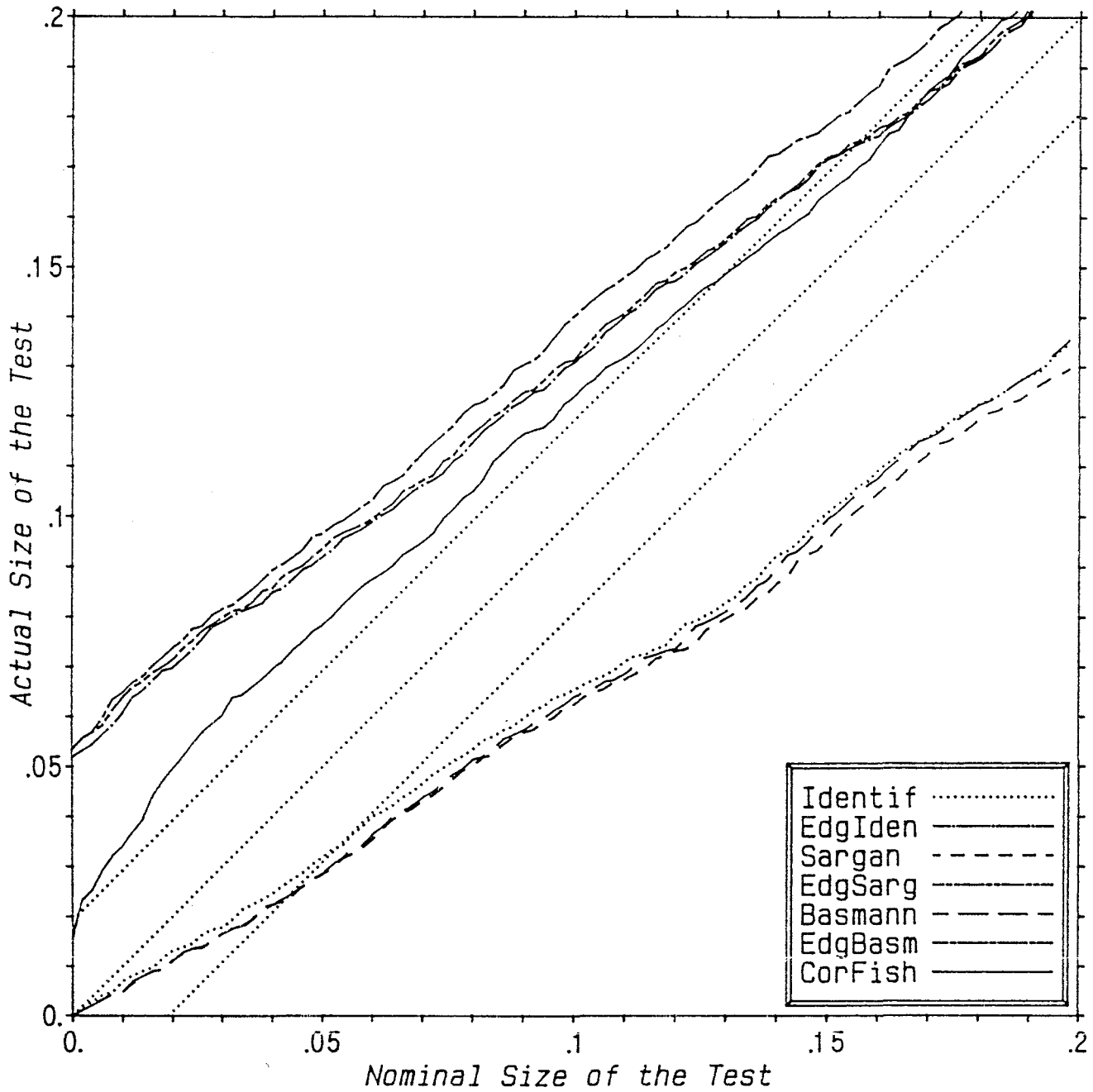
l = 2, T = 100 και A = .5



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 6.3

ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΕΞΩΓΕΝΕΙΑΣ ΤΩΝ ΒΟΗΘ. ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

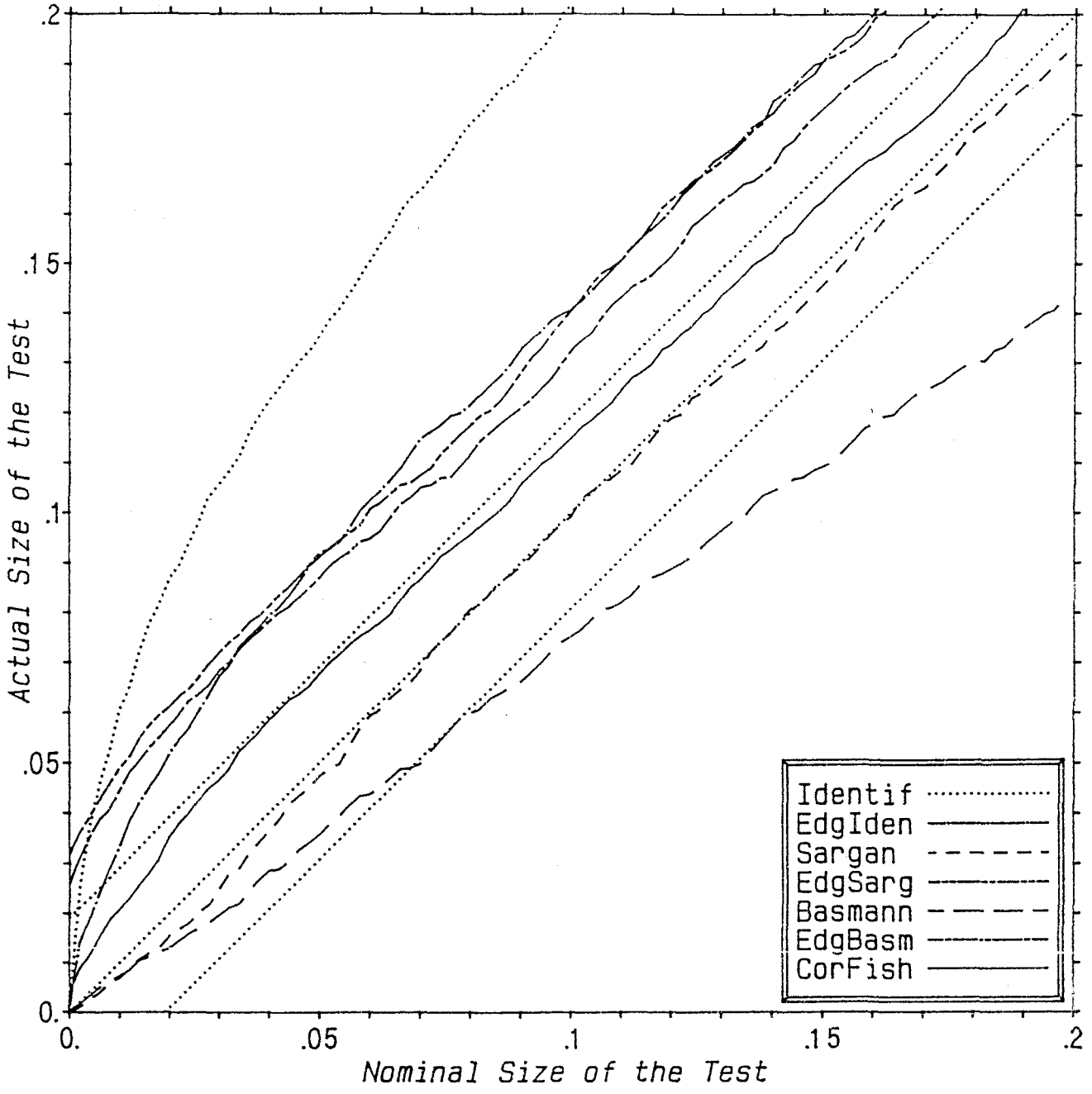
l = 2, T = 200 και A = .5



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 6.4

ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΕΞΩΓΕΝΕΙΑΣ ΤΩΝ ΒΟΗΘ. ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

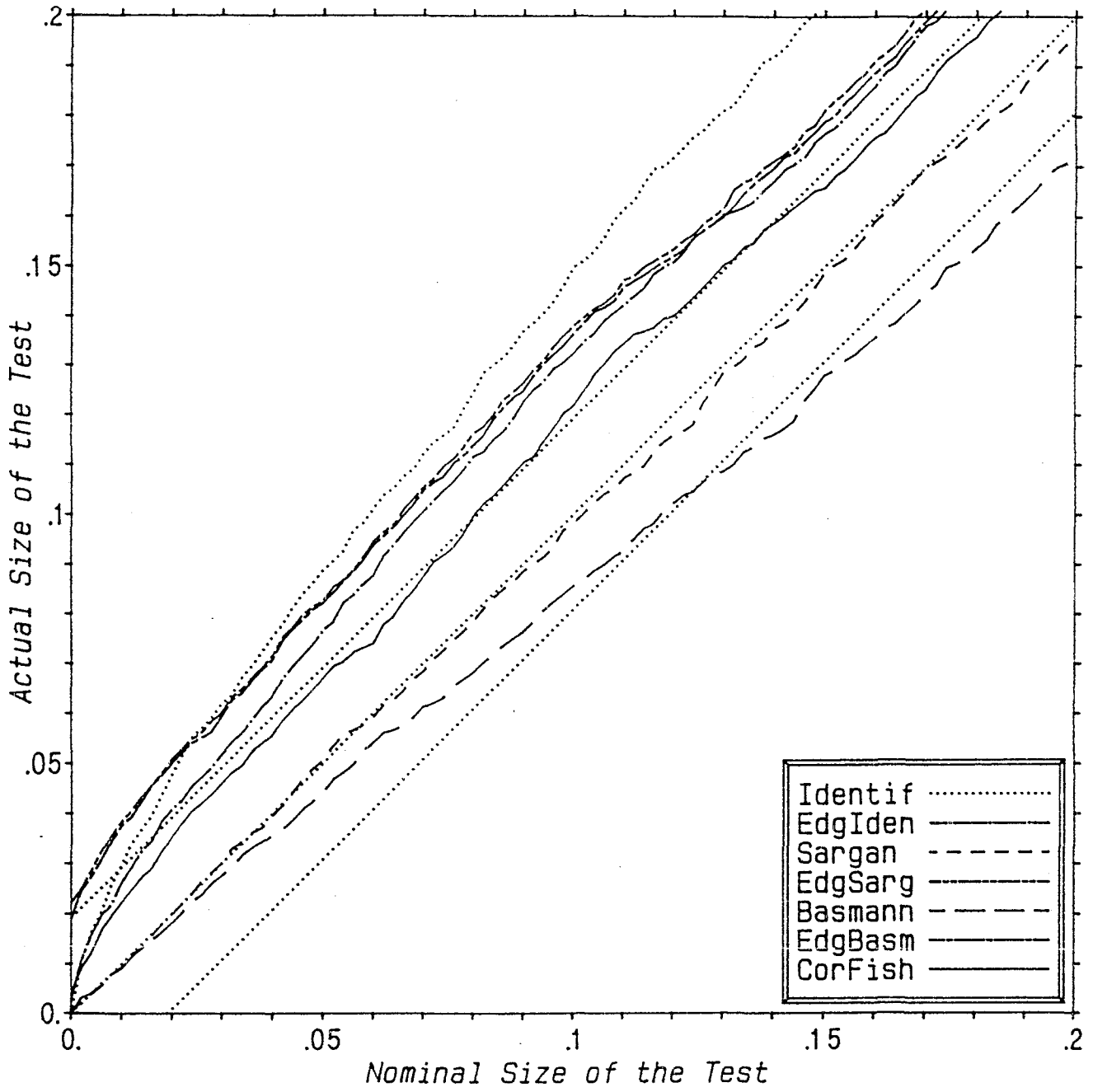
l = 7, T = 50 και A = .5



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 6.5

ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΕΞΩΓΕΝΕΙΑΣ ΤΩΝ ΒΟΗΘ. ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

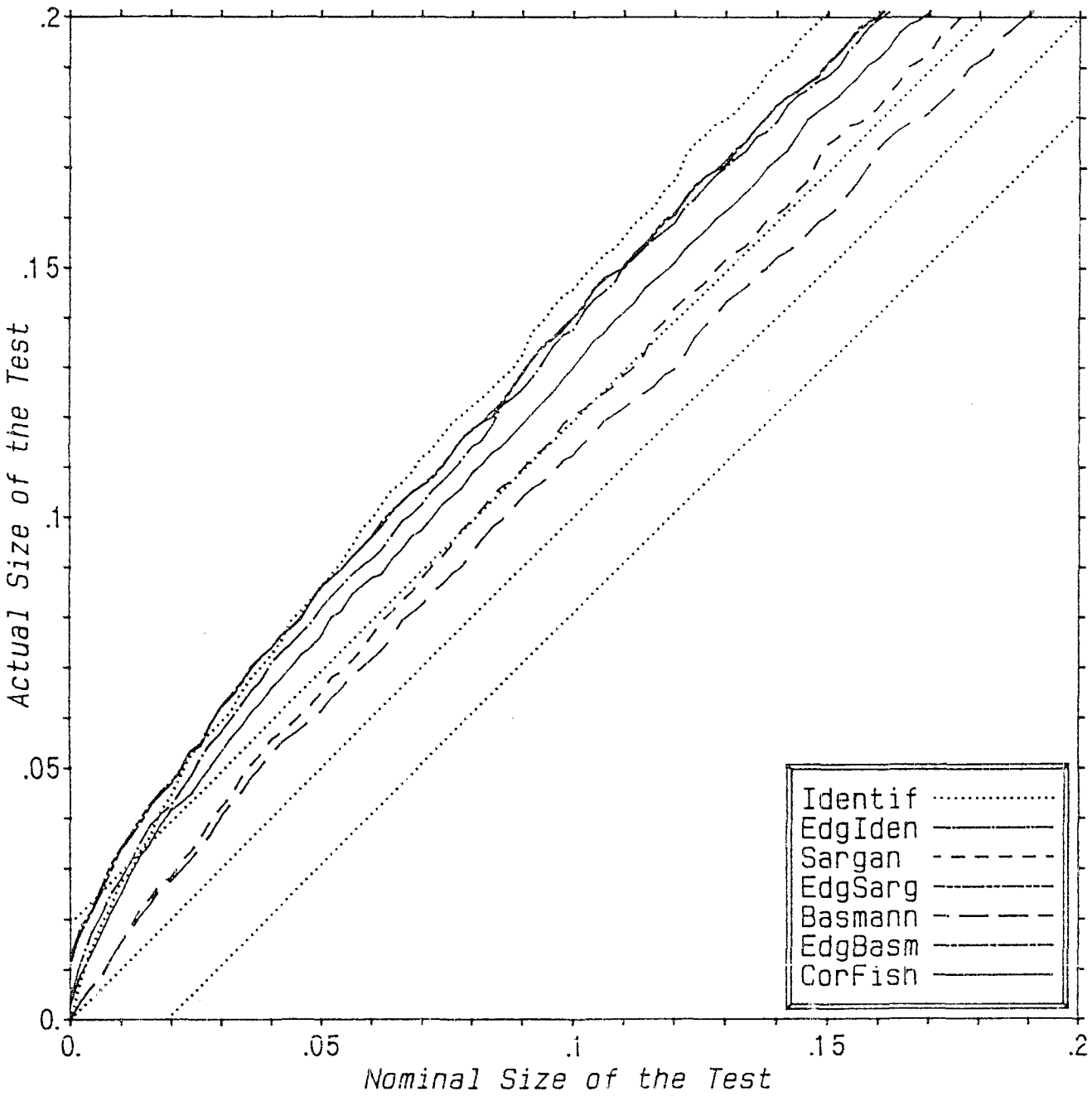
l = 7, T = 100 και A = .5



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ 6.6

ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΕΞΩΓΕΝΕΙΑΣ ΤΩΝ ΒΟΗΘ. ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

l = 7, T = 200 και A = .5



για ονομαστικό μέγεθος μικρότερο από 5%. Αντίθετα, οι καμπύλες των κατά Edgeworth διορθωμένων ελέγχων κείνται εκτός της συμμετρικής ταινίας για κάθε πρακτικά χρησιμοποιούμενο επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας. Επομένως, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της συμμετρικής ταινίας που συζητήθησαν πιο πριν, συμπεραίνουμε ότι τα Διαγράμματα 6.1, 6.2 και 6.3 επιβεβαιώνουν τις πληροφορίες του Πίνακα 6.1. Έτσι, από τα ανωτέρω διαγράμματα φαίνεται πως, για επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας μεγαλύτερο από 8% περίπου, ο κατά Cornish-Fisher διορθωμένος έλεγχος του Basmann είναι καλύτερος από τους αδιόρθωτους ελέγχους υπερταυτοποίησης, Sargan και Basmann, ενώ το αντίθετο συμβαίνει για επίπεδα σημαντικότητας μικρότερα από 8% περίπου. Επιπλέον, από τα ανωτέρω διαγράμματα γίνεται φανερό πως οι κατά Edgeworth διορθωμένοι έλεγχοι έχουν την χειρότερη απόδοση. Η αύξηση του δείγματος έχει ως αποτέλεσμα την μείωση των αποκλίσεων μεταξύ των πραγματικών μεγεθών των διαφόρων ελέγχων, γεγονός που είναι αναμενόμενο με βάση την στατιστική θεωρία. Τέλος, από τα Διαγράμματα 6.1, 6.2 και 6.3 φαίνεται πως το πραγματικό μέγεθος των κατά Edgeworth διορθωμένων ελέγχων είναι μεγαλύτερο από 5% όταν το ονομαστικό τους μέγεθος είναι μηδέν. Το γεγονός αυτό μπορεί να αποδοθεί, όπως έχουμε ήδη πεί, μόνον στην ύπαρξη μεγάλων τμημάτων των δεξιών ουρών των κατά Edgeworth προσεγγίσεων των χ^2 και F κατανομών, τα οποία προσδίδουν αρνητικές "πιθανότητες" στις τιμές των αντιστοίχων στατιστικών. Ακόμα, το πραγματικό μέγεθος του κατά Cornish-Fisher διορθωμένου ελέγχου του Basmann είναι μεγαλύτερο από 2% περίπου όταν το ονομαστικό του μέγεθος είναι μηδέν, γεγονός που οφείλεται στην παραγωγή αρνητικών διορθωμένων στατιστικών του Basmann από την κατά Cornish-Fisher μέθοδο διόρθωσης.

Στα Διαγράμματα 6.4, 6.5 και 6.6 μόνον οι καμπύλες που αντιστοιχούν στους ελέγχους Sargan και Basmann και στον κατά Cornish-Fisher διορθωμένο έλεγχο του Basmann έχουν μεγάλα τμήματα μέσα στην συμμετρική ταινία, ενώ οι καμπύλες που αντιστοιχούν στους κατά Edgeworth διορθωμένους ελέγχους κείνται έξω από αυτήν για κάθε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας μεγαλύτερο από 1%. Σύμφωνα με τις ιδιότητες της συμμετρικής ταινίας, τα Διαγράμματα 6.4, 6.5 και 6.6 δείχνουν πως, για όλα τα μεγέθη

δείγματος και για όλα τα χρησιμοποιούμενα επίπεδα στατιστικής σημαντικότητας, ο έλεγχος του Sargan αποδίδει ικανοποιητικά. Επιπλέον, ο κατά Cornish-Fisher διορθωμένος έλεγχος του Basmann έχει καλή απόδοση για δείγματα 50 και 100 παρατηρήσεων, ενώ η απόδοση του αδιόρθωτου ελέγχου του Basmann βελτιώνεται συστηματικά, καθώς το δείγμα μεγαλώνει. Επομένως, τα Διαγράμματα 6.4, 6.5 και 6.6 επιβεβαιώνουν τις πληροφορίες του Πίνακα 6.1. Ακόμα, όπως θα περιμέναμε, με την αύξηση του μεγέθους του δείγματος παρατηρείται μείωση των αποκλίσεων μεταξύ των πραγματικών μεγεθών των διαφόρων ελέγχων. Τέλος, από τα Διαγράμματα 6.4, 6.5 και 6.6 φαίνεται ότι οι κατά Edgeworth διορθωμένοι έλεγχοι του Sargan και του Basmann παρουσιάζουν σημαντικά προβλήματα υπερδιόρθωσης, σε αντίθεση με τον κατά Edgeworth διορθωμένο έλεγχο υπερταυτοποίησης και τον κατά Cornish-Fisher διορθωμένο έλεγχο του Basmann. Πρέπει, όμως, να σημειωθεί ότι η αύξηση του μεγέθους του δείγματος μειώνει σημαντικά την σοβαρότητα του ανωτέρω προβλήματος.

Από τα Διαγράμματα 6.1 ως 6.6 και τον Πίνακα 6.1 συμπεραίνουμε ότι, η κατά Cornish-Fisher μέθοδος διόρθωσης είναι σημαντικά καλύτερη από την κατά Edgeworth μέθοδο διόρθωσης του μεγέθους των ελέγχων εξωγένειας των βοηθητικών μεταβλητών που εξετάσαμε. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι, γενικά, καθώς το μέγεθος του χρησιμοποιουμένου δείγματος αυξάνεται, βελτιώνεται η απόδοση όλων ελέγχων που μελετήσαμε. Το γεγονός ότι σε πολλές περιπτώσεις οι κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher διορθωμένοι έλεγχοι αποδίδουν χειρότερα από τους αντιστοίχους αδιόρθωτους ελέγχους και το γεγονός ότι πολλές φορές οι τοπικά ακριβείς (locally exact) έλεγχοι είναι χειρότεροι από τους αντιστοίχους ασυμπτωτικούς, ήσαν μή αναμενόμενα και πρέπει να λαμβάνονται σοβαρά υπόψη στην εφαρμοσμένη στατιστική και οικονομετρική έρευνα. Τέλος, η μείωση των αποκλίσεων των πραγματικών μεγεθών των αδιόρθωτων από τα πραγματικά μεγέθη των αντιστοίχων διορθωμένων ελέγχων, καθώς το δείγμα μεγαλώνει, επιβαιβεώνει την θεωρητική προσδοκία ότι η σημασία των διαφόρων διορθώσεων του μεγέθους των ελέγχων εξωγένειας των βοηθητικών μεταβλητών πρέπει, λογικά, να μειώνεται, καθώς το μέγεθος του δείγματος τείνει στο άπειρο.

6.7 ΤΕΛΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο θεωρούμε αναγκαίο να αναφέρουμε μερικές τελικές παρατηρήσεις σχετικά με τα αποτελέσματα των τυχαίων πειραμάτων που παρουσιάσαμε πιο πριν.

Από τα τυχαία πειράματα που πραγματοποιήσαμε φαίνεται ότι, για διαρθρωτικές εξισώσεις που χαρακτηρίζονται από μικρό βαθμό υπερταυτοποίησης, οι καλύτεροι έλεγχοι της εξωγένειας των βοηθητικών μεταβλητών είναι οι αδιόρθωτοι έλεγχοι υπερ-ταυτοποίησης, Sargan και Basmann, για επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας μικρότερο από 8% περίπου, ενώ για μεγαλύτερα επίπεδα σημαντικότητας ο κατά Cornish-Fisher διορθωμένος έλεγχος του Basmann είναι ο καλύτερος, ανεξάρτητα από το πόσο μικρό είναι το χρησιμοποιούμενο δείγμα. Από τα πειράματα που διενεργήσαμε μπορούμε, επιπλέον, να συμπεράνουμε ότι, για διαρθρωτικές εξισώσεις με μεγάλο βαθμό υπερταυτοποίησης, το μέγεθος του χρησιμοποιουμένου δείγματος επηρεάζει την ποιότητα της απόδοσης των διαφόρων μορφών του ελέγχου της εξωγένειας των βοηθητικών μεταβλητών. Έτσι, σε πολύ μικρά δείγματα είναι προτιμότερη η χρήση του μη διορθωμένου ελέγχου του Sargan ή του κατά Cornish-Fisher διορθωμένου ελέγχου του Basmann, ενώ καθώς το δείγμα μεγαλώνει, ο αδιόρθωτος έλεγχος του Basmann γίνεται, τελικά, ο καλύτερος. Τέλος, από τα πειράματα που εκτελέσαμε προκύπτει ότι, σε πολλές περιπτώσεις οι κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher διορθωμένοι έλεγχοι καθώς και οι τοπικά ακριβείς (locally exact) έλεγχοι δεν έχουν την αναμενόμενη απόδοση, γεγονός που πρέπει να λαμβάνεται σοβαρά υπόψη στην εφαρμοσμένη έρευνα.

Μελετώντας τις κατά Cornish-Fisher διορθώσεις κατανοούμε ότι, η υπερδιόρθωση του στατιστικού του Basmann, δηλαδή η παραγωγή αρνητικών κατά Cornish-Fisher διορθωμένων στατιστικών του Basmann, είναι δυνατόν να συμβεί μόνον αν το αδιόρθωτο στατιστικό του Basmann πάρει πολύ μεγάλη τιμή, γεγονός που ισοδυναμεί με σχεδόν βέβαιη απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης. Επιπλέον, ένα αρνητικό διορθωμένο στατιστικό του Basmann αποτελεί ένδειξη πως το μέγεθος του δείγματος είναι πολύ μικρό σε σχέση με τις παρατηρούμενες συσχετίσεις και συνεπώς οι ασυμπτωτικές μέθοδοι δεν μπορούν να εφαρμοστούν. Σε τέτοιες περιπτώσεις δεν χρειάζεται να διορθώνουμε

το στατιστικό του Basmann για να διενεργήσουμε τον έλεγχο. Αντίθετα, σε περιπτώσεις κατά τις οποίες το αδιόρθωτο στατιστικό του Basmann παίρνει τιμές "κοντά" στην κριτική τιμή, το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο στατιστικό του Basmann δεν παρουσιάζει το πρόβλημα της υπερδιόρθωσης. Λαμβάνοντας υπόψη την μορφή των κατά Cornish-Fisher διορθώσεων και εφόσον το στατιστικό του Basmann παίρνει πάντα μικρότερη τιμή από τα αντίστοιχα στατιστικά υπερταυτοποίησης και Sargan, είναι φανερό πως τα κατά Cornish-Fisher διορθωμένα στατιστικά υπερταυτοποίησης και Sargan μπορούν να πάρουν αρνητικές τιμές, ακόμα και σε περιπτώσεις κατά τις οποίες τα αντίστοιχα αδιόρθωτα στατιστικά παίρνουν τιμές "κοντά" στην κριτική τιμή. Αυτή είναι η αιτία για την οποία δεν εξετάσαμε πειραματικά τη συμπεριφορά των κατά Cornish-Fisher διορθωμένων στατιστικών υπερταυτοποίησης και Sargan.

Το ανωτέρω πρόβλημα υπερδιόρθωσης μπορεί να εμφανιστεί με την μορφή αρνητικών "κριτικών τιμών" και στην περίπτωση των κατά Edgeworth διορθώσεων όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό. Ωστόσο, η χρήση της F, αντί της χ^2, κατανομής αναμένεται να μειώνει την πιθανότητα τέτοιας υπερδιόρθωσης, εφόσον οι κριτικές τιμές της F κατανομής είναι μικρότερες από τις κριτικές τιμές της χ^2 κατανομής.

Στην εφαρμοσμένη έρευνα, η χρήση των κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher διορθώσεων, όπως εξειδικεύθησαν σε αυτό το κεφάλαιο, είναι πάρα πολύ απλή (βλ. την σχετική συζήτηση του Κεφαλαίου 3). Για αυτό θεωρούμε ότι, οι ανωτέρω διορθώσεις, οποτεδήποτε αναμένεται να αποδώσουν ικανοποιητικά, μπορούν να γίνουν ένα χρήσιμο εργαλείο στην εφαρμοσμένη έρευνα για τον έλεγχο της εξωγένειας των βοηθητικών μεταβλητών ενός οικονομετρικού συστήματος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην διατριβή αυτήν αναπτύχθησαν με μεθόδους της εκλεπτυσμένης ασυμπτωτικής θεωρίας τοπικά ακριβείς (locally exact) κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher διορθώσεις του μεγέθους των ελέγχων t και F, για τις περιπτώσεις κατά τις οποίες το γενικευμένο γραμμικό υπόδειγμα (generalized linear model) εκτιμάται με την χρήση ενός μικρού δείγματος. Αυτές οι διορθώσεις, οι οποίες προέκυψαν από προσεγγίσεις με τις t-Student και F κατανομές, αντίστοιχα, συγκρίθησαν με τις κατά Edgeworth διορθώσεις που πρότειναν οι Rothenberg (1984b), (1988) και Magee (1989) χρησιμοποιώντας προσεγγίσεις με τις ασυμπτωτικές κατανομές (κανονική και χ^2, αντίστοιχα). Όλες οι ανωτέρω διορθώσεις εξειδικεύθησαν αναλυτικά για τις περιπτώσεις αυτοσυσχέτισης πρώτου βαθμού, ετεροσκεδαστικότητας ή τυχαίων συντελεστών και υποδειγμάτων φαινομενικά ασυσχέτιστων παλινδρομήσεων (S.U.R.). Καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια έτσι ώστε να πάρουμε απλούς λειτουργικούς τύπους που να χρησιμοποιούν, όσο αυτό είναι δυνατό, ποσότητες που έχουν ήδη υπολογισθεί κατά την εκτιμητική διαδικασία. Για τις δύο πρώτες εξειδικεύσεις η σχετική απόδοση των διαφόρων μεθόδων διόρθωσης του μεγέθους των ελέγχων t και F διερευνήθηκε με μεθόδους Monte Carlo.

Από τα Monte Carlo πειράματα που διενεργήσαμε φαίνεται ότι, για την περίπτωση του γραμμικού υποδείγματος με αυτοσυσχέτιση πρώτου βαθμού, οι τοπικά ακριβείς (locally exact) κατά Edgeworth διορθώσεις του μεγέθους των ελέγχων t και F είναι καλύτερες για μικρές και ενδιάμεσες τιμές του $|\rho|$, π.χ. $|\rho| = .1$ ή $.5$, ενώ οι κατά Edgeworth διορθώσεις από τις ασυμπτωτικές κατανομές (κανονική και χ^2) αποδίδουν καλύτερα για τιμές του $|\rho|$ κοντά στην μονάδα. Επιπλέον, από τα τυχαία πειράματα προκύπτει ότι, οι τοπικά ακριβείς κατά Cornish-Fisher διορθώσεις του μεγέθους των ελέγχων t και F αποδίδουν καλύτερα από τις αντίστοιχες τοπικά ακριβείς κατά Edgeworth διορθώσεις, σχεδόν παντού στον παραμετρικό χώρο.

Ακόμα, για την περίπτωση του γραμμικού υποδείγματος με ετεροσκεδαστικό στοχαστικό όρο, οι τοπικά ακριβείς (locally exact)

κατά Edgeworth διορθώσεις του μεγέθους των t και F ελέγχων είναι γενικά καλύτερες από τις συνήθεις κατά Edgeworth διορθώσεις, που χρησιμοποιούν προσεγγίσεις από τις ασυμπτωτικές κατανομές (κανονική και χ^2, αντίστοιχα), όπως προκύπτει από την Monte Carlo προσομοίωση του ανωτέρω υποδείγματος. Επιπλέον, το πείραμα δείχνει ότι οι τοπικά ακριβείς κατά Cornish-Fisher διορθώσεις του μεγέθους των ελέγχων t και F αποδίδουν καλύτερα από τις αντίστοιχες τοπικά ακριβείς κατά Edgeworth διορθώσεις, σχεδόν παντού στον παραμετρικό χώρο.

Τα αποτελέσματα αυτών των Monte Carlo πειραμάτων δεν επηρεάζονται από αλλαγές του μεγέθους του χρησιμοποιουμένου δείγματος, υπό την προϋπόθεση πως το δείγμα δεν είναι υπερβολικά μεγάλο. Αντίθετα, καθώς το μέγεθος του δείγματος τείνει στο άπειρο, η σημασία των διαφόρων διορθώσεων αναμένεται να μειώνεται, ενώ βελτιώνεται η ποιότητα των αδιόρθωτων ασυμπτωτικών ελέγχων.

Επιπλέον, σε αυτήν την διατριβή παρουσιάσαμε ελέγχους της εξωγένειας των βοηθητικών μεταβλητών (instrumental variables) ενός οικονομετρικού συστήματος. Χρησιμοποιώντας ασυμπτωτικές μεθόδους δεύτερης τάξης προσέγγισης, αναπτύξαμε αναλυτικά εναλλακτικές μεθόδους διόρθωσης των ανωτέρω ελέγχων από προσεγγίσεις με την χ^2 ή την F κατανομή. Και σε αυτήν την περίπτωση προσπαθήσαμε να καταλήξουμε σε όσο το δυνατόν απλούστερους αναλυτικούς τύπους και χρησιμοποιήσαμε Monte Carlo μεθόδους για να διερευνήσουμε την απόδοση των προτεινομένων ελέγχων και των διορθώσεων του μεγέθους τους σε μικρά δείγματα.

Από τα τυχαία πειράματα που πραγματοποιήσαμε φαίνεται ότι, για διαρθρωτικές εξισώσεις που χαρακτηρίζονται από μικρό βαθμό υπερταυτοποίησης, οι καλύτεροι έλεγχοι της εξωγένειας των βοηθητικών μεταβλητών, για επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας μικρότερο από 8% περίπου, είναι αυτοί που βασίζονται στα μη διορθωμένα στατιστικά υπερταυτοποίησης. Sargan και Basmann. Για μεγαλύτερα επίπεδα σημαντικότητας ο κατά Cornish-Fisher διορθωμένος έλεγχος του Basmann είναι ο καλύτερος, ανεξάρτητα από το μέγεθος του χρησιμοποιουμένου δείγματος. Επιπλέον, για διαρθρωτικές εξισώσεις με μεγάλο βαθμό υπερταυτοποίησης, η ποιότητα της απόδοσης των διαφόρων μορφών του ελέγχου της εξωγένειας

των βοηθητικών μεταβλητών επηρεάζεται από το μέγεθος του χρησιμοποιουμένου δείγματος. Σε πολύ μικρά δείγματα είναι προτιμότερο να χρησιμοποιείται ο αδιόρθωτος έλεγχος του Sargan ή ο κατά Cornish-Fisher διορθωμένος έλεγχος του Basmann. Αντίθετα, καθώς το δείγμα μεγαλώνει, ο αδιόρθωτος έλεγχος του Basmann γίνεται, τελικά, ο καλύτερος. Το γεγονός ότι, σε πολλές περιπτώσεις οι κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher διορθωμένοι έλεγχοι καθώς και οι τοπικά ακριβείς (locally exact) έλεγχοι δεν έχουν την αναμενόμενη απόδοση, πρέπει να λαμβάνεται σοβαρά υπόψη στην εφαρμοσμένη έρευνα.

'Οπως έχουμε ήδη αναφέρει, κατά την συζήτηση των αποτελεσμάτων των Monte Carlo πειραμάτων που εκτελέσαμε, το ενδεχόμενο της υπερδιόρθωσης του F στατιστικού, δηλαδή του υπολογισμού ενός αρνητικού κατά Cornish-Fisher διορθωμένου F στατιστικού, αποδείχθηκε πάρα πολύ σπάνιο. Μελετώντας τις κατά Cornish-Fisher διορθώσεις κατανοούμε ότι, ένα αρνητικό κατά Cornish-Fisher διορθωμένο F στατιστικό μπορεί να προκύψει μόνον αν το σύνηθες F στατιστικό πάρει πολύ μεγάλη τιμή. Το γεγονός αυτό σημαίνει ότι ένα αρνητικό κατά Cornish-Fisher διορθωμένο F στατιστικό ισοδυναμεί με σχεδόν βέβαιη απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης. Επιπλέον, ένα αρνητικό κατά Cornish-Fisher διορθωμένο F στατιστικό μπορεί να θεωρηθεί ως ένδειξη πως το μέγεθος του χρησιμοποιουμένου δείγματος είναι πολύ μικρό σε σχέση με τις παρατηρούμενες συσχετίσεις και, επομένως, οι ασυμπτωτικές μέθοδοι δεν μπορούν να εφαρμοστούν. Σε τέτοιες περιπτώσεις δεν χρειάζεται να διορθώνουμε το F στατιστικό για να διενεργήσουμε τον έλεγχο. Αντίθετα, στις περιπτώσεις με το περισσότερο πρακτικό ενδιαφέρον, κατά τις οποίες το σύνηθες F στατιστικό παίρνει τιμές "κοντά" στην κριτική τιμή, το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο F στατιστικό δεν αναμένεται να είναι αρνητικό. Λαμβάνοντας υπόψη την μορφή των κατά Cornish-Fisher διορθώσεων και εφόσον το F στατιστικό παίρνει πάντα μικρότερη τιμή από το αντίστοιχο χ^2 στατιστικό, είναι προφανές ότι το ενδεχόμενο ενός αρνητικού κατά Cornish-Fisher διορθωμένου χ^2 στατιστικού είναι πιθανότερο από το ενδεχόμενο ενός αρνητικού κατά Cornish-Fisher διορθωμένου F στατιστικού. Επομένως, το πρόβλημα της υπερδιόρθωσης είναι οξύτερο για το χ^2 στατιστικό. Δηλαδή,

ακόμα και σε περιπτώσεις κατά τις οποίες το σύνηθες χ^2 στατιστικό παίρνει τιμές "κοντά" στην κριτική τιμή, είναι δυνατόν το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο χ^2 στατιστικό να πάρει αρνητική τιμή, καθιστώντας δυσκολότερο το έργο του ελέγχου της μηδενικής υπόθεσης. Αυτός είναι ο λόγος που δεν εξετάσαμε πειραματικά τη συμπεριφορά του κατά Cornish-Fisher διορθωμένου χ^2 στατιστικού.

Το ανωτέρω πρόβλημα υπερδιόρθωσης μπορεί να εμφανιστεί με την μορφή αρνητικών "κριτικών τιμών" και στην περίπτωση των κατά Edgeworth διορθώσεων, όταν το μέγεθος του δείγματος είναι μικρό. Και σε αυτήν την περίπτωση η χρήση της F, αντί της χ^2, κατανομής μειώνει την πιθανότητα τέτοιας υπερδιόρθωσης, διότι οι κριτικές τιμές της F κατανομής είναι μικρότερες από τις κριτικές τιμές της χ^2 κατανομής.

Στην εφαρμοσμένη έρευνα, η χρήση των κατά Cornish-Fisher διορθώσεων, όπως εξειδικεύθησαν στην διατριβή αυτή, είναι πάρα πολύ απλή. Από την στιγμή που θα υπολογισθούν, τα κατά Cornish-Fisher διορθωμένα στατιστικά του γενικευμένου γραμμικού υποδείγματος μπορούν να χρησιμοποιηθούν ακριβώς όπως τα αντίστοιχα συνήθη στατιστικά του κλασσικού γραμμικού υποδείγματος. Τα ίδια ισχύουν και για τα κατά Edgeworth διορθωμένα χωρία εμπιστοσύνης, όπως αυτά μπορούν να εξειδικευθούν με βάση τα αποτελέσματα των προηγουμένων κεφαλαίων. Επομένως, οι ανωτέρω διορθώσεις μπορούν να γίνουν ένα χρήσιμο εργαλείο στην εφαρμοσμένη στατιστική και οικονομετρική έρευνα για όλες τις ειδικές περιπτώσεις του γενικευμένου γραμμικού υποδείγματος. Ακόμα, οποτεδήποτε αναμένεται να αποδώσουν ικανοποιητικά, οι κατά Cornish-Fisher διορθώσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην εφαρμοσμένη έρευνα για να βελτιώσουν το πραγματικό μέγεθος των ελέγχων της εξωγένειας των βοηθητικών μεταβλητών ενός οικονομετρικού συστήματος.

Η δυνατότητα εφαρμογής των κατά Cornish-Fisher διορθώσεων στην εμπειρική έρευνα αναμένεται να είναι μεγάλη για δύο επιπλέον λόγους.

Πρώτον, υπάρχουν σημαντικές δυνατότητες να ενσωματωθούν, με σχετικά χαμηλό κόστος, οι ανωτέρω διορθώσεις στα γνωστά οικονομετρικά προγράμματα. Αυτό συμβαίνει διότι, με την καταβολή όχι υπερβολικά μεγάλης προσπάθειας, είναι δυνατόν να εκφράσουμε

τις κατά Cornish-Fisher διορθώσεις του μεγέθους διαφόρων στατιστικών ελέγχων σε όρους ποσοτήτων, οι περισσότερες από τις οποίες υπολογίζονται κατά την διαδικασία εκτίμησης του χρησιμοποιουμένου οικονομετρικού υποδείγματος. Έτσι, καθίσταται εύκολη η μετατροπή των υπαρχόντων οικονομετρικών πακέτων. Θα ήταν, μάλιστα, σκόπιμο να υπολογίζονται από τα οικονομετρικά προγράμματα τόσο τα αδιόρθωτα όσο και τα διορθωμένα στατιστικά και να αφήνεται στον χρήστη η δυνατότητα της επιλογής και η δικαιολόγησή της, κατά περίπτωση.

Δεύτερον, όπως φαίνεται από την περίπτωση που μελετάται στο Κεφάλαιο 6, μπορούν να αναπτυχθούν κατά Cornish-Fisher διορθώσεις του μεγέθους διαφόρων στατιστικών ελέγχων και για οικονομετρικά υποδείγματα πιο περίπλοκα από το γενικευμένο γραμμικό υπόδειγμα. Συνεπώς, μπορούμε να αναμένουμε ότι είναι θέμα χρόνου η εμφάνιση παρόμοιων αποτελεσμάτων για περισσότερο σύνθετα, και επομένως ρεαλιστικότερα, οικονομετρικά προβλήματα. Η επιλογή των συγκεκριμένων οικονομετρικών προβλημάτων και η ανάπτυξη των αντιστοίχων μεθόδων είναι οπωσδήποτε το αντικείμενο μελλοντικών ερευνών και γι αυτόν τον λόγο ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτής της διατριβής. Θεωρούμε, όμως, αναγκαίο να τονίσουμε ότι, η ανάπτυξη των κατά Cornish-Fisher διορθώσεων του μεγέθους διαφόρων στατιστικών ελέγχων πρέπει να γίνεται με γνώμονα τις ανάγκες της εμπειρικής οικονομικής έρευνας, έτσι ώστε να δοθούν περισσότερα εργαλεία σε εκείνους τους ανθρώπους που κάνουν την εμπειρική εργασία στα οικονομικά.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΤΗΣ ΕΚΛΕΠΤΥΣΜΕΝΗΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

Α.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στα παραρτήματα που ακολουθούν δίνονται οι αποδείξεις των λημμάτων, θεωρημάτων και προτάσεων αυτής της διατριβής. Σε αυτές τις αποδείξεις γίνεται συχνή αναφορά σε μερικούς ορισμούς, λήμματα και θεωρήματα που για λόγους πρακτικής ευκολίας συνοψίζονται στο παράρτημα αυτό. Οι αποδείξεις των αποτελεσμάτων του παρόντος παραρτήματος βρίσκονται στα κείμενα που δίνονται σε παρενθέσεις.

Έστω x μια απεικόνιση από τον χώρο πιθανοτήτων (Ω, A, P) σε έναν πεπερασμένων διαστάσεων γραμμικό χώρο με νόρμα $(S, \|\cdot\|)$ και έστω B η κλάση των Borel συνόλων του S που επάγονται (induced sets) από την νόρμα $\|\cdot\|$. Αν η x είναι μετρήσιμη (measurable), δηλαδή αν $x^{-1}(B) \subset A$, τότε η x καλείται ένα τυχαίο στοιχείο του S. Έτσι, αν $S = R$ (η πραγματική ευθεία), η x είναι μια τυχαία μεταβλητή, αν $S = R^n$, η x είναι ένα τυχαίο διάνυσμα και αν $S = L(R^n, R^m)$ (ο χώρος των γραμμικών τελεστών από το R^n στο R^m), η x είναι μια τυχαία μήτρα.

Συμβολίζουμε με I ένα δεδομένο σύνολο δεικτών, που, χωρίς να χαθεί η γενικότητα, μπορούμε να το θεωρήσουμε ίσο με το ανοικτό διάστημα (0, 1). Λέγομε ότι μια συλλογή x_τ $(\tau \in I)$ τυχαίων στοιχείων του S είναι ορισμένη στον χώρο πιθανοτήτων (Ω, A, P) αν όλες οι απεικονίσεις x_τ είναι μετρήσιμες (βλ. Billingsley (1968), σελ. 228–230).

Α.2 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΤΑΞΕΙΣ ΜΕΓΕΘΟΥΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ Α.1: Έστω x_τ $(\tau \in I)$ μια συλλογή (collection) τυχαίων στοιχείων του S. Λέγομε ότι το $x_\tau = o(1)$ καθώς $\tau \to 0$, αν $\operatorname{plim} x_\tau = 0$. Επίσης, λέγομε ότι το x_τ είναι φραγμένο κατά πιθανότητα ή $x_\tau = O(1)$ καθώς $\tau \to 0$, αν για κάποιο $\tau_0 \in I$ και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιο ώστε

$$\Pr\left[\|x_\tau\| > \delta\right] < \varepsilon, \qquad (A.1)$$

για όλα τα $\tau < \tau_0$. Επίσης, λέγομε ότι $x_\tau = \Omega(1)$, αν για κάποιο $\tau_0 \in I$ και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχουν $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ και $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$, τέτοια ώστε

$$\Pr\left[\delta_1 \leq \|x_\tau\| \leq \delta_2\right] \geq 1-\varepsilon, \qquad (A.2)$$

για όλα τα $\tau \leq \tau_o$. Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό: $O_1 = o$, $O_2 = O$, $O_3 = \Omega$, για κάθε συνάρτηση $h: I \longrightarrow R$ γράφουμε

$$x_\tau = O_i(h(\tau)), \quad \text{αν } x_\tau/h(\tau) = O_i(1) \quad (i = 1, 2, 3). \qquad (A.3)$$

(Μαγδαληνός, M.A. (1983), σελ. 24, 25)

ΟΡΙΣΜΟΣ Α.2: Μια συλλογή x_τ ($\tau \in I$) είναι συνεχής αν για κάποιο $\tau_o \in I$ και για ολα τα $\delta > 0$,

$$\lim_{s \longrightarrow o} \Pr\left[\|x_{\tau+s} - x_\tau\| > \delta\right] = 0, \qquad (A.4)$$

για όλα τα $\tau < \tau_o$.

(Μαγδαληνός, M.A. (1983), σελ. 25)

ΘΕΩΡΗΜΑ Α.1: Έστω x_τ ($\tau \in I$) μια συνεχής συλλογή τυχαίων μεταβλητών. Θεωρούμε την ακολουθία $s = 1/n$, ($n = 1, 2, \ldots$). Τότε:
(i) Η συλλογή x_τ είναι τάξης $O_i(1)$ καθώς το $\tau \longrightarrow 0$, αν και μόνον αν η ακολουθία x_s είναι τάξης $O_i(1)$ καθώς το $n \longrightarrow \infty$, για $i = 1, 2, 3$.
(ii) Η συλλογή x_τ συγκλίνει κατά κατανομή σε μια τυχαία μεταβλητή x καθώς το $\tau \longrightarrow 0$, αν και μόνον αν η ακολουθία x_s συγκλίνει κατά κατανομή στο x καθώς το $n \longrightarrow \infty$.

(Μαγδαληνός, M.A. (1983), σελ. 26, Theorem 2.1)

ΟΡΙΣΜΟΣ Α.3: Για κάθε συλλογή στοχαστικών ποσοτήτων (βαθμωτά, διανύσματα ή μήτρες) Y_τ ($\tau \in I$) του S, που είναι ορισμένη στον χώρο πιθανατήτων (Ω, A, P), λέγομε ότι είναι τάξης $\omega(\tau^i)$ και γράφουμε $Y_\tau = \omega(\tau^i)$, αν για δεδομένο $n > 0$ υπάρχει ένα $0 < \varepsilon < \infty$, τέτοιο ώστε

$$\Pr\left[\|Y_\tau/\tau^i\| > (-\ln\tau)^\varepsilon\right] = o(\tau^n), \qquad (A.5)$$

κάθως το $\tau \longrightarrow 0$, όπου $\|\cdot\|$ είναι η Ευκλείδια νόρμα. Αν η (A.5) ισχύει κάθε $n > 0$, τότε γράφουμε $Y_\tau = \omega(\infty)$. Η χρήση αυτής της τάξης μεγέθους δικαιολογείται από το γεγονός ότι, αν δύο στοχαστικές ποσότητες διαφέρουν κατά μια ποσότητα τάξης $\omega(\tau^i)$, τότε κάτω από γενικές συνθήκες η συνάρτηση κατανομής της μιας αποτελεί ένα ασυμπτωτικό ανάπτυγμα της συνάρτησης κατανομής της άλλης, με ένα

σφάλμα τάξης $O(\tau^i)$. Επιπλέον, οι τάξεις $\omega(\cdot)$ και $O(\cdot)$ έχουν τις ίδιες λειτουργικές (operational) ιδιότητες.

(Μάγδαληνός, M.A. (1983), σελ. 28 και
Μαγδαληνός, M.A. (1991), σελ. 5)

ΘΕΩΡΗΜΑ Α.2: Έστω $(S, \|\cdot\|)$ ένας n-διάστατος γραμμικός χώρος με νόρμα και x_τ, y_τ, z_τ $(\tau \in I)$ συλλογές τυχαίων στοιχείων του S, που είναι ορισμένες στον χώρο πιθανατήτων (Ω, A, P). Τότε:

(i) Η συλλογή $x_\tau = (x_{1\tau}, \ldots, x_{n\tau})$ είναι τάξης $\omega(q)$ αν και μόνον αν οι συνιστώσες συλλογές τυχαίων μεταβλητών $x_{i\tau}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ είναι τάξης $\omega(q)$.

(ii) Αν $\|x_\tau - z_\tau\| \leq M < \infty$ (με πιθανότητα 1) και $x_\tau = \omega(q)$ τότε και το $z_\tau = \omega(q)$.

(iii) Υποθέστε ότι ο S είναι ο γραμμικός χώρος των τετραγωνικών μητρών. Αν για κάποιο $k > 0$, $y_\tau = z_\tau + \tau^k x_\tau$ και επιπλέον $x_\tau = \omega(q)$, $z_\tau^{-1} = \omega(q)$, τότε έξω από ένα σύνολο με πιθανότητα $o(\tau^q)$ ισχύει

$$y_\tau^{-1} = (z_\tau + \tau^k x_\tau)^{-1} = \omega(q). \qquad (A.6)$$

(iv) Μια συλλογή της οποίας οι συνιστώσες είναι πολυώνυμα, με φραγμένους συντελεστές, ενός συνόλου τυχαίων μεταβλητών τάξης $\omega(q)$ είναι επίσης τάξης $\omega(q)$.

(v) Αν υπάρχει κάποιο $\tau_o \in I$ τέτοιο ώστε για όλα τα $\tau \leq \tau_o$ η ροπογεννήτρια συνάρτηση του τυχαίου στοιχείου $x_\tau \in S$ να υπάρχει, τότε η συλλογή x_τ $(\tau \in I)$ είναι τάξης $\omega(\infty)$.

(vi) Αν $x_\tau = \omega(p)$, $y_\tau = \omega(q)$ και $s = \min(p,q)$, τότε

$$x_\tau + y_\tau = \omega(s), \quad x_\tau y_\tau = \omega(s). \qquad (A.7)$$

(vii) Έστω u_t $(t = 1,2,\ldots,T)$ μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων στοιχείων του S, με μέσο 0 και $E(\|u_t\|^{q+2}) < \infty$ για κάποιο $q > 0$. Τότε

$$x_\tau = \sum_{T=1}^{T} u_t/\sqrt{T} = \omega(q), \qquad (A.8)$$

καθώς το $\tau = 1/\sqrt[q]{T} \longrightarrow 0$.

(viii) Έστω x μια χ^2 μεταβλητή με ν βαθμούς ελευθερίας και τ μια ασυμπτωτική παράμετρος τέτοια ώστε $\nu \longrightarrow \infty$ καθώς το $\tau \longrightarrow 0$. Τότε

$$(x/v)^{-1} = \omega(\infty), \qquad (A.9)$$

καθώς το $\tau \longrightarrow 0$.

(Μαγδαληνός, M.A. (1983), σελ. 29, 30, Lemma 2.1 ως Lemma 2.7 και Μαγδαληνός, M.A. (1991), Theorem 1)

Α.3 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΣΥΜΠΤΩΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ Α.4: Λέγομε ότι μια συλλογή τυχαίων στοιχείων Y_τ ($\tau \in I$) του S δέχεται ένα στοχαστικό ανάπτυγμα, αν υπάρχει μια συμβιβαστή (conformable) ακολουθία συλλογών $Y_{\tau i}$ ($i = 1, 2, \ldots$) τέτοια ώστε, για όλα τα $p = 0, 1, 2, \ldots$

$$Y_\tau = \sum_{i=0}^{p} \tau^i Y_{\tau i} + \tau^{p+1}\omega(p). \qquad (A.10)$$

(Μαγδαληνός, M.A. (1983), σελ. 30 και Μαγδαληνός, M.A. (1991), σελ. 6)

ΟΡΙΣΜΟΣ Α.5: Λέγομε ότι η συνάρτηση f έχει ένα στοχαστικό ανάπτυγμα αν υπάρχει μια ακολουθία συναρτήσεων f_i ($i = 0, 1, \ldots$), τέτοιες ώστε

$$f(\tau) = \sum_{i=0}^{p} \tau^i f_i(\tau) + O(\tau^{p+1}) \quad (p = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (A.11)$$

Τότε λέγομε ότι το $f_0(\tau)$ είναι μια ασυμπτωτική προσέγγιση πρώτης τάξης της συνάρτησης $f(\tau)$, το $f_0(\tau) + \tau f_1(\tau)$ είναι μια ασυμπτωτική προσέγγιση δεύτερης τάξης της συνάρτησης $f(\tau)$, κ.ο.κ.

(Μαγδαληνός M.A. (1983), σελ. 217)

ΛΗΜΜΑ Α.1: (I) Όταν οι ποσότητες που μας ενδιαφέρουν (εκτιμητές ή στατιστικά ελέγχου) είναι ρητές συναρτήσεις των δεδομένων, τα στοχαστικά αναπτύγματά τους μπορούν να βασιστούν στο "γεωμετρικό ανάπτυγμα" μιας μήτρας.

Έστω X_τ ($\tau \in I$) μια συλλογή (μη) στοχαστικών τετραγωνικών μητρών που συγκλίνουν σε μια μη ιδιάζουσα μήτρα καθώς το $\tau \longrightarrow 0$ και έστω Y_τ ($\tau \in I$) μια συλλογή συμβιβαστών (conformable) τυχαίων τετραγωνικών μητρών. Αν, για κάποιον ακέραιο αριθμό p, $X_\tau^{-1} = \omega(p)$ και $Y_\tau = \omega(p)$, τότε έξω από ένα σύνολο με πιθανότητα $o(\tau^p)$,

$$(X_\tau + \tau Y_\tau)^{-1} = \sum_{i=0}^{p} (-\tau)^i D^i X_\tau^{-1} + \tau^{p+1}\omega(p), \qquad (A.12)$$

όπου $D = X_\tau^{-1}Y_\tau$. Η (Α.12) εξακολουθεί να ισχύει και όταν τα X_τ και Y_τ είναι βαθμωτά, αντί για τετραγωνικές μήτρες. Φυσικά, σε αυτήν την περίπτωση το X_τ θα πρέπει να μην συγκλίνει στο μηδέν.

(ΙΙ) Όταν οι ποσότητες που μας ενδιαφέρουν είναι περισσότερο πολύπλοκες συναρτήσεις των δεδομένων, τα στοχαστικά αναπτύγματά τους μπορούν να βασιστούν στο κατά Taylor ανάπτυγμα αυτών των συναρτήσεων. Το τυπικό πρόβλημα προϋποθέτει την ύπαρξη μιας μετρήσιμης συνάρτησης $f(z_\tau, \lambda_\tau) \in S$, που είναι ορισμένη σε έναν παραμετρικό χώρο $\Theta = \Gamma \times \Lambda$, όπου τα $z_\tau \in \Gamma$ και $\lambda_\tau \in \Lambda$ είναι συλλογές στοχαστικών και μη στοχαστικών στοιχείων, αντίστοιχα.

Έστω Γ, Λ υποσύνολα ενός διανυσματικού χώρου πεπερασμένων διαστάσεων. Θεωρούμε την συλλογή των στοχαστικών στοιχείων

$$z_\tau = \gamma + \tau^p \omega(q) \in \Gamma \quad (p, q > 0) \tag{Α.13}$$

και την συλλογή των μη στοχαστικών στοιχείων

$$\lambda_\tau = \lambda + o(1) \in \Lambda. \tag{Α.14}$$

Με δεδομένη κάθε συνάρτηση $f: \Gamma \times \Lambda \longrightarrow S$, γράφουμε $f_k(x-\gamma, \lambda_\tau)$ για τον k-τάξης όρο του Taylor αναπτύγματος της συνάρτησης $f(x, \lambda_\tau)$ περί το σημείο (γ, λ_τ).

Θεωρούμε την μετρήσιμη συνάρτηση

$$f: \Gamma \times \Lambda \longrightarrow S \tag{Α.15}$$

και υποθέτουμε ότι, για κάποιον ακέραιο $s \geq 2$, όλες οι μερικές παράγωγοι (ως προς το Γ) τάξης μικρότερης ή ίσης του s υπάρχουν και είναι συνεχείς σε μια περιοχή του $(\gamma, \lambda_\tau) \in \Gamma \times \Lambda$. Τότε, με δεδομένες τις συλλογές (Α.13) και (Α.14) έχουμε

$$f(z_\tau, \lambda_\tau) = \sum_{k=0}^{m-1} f_k(z_\tau - \gamma, \lambda_\tau) + \tau^{pm}\omega(q), \tag{Α.16}$$

για όλα τα $m \leq s-1$.

(Μαγδαληνός, M.A. (1983), σελ. 33, Lemma 2.8 και Μαγδαληνός, M.A. (1991), Corollary 1, Corollary 2)

Α.4 ΤΥΠΙΚΑ (FORMAL) ΚΑΤΑ EDGEWORTH ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ Α.6: Έστω x μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$. Η χαρακτηριστική συνάρτηση της x είναι ο μετασχηματισμός Fourier (F) της $f(x)$, δηλαδή

$$\varphi(s) = F[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f(x)\,dx, \qquad (A.17)$$

όπου $s = it$, $i = \sqrt{-1}$. Αυτό ισοδυναμεί με το να πούμε ότι η $f(x)$ είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier (F^{-1}) της $\varphi(s)$, δηλαδή

$$f(x) = F^{-1}[\varphi(s)]. \qquad (A.18)$$

Οι συναρτήσεις $f(x)$, $\varphi(s)$ είναι ένα ζεύγος του μετασχηματισμού Fourier και όταν δίνεται η μια η άλλη είναι μονοσήμαντα ορισμένη. Μερικές γνωστές ιδιότητες της ένα προς ένα απεικόνισης $f(x) \longleftrightarrow \varphi(s)$ δίνονται στο ακόλουθο λήμμα.

<u>ΛΗΜΜΑ Α.2:</u> Αν $\varphi(s) = F[f(x)]$ (βλ. (A.17)), τότε

$$a_1\varphi_1(s)+a_2\varphi_2(s) \longleftrightarrow a_1 f_1(x)+a_2 f_2(x) \quad (a_1, a_2 \in R),$$

$$s^r\varphi(s) \longleftrightarrow (-1)^r f^{(r)}(x),$$

$$\varphi(s)/s \longleftrightarrow -\int_{-\infty}^{x} f(a)\,da, \qquad (A.19)$$

$$\varphi'(s) \longleftrightarrow xf(x), \quad \varphi(s/\alpha) \longleftrightarrow \alpha f(\alpha x).$$

(Μαγδαληνός, M.A. (1983), σελ. 34, 35, Lemma 2.9)

<u>ΛΗΜΜΑ Α.3:</u> Αν το $n\times 1$ διάνυσμα b κατανέμεται ως $N(0,G)$ και l είναι ένα σταθερό διάνυσμα τέτοιο ώστε $l'Gl = 1$, τότε για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση f και κάθε (πιθανώς μιγαδικό) αριθμό s,

$$E[e^{sl'b} f(b)] = \varphi(s)E[f(b+\mu)], \qquad (A.20)$$

όπου $\varphi(s) = e^{s^2/2}$, $\mu = sGl$.

(Μαγδαληνός, M.A. (1983), σελ. 294, Lemma G.3)

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ Α.7:</u> Για κάθε στατιστικό (συνάρτηση των δεδομένων) y, ορίζουμε τον τελεστή

$$E_2(y) = E[e^{sl'b}y]/\varphi(s) \qquad (A.21)$$

και την δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή

$$E_1(y) = E(y|b). \qquad (A.22)$$

Είναι φανερό ότι

$$E\left[e^{sl'by}\right] = \varphi(s)E_2\left[E_1(y)\right]. \qquad (A.23)$$

Επιπλέον, γράφουμε: $y = x$, αν $x = E_i(y)$ $(i = 1, 2)$.

ΛΗΜΜΑ Α.4: Έστω G, Q συμμετρικές θετικά ημιορισμένες n×n μήτρες, τέτοιες ώστε

$$\det G \neq 0,\ QGQ = Q,\ r = \mathrm{tr}QG, \qquad (A.24)$$

δ ένα n×1 διάνυσμα και $\gamma = \delta'Q\delta$. Για κάθε (πιθανώς μιγαδικό) αριθμό s ορίζουμε

$$t = (1-2s)^{-1},\quad \mu = (t-1)GQ\delta,\ \Sigma = G+(t-1)GQG,$$
$$\varphi_{r,\gamma}(s) = (1-2s)^{-r/2}e^{s\gamma/(1-2s)}. \qquad (A.25)$$

Αν x είναι ένα N(0,G) διάνυσμα, z ένα N(μ,Σ) διάνυσμα και f μια μετρήσιμη συνάρτηση, τότε

$$E\left[e^{s(x+\delta)'Q(x+\delta)}f(x)\right] = \varphi_{r,\gamma}(s)E\left[f(z)\right], \qquad (A.26)$$

υπό την έννοια ότι. αν υπάρχει το ένα μέλος της ισότητας, τότε υπάρχει και το άλλο και είναι ίσα.

(Μαγδαληνός, M.A. (1983), σελ. 309, Lemma H.2)

ΟΡΙΣΜΟΣ Α.8: Για κάθε στατιστικό (συνάρτηση των δεδομένων) y, ορίζουμε τόν τελεστή

$$E_2(y) = E\left[e^{sb_o'Qb_o}y\right]\Big/\varphi_{r,\gamma}(s). \qquad (A.27)$$

και την δεσμευμένη αναμενόμενη τιμή

$$E_1(y) = E(y|b_o). \qquad (A.28)$$

Είναι φανερό ότι ισχύει

$$E\left[e^{sb_o'Qb_o}y\right] = \varphi_{r,\gamma}(s)E_2\left[E_1(y)\right]. \qquad (A.29)$$

Επιπλέον, γράφουμε $y = x$, αν $x = E_i(y)$ $(i = 1, 2)$.

ΛΗΜΜΑ Α.5: Για την μη κεντρική χ^2 πυκνότητα, $f_{r,\gamma}(x)$, ισχύει η

ταυτότητα

$$xf_{r,\gamma}(x) = rf_{r+2,\gamma}(x)+\gamma f_{r+4,\gamma}(x). \qquad (A.30)$$

(Μαγδαληνός, M.A. (1983), σελ. 312. Lemma H.3)

ΛΗΜΜΑ Α.6: Αν u είναι ένα N(0,I) διάνυσμα και N μια ταυτοδύναμη μήτρα βαθμού L, τότε

$$E\left[e^{su'Nu}(u'Nu)^r\right] = \varphi_L(s)t^rL(L+2)\cdots\left[L+2(r-1)\right], \qquad (A.31)$$

όπου $\varphi_L(s) = (1-2s)^{-L/2}$, $t = 1/(1-2s)$.

(Μαγδαληνός, M.A. (1983), σελ. 329. Lemma H.7)

ΛΗΜΜΑ Α.7: Έστω $I(\cdot)$, $i(\cdot)$ οι συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας, αντίστοιχα, μιας τυπικής κανονικής μεταβλητής. Συμβολίζουμε με $I_{T-n}(\cdot)$, $i_{T-n}(\cdot)$ τις συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας, αντίστοιχα, μιας t μεταβλητής με T−n βαθμούς ελευθερίας. Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$I_{T-n}(x) = I(x) - (1/4)\tau^2(1+x^2)xi(x) + O(\tau^4), \qquad (A.32)$$

$$i_{T-n}(x) = i(x) + O(\tau^2),$$

όπου $\tau = T^{-1/2}$.

(Fisher, R.A. (1925), σελ. 109-112)

Α.5 ΕΓΚΥΡΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΚΑΤΑ EDGEWORTH ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ Α.3: Έστω C η κλάση όλων των κυρτών (convex) Borel συνόλων του R^n. Επιπλέον, x_τ, y_τ είναι δυο συλλογές τυχαίων διανυσμάτων, ορισμένες στον χώρο πιθανοτήτων (Ω, A, P), με συναρτήσεις κατανομής F_τ, G_τ, αντίστοιχα, τέτοιες ώστε

$$y_\tau = x_\tau + \tau^{k+1}\omega(k), \qquad (A.33)$$

καθώς το $\tau \longrightarrow 0$. Αν υπάρχει μια ομαλή (smooth) προσθετική (additive) συνάρτηση Ψ_k, τέτοια ώστε για όλα τα $A \in C$

$$F_\tau(A) = \Psi_k(A) + o(\tau^k) \qquad (A.34)$$

τότε

$$G_\tau(A) = F_k(A) + o(\tau^k). \qquad (A.35)$$

Επιπλέον, αν το υπόλοιπο στην (A.33) είναι $\tau^{k+1}\omega(k+1)$ και η (A.34)

ισχύει ομοιόμορφα στο C, τότε η (A.35) ισχύει ομοιόμορφα στο C.

(Μαγδαληνός, M.A. (1991), Theorem 2)

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι αρκετό για την διαπίστωση της εγκυρότητας των κατά Edgeworth αναπτυγμάτων στις περισσότερες οικονομετρικές εφαρμογές.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α.4: Θεωρούμε την συλλογή των τυχαίων διανυσμάτων $y_\tau = x + \tau q_\tau(x) \in R^n$, όπου x είναι ένα N(0,G) διάνυσμα και $q_\tau: R^n \longrightarrow R^n$ είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση πεπερασμένου βαθμού των στοιχείων του διανύσματος x. Επιπλέον, έστω ότι:

(i) Η μήτρα G είναι μη ιδιάζουσα και συγκλίνει σε μια μη ιδιάζουσα μήτρα καθώς το $\tau \longrightarrow 0$.

(ii) Οι συντελεστές της q_τ είναι τυχαίες μεταβλητές ανεξάρτητες του x, τάξης ω(k) και έχουσες απολύτως συνεχή (absolutely continuous) κατανομή.

(iii) Η k+1 απόλυτη ροπή (absolute moment) του $q_\tau(x)$ είναι φραγμένη.

Τότε, η τυπική (formal) Edgeworth κατανομή μήκους k (με k όρους) προσεγγίζει την κατανομή του y_τ με ένα σφάλμα τάξης $o(\tau^k)$ ομοιόμορφα για όλα τα Borel σύνολα του R^n.

(Μαγδαληνός, M.A. (1991), Theorem 4)

Για τις τυπικές τύπου Edgeworth προσεγγίσεις σε όρους της μη κεντρικής χ^2 κατανομής δεν υπάρχουν γενικά αποτελέσματα. Ένα ειδικό αποτέλεσμα που επαρκεί για πολλές οικονομετρικές εφαρμογές δίνεται στο ακόλουθο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ Α.5: Θεωρούμε την συλλογή των τυχαίων μεταβλητών $y_\tau = (x+\delta)'Q(x+\delta) + \tau q_\tau(x)$, όπου δ είναι ένα σταθερό διάνυσμα, x είναι ένα N(0,G) διάνυσμα και $q_\tau: R^n \longrightarrow R$ είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση πεπερασμένου βαθμού των στοιχείων του διανύσματος x. Επιπλέον, έστω ότι:

(i) Οι μήτρες G, Q είναι συμμετρικές θετικά ημιορισμένες nxn μήτρες, τέτοιες ώστε

$$\det G \neq 0, \quad QGQ = Q, \quad r = \mathrm{tr}GQ \qquad (A.36)$$

και οι οποίες, καθώς το $\tau \longrightarrow 0$, συγκλίνουν σε πεπερασμένες (finite) μήτρες που ικανοποιούν την (A.36).

(ii) Οι συντελεστές της q_τ είναι τυχαίες μεταβλητές ανεξάρτητες

του x, τάξης ω(k) και έχουσες απολύτως συνεχή (absolutely continuous) κατανομή.

(iii) Η k+1 απόλυτη ροπή (absolute moment) του $q_\tau(x)$ είναι φραγμένη.

Τότε, η τυπική (formal) τύπου Edgeworth κατανομή μήκους k (με k όρους) προσεγγίζει την κατανομή του y_τ με ένα σφάλμα τάξης $o(\tau^k)$ ομοιόμορφα για όλα τα Borel σύνολα του R.

(Μαγδαληνός, M.A. (1991), Theorem 5)

Α.6 ΜΕΡΙΚΑ ΧΡΗΣΙΜΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

ΛΗΜΜΑ Α.8: Αν x είναι ένα N(0,Σ) διάνυσμα και A, B, C σταθερές συμμετρικές μήτρες, τότε

$$E(x'Ax) = trA\Sigma,$$

$$E(x'Axx'Bx) = (trA\Sigma)(trB\Sigma)+2(trA\Sigma B\Sigma), \qquad (A.37)$$

$$E(x'Axx'Bxx'Cx) = (trA\Sigma)(trB\Sigma)(trC\Sigma) + 2(trA\Sigma)(trB\Sigma C\Sigma) +$$
$$+ 2(trB\Sigma)(trA\Sigma C\Sigma) + 2(trC\Sigma)(trA\Sigma B\Sigma) + 8(trA\Sigma B\Sigma C\Sigma).$$

(Magnus and Neudecker (1979), σελ. 389)

ΛΗΜΜΑ Α.9: Αν V είναι μια T×1 μήτρα, οι γραμμές της οποίας είναι ανεξάρτητα N(0,C) διανύσματα και A είναι μια συμβιβαστή (confomable) μήτρα, τότε

$$E(V'AV) = (trA)C, \quad E(VAV') = (trCA)I_T,$$

$$E(VAV) = A'C, \quad E(V'AV') = CA', \qquad (A.38)$$

$$E(V'VAV'V) = T(trCA)C + T(T+1)CAC.$$

(Μαγδαληνός, M.A. (1983), σελ. 263, Lemma E.1)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 2

Ορίζουμε τον GLS εκτιμητή του β όταν η μήτρα Ω είναι γνωστή:

$$\bar{\beta}=(X'\Omega X)^{-1}X'\Omega y \qquad (B.1)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Basu (βλ. Rothenberg (1984a), (1984b)) και τους ορισμούς (2.2) και (B.1), μπορούμε να δείξουμε ότι τα $\hat{\gamma}$ και $\hat{\beta}-\bar{\beta}$ κατανέμονται ανεξάρτητα από το $\bar{\beta}$.

ΛΗΜΜΑ Β.1: Ισχύει ότι

$$\hat{\beta}=\beta+\tau\sigma(b+\tau b_*), \qquad (B.2)$$

όπου

$$b=\sqrt{T}(\bar{\beta}-\beta)/\sigma, \quad b_*=T(\hat{\beta}-\bar{\beta})/\sigma. \qquad (B.3)$$

Επιπλέον, ισχύουν οι σχέσεις:

$$b=GX'\Omega u/\sqrt{T},\ b\sim N(0,G),\ \text{όπου } G=(X'\Omega X/T)^{-1}$$
και
$$b_*=\hat{G}X'\hat{\Omega}Mu,\ \text{όπου } \hat{G}=(X'\hat{\Omega}X/T)^{-1} \text{ και } M=I-X(X'\Omega X)^{-1}X'\Omega. \qquad (B.4)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αντικαθιστώντας την (2.1) στις (2.2) και (B.1) βρίσκουμε

$$\hat{\beta}=(X'\hat{\Omega}X)^{-1}X'\hat{\Omega}(X\beta+\sigma u)=\beta+(X'\hat{\Omega}X)^{-1}X'\hat{\Omega}\sigma u \qquad (B.5)$$

και

$$\bar{\beta}=(X'\Omega X)^{-1}X'\Omega(X\beta+\sigma u)=\beta+(X'\Omega X)^{-1}X'\Omega\sigma u. \qquad (B.6)$$

Χρησιμοποιώντας την (2.5) και αντικαθιστώντας τις (B.5) και (B.6) στους ορισμούς των b και b_*, βρίσκουμε:

(i) $$b=\sqrt{T}(\bar{\beta}-\beta)/\sigma=\sqrt{T}(X'\Omega X)^{-1}X'\Omega\sigma u/\sigma=\sqrt{T}(X'\Omega X/T)^{-1}X'\Omega u/T=$$
$$=(X'\Omega X/T)^{-1}X'\Omega u/\sqrt{T}=GX'\Omega u/\sqrt{T}, \qquad (B.7)$$

όπου

$$G=(X'\Omega X/T)^{-1}=A^{-1}. \qquad (B.8)$$

Από τις υποθέσεις του υποδείγματός μας έχουμε ότι

$$u\sim N(0,\Omega^{-1}). \qquad (B.9)$$

Από την (B.7), και εφόσον τα b και b^3 είναι περιττές συναρτήσεις του u, παίρνουμε

$E(b)=GX'\Omega E(u)/\sqrt{T}=0$ και συνεπώς $E(b^3)=0$. (B.10)

Επιπλέον, κάνοντας χρήση των (B.7), (B.8) καί (B.9) βρίσκουμε

$$Cov(b)=E(bb')=E(GX'\Omega uu'\Omega XG/T)=GX'\Omega E(uu')\Omega XG/T=GX'\Omega\Omega^{-1}\Omega XG/T=$$

$$=GX'\Omega XG/T=G(X'\Omega X/T)G=GG^{-1}G=G=A^{-1}. \quad (B.11)$$

Επομένως, ισχύει ότι

$b\sim N(0,G)$, όπου $G=A^{-1}=(X'\Omega X/T)^{-1}$. (B.12)

$$(ii)\quad b_*=T(\hat{\beta}-\bar{\beta})/\sigma=T\left[\beta+(X'\hat{\Omega}X)^{-1}X'\hat{\Omega}\sigma u-\beta-(X'\Omega X)^{-1}X'\Omega\sigma u\right]\Big/\sigma=$$

$$=T\left[(X'\hat{\Omega}X)^{-1}X'\hat{\Omega}u-(X'\hat{\Omega}X)^{-1}X'\hat{\Omega}X(X'\Omega X)^{-1}X'\Omega u\right]=$$

$$=T\left[(X'\hat{\Omega}X)^{-1}X'\hat{\Omega}\left[I-X(X'\Omega X)^{-1}X'\Omega\right]u\right]=T(X'\hat{\Omega}X)^{-1}X'\hat{\Omega}Mu=$$

$$=(X'\hat{\Omega}X/T)^{-1}X'\hat{\Omega}Mu=\hat{G}X'\hat{\Omega}Mu. \quad (B.13)$$

όπου

$\hat{G}=(X'\hat{\Omega}X/T)^{-1}=\hat{A}^{-1}$, $\hat{A}=X'\hat{\Omega}X/T$ και $M=I-X(X'\Omega X)^{-1}X'\Omega$. (B.14)

Από τους ορισμούς των b και b_* και τον ορισμό του τ βρίσκουμε ότι $\tau\sigma b=\bar{\beta}-\beta$ και $\tau^2\sigma b_*=\hat{\beta}-\bar{\beta}$. Επομένως, έχουμε

$$\tau\sigma b+\tau^2\sigma b_*=\tau\sigma(b+\tau b_*)=\bar{\beta}-\beta+\hat{\beta}-\bar{\beta}=\hat{\beta}-\beta \Rightarrow \hat{\beta}=\beta+\tau\sigma(b+\tau b_*). \quad (B.15)$$

ΩΕΔ

<u>ΛΗΜΜΑ Β.2:</u> Για τις μήτρες G και $\hat{G}$, που ορίστηκαν στο Λήμμα Β.1, ισχύει η σχέση

$\hat{G}=G+\tau G_*$, (B.16)

όπου

$$G_*=\sqrt{T}(\hat{G}-G)=\sum_{i=1}^{\kappa}G_i\delta_i+\tau\sum_{i=1}^{\kappa}\sum_{j=1}^{\kappa}G_{ij}\delta_i\delta_j+\omega(\tau^2)$$

και (B.17)

$G_i=-GA_iG$ και $G_{ij}=G(A_iGA_j-\frac{1}{2}A_{ij})G$.

Ορίζουμε το $n\times 1$ διάνυσμα $k=e/(e'Ge)^{1/2}$, όπου e είναι ένα $n\times 1$ διάνυσμα, και τα βαθμωτά $\hat{g}=k'\hat{G}k$, $g_*=k'G_*k$, $g_i=k'G_ik$ και $g_{ij}=k'G_{ij}k$. Ισχύουν οι σχέσεις

$$\hat{g}=1+\tau g_* \text{ και } g_*=\sum_{i=1}^{\kappa}g_i\delta_i+\tau\sum_{i=1}^{\kappa}\sum_{j=1}^{\kappa}g_{ij}\delta_i\delta_j+\omega(\tau^2). \quad (B.18)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς (2.5), (2.7) και (B.14) και εφαρμόζοντας το Λήμμα A.1 (II) παίρνουμε

$$\hat{A}=A+\sum_{i=1}^{\varkappa}\frac{\partial A}{\partial \gamma_i}(\hat{\gamma}_i-\gamma_i)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa}\frac{\partial^2 A}{\partial \gamma_i\,\partial \gamma_j}(\hat{\gamma}_i-\gamma_i)(\hat{\gamma}_j-\gamma_j)+\omega(\tau^3)=$$

$$=A+\sum_{i=1}^{\varkappa}A_i(\hat{\gamma}_i-\gamma_i)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa}A_{ij}(\hat{\gamma}_i-\gamma_i)(\hat{\gamma}_j-\gamma_j)+\omega(\tau^3)=$$

$$=A+\sum_{i=1}^{\varkappa}A_i\tau\frac{(\hat{\gamma}_i-\gamma_i)}{\tau}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa}A_{ij}\tau\frac{(\hat{\gamma}_i-\gamma_i)}{\tau}\tau\frac{(\hat{\gamma}_j-\gamma_j)}{\tau}+\omega(\tau^3)=$$

$$=A+\tau\sum_{i=1}^{\varkappa}A_i\delta_i+\frac{1}{2}\tau^2\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa}A_{ij}\delta_i\delta_j+\omega(\tau^3)=A+\tau\Delta, \qquad (B.19)$$

όπου

$$\delta_i=(\hat{\gamma}_i-\gamma_i)/\tau \text{ και } \Delta=\sum_{i=1}^{\varkappa}A_i\delta_i+\frac{1}{2}\tau\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa}A_{ij}\delta_i\delta_j+\omega(\tau^2). \qquad (B.20)$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα A.1 (I) βρίσκουμε

$$\hat{A}^{-1}=(A+\tau\Delta)^{-1}=A^{-1}-\tau(A^{-1}\Delta)^1A^{-1}+\tau^2(A^{-1}\Delta)^2A^{-1}+\omega(\tau^3)=$$

$$=A^{-1}-\tau A^{-1}\Delta A^{-1}+\tau^2A^{-1}\Delta A^{-1}\Delta A^{-1}+\omega(\tau^3) \qquad (B.21)$$

και χρησιμοποιώντας τις ισότητες $G=A^{-1}$ και $\hat{G}=\hat{A}^{-1}$ παίρνουμε

$$\hat{G}^{-1}=G-\tau G\Delta G+\tau^2G\Delta G\Delta G+\omega(\tau^3)=G-\tau G(\Delta-\tau\Delta G\Delta)G+\omega(\tau^3). \qquad (B.22)$$

Αντικαθιστώντας στην (B.22) το Δ από την (B.20), κάνοντας απλές πράξεις και χρησιμοποιώντας το θεώρημα A.2 συμπεραίνουμε ότι

$$\hat{G}=G-\tau\sum_{i=1}^{\varkappa}GA_iG\delta_i+\tau^2\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa}\left[G(A_iGA_j-\frac{1}{2}A_{ij})G\right]\delta_i\delta_j+\omega(\tau^3)=$$

$$=G+\tau\sum_{i=1}^{\varkappa}G_i\delta_i+\tau^2\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa}G_{ij}\delta_i\delta_j+\omega(\tau^3)=$$

$$=G+\tau\left[\sum_{i=1}^{\varkappa}G_i\delta_i+\tau\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa}G_{ij}\delta_i\delta_j+\omega(\tau^2)\right]=G+\tau G_*, \qquad (B.23)$$

όπου

$$G_*=\sqrt{T}(\hat{G}-G)=\sum_{i=1}^{\varkappa}G_i\delta_i+\tau\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa}G_{ij}\delta_i\delta_j+\omega(\tau^2), \qquad (B.24)$$

$$G_i=-GA_iG \text{ και } G_{ij}=G(A_iGA_j-\frac{1}{2}A_{ij})G.$$

Από την (Β.23) και τους ορισμούς των G_*, k, $\hat{g}$, g_*, g_i και g_{ij} βρίσκουμε

$$k'\hat{G}k=k'(G+\tau G_*)k=k'Gk+\tau k'G_*k \Rightarrow \hat{g}=\frac{e'Ge}{e'Ge}+\tau g_*=1+\tau g_*, \qquad (B.25)$$

όπου

$$g_*=k'G_*k=k'\Big[\sum_{i=1}^{\infty} G_i\delta_i+\tau\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} G_{ij}\delta_i\delta_j+\omega(\tau^2)\Big]k=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty} g_i\delta_i+\tau\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g_{ij}\delta_i\delta_j+\omega(\tau^2). \qquad (B.26)$$

QED

<u>ΛΗΜΜΑ Β.3:</u> Από τον ορισμό (2.6) έχουμε ότι $\delta=\tau\left[\sqrt{T}d_1+d_2+\omega(\tau)\right]=d_1+\omega(\tau)$. Ορίζουμε το βαθμωτό δ_o και το $\infty\times 1$ διάνυσμα $\delta_*=\left[(\delta_i)_{i=1,\ldots,\infty}\right]$, έτσι ώστε $\delta=(\delta_o,\delta_*')'$. Από τον ορισμό του υποδείγματός μας έχουμε ότι:

$$\text{(i)}\quad E(\delta')=(\tau\mu_o,\tau\mu') \Rightarrow E(\delta_o)=\tau\mu_o \text{ και } E(\delta_*)=\tau\mu \Rightarrow E(\delta_i)=\tau\mu_i, \qquad (B.27)$$

όπου $\mu=\left[(\mu_i)_{i=1,\ldots,\infty}\right]$. Επιπλέον,

$$\text{(ii)}\quad Cov(\delta)=E(\delta\delta')=\begin{bmatrix}\lambda_o & \lambda'\\ \lambda & \Lambda\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(\delta_o\delta_o)=E(\delta_o^2)=\lambda_o,\ E(\delta_o\delta_i)=E(\delta_i\delta_o)\lambda_{oi},\ E(\delta_i\delta_j)=\lambda_{ij}, \qquad (B.28)$$

όπου $\lambda=\left[(\lambda_i)_{i=1,\ldots,\infty}\right]$ και $\Lambda=\left[(\lambda_{ij})_{i,j=1,\ldots,\infty}\right]$.

Ορίζουμε την ποσότητα $s_i=GX'\Omega_iMu/\sqrt{T}$. Για κάθε μήτρα Q ισχύουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$E(s_is_j')=GX'\Omega_i\left[\Omega^{-1}-X(X'\Omega X)^{-1}X'\right]\Omega_jXG/T,\ E(b_*)=0,\ E(b_*^3)=0,$$

$$E(b_*b_*')=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{ij}G(A_{ij}^*-A_iGA_j)G+O(\tau^2),\ E(b_*\delta_o)=0+O(\tau^2),$$

$$E(G_*)=\tau\Big[\sum_{i=1}^{\infty} G_i\mu_i+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} G_{ij}\lambda_{ij}\Big]+O(\tau^2), \qquad (B.29)$$

$$E(G_*QG_*)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{ij}G_iQG_j+O(\tau),$$

$$E(G_*\delta_o)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_{oi}G_i+O(\tau),\ E(G_*Qb_*)=0+O(\tau) \text{ και } E(b_*g_*)=0+O(\tau),$$

όπου οι διάφορες ποσότητες έχουν ήδη οριστεί.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

(Ι) ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΕΣ ΤΙΜΕΣ

(i) Εφόσον οι μήτρες G, Ω και Ω_i είναι συμμετρικές, παίρνουμε

$$E(s_i s_j') = E\left[GX'\Omega_i Muu'M'\Omega_j XG/T\right] = GX'\Omega_i ME(uu')M'\Omega_j XG/T =$$

$$= GX'\Omega_i M\Omega^{-1}M'\Omega_j XG/T. \qquad (B.30)$$

Όμως, από την (B.14) προκύπτει ότι

$$M\Omega^{-1}M' = \left[I - X(X'\Omega X)^{-1}X'\Omega\right]\Omega^{-1}\left[I - \Omega X(X'\Omega X)^{-1}X'\right] =$$

$$= \left[\Omega^{-1} - X(X'\Omega X)^{-1}X'\right]\left[I - \Omega X(X'\Omega X)^{-1}X'\right] = \Omega^{-1} - X(X'\Omega X)^{-1}X'. \qquad (B.31)$$

Αντικαθιστώντας την (B.31) στην (B.30) βρίσκουμε

$$E(s_i s_j') = GX'\Omega_i\left[\Omega^{-1} - X(X'\Omega X)^{-1}X'\right]\Omega_j XG/T. \qquad (B.32)$$

(ii) Το s_i είναι περιττή συνάρτηση του u και τα δ_o και δ_i είναι άρτιες συναρτήσεις του u. Επομένως, το s_i είναι ασυμπτωτικά ασυσχέτιστο με τα δ_o, δ_i, $\forall$ i. Ισχύει

$$X'\Omega M = X'\Omega\left[I - X(X'\Omega X)^{-1}X'\Omega\right] = X'\Omega - X'\Omega = 0$$

και συνεπώς

$$b_* = \hat{G}X'\hat{\Omega}Mu = \hat{G}X'\hat{\Omega}Mu - \hat{G}X'\Omega Mu = \hat{G}X'(\hat{\Omega} - \Omega)Mu. \qquad (B.33)$$

Από το Λήμμα A.1 (II) και την (2.4) έχουμε

$$\hat{\Omega} = \Omega + \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{\partial \Omega}{\partial \gamma_i}(\hat{\gamma}_i - \gamma_i) + \omega(\tau^2) = \Omega + \sum_{i=1}^{\kappa} \Omega_i \tau \frac{(\hat{\gamma}_i - \gamma_i)}{\tau} + \omega(\tau^2) =$$

$$= \Omega + \tau \sum_{i=1}^{\kappa} \Omega_i \delta_i + \omega(\tau^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\Omega} - \Omega = \tau \sum_{i=1}^{\kappa} \Omega_i \delta_i + \omega(\tau^2). \qquad (B.34)$$

Από το Λήμμα B.2 έχουμε ότι

$$\hat{G} = G + \tau G_* \Rightarrow \hat{G} = G + \omega(\tau). \qquad (B.35)$$

Από τις (B.33), (B.34) και (B.35) έπεται ότι

$$b_* = \hat{G}X'\left[\tau \sum_{i=1}^{\kappa} \Omega_i \delta_i + \omega(\tau^2)\right]Mu = \sum_{i=1}^{\kappa} \tau(G + \omega(\tau))X'\Omega_i Mu\delta_i + \omega(\tau^2) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\kappa} (GX'\Omega_i Mu/\sqrt{T})\delta_i + \omega(\tau^2) = \sum_{i=1}^{\kappa} s_i\delta_i + \omega(\tau^2). \qquad (B.36)$$

Εφόσον το s_i είναι περιττή συνάρτηση του u και το δ_i είναι άρτια συνάρτηση του u, τα b_* και b_*^3 είναι περιττές συναρτήσεις του u και, επειδή $u \sim N(0,\Omega^{-1})$, παίρνουμε

$$E(b_*)=0 \text{ και } E(b_*^3)=0. \tag{B.37}$$

(II) ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΕΣ ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΕΣ ΤΙΜΕΣ

(i) Χρησιμοποιώντας την (B.36) παίρνουμε

$$E(b_*b_*')=E\Big[\Big(\sum_{i=1}^{\infty} s_i\delta_i+\omega(\tau^2)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{\infty} s_j\delta_j+\omega(\tau^2)\Big)'\Big]=E\Big[\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} s_i\delta_i s_j'\delta_j+\omega(\tau^2)\Big]=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} E(s_is_j'\delta_i\delta_j)+O(\tau^2)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} E(s_is_j')E(\delta_i\delta_j)+O(\tau^2), \tag{B.38}$$

διότι τα s_i, δ_i είναι ασυμπτωτικά ασυσχέτιστα, για κάθε i. Εφόσον

$$E(s_is_j')=GX'\Omega_i\left[\Omega^{-1}-X(X'\Omega X)^{-1}X'\right]\Omega_jXG/T=$$

$$=G\left[X'\Omega_i\Omega^{-1}\Omega_jX/T-(X'\Omega_iX/T)(X'\Omega X/T)^{-1}(X'\Omega_jX/T)\right]G=$$

$$=G(A_{ij}^*-A_iGA_j)G, \tag{B.39}$$

κάνοντας χρήση των ορισμών του υποδείγματός μας βρίσκουμε

$$E(b_*b_*')=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{ij}G(A_{ij}^*-A_iGA_j)G+O(\tau^2)=E_1+O(\tau^2), \tag{B.40}$$

όπου $E_1=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{ij}G(A_{ij}^*-A_iGA_j)G$.

(ii) Το s_i είναι περιττή συνάρτηση του u και επειδή $u \sim N(0,\Omega^{-1})$ έπεται ότι $E(s_i)=0$. Επιπλέον, καθώς το s_i είναι ασυμπτωτικά ασυσχέτιστο με τα δ_0, δ_i, $\forall$ i, από την (B.36) έπεται ότι

$$E(b_*\delta_0)=E\Big[\Big(\sum_{i=1}^{\infty} s_i\delta_i+\omega(\tau^2)\Big)\delta_0\Big]=\sum_{i=1}^{\infty} E(s_i\delta_i\delta_0)+O(\tau^2)=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty} E(s_i)E(\delta_i\delta_0)+O(\tau^2)=0+O(\tau^2). \tag{B.41}$$

(iii) Από τον ορισμό του G_* παίρνουμε ότι

$$E(G_*)=E\Big[\sum_{i=1}^{\infty} G_i\delta_i+\tau\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} G_{ij}\delta_i\delta_j+\omega(\tau^2)\Big]=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty} G_iE(\delta_i)+\tau\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} G_{ij}E(\delta_i\delta_j)+O(\tau^2)=$$

$$=\tau\Big(\sum_{i=1}^{\infty} G_i\mu_i+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} G_{ij}\lambda_{ij}\Big)+O(\tau^2)=\tau(E_{21}+E_{22})+O(\tau^2)=$$

$$=\tau E_2+O(\tau^2), \qquad (B.42)$$

όπου $E_2=E_{21}+E_{22}$, $E_{21}=\sum_{i=1}^{\infty} G_i\mu_i$ και $E_{22}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} G_{ij}\lambda_{ij}$.

(iv) Χρησιμοποιώντας την (B.24) παίρνουμε

$$E(G_*QG_*)=E\Big[\Big(\sum_{i=1}^{\infty} G_i\delta_i+\omega(\tau)\Big)Q\Big(\Big(\sum_{j=1}^{\infty} G_j\delta_j+\omega(\tau)\Big)\Big]=$$

$$=E\Big[\Big(\sum_{i=1}^{\infty} G_i\delta_i\Big)Q\Big(\sum_{j=1}^{\infty} G_j\delta_j\Big)+\omega(\tau)\Big]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} E(\delta_i\delta_j)G_iQG_j+O(\tau)=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{ij}G_iQG_j+O(\tau)=E_3+O(\tau), \qquad (B.43)$$

όπου $E_3=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{ij}G_iQG_j$. Επιπλέον,

$$(v)\quad E(G_*\delta_o)=E\Big[\Big(\sum_{i=1}^{\infty} G_i\delta_i+\omega(\tau)\Big)\delta_o\Big]=E\Big[\sum_{i=1}^{\infty} G_i\delta_i\delta_o+\omega(\tau)\Big]=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty} G_iE(\delta_i\delta_o)+O(\tau)=\sum_{i=1}^{\infty} G_i\lambda_{oi}+O(\tau)=E_4+O(\tau), \qquad (B.44)$$

όπου $E_4=\sum_{i=1}^{\infty} G_i\lambda_{oi}$.

(vi) Από τις (B.36) και (B.24) βρίσκουμε

$$E(G_*Qb_*)=E\Big[\Big(\sum_{i=1}^{\infty} G_i\delta_i+\omega(\tau)\Big)Q\Big(\sum_{j=1}^{\infty} s_j\delta_j+\omega(\tau^2)\Big)\Big]=$$

$$=E\Big[\Big(\sum_{i=1}^{\infty} G_i\delta_i\Big)Q\Big(\sum_{j=1}^{\infty} s_j\delta_j\Big)+\omega(\tau)\Big]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} G_iE(s_j)E(\delta_i\delta_j)+O(\tau)=$$

$$=0+O(\tau), \qquad (B.45)$$

διότι $E(s_i)=0$, αλλά και το s_i είναι ασυμπτωτικά ασυσχέτιστο με τα δ_i και δ_j.

(vii) Τέλος, κάνοντας χρήση των (B.26) και (B.36) βρίσκουμε

$$E(b_*g_*)=E\Big[\Big(\sum_{i=1}^{\infty} s_i\delta_i+\omega(\tau^2)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{\infty} g_j\delta_j+\omega(\tau)\Big)\Big]=E\Big[\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} s_i\delta_ig_j\delta_j+\omega(\tau)\Big]=$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} E(s_i)g_jE(\delta_i\delta_j)+O(\tau)=0+O(\tau), \qquad (B.46)$$

διότι $E(s_i)=0$ και διότι και το s_i είναι ασυμπτωτικά ασυσχέτιστο με τα δ_i και δ_j.

QED

<u>ΛΗΜΜΑ Β.4:</u> Αν $A=\partial vec\Omega/\partial\gamma'$ και $\delta_*=\left[(\delta_i)_{i=1,\ldots,\infty}\right]$ αποδεικνύεται ότι

$$\begin{bmatrix} \lambda_o & \lambda' \\ \lambda & \Lambda \end{bmatrix} = \lim_{T\longrightarrow\infty} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}(\mathrm{vec}\Omega^{-1})'A/T \\ -\frac{1}{2}A'(\mathrm{vec}\Omega^{-1})/T & \frac{1}{2}A'(\Omega^{-1}\otimes\Omega^{-1})A/T \end{bmatrix}^{-1}. \qquad (B.47)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ακολουθώντας τον Breusch (1980) έχουμε ότι η μήτρα πληροφορίας του διανύσματος $(\sigma^2,\gamma')'$, που την συμβολίζουμε με I_F, είναι

$$I_F\left(\begin{bmatrix}\sigma^2\\ \gamma\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}T\sigma^{-4} & \frac{1}{2}\sigma^{-2}(\mathrm{vec}\Omega_B^{-1})'A_B \\ \frac{1}{2}\sigma^{-2}A_B'(\mathrm{vec}\Omega_B^{-1}) & \frac{1}{2}A_B'(\Omega_B^{-1}\otimes\Omega_B^{-1})A_B \end{bmatrix}, \qquad (B.48)$$

όπου

$\Omega_B=\Omega^{-1}$

και (B.49)

$$A_B=\partial\mathrm{vec}\Omega_B/\partial\gamma'=\partial\mathrm{vec}\Omega^{-1}/\partial\gamma'=(\partial\mathrm{vec}\Omega^{-1}/\partial\mathrm{vec}\Omega)(\partial\mathrm{vec}\Omega/\partial\gamma')=$$
$$=-\left[(\Omega')^{-1}\otimes\Omega^{-1}\right]\partial\mathrm{vec}\Omega/\partial\gamma'=-(\Omega^{-1}\otimes\Omega^{-1})\partial\mathrm{vec}\Omega/\partial\gamma',$$

διότι η μήτρα Ω είναι συμμετρική. Ισχύουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

(i) $$(\mathrm{vec}\Omega_B^{-1})'A_B=-(\mathrm{vec}\Omega)'(\Omega^{-1}\otimes\Omega^{-1})\partial\mathrm{vec}\Omega/\partial\gamma'=$$
$$=-\left[(\Omega^{-1}\otimes\Omega^{-1})\mathrm{vec}\Omega\right]'\partial\mathrm{vec}\Omega/\partial\gamma'=$$
$$=-\left[\mathrm{vec}(\Omega^{-1}\Omega\Omega^{-1})\right]'\partial\mathrm{vec}\Omega/\partial\gamma'=$$
$$=-(\mathrm{vec}\Omega^{-1})'\partial\mathrm{vec}\Omega/\partial\gamma'. \qquad (B.50)$$

(ii) Όμοια βρίσκουμε

$$A_B'(\mathrm{vec}\Omega_B^{-1})=-(\partial\mathrm{vec}\Omega/\partial\gamma')'\mathrm{vec}\Omega^{-1}. \qquad (B.51)$$

(iii) Τέλος,

$$A_B'(\Omega_B^{-1}\otimes\Omega_B^{-1})A_B=(\partial\mathrm{vec}\Omega/\partial\gamma')'(\Omega^{-1}\otimes\Omega^{-1})(\Omega\otimes\Omega)(\Omega^{-1}\otimes\Omega^{-1})\partial\mathrm{vec}\Omega/\partial\gamma'=$$
$$=(\partial\mathrm{vec}\Omega/\partial\gamma')'(\Omega^{-1}\otimes\Omega^{-1})\partial\mathrm{vec}\Omega/\partial\gamma'. \qquad (B.52)$$

Συμβολίζουμε $A=\partial\mathrm{vec}\Omega/\partial\gamma'$. Γνωρίζουμε ότι για κάθε m×1 διάνυσμα θ ισχύει η σχέση

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}-\theta)\longrightarrow N(0,(I(\theta)/T)^{-1}), \qquad (B.53)$$

δηλαδή η ασυμπτωτική μήτρα συνδιακυμάνσεων του διανύσματος θ είναι ίση με $(I(\theta)/T)^{-1}$. Επομένως, η ασυμπτωτική μήτρα συνδιακυμάνσεων του διανύσματος $(\sigma^2,\gamma')'$ δίνεται από την σχέση

$$\sqrt{T}\begin{bmatrix}\hat{\sigma}^2-\sigma^2\\ \hat{\gamma}-\gamma\end{bmatrix}\longrightarrow N\left(0,\left(I_F\begin{bmatrix}\sigma^2\\ \gamma\end{bmatrix}/T\right)^{-1}\right). \qquad (B.54)$$

Χρησιμοποιώντας τις (B.48), (B.54), τα αποτελέσματα (i), (ii) και (iii) και τον ορισμό του υποδείγματός μας βρίσκουμε ότι ασυμπτωτικά ισχύει

$$\text{AsCov}\left(\begin{bmatrix}\sqrt{T}(\hat{\sigma}^2-\sigma^2)\\ \sqrt{T}(\hat{\gamma}-\gamma)\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\sigma^{-4} & -\frac{1}{2}\sigma^{-2}(\text{vec}\Omega^{-1})'A/T\\ -\frac{1}{2}\sigma^{-2}A'(\text{vec}\Omega^{-1})/T & \frac{1}{2}A'(\Omega^{-1}\otimes\Omega^{-1})A/T\end{bmatrix}^{-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{AsCov}\left(\begin{bmatrix}\delta_o\\ \delta_*\end{bmatrix}\right)=\text{AsCov}\left(\begin{bmatrix}\sqrt{T}(\hat{\sigma}^2-\sigma^2)/\sigma^2\\ \sqrt{T}(\hat{\gamma}-\gamma)\end{bmatrix}\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}(\text{vec}\Omega^{-1})'A/T\\ -\frac{1}{2}A'(\text{vec}\Omega^{-1})/T & \frac{1}{2}A'(\Omega^{-1}\otimes\Omega^{-1})A/T\end{bmatrix}^{-1}, \qquad (B.55)$$

όπου AsCov είναι η ασυμπτωτική μήτρα συνδιακυμάνσεων. Από την (2.6), τον ορισμό του τ και εφόσον $\delta=(\delta_o,\delta_*')'$ βρίσκουμε

$$\lim_{T\longrightarrow\infty} d_1=\delta \Rightarrow \begin{bmatrix}\lambda_o & \lambda'\\ \lambda & \Lambda\end{bmatrix}=\lim_{T\longrightarrow\infty}E(d_1d_1')=\lim_{T\longrightarrow\infty}E(\delta\delta')=$$

$$=\lim_{T\longrightarrow\infty}\text{AsCov}\left(\begin{bmatrix}\delta_o\\ \delta_*\end{bmatrix}\right). \qquad (B.56)$$

Οι (B.55) και (B.56) συμπληρώνουν την απόδειξη.

QED

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΛΗΜΜΑΤΟΣ 2.1:</u> Έχουμε ορίσει το διάνυσμα $k=e/(e'Ge)^{1/2}$

και έχουμε ήδη αποδείξει ότι για τα $\hat{\beta}$ και $\hat{g}$ ισχύουν τα αναπτύγματα $\hat{\beta}=\beta+\tau\sigma(b+\tau b_*)$ (βλ. Λήμμα Β.1) και $\hat{g}=1+\tau g_*$ (βλ. Λήμμα Β.2), όπου οι διάφορες ποσότητες έχουν ήδη οριστεί στα αντίστοιχα λήμματα. Επιπλέον, από τον ορισμό του υποδείγματός μας έχουμε

$$\delta_o=(\hat{\sigma}^2-\sigma^2)/\tau\sigma^2=(\hat{\sigma}^2/\sigma^2-1)/\tau \Rightarrow \hat{\sigma}^2/\sigma^2=1+\tau\delta_o. \qquad (B.57)$$

Τέλος, κάτω από την μηδενική υπόθεση (2.10) ισχύει ότι $e'\beta-e_o=0$. Συνεπώς, αντικαθιστώντας τα προηγούμενα αποτελέσματα στο στατιστικό (2.11) και εφόσον $\hat{g}=k'\hat{G}k$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
t&=\left[e'(\beta+\tau\sigma(b+\tau b_*))-e_o\right]/\left[\hat{\sigma}^2 e'(X'\hat{\Omega}X)^{-1}e\right]^{1/2}=\\
&=\left[e'\beta-e_o+e'\tau\sigma(b+\tau b_*)\right]/\left[\hat{\sigma}^2 e'(X'\hat{\Omega}X)^{-1}e\right]^{1/2}=\\
&=\left[(e'/(e'Ge)^{1/2})\sqrt{T}\tau\sigma(b+\tau b_*)/\sigma\right]/\left[(\hat{\sigma}^2/\sigma^2)e'(X'\hat{\Omega}X/T)^{-1}e/e'Ge\right]^{1/2}=\\
&=k'(b+\tau b_*)/\left[(\hat{\sigma}^2/\sigma^2)k'\hat{G}k\right]^{1/2}=\\
&=k'(b+\tau b_*)/\left[(1+\tau\delta_o)(1+\tau g_*)\right]^{1/2}=k'(b+\tau b_*)D, \qquad (B.58)
\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}
D&=\left[(1+\tau\delta_o)(1+\tau g_*)\right]^{-1/2}=\left[(1+\tau\delta_o+\tau g_*+\tau^2\delta_o g_*\right]^{-1/2}=\\
&=\left[1+\tau(\delta_o+g_*+\tau\delta_o g_*)\right]^{-1/2}=(1+\tau\Psi)^{-1/2}
\end{aligned}$$

και (B.59)

$$\Psi=\delta_o+g_*+\tau\delta_o g_*.$$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor και χρησιμοποιώντας το Λήμμα Α.1 (ΙΙ) έχουμε

$$D=(1+\tau\Psi)^{-1/2}=1-(1/2)\tau\Psi+(3/8)\tau^2\Psi^2+\omega(\tau^3). \qquad (B.60)$$

Αντικαθιστώντας από την (Β.59) στην (Β.60) και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Α.2, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
D&=1-(1/2)\tau(\delta_o+g_*+\tau\delta_o g_*)+(3/8)\tau^2(\delta_o+g_*+\tau\delta_o g_*)^2+\omega(\tau^3)=\\
&=1-(1/2)\tau(\delta_o+g_*+\tau\delta_o g_*)+(3/8)\tau^2(\delta_o+g_*)^2+\omega(\tau^3)=\\
&=1-\tau(\delta_o+g_*)/2+\tau^2\left[(3/8)(\delta_o+g_*)^2-\delta_o g_*/2\right]+\omega(\tau^3)=\\
&=1-\tau D_1+\tau^2 D_2+\omega(\tau^3), \qquad (B.61)
\end{aligned}$$

όπου

$$D_1=(\delta_o+g_*)/2 \text{ και } D_2=(3/8)(\delta_o+g_*)^2-\delta_o g_*/2. \qquad (B.62)$$

Αντικαθιστώντας από την (B.61) στην (B.58) και κάνοντας χρήση του θεωρήματος A.2, βρίσκουμε

$$t=(k'b+\tau k'b_*)(1-\tau D_1+\tau^2 D_2)+\omega(\tau^3)=$$

$$=k'b+\tau(k'b_*-k'bD_1)+\tau^2(k'bD_2-k'b_*D_1)+\omega(\tau^3)=$$

$$=t_o+\tau t_1+\tau^2 t_2+\omega(\tau^3), \qquad \text{(B.63)}$$

όπου

$$t_o=k'b=e'b/(e'Ge)^{1/2},$$

$$t_1=k'b_*-k'bD_1=k'b_*-(1/2)k'b(\delta_o+g_*), \qquad \text{(B.64)}$$

$$t_2=k'bD_2-k'b_*D_1=(1/8)k'b[3(\delta_o+g_*)^2-4\delta_o g_*]-(1/2)k'b_*(\delta_o+g_*)=$$

$$=-(1/2)k'b_*(\delta_o+g_*)+(1/8)k'b[3(\delta_o^2+g_*^2)+2\delta_o g_*].$$

Στο Λήμμα B.2 ορίσαμε τις ποσότητες g_i, g_{ij}, G_i, G_{ij} και k. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς αυτών των ποσοτήτων και τους ορισμούς (2.12), (2.13) και (2.14) βρίσκουμε:

(i) $g_i=k'G_ik=-k'GA_iGk=-e'GA_iGe/e'Ge=-l_i.$ (B.65)

(ii) Επειδή

$$g_{ij}=k'G_{ij}k=k'G(A_iGA_j-\tfrac{1}{2}A_{ij})Gk,$$

και ορίζοντας

$$g^*_{ij}=k'G(A^*_{ij}-A_iGA_j)Gk,$$

έχουμε

$$g^*_{ij}-g_{ij}=k'G(A^*_{ij}-2A_iGA_j+A_{ij}/2)Gk=k'GC_{ij}Gk=e'GC_{ij}Ge/e'Ge=l_{ij}. \qquad \text{(B.66)}$$

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΕΣ ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΕΣ ΤΙΜΕΣ

Από την (B.26) έπεται ότι

$$g_*^2=\Big[\sum_{i=1}^{\infty} g_i\delta_i+\omega(\tau)\Big]\Big[\sum_{j=1}^{\infty} g_j\delta_j+\omega(\tau)\Big]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g_ig_j\delta_i\delta_j+\omega(\tau). \qquad \text{(B.67)}$$

Κάνοντας χρήση του ορισμού του υποδείγματός μας, των αποτελεσμάτων που έχουμε ήδη αποδείξει και του Ορισμού A.7 βρίσκουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

(i) $t_1/\tau+t_2=k'b_*/\tau-(1/2)k'b(\delta_o+g_*)/\tau-(1/2)k'b_*(\delta_o+g_*)+$

$$+(1/8)k'b\left[3(\delta_o^2+g_*^2)+2\delta_o g_*\right]=$$

$$=k'b_*/\tau-(1/2)k'b\left[\delta_o+\sum_{i=1}^{\times} g_i\delta_i+\tau\sum_{i=1}^{\times}\sum_{j=1}^{\times} g_{ij}\delta_i\delta_j+\right]/\tau-$$

$$-(1/2)k'(b_*\delta_o+b_*g_*)+$$

$$+(1/8)k'b\left[3(\delta_o^2+\sum_{i=1}^{\times}\sum_{j=1}^{\times} g_ig_j\delta_i\delta_j)+2\sum_{i=1}^{\times} g_i\delta_i\delta_o\right]+\omega(\tau)=$$

$$=^1 -(1/2)k'b\left[\tau\mu_o+\tau\sum_{i=1}^{\times} g_i\mu_i+\tau\sum_{i=1}^{\times}\sum_{j=1}^{\times} g_{ij}\lambda_{ij}\right]/\tau+$$

$$+(1/8)k'b\left[3(\lambda_o+\sum_{i=1}^{\times}\sum_{j=1}^{\times} g_ig_j\lambda_{ij})+2\sum_{i=1}^{\times} g_i\lambda_{io}\right]+O(\tau)=$$

$$=^1 \frac{1}{2}\,k'b\Big[\sum_{i=1}^{\times}\sum_{j=1}^{\times}\lambda_{ij}\left(\frac{3}{4}\,g_ig_j-g_{ij}\right)+\sum_{i=1}^{\times} g_i\left(\frac{1}{2}\,\lambda_{io}-\mu_i\right)+$$

$$+\frac{3}{4}\,\lambda_o-\mu_o\Big]+O(\tau)\,. \qquad \text{(B.68)}$$

$$\text{(ii)}\quad t_1^2=\left[k'b_*-(1/2)k'b(\delta_o+g_*)\right]\left[b_*'k-(1/2)b'k(\delta_o+g_*)\right]=$$

$$=k'b_*b_*'k+(1/4)(k'b)^2(\delta_o^2+g_*^2+2\delta_o g_*)-k'b_*(\delta_o+g_*)b'k=$$

$$=k'b_*b_*'k+(1/4)(k'b)^2(\delta_o^2+\sum_{i=1}^{\times}\sum_{j=1}^{\times} g_ig_j\delta_i\delta_j+2\sum_{i=1}^{\times} g_i\delta_i\delta_o)-$$

$$-k'b_*(\delta_o+g_*)b'k+\omega(\tau)=^1$$

$$=^1\sum_{i=1}^{\times}\sum_{j=1}^{\times}\lambda_{ij}k'G(A_{ij}^*-A_iGA_j)Gk+$$

$$+(1/4)(k'b)^2\left[\lambda_o+\sum_{i=1}^{\times}\sum_{j=1}^{\times}\lambda_{ij}g_ig_j+2\sum_{i=1}^{\times} g_i\lambda_{io}\right]+O(\tau)=^1$$

$$=^1\sum_{i=1}^{\times}\sum_{j=1}^{\times}\lambda_{ij}g_{ij}^*+\frac{1}{4}\,(k'b)^2\left[\lambda_o+\sum_{i=1}^{\times}\sum_{j=1}^{\times}\lambda_{ij}g_ig_j+2\sum_{i=1}^{\times} g_i\lambda_{io}\right]+O(\tau)\,. \qquad \text{(B.69)}$$

ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω s ένας φανταστικός αριθμός. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Α.3 για l ίσον με k, τον Ορισμό Α.7 και εφόσον $b\sim N(0,G)$, βρίσκουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

(α) $\mu=sGk \Rightarrow k'(b+\mu)=k'b+sk'Gk=k'b+s$. Έτσι,

$E_2(k'b)=E(e^{sk'b}k'b)/\varphi(s)=E(k'(b+\mu))=E(k'b+s)=k'E(b)+s=s \Rightarrow$

$$\Rightarrow k'b \overset{2}{=} s, \qquad (B.70)$$

(β) $(k'(b+\mu))^2=(k'b+s)^2=(k'b)^2+2(k'b)s+s^2$. Έτσι,

$$E_2((k'b)^2)=E(e^{sk'b}(k'b)^2)/\varphi(s)=E((k'(b+\mu))^2)=$$

$$=E((k'b)^2+2(k'b)s+s^2)=k'E(bb')k+2sk'E(b)+s^2=$$

$$=k'Gk+s^2=1+s^2 \Rightarrow (k'b)^2 \overset{2}{=} 1+s^2. \qquad (B.71)$$

Από τα αποτελέσματα (B.68) και (B.69) και λαμβάνοντας υπόψη τις (B.70) και (B.71) παίρνουμε

$$2(t_1/\tau+t_2+st_1^2/2)=2(t_1/\tau+t_2)+st_1^2 \overset{1}{=}$$

$$\overset{1}{=}k'b\Big[\sum_{i=1}^{\kappa}\sum_{j=1}^{\kappa}\lambda_{ij}\Big(\frac{3}{4}\,g_ig_j-g_{ij}\Big)+\sum_{i=1}^{\kappa}g_i\Big(\frac{1}{2}\,\lambda_{io}-\mu_i\Big)+\frac{3}{4}\,\lambda_o-\mu_o\Big]+$$

$$+s\Big[\sum_{i=1}^{\kappa}\sum_{j=1}^{\kappa}\lambda_{ij}g^*_{ij}+\frac{1}{4}\,(k'b)^2\Big[\lambda_o+\sum_{i=1}^{\kappa}\sum_{j=1}^{\kappa}\lambda_{ij}g_ig_j+2\sum_{i}^{\kappa}g_i\lambda_{io}\Big]\Big]+O(\tau)\overset{2}{=}$$

$$\overset{2}{=}s\Big[\sum_{i=1}^{\kappa}\sum_{j=1}^{\kappa}\lambda_{ij}(g_ig_j+g^*_{ij}-g_{ij})+\sum_{i=1}^{\kappa}g_i(\lambda_{io}-\mu_i)+\lambda_o-\mu_o\Big]+$$

$$+\frac{s^3}{4}\Big[\sum_{i=1}^{\kappa}\sum_{j=1}^{\kappa}\lambda_{ij}g_ig_j+2\sum_{i=1}^{\kappa}g_i\lambda_{io}+\lambda_o\Big]+O(\tau)\overset{2}{=}$$

$$\overset{2}{=}s\pi_1+s^3\pi_2+O(\tau), \qquad (B.72)$$

όπου

$$\pi_1=\sum_{i=1}^{\kappa}\sum_{j=1}^{\kappa}\lambda_{ij}(g_ig_j+g^*_{ij}-g_{ij})+\sum_{i=1}^{\kappa}g_i(\lambda_{io}-\mu_i)+\lambda_o-\mu_o,$$

και (B.73)

$$\pi_2=\frac{1}{4}\Big[\sum_{i=1}^{\kappa}\sum_{j=1}^{\kappa}\lambda_{ij}g_ig_j+2\sum_{i=1}^{\kappa}g_i\lambda_{io}+\lambda_o\Big].$$

Έστω $\varphi(s)$ η χαρακτηριστική συνάρτηση της τυπικής κανονικής κατανομής. Λαμβάνοντας υπόψη τις (B.63), (B.72) και (B.73) και τον Ορισμο A.7 βρίσκουμε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση του στατιστικού (2.11) είναι

$$\varphi_t(s)=E(e^{st})=E\Big[e^{s\left[(t_o+\tau t_1+\tau^2t_2)+\omega(\tau^3)\right]}\Big]=E\Big[e^{st_o}e^{s(\tau t_1+\tau^2t_2)}\Big]+O(\tau^3)=$$

$$=E\Big[e^{st_o}\Big[1+s(\tau t_1+\tau^2t_2)+\frac{s^2}{2}(\tau t_1+\tau^2t_2)^2\Big]\Big]+O(\tau^3)=$$

$$=E\left[e^{st_0}\left[1+\tau st_1+\tau^2 s(t_2+st_1^2/2)\right]\right]+O(\tau^3)=$$

$$=E\left[e^{st_0}\left[1+\frac{\tau^2}{2}\,s\left[2(t_1/\tau+t_2+st_1^2/2)\right]\right]\right]+O(\tau^3)=$$

$$=\varphi(s)\left[1+\frac{\tau^2}{2}\,sE_2\left[2(t_1/\tau+t_2+st_1^2/2)\right]\right]+O(\tau^3)=$$

$$=\varphi(s)+\frac{\tau^2}{2}\,s(s\pi_1+s^3\pi_2)\varphi(s)+O(\tau^3),$$

οπότε, χρησιμοποιώντας το Λήμμα A.2, διαιρώντας δια $-s$ και αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό Fourier, παίρνουμε

$$-\varphi_t(s)/s=-\varphi(s)/s-\frac{\tau^2}{2}(s\pi_1+s^3\pi_2)\varphi(s)+O(\tau^3)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_t(x)=I(x)-\frac{\tau^2}{2}\left[\pi_1 H_1(x)+\pi_2 H_3(x)\right]i(x)+O(\tau^3)=$$

$$=I(x)-\frac{\tau^2}{2}\left[\pi_1 x+\pi_2(x^3-3x)\right]i(x)+O(\tau^3)=$$

$$=I(x)-\frac{\tau^2}{2}\left[(\pi_1-3\pi_2)+\pi_2 x^2\right]xi(x)+O(\tau^3).$$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι, το στατιστικό

$$t_*=t_0+\tau t_1+\tau^2 t_2$$

ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος A.4, άρα

$$Pr(t_* \le x)=F_t(x)+o(\tau^2).$$

Επιπλέον, η $F_t(\cdot)$ είναι μια ομαλή (smooth) συνάρτηση (βλ. Μαγδαληνός (1991), Lemma 3). Άρα το θεώρημα A.3 συνεπάγεται ότι

$$Pr(t \le x)=Pr(t_* \le x)+o(\tau^2)=F_t(x)+o(\tau^2). \qquad (B.74)$$

Στην πράξη μπορούμε να πάρουμε ακόμα μιαν τάξη μεγέθους στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του $t=t_*+\omega(\tau^3)$ (βλ. (B.63)), οπότε το λάθος στην (B.74) γίνεται $O(\tau^3)$, δηλαδή έχουμε

$$Pr(t \le x)=I(x)-\frac{\tau^2}{2}\left[(\pi_1-3\pi_2)+\pi_2 x^2\right]xi(x)+O(\tau^3)\ \Rightarrow \qquad (B.75)$$

$$\Rightarrow Pr(t \le x)=I(x)-\frac{\tau^2}{2}\left[(p_1+\frac{1}{2})+(p_2+\frac{1}{2})x^2\right]xi(x)+O(\tau^3), \qquad (B.76)$$

όπου $H_1(x)$, $H_3(x)$ είναι το πρώτο και το τρίτο Chebyshev–Cramer πολυώνυμο, αντίστοιχα, και

$$p_1+\frac{1}{2}=\pi_1-3\pi_2=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{ij}(g_ig_j+g^*_{ij}-g_{ij})+\sum_{i=1}^{\infty}g_i(\lambda_{io}-\mu_i)+\lambda_o-\mu_o-$$

$$-\frac{3}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{ij}g_ig_j-\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{\infty}g_i\lambda_{io}-\frac{3}{4}\lambda_o\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_1=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{ij}g_ig_j+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{ij}(g^*_{ij}-g_{ij})-\sum_{i=1}^{\infty}g_i\mu_i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}g_i\lambda_{io}+$$

$$+\frac{1}{4}\lambda_o-\mu_o-\frac{1}{2}=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}l_i\lambda_{ij}l_j+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{ji}l_{ij}\right)+\sum_{i=1}^{\infty}l_i\mu_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}l_i\lambda_{io}+$$

$$+\frac{1}{4}(\lambda_o-2)-\mu_o. \qquad (B.77)$$

διότι $\lambda_{ij}=\lambda_{ji}$. Σημειώστε ότι το $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_{ji}l_{ij}$ είναι το j-διαγώνιο στοιχείο της μήτρας ΛL. Άρα, από την (B.77) παίρνουμε

$$p_1=l'\Lambda l/4+tr(\Lambda L)+l'\mu+l'\lambda/2+(\lambda_o-2)/4-\mu_o=$$

$$=tr(\Lambda L)+l'\Lambda l/4+l'(\mu+\lambda/2)-\mu_o+(\lambda_o-2)/4. \qquad (B.78)$$

Επίσης,

$$p_2+\frac{1}{2}=\pi_2=\frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{ij}g_ig_j+2\sum_{i=1}^{\infty}g_i\lambda_{io}+\lambda_o\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_2=\frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_{ij}g_ig_j+2\sum_{i=1}^{\infty}g_i\lambda_{io}+\lambda_o-2\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}l_i\lambda_{ij}l_j-2\sum_{i=1}^{\infty}l_i\lambda_{io}+\lambda_o-2\right]=$$

$$=(l'\Lambda l-2l'\lambda+\lambda_o-2)/4. \qquad (B.79)$$

QED

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΠΟΡΙΣΜΑΤΟΣ 2.1:</u> Από το Λήμμα 2.1 και την (2.17), αναπτύσσοντας κατά Taylor τις $I(i^*_\alpha)$ και $i(i^*_\alpha)$ περί το i_α, βρίσκουμε

$$Pr(t\le i^*_\alpha)=I(i^*_\alpha)-\frac{\tau^2}{2}\left[(p_1+1/2)+(p_2+1/2)(i^*_\alpha)^2\right]i^*_\alpha i(i^*_\alpha)+O(\tau^3)=$$

$$=I(i_\alpha)+\frac{\tau^2}{2}\left[(p_1+1/2)+(p_2+1/2)i^2_\alpha\right]i_\alpha i(i_\alpha)-$$

$$-\frac{\tau^2}{2}\left[(p_1+1/2)+(p_2+1/2)\left[i_\alpha+\frac{\tau^2}{2}\left[(p_1+1/2)+(p_2+1/2)i^2_\alpha\right]i_\alpha\right]^2\right].$$

$$\cdot\left[i_\alpha+\frac{\tau^2}{2}\left[(p_1+1/2)+(p_2+1/2)i_\alpha^2\right]i_\alpha\right]\cdot$$

$$\cdot\left[i(i_\alpha)+\frac{\tau^2}{2}\left[(p_1+1/2)+(p_2+1/2)i_\alpha^2\right]i_\alpha i'(i_\alpha)\right]+O(\tau^3)=$$

$$=I(i_\alpha)+\frac{\tau^2}{2}\left[(p_1+1/2)+(p_2+1/2)i_\alpha^2\right]i_\alpha i(i_\alpha)-$$

$$-\frac{\tau^2}{2}\left[(p_1+1/2)+(p_2+1/2)i_\alpha^2\right]i\ i(i_\alpha)+O(\tau^3)=$$

$$=I(i_\alpha)+O(\tau^3)=1-\alpha+O(\tau^3)\,. \qquad \text{(B.80)}$$

QED

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 2.1: Έχουμε ήδη αποδείξει ότι κάτω από την υπόθεση (2.10) το στατιστικό (2.11) έχει ένα στοχαστικό ανάπτυγμα της μορφής

$$t=t_o+\tau t_1+\tau^2 t_2+\omega(\tau^3),$$

όπου $t_o=e'b/(e'Ge)^{1/2}=k'b$, $b=GX'\Omega u/\sqrt{T}$, $k=e/(e'Ge)^{1/2}$. Ως εκ τούτου το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο στατιστικό (2.18) έχει το στοχαστικό ανάπτυγμα

$$\tilde{t}=t_o+\tau t_1+\tau^2 t_2+\omega(\tau^3)-\frac{\tau^2}{2}\left[(p_1+1/2)+(p_2+1/2)(t_o+\tau t_1+\tau^2 t_2+\omega(\tau^3))^2\right]\cdot$$

$$\cdot(t_o+\tau t_1+\tau^2 t_2+\omega(\tau^3))=$$

$$=t_o+\tau t_1+\tau^2 t_2-\tau^2\left[(p_1+1/2)+(p_2+1/2)t_o^2\right]t_o/2+\omega(\tau^3)=$$

$$=t_o+\tau t_1+\tau^2(t_2-t_3)+\omega(\tau^3), \qquad \text{(B.81)}$$

όπου

$$t_3=\left[(p_1+1/2)+(p_2+1/2)t_o^2\right]t_o/2. \qquad \text{(B.82)}$$

Από τον ορισμό του διανύσματος b είναι φανερό ότι τα b και b^3 είναι περιττές συναρτήσεις του u και επομένως ισχύουν οι σχέσεις

$E(k'b)=0$ και $E\left[(k'b)^3\right]=0$.

Επιπλέον, από τους ορισμούς των k και b και εφόσον $E(bb')=G$, παίρνουμε

$E(k'bb'k)=k'E(bb')k=k'Gk=e'Ge/e'Ge=1$.

Κάνοντας χρήση του Λήμματος A.3 για l ίσον με k, του Ορισμού A.7 και των προηγούμενων αποτελεσμάτων βρίσκουμε ότι

(α) $\mu=sGk \Rightarrow k'(b+\mu)=k'b+k'\mu=k'b+sk'Gk=k'b+s$. Έτσι,

$$E\left[e^{st_o}t_o\right]=E\left[e^{sk'b}k'b\right]=\varphi(s)E\left[k'(b+\mu)\right]=\varphi(s)E(k'b+s)=s\varphi(s), \qquad (B.83)$$

(β) $(k'(b+\mu))^3=(k'b+s)^3=(k'b)^3+3(k'b)^2s+3(k'b)s^2+s^3$. Έτσι,

$$E\left[e^{st_o}t_o^3\right]=E\left[e^{sk'b}(k'b)^3\right]=\varphi(s)E\left[(k'(b+\mu))^3\right]=$$

$$=\varphi(s)E\left[(k'b)^3+3(k'b)^2s+3(k'b)s^2+s^3\right]=\varphi(s)(3s+s^3). \qquad (B.84)$$

Έστω s ένας φανταστικός αριθμός και $\varphi_t(s)$, $\varphi(s)$ οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις του στατιστικού (2.11) και μιας τυπικής κανονικής μεταβλητής, αντίστοιχα. Από τις (B.81), (B.83) και (B.84) και το Λήμμα 2.1 έπεται ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση του στατιστικού (2.18) είναι

$$\varphi_{\tilde{t}}(s)=E\left[e^{s\tilde{t}}\right]=E\left[e^{s\left[t_o+\tau t_1+\tau^2(t_2-t_3)\right]+\omega(\tau^3)}\right]=$$

$$=E\left[e^{st_o}e^{s\left[\tau t_1+\tau^2(t_2-t_3)\right]}\right]+O(\tau^3)=$$

$$=E\left[e^{st_o}\left[1+s(\tau t_1+\tau^2(t_2-t_3))+s^2(\tau t_1+\tau^2(t_2-t_3))^2/2\right]\right]+O(\tau^3)=$$

$$=E\left[e^{st_o}\left[1+st_1+\tau^2s(t_2+st_1^2/2)\right]\right]-E\left[e^{st_o}\tau^2st_3\right]+O(\tau^3)=$$

$$=\varphi_t(s)-\tau^2sE\left[e^{st_o}\left[(p_1+1/2)t_o+(p_2+1/2)t_o^3\right]/2\right]+O(\tau^3)=$$

$$=\varphi_t(s)-\frac{\tau^2}{2}s\left[(p_1+1/2)s+(p_2+1/2)(3s+s^3)\right]\varphi(s)+O(\tau^3). \qquad (B.85)$$

Χρησιμοποιώντας τα Λήμματα A.2 και 2.1, διαιρώντας την (B.85) δια $-s$ και αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό Fourier, βρίσκουμε

$$-\varphi_{\tilde{t}}(s)/s=-\varphi_t(s)/s+$$

$$+\frac{\tau^2}{2}\left[\left[(p_1+1/2)+3(p_2+1/2)\right]s+(p_2+1/2)s^3\right]\varphi(s)+O(\tau^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pr(\tilde{t}\le x)=\Pr(t\le x)+$$

$$+\frac{\tau^2}{2}\left[\left[(p_1+1/2)+3(p_2+1/2)\right]H_1(x)+(p_2+1/2)H_3(x)\right]i(x)+O(\tau^3)=$$

$$=Pr(t\le x)+\frac{\tau^2}{2}\left[\left[(p_1+1/2)+3(p_2+1/2)\right]x+(p_2+1/2)(x^3-3x)\right]i(x)+O(\tau^3)=$$

$$=Pr(t\le x)+\frac{\tau^2}{2}\left[(p_1+1/2)x+(p_2+1/2)x^3\right]i(x)+O(\tau^3)=$$

$$=I(x)-\frac{\tau^2}{2}\left[(p_1+1/2)+(p_2+1/2)x^2\right]xi(x)+$$

$$+\frac{\tau^2}{2}\left[(p_1+1/2)+(p_2+1/2)x^2\right]xi(x)+O(\tau^3)=I(x)+O(\tau^3)\,, \qquad (B.86)$$

όπου $H_1(x)$, $H_3(x)$ είναι το πρώτο και το τρίτο Chebyshev-Cramer πολυώνυμο, αντίστοιχα, και $I(\cdot)$, $i(\cdot)$ είναι οι συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας, αντίστοιχα, μιας τυπικής κανονικής μεταβλητής. Η εγκυρότητα της ασυμπτωτικής προσέγγισης (B.86) αποδεικνύεται ακριβώς όπως στην απόδειξη του Λήμματος 2.1.

QED

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΛΗΜΜΑΤΟΣ 2.2: Από τα Λήμματα A.7 και 2.1 έπεται ότι

$$Pr(t\le x)=I(x)-\frac{\tau^2}{2}\left[(p_1+1/2)+(p_2+1/2)x^2\right]xi(x)+O(\tau^3)=$$

$$=I_{T-n}(x)+\frac{\tau^2}{4}(1+x^2)xi(x)-\frac{\tau^2}{2}\left[(p_1+1/2)+(p_2+1/2)x^2\right]xi(x)+O(\tau^3)=$$

$$=I_{T-n}(x)-\frac{\tau^2}{2}\left[(p_1+1/2-1/2)+(p_2+1/2-1/2)x^2\right]xi_{T-n}(x)+O(\tau^3)=$$

$$=I_{T-n}(x)-\frac{\tau^2}{2}(p_1+p_2x^2)xi_{T-n}(x)+O(\tau^3)\,. \qquad (B.87)$$

Η εγκυρότητα της ασυμπτωτικής προσέγγισης (B.87) προκύπτει από την εγκυρότητα της ασυμπτωτικής προσέγγισης του Λήμματος 2.1.

Αν είναι γνωστό ότι το γ ανήκει σε μια σφαίρα ακτίνας θ, από τις (2.4) και (2.8) και το Λήμμα B.4 έπεται ότι καθώς το $\theta\longrightarrow 0$ ισχύουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\Lambda=0,\ \lambda=\mu=0,\ \mu_o=0 \text{ και } \lambda_o=2. \qquad (B.88)$$

Επομένως, από τις (B.78), (B.79) και (B.88) έπεται ότι $p_1=p_2=0$, γεγονός που συνεπάγεται ότι το στατιστικό (2.11) κατανέμεται ακριβώς ως μια t μεταβλητή.

QED

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΠΟΡΙΣΜΑΤΟΣ 2.2: Από το Λήμμα 2.2 και την (2.20), αναπτύσσοντας κατά Taylor τις $I_{T-n}(t_\alpha^*)$ και $i_{T-n}(t_\alpha^*)$ περί το t_α, βρίσκουμε

$$\Pr(t \le t_\alpha^*) = I_{T-n}(t_\alpha^*) - \frac{\tau^2}{2}\left[p_1+p_2(t_\alpha^*)^2\right] t_\alpha^* i_{T-n}(t_\alpha^*) + O(\tau^3) =$$

$$= I_{T-n}(t_\alpha) + \frac{\tau^2}{2}(p_1+p_2 t_\alpha^2)\, t_\alpha i_{T-n}(t_\alpha) -$$

$$- \frac{\tau^2}{2}\left[p_1+p_2\left[t_\alpha + \frac{\tau^2}{2}(p_1+p_2 t_\alpha^2)\, t_\alpha\right]^2\right]\left[t_\alpha + \frac{\tau^2}{2}(p_1+p_2 t_\alpha^2)\, t_\alpha\right] \cdot$$

$$\cdot \left[i_{T-n}(t_\alpha) + \frac{\tau^2}{2}(p_1+p_2 t_\alpha^2)\, t_\alpha i'_{T-n}(t_\alpha)\right] + O(\tau^3) =$$

$$= I_{T-n}(t_\alpha) + \frac{\tau^2}{2}(p_1+p_2 t_\alpha^2)\, t_\alpha i_{T-n}(t_\alpha) -$$

$$- \frac{\tau^2}{2}(p_1+p_2 t_\alpha^2)\, t_\alpha i_{T-n}(t_\alpha) + O(\tau^3) =$$

$$= I_{T-n}(t_\alpha) + 0 + (\tau^3) = 1-\alpha+O(\tau^3). \qquad \text{(B.89)}$$

QED

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 2.2: Έχουμε ήδη αποδείξει ότι κάτω από την υπόθεση (2.10) το στατιστικό (2.11) έχει ένα στοχαστικό ανάπτυγμα της μορφής

$$t = t_o + \tau t_1 + \tau^2 t_2 + \omega(\tau^3),$$

όπου $t_o = e'b/(e'Ge)^{1/2} = k'b$, $b = GX'\Omega u/\sqrt{T}$, $k = e/(e'Ge)^{1/2}$. Ως εκ τούτου το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο στατιστικό (2.21) έχει το στοχαστικό ανάπτυγμα

$$\hat{t} = t_o + \tau t_1 + \tau^2 t_2 + \omega(\tau^3) - \frac{\tau^2}{2}\left[p_1+p_2(t_o\tau t_1+\tau^2 t_2+\omega(\tau^3))^2\right] \cdot$$

$$\cdot (t_o+\tau t_1+\tau^2 t_2+\omega(\tau^3)) =$$

$$= t_o+\tau t_1+\tau^2 t_2 - \tau^2(p_1+p_2 t_o^2)\, t_o/2 + \omega(\tau^3) =$$

$$= t_o+\tau t_1+\tau^2(t_2-t_3)+\omega(\tau^3), \qquad \text{(B.90)}$$

όπου

$$t_3 = (p_1+p_2 t_o^2)\, t_o/2. \qquad \text{(B.91)}$$

Στην απόδειξη του θεωρήματος 2.1 έχουμε δείξει ότι ισχύουν τα αποτελέσματα

$$E(k'b)=0,\ E\left[(k'b)^2\right]=1 \text{ και } E\left[(k'b)^3\right]=0, \tag{B.92}$$

τα οποία σε συνδυασμό με το Λήμμα Α.3 συνεπάγονται ότι

$$(\alpha)\ E\left[e^{st_o}t_o\right]=s\varphi(s) \text{ και } (\beta)\ E\left[e^{st_o}t_o^3\right]=\varphi(s)(3s+s^3). \tag{B.93}$$

Έστω s ένας φανταστικός αριθμός και $\varphi_t(s)$, $\varphi(s)$ οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις του στατιστικού (2.11) και μιας τυπικής κανονικής μεταβλητής, αντίστοιχα. Από τις (Β.90) και (Β.93) και το Λήμμα 2.2 και κατά τρόπο όμοιο με αυτόν της απόδειξης του Θεωρήματος 2.1 βρίσκουμε την χαρακτηριστική συνάρτηση του στατιστικού (2.21):

$$\varphi_{\hat{t}}(s)=E\left[e^{s\hat{t}}\right]=E\left[e^{s\left[t_o+\tau t_1+\tau^2(t_2-t_3)\right]+\omega(\tau^3)}\right]=$$

$$=E\left[e^{st_o}e^{s\left[\tau t_1+\tau^2(t_2-t_3)\right]}\right]+O(\tau^3)=$$

$$=\varphi_t(s)-\tau^2sE\left[e^{st_o}t_3\right]+O(\tau^3)=$$

$$=\varphi_t(s)-\tau^2sE\left[e^{st_o}(p_1t_o+p_2t_o^3)/2\right]+O(\tau^3)=$$

$$=\varphi_t(s)-\frac{\tau^2}{2}s\left[p_1s+p_2(3s+s^3)\right]\varphi(s)+O(\tau^3). \tag{B.94}$$

Χρησιμοποιώντας τα Λήμματα Α.2, Α.7 και 2.2, διαιρώντας την (Β.94) δια −s και αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό Fourier, βρίσκουμε

$$-\varphi_{\hat{t}}(s)/s=-\varphi_t(s)/s+\frac{\tau^2}{2}\left[(p_1+3p_2)s+p_2s^3\right]\varphi(s)+O(\tau^3)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pr(\hat{t}\le x)=\Pr(t\le x)+\frac{\tau^2}{2}\left[(p_1+3p_2)H_1(x)+p_2H_3(x)\right]i(x)+O(\tau^3)=$$

$$=\Pr(t\le x)+\frac{\tau^2}{2}\left[(p_1+3p_2)x+p_2(x^3-3x)\right]i(x)+O(\tau^3)=$$

$$=\Pr(t\le x)+\frac{\tau^2}{2}(p_1+p_2x^2)xi_{T-n}(x)+O(\tau^3)=$$

$$=I_{T-n}(x)-\frac{\tau^2}{2}(p_1+p_2x^2)xi_{T-n}(x)+\frac{\tau^2}{2}(p_1+p_2x^2)xi_{T-n}(x)+O(\tau^3)=$$

$$=I_{T-n}(x)+O(\tau^3), \tag{B.95}$$

όπου $H_1(x)$, $H_3(x)$ είναι το πρώτο και το τρίτο Chebyshev–Cramer πολυώνυμο, αντίστοιχα, και $I_{T-n}(\cdot)$, $i_{T-n}(\cdot)$ είναι οι συναρτήσεις

κατανομής και πυκνότητας, αντίστοιχα, μιας t μεταβλητής με T-n βαθμούς ελευθερίας. Η εγκυρότητα της ασυμπτωτικής προσέγγισης (B.95) προκύπτει από την εγκυρότητα της ασυμπτωτικής προσέγγισης του Λήμματος 2.1.

Εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη του Λήματος 2.2 μπορούμε να αποδείξουμε ότι, αν είναι γνωστό πως το γ ανήκει σε μια σφαίρα ακτίνας ϑ, καθώς το $\vartheta \to 0$ ισχύει ότι $p_1=p_2=0$, γεγονός που συνεπάγεται ότι το στατιστικό (2.21) ισούται με το στατιστικό (2.11) και κατανέμεται ακριβώς ως μια t μεταβλητή.

QED

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΠΟΡΙΣΜΑΤΟΣ 2.3: Από το Λήμμα 2.2 και το Θεώρημα 2.2, αναπτύσσοντας κατά Taylor την $I_{T-n}(\hat{t}_o)$ περί το t_o, βρίσκουμε

$$\hat{t}_o=t_o-(\tau^2/2)(p_1+p_2t_o^2)t_o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{T-n}(\hat{t}_o)=I_{T-n}\left[t_o-(\tau^2/2)(p_1+p_2t_o^2)t_o\right]=$$

$$=I_{T-n}(t_o)-(\tau^2/2)(p_1+p_2t_o^2)t_o i_{T-n}(t_o)+O(\tau^3)=$$

$$=Pr(t \le t_o)+O(\tau^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Pr(t \le t_o)=I_{T-n}(\hat{t}_o)+O(\tau^3) \\ Pr(t > t_o)=1-I_{T-n}(\hat{t}_o)+O(\tau^3). \end{cases} \qquad (B.96)$$

QED

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΛΗΜΜΑΤΟΣ 2.3: Το στατιστικό (2.27) γράφεται

$$w=N/D, \qquad (B.97)$$

όπου

$$N=\sqrt{T}(H\hat{\beta}-h)'\left[H(X'\hat{\Omega}X/T)^{-1}H'\right]^{-1}\sqrt{T}(H\hat{\beta}-h)/\sigma^2 \text{ και } D=\hat{\sigma}^2/\sigma^2. \qquad (B.98)$$

Από το Λήμμα B.1 έπεται ότι

$$b+\tau b_*=\sqrt{T}(\hat{\beta}-\beta)/\sigma. \qquad (B.99)$$

Οι (2.26) και (B.99) συνεπάγονται ότι

$$H(b+\tau b_*)=\sqrt{T}(H\hat{\beta}-H\beta)/\sigma=\sqrt{T}(H\hat{\beta}-h)/\sigma. \qquad (B.100)$$

Από τις (2.14), (B.98) και (B.100) βρίσκουμε

$$N=(b+\tau b_*)'H'(H\hat{G}H')^{-1}H(b+\tau b_*). \qquad (B.101)$$

Ορίζουμε την μήτρα

$$\hat{Q}=H'(H\hat{G}H')^{-1}H. \qquad (B.102)$$

Από το Λήμμα B.2 παίρνουμε

$$\hat{G}=G+\tau G_* \Rightarrow H\hat{G}H'=HGH'+\tau HG_*H' \qquad (B.103)$$

και χρησιμοποιώντας το Λήμμα A.1 βρίσκουμε

$$(H\hat{G}H')^{-1}=(HGH')^{-1}-\tau(HGH')^{-1}(HG_*H')(HGH')^{-1}+$$
$$+\tau^2(HGH')^{-1}(HG_*H')(HGH')^{-1}(HG_*H')(HGH')^{-1}+\omega(\tau^3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow H'(H\hat{G}H')^{-1}H=H'(HGH')^{-1}H-\tau H'(HGH')^{-1}HG_*H'(HGH')^{-1}H+$$
$$+\tau^2H'(HGH')^{-1}HG_*H'(HGH')^{-1}HG_*H'(HGH')^{-1}H+\omega(\tau^3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \hat{Q}=Q-\tau QG_*Q+\tau^2QG_*QG_*Q+\omega(\tau^3). \qquad (B.104)$$

Από τις (B.101) και (B.104) και το θεώρημα A.2 έπεται ότι

$$N=(b+\tau b_*)'\hat{Q}(b+\tau b_*)=$$
$$=(b+\tau b_*)'(Q-\tau QG_*Q+\tau^2QG_*QG_*Q)(b+\tau b_*)+\omega(\tau^3)=$$
$$=b'Qb-\tau b'QG_*Qb+\tau^2b'QG_*QG_*Qb+2\tau b'Qb_*-2\tau^2b'QG_*Qb_*+$$
$$+2\tau^3b'QG_*QG_*Qb_*+\tau^2b_*'Qb_*-\tau^3b_*'QG_*Qb_*+\tau^4b_*QG_*QG_*Qb_*+\omega(\tau^3)=$$
$$=b'Qb+\tau(-b'QG_*Qb+2b'Qb_*)+\tau^2(b'QG_*QG_*Qb-2b'QG_*Qb_*+b_*'Qb_*)+\omega(\tau^3)=$$
$$=N_o+\tau N_1+\tau^2N_2+\omega(\tau^3), \qquad (B.105)$$

όπου

$$N_o=b'Qb,$$
$$N_1=-b'QG_*Qb+2b'Qb_*, \qquad (B.106)$$
$$N_3=b'QG_*QG_*Qb-2b'QG_*Qb_*+b_*'Qb_*.$$

Από την (B.57) παίρνουμε ότι

$$\hat{\sigma}^2/\sigma^2=1+\tau\delta_o, \qquad (B.107)$$

η οποία συνδυαζόμενη με την (B.98) και το Λήμμα A.1 (I) μας δίνει

$$D=1+\tau\delta_o \Rightarrow D^{-1}=(1+\tau\delta_o)^{-1}=1-\tau\delta_o+\tau^2\delta_o^2+\omega(\tau^3). \qquad (B.108)$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας τις (B.97), (B.105) και (B.108) και το θεώρημα A.2, το στατιστικό (2.27) γράφεται

$$w=ND^{-1}=(N_o+\tau N_1+\tau^2N_2)(1-\tau\delta_o+\tau^2\delta_o^2)+\omega(\tau^3)=$$
$$=N_o-\tau N_o\delta_o+\tau^2N_o\delta_o^2+\tau N_1-\tau^2N_1\delta_o+\tau^3N_1\delta_o^2+\tau^2N_2-\tau^3N_2\delta_o+\tau^4N_2\delta_o^2+\omega(\tau^3)=$$

$$=N_o+\tau(N_1-N_o\delta_o)+\tau^2(N_o\delta_o^2-N_1\delta_o+N_2)+\omega(\tau^3)=$$

$$=w_o+\tau w_1+\tau^2 w_2+\omega(\tau^3), \qquad (B.109)$$

όπου

$$w_o=N_o=b'Qb,$$

$$w_1=N_1-N_o\delta_o=-b'QG_*Qb+2b'Qb_*-b'Qb\delta_o, \qquad (B.110)$$

$$w_2=N_2-N_1\delta_o+N_o\delta_o^2=$$

$$=b'QG_*QG_*Qb-2b'QG_*Qb_*+b_*'Qb_*+b'QG_*Qb\delta_o-2b'Qb_*\delta_o+b'Qb\delta_o^2.$$

ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΕΣ ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΕΣ ΤΙΜΕΣ

Από τον ορισμό του υποδείγματός μας και από τα Λήμματα B.1 και B.3 παίρνουμε

$$b\sim N(0,G) \text{ και } b_*\sim N(0,E_1+O(\tau^2)), \qquad (B.111)$$

όπου οι ποσότητες G και E_1 έχουν ήδη οριστεί. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του Λήμματος B.3, το Λήμμα A.8 και τις (B.110) και (B.111) βρίσκουμε:

(i) $$E(w_1)=-b'QE(G_*)Qb+2b'QE(b_*)-b'QbE(\delta_o)=$$

$$=-\tau(b'QE_2Qb+b'Qb\mu_o)+O(\tau^2), \qquad (B.112)$$

(ii) $$E(w_2)=b'QE(G_*QG_*)Qb-2b'QE(G_*Qb_*)+E(b_*'Qb_*)+b'QE(G_*\delta_o)Qb-$$

$$-2b'QE(b_*\delta_o)+b'QbE(\delta_o^2)=$$

$$=b'QE_3Qb+trQE_1+b'QE_4Qb+b'Qb\lambda_o+O(\tau^2), \qquad (B.113)$$

(iii) $$w_1^2=(-b'QG_*Qb+2b'Qb_*-b'Qb\delta_o)(-b'QG_*Qb+2b'Qb_*-b'Qb\delta_o)=$$

$$=b'QG_*Qbb'QG_*Qb+4b'Qb_*b_*'Qb+(b'Qb)^2\delta_o^2-$$

$$-4b'QG_*Qbb'Qb_*+2b'QG_*\delta_oQbb'Qb-4b'Qb_*\delta_ob'Qb \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(w_1^2)=b'QE(G_*Qbb'QG_*)Qb+4b'QE(b_*'b_*)Qb+(b'Qb)^2E(\delta_o^2)-$$

$$-4b'QE(G_*Qbb'Qb_*)+2b'QE(G_*\delta_o)Qbb'Qb-4b'QE(b_*\delta_o)b'Qb=$$

$$=\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa}\lambda_{ij}b'QG_iQbb'QG_jQb+4b'QE_1Qb+(b'Qb)^2\lambda_o+$$

$$+2b'Qbb'QE_4Qb+O(\tau^2). \qquad (B.114)$$

ΕΥΡΕΣΗ ΤΗΣ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Από την (2.29) έπεται ότι

$$QGQ=H'(HGH')^{-1}HGH'(HGH')^{-1}H=H'(HGH')^{-1}H=Q$$

και (B.115)

$$trQG=trH'(HGH')^{-1}HG=tr(HGH')^{-1}HGH'=trI_r=r.$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Α.4, για $\delta=0$ και $\gamma=0$ και εφόσον $b\sim N(0,G)$ βρίσκουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\mu=(t-1)QG\delta=0$$

και (B.116)

$$\Sigma=G+(t-1)GQG \Rightarrow \Sigma Q=GQ+(t-1)GQGQ=GQ+(t-1)GQ=tGQ,$$

όπου

$$t=(1-2s)^{-1} \quad (B.117)$$

και s είναι οποιοσδήποτε φανταστικός αριθμός. Συνεπώς,

$$trQAQ\Sigma=trQAQG+(t-1)trQAQGQG=trAQGQ+(t-1)trAQGQGQ=$$

$$=trAQ+(t-1)trAQ=t(trAQ), \quad (B.118)$$

$$trQBQ\Sigma=t(trBQ), \quad (B.119)$$

$$trQAQ\Sigma QBQ\Sigma=trAQ\Sigma QBQ\Sigma Q=trAQtGQBQtGQ=t^2(trAQGQBQGQ)=$$

$$=t^2(trAQBQ). \quad (B.120)$$

Κάνοντας χρήση των (B.118), (B.119) και (B.120), του Ορισμού Α.8 και του Λήμματος Α.8, βρίσκουμε

$$(\alpha)\ E_2(b'QAQb)=E\left[e^{sb'Qb}b'QAQb\right]\Big/\varphi_r(s)=E(z'QAQz)=trQAQ\Sigma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b'QAQb \overset{2}{=} t(trAQ), \quad (B.121)$$

$$(\beta)\ b'QBQb \overset{2}{=} t(trBQ), \quad (B.122)$$

$$(\gamma)\ E_2(b'QAQbb'QBQb)=E\left[e^{sb'Qb}b'QAQbb'QBQb\right]\Big/\varphi_r(s)=$$

$$=E(z'QAQzz'QBQz)=$$

$$=(trQAQ\Sigma)(trQBQ\Sigma)+2(trQAQ\Sigma QBQ\Sigma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b'QAQbb'QBQb \overset{2}{=} t^2\left[(trAQ)(trBQ)+2(trAQBQ)\right]. \quad (B.123)$$

Από τα αποτελέσματα (B.112), (B.113) και (B.114), τις σχέσεις

(B.115) μέχρι και (B.123), τον Ορισμό A.8 και το Λήμμα A.8 παίρνουμε

$$w_2+w_1/\tau \overset{1}{=} b'QE_3Qb+trQE_1+b'QE_4Qb+b'QGQb\lambda_o-b'QE_2Qb-b'QGQb\mu_o+O(\tau) \overset{2}{=}$$

$$\overset{2}{=} t(trE_3Q)+trQE_1+t(trE_4Q)+t(trGQ)\lambda_o-t(trE_2Q)-t(trGQ)\mu_o+O(\tau) \overset{2}{=}$$

$$\overset{2}{=} trQE_1+t\left[trE_3Q+trE_4Q-trE_2Q+r(\lambda_o-\mu_o)\right]+O(\tau), \qquad (B.124)$$

$$w_1^2 \overset{1}{=} \sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa}\lambda_{ij}b'QG_iQbb'QG_jQb+4b'QE_1Qb+b'QGQbb'QGQb\lambda_o+$$

$$+2b'QGQbb'QE_4Qb+O(\tau^2) \overset{2}{=}$$

$$\overset{2}{=} \sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa}\lambda_{ij}t^2\left[(trG_iQ)(trG_jQ)+2(trG_iQG_jQ)\right]+4t(trE_1Q)+$$

$$+t^2\left[(trGQ)(trGQ)+2(trGQGQ)\right]\lambda_o+2t^2\left[(trGQ)(trE_4Q)+2(trGQE_4Q)\right]+$$

$$+O(\tau^2) \overset{2}{=}$$

$$\overset{2}{=} t^2\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa}\lambda_{ij}\left[(trG_iQ)(trG_jQ)+2(trG_iQG_jQ)\right]+4t(trE_1Q)+t^2r(r+2)\lambda_o+$$

$$+2t^2(r+2)(trE_4Q)+O(\tau^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_1^2/4t \overset{2}{=} trE_1Q+t\Bigg[\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa}\lambda_{ij}(trG_iQ)(trG_jQ)/4+$$

$$+\left[tr\Big(\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa}\lambda_{ij}G_iQG_j\Big)Q\right]/2+(r+2)r\lambda_o/4+(r+2)(trE_4Q)/2\Bigg]+O(\tau^2) \overset{2}{=}$$

$$\overset{2}{=} trE_1Q+t\left[\Xi/4+(trE_3Q)/2+(r+2)r\lambda_o/4+(r+2)(trE_4Q)/2\right]+O(\tau), \qquad (B.125)$$

όπου

$$\Xi = \sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa}\lambda_{ij}(trG_iQ)(trG_jQ). \qquad (B.126)$$

Από την (B.117) έπεται ότι

$$(t-1)=2ts. \qquad (B.127)$$

Συνεπώς, από τις (B.124), (B.125) και (B.127) παίρνουμε

$$w_1/\tau+w_2+sw_1^2/2=w_1/\tau+w_2+2st(w_1^2/4t)=w_1/\tau+w_2-(w_1^2/4t)+t(w_1^2/4t) \overset{2}{=}$$

$$= trE_1Q+t\left[trE_3Q+trE_4Q-trE_2Q+r(\lambda_o-\mu_o)\right]-$$

$$-trE_1Q-t\left[\Xi/4+(trE_3Q)/2+(r+2)(trE_4Q)/2+r(r+2)\lambda_o/4\right]+$$

$$+t(trE_1Q)+t^2\left[\Xi/4+(trE_3Q)/2+(r+2)(trE_4Q)/2+r(r+2)\lambda_o/4\right]+O(\tau) \overset{z}{=}$$

$$\overset{z}{=} t\left[trE_1Q+(trE_3Q)/2-trE_2Q-(trE_4Q)r/2-r(r-2)\lambda_o/4-r\mu_o-\Xi/4\right]+$$

$$+t^2\left[\Xi/4+(trE_3Q)/2+(trE_4Q)(r+2)/2+r(r+2)\lambda_o/4\right]+O(\tau) \overset{z}{=}$$

$$\overset{z}{=} h_1t+h_2t^2+O(\tau), \qquad (B.128)$$

όπου

$$h_1= trE_1Q+(trE_3Q)/2-trE_2Q-(trE_4Q)r/2-r(r-2)\lambda_o/4-r\mu_o-\Xi/4,$$

και (B.129)

$$h_2= \Xi/4+(trE_3Q)/2+(trE_4Q)(r+2)/2+r(r+2)\lambda_o/4.$$

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε τα h_1 και h_2. Χρησιμοποιώντας τις (2.12), (2.13), (2.14), (2.28), (2.29), (B.24) και (B.129) και τα Λήμματα B.2 και B.3 βρίσκουμε

$$E_1-E_{22}= \sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa}\lambda_{ij}G(A^*_{ij}-A_iGA_j)G-\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa}G_{ij}\lambda_{ij}=$$

$$=\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa}\lambda_{ij}\left[G(A^*_{ij}-A_iGA_j)G-G_{ij}\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa}\lambda_{ij}\left[G(A^*_{ij}-A_iGA_j)G-G(A_iGA_j-A_{ij}/2)G\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa}\lambda_{ij}G(A^*_{ij}-2A_iGA_j+A_{ij}/2)G=\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa}\lambda_{ij}GC_{ij}G. \qquad (B.130)$$

Συνεπώς,

$$(i)\quad h_1=trE_1Q+(trE_3Q)/2-tr(E_{21}+E_{22})Q-(trE_4Q)r/2-$$

$$-r((r-2)\lambda_o/4+\mu_o)-\Xi/4=$$

$$=tr(E_1-E_{22})Q+(trE_3Q)/2-trE_{21}Q-(trE_4Q)r/2-r((r-2)\lambda_o/4+\mu_o)-\Xi/4=$$

$$=\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa}\lambda_{ij}trGC_{ij}GQ+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa}\lambda_{ij}trG_iQG_jQ-\sum_{i=1}^{\varkappa}\mu_itrG_iQ-$$

$$-\frac{r}{2}\sum_{i=1}^{\varkappa}\lambda_{oi}trG_iQ-r((r-2)\lambda_o/4+\mu_o)-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa}\lambda_{ij}(trG_iQ)(trG_jQ)=$$

$$= \sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa} \lambda_{ij}\,\mathrm{tr}GC_{ij}GQ + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa} \lambda_{ij}\,\mathrm{tr}GA_iGQGA_jGQ + \sum_{i=1}^{\varkappa} \mu_i\,\mathrm{tr}GA_iGQ +$$

$$+ \frac{r}{2}\sum_{i=1}^{\varkappa} \lambda_{oi}\,\mathrm{tr}GA_iGQ - r\left((r-2)\lambda_o/4+\mu_o\right) - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa} \lambda_{ij}(\mathrm{tr}GA_iGQ)(\mathrm{tr}GA_jGQ) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa} \lambda_{ij}(\mathrm{tr}C_{ij}P) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa} \lambda_{ij}(\mathrm{tr}A_iPA_jP) + \sum_{i=1}^{\varkappa} \mu_i(\mathrm{tr}A_iP) +$$

$$+ \frac{r}{2}\sum_{i=1}^{\varkappa} \lambda_{oi}(\mathrm{tr}A_iP) - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa} \lambda_{ij}(\mathrm{tr}A_iP)(\mathrm{tr}A_jP) - r\left((r-2)\lambda_o/4+\mu_o\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\varkappa}\left(\sum_{i=1}^{\varkappa} \lambda_{ji}(\mathrm{tr}C_{ij}P)\right) + \sum_{j=1}^{\varkappa}\left(\sum_{i=1}^{\varkappa} \lambda_{ji}(\mathrm{tr}D_{ij}P)\right) + \sum_{i=1}^{\varkappa} \mu_i c_i + \frac{r}{2}\sum_{i=1}^{\varkappa} \lambda_{oi}c_i -$$

$$- \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa} c_i\lambda_{ij}c_j - r\left((r-2)\lambda_o/4+\mu_o\right). \qquad \text{(B.131)}$$

Σημειώστε ότι τα $\sum_{i=1}^{\varkappa} \lambda_{ji}(\mathrm{tr}C_{ij}P)$ και $\sum_{i=1}^{\varkappa} \lambda_{ji}(\mathrm{tr}D_{ij}P)$ είναι τα j-διαγώνια στοιχεία των μητρών ΛC και ΛD, αντίστοιχα, και συνεπώς από την (B.131) παίρνουμε

$$h_1 = \mathrm{tr}\Lambda C + \mathrm{tr}\Lambda D + c'\mu + \frac{r}{2}c'\lambda - \frac{1}{4}c'\Lambda c - \frac{r(r-2)}{4}\lambda_o - r\mu_o =$$

$$= \mathrm{tr}\left[\Lambda(C+D)\right] - c'\Lambda c/4 + c'\mu + r\left[c'\lambda/2 - \mu_o - (r-2)\lambda_o/4\right]. \qquad \text{(B.132)}$$

(ii) $h_2 = \Xi/4 + (\mathrm{tr}E_3Q)/2 + (\mathrm{tr}E_4Q)(r+2)/2 + r(r+2)\lambda_o/4 =$

$$= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa} \lambda_{ij}(\mathrm{tr}G_iQ)(\mathrm{tr}G_jQ) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa} \lambda_{ij}\,\mathrm{tr}G_iQG_jQ +$$

$$+ \frac{r+2}{2}\sum_{i=1}^{\varkappa} \lambda_{oi}\,\mathrm{tr}G_iQ + r(r+2)\lambda_o/4 =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa} \lambda_{ij}(\mathrm{tr}GA_iGQ)(\mathrm{tr}GA_jGQ) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa} \lambda_{ij}\,\mathrm{tr}GA_iGQGA_jGQ -$$

$$- \frac{r+2}{2}\sum_{i=1}^{\varkappa} \lambda_{oi}\,\mathrm{tr}GA_iGQ + r(r+2)\lambda_o/4 =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa} \lambda_{ij}(\mathrm{tr}A_iP)(\mathrm{tr}A_jP) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa} \lambda_{ij}(\mathrm{tr}A_iPA_jP) -$$

$$- \frac{r+2}{2}\sum_{i=1}^{\varkappa} \lambda_{oi}(\mathrm{tr}A_iP) + r(r+2)\lambda_o/4 =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa} c_i\lambda_{ij}c_j + \sum_{j=1}^{\varkappa}\left(\sum_{i=1}^{\varkappa} \lambda_{ji}(\mathrm{tr}D_{ij}P)\right) - \frac{r+2}{2}\sum_{i=1}^{\varkappa} c_i\lambda_{io} +$$

$$+ r(r+2)\lambda_o/4 =$$

$$= \frac{1}{4}c'\Lambda c + \mathrm{tr}(\Lambda D) - \frac{r+2}{4}2c'\lambda + \frac{r(r+2)}{4}\lambda_o =$$

$$=tr(\Lambda D)+\left[c'\Lambda c-(r+2)(2c'\lambda-r\lambda_o)\right]/4. \qquad (B.133)$$

Έστω s ένας φανταστικός αριθμός και $\varphi_r(s)$ η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας κεντρικής χ^2 κατανομής με r βαθμούς ελευθερίας. Ισχύει ότι

$$\varphi_r(s)=(1-2s)^{-r/2}. \qquad (B.134)$$

Οι (B.117) και (B.134) συνεπάγονται την σχέση

$$t^k\varphi_r(s)=(1-2s)^{-k}(1-2s)^{-r/2}=(1-2s)^{-(r+2k)/2}=\varphi_{r+2k}(s). \qquad (B.135)$$

Επιπλέον, από το Λήμμα A.5 για $\gamma=0$, δηλαδή για την κεντρική χ^2_r κατανομή, παίρνουμε

$$xf_r(x)=rf_{r+2}(x)$$

και (B.136)

$$x^2f_r(x)=rxf_{r+2}(x)=r(r+2)f_{r+4}(x).$$

Χρησιμοποιώντας τις (B.109), (B.128), (B.132), (B.133), (B.134) και (B.135), τον Ορισμό A.8 και εφαρμόζοντας το θεώρημα του Taylor, βρίσκουμε την χαρακτηριστική συνάρτηση του στατιστικού (2.27):

$$\varphi_w(s)=E\left[e^{sw}\right]=E\left[e^{s[(w_o+\tau w_1+\tau^2w_2)+\omega(\tau^3)]}\right]=E\left[e^{sw_o}e^{s(\tau w_1+\tau^2w_2)}\right]+O(\tau^3)=$$

$$=E\left[e^{sw_o}\left[1+s(\tau w_1+\tau^2w_2)+s^2(\tau w_1+\tau^2w_2)^2/2\right]\right]+O(\tau^3)=$$

$$=E\left[e^{sw_o}\left[1+\tau sw_1+\tau^2s(w_2+sw_1^2/2)\right]\right]+O(\tau^3)=$$

$$=\varphi_r(s)\left[1+\tau^2sE_2(w_1/\tau+w_2+sw_1^2/2)\right]+O(\tau^3)=$$

$$=\varphi_r(s)\left[1+\tau^2s(h_1t+h_2t^2)\right]+O(\tau^3)=$$

$$=\varphi_r(s)+\tau^2s\left[h_1\varphi_r(s)t+h_2\varphi_r(s)t^2\right]+O(\tau^3)=$$

$$=\varphi_r(s)+\tau^2s\left[h_1\varphi_{r+2}(s)+h_2\varphi_{r+4}(s)\right]+O(\tau^3),$$

οπότε, χρησιμοποιώντας την (B.136), το Λήμμα A.2, διαιρώντας δια -s και αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό Fourier, παίρνουμε

$$-\varphi_w(s)/s=-\varphi_r(s)/s-\tau^2\left[h_1\varphi_{r+2}(s)+h_2\varphi_{r+4}(s)\right]+O(\tau^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{\nu}(x)=F_r(x)-\tau^2\left[h_1 f_{r+2}(x)+h_2 f_{r+4}(x)\right]+O(\tau^3)=$$

$$=F_r(x)-\tau^2\left[h_1 x f_r(x)/r+h_2 x^2 f_r(x)/r(r+2)\right]+O(\tau^3)=$$

$$=F_r(x)-\tau^2\left(h_1+h_2\frac{x}{r+2}\right)\frac{x}{r}\,f_r(x)+O(\tau^3),$$

όπου $F_r(\cdot)$ και $f_r(\cdot)$ είναι οι συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας, αντίστοιχα, μιας χ^2 μεταβλητής με r βαθμούς ελευθερίας.

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι, το στατιστικό

$$w_*=w_0+\tau w_1+\tau^2 w_2$$

ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Α.5, άρα

$$Pr(w_* \le x)=F_{\nu}(x)+o(\tau^2).$$

Για $r>1$ η $F_{\nu}(\cdot)$ είναι μια ομαλή (smooth) συνάρτηση (βλ. Μαγδαληνός (1991), Lemma 3). Άρα το θεώρημα Α.3 συνεπάγεται ότι

$$Pr(w \le x)=Pr(w_* \le x)+o(\tau^2)=F_{\nu}(x)+o(\tau^2). \qquad (B.137)$$

Στην πράξη μπορούμε να κρατήσουμε ακόμα μιαν τάξη μεγέθους στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του $w=w_*+\omega(\tau^3)$ (βλ. (B.109)), οπότε το λάθος στην (B.137) γίνεται $O(\tau^3)$, δηλαδή έχουμε

$$Pr(w \le x)=F_r(x)-\tau^2\left(h_1+h_2\frac{x}{r+2}\right)\frac{x}{r}\,f_r(x)+O(\tau^3). \qquad (B.138)$$

Για $r=1$ η εγκυρότητα της ασυμπτωτικής προσέγγισης (B.138) μπορεί να βασιστεί στο Λήμμα 2.1, διότι το στατιστικό του Wald είναι το τετράγωνο του t στατιστικού.

QED

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΠΟΡΙΣΜΑΤΟΣ 2.5: Από το Λήμμα 2.3 και την (2.32), αναπτύσσοντας κατά Taylor τις $F_r(\chi^{2*}_\alpha)$ και $f_r(\chi^{2*}_\alpha)$ περί το χ^2_α, παίρνουμε:

$$Pr(w \le \chi^{2*}_\alpha)=F_r(\chi^{2*}_\alpha)-\tau^2\left[\frac{h_1}{r}+\frac{h_2}{r(r+2)}\,\chi^{2*}_\alpha\right]\chi^{2*}_\alpha f_r(\chi^{2*}_\alpha)+O(\tau^3)=$$

$$=F_r(\chi^2_\alpha)+\tau^2\left[\frac{h_1}{r}+\frac{h_2}{r(r+2)}\,\chi^2_\alpha\right]\chi^2_\alpha f_r(\chi^2_\alpha)-$$

$$-\tau^2\left[\frac{h_1}{r}+\frac{h_2}{r(r+2)}\left[\chi^2_\alpha+\tau^2\left(\frac{h_1}{r}+\frac{h_2}{r(r+2)}\,\chi^2_\alpha\right)\chi^2_\alpha\right]\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\chi^2_\alpha+\tau^2\left(\frac{h_1}{r}+\frac{h_2}{r(r+2)}\,\chi^2_\alpha\right)\chi^2_\alpha\right]\left[f_r(\chi^2_\alpha)+\tau^2\left(\frac{h_1}{r}+\frac{h_2}{r(r+2)}\,\chi^2_\alpha\right)\chi^2_\alpha f_r'(\chi^2_\alpha)\right]+$$

$$+O(\tau^3)=$$

$$=F_r(\chi^2_\alpha)+\tau^2\left(\frac{h_1}{r}+\frac{h_2}{r(r+2)}\chi^2_\alpha\right)\chi^2_\alpha f_r(\chi^2_\alpha)-\tau^2\left(\frac{h_1}{r}+\frac{h_2}{r(r+2)}\chi^2_\alpha\right)\chi^2_\alpha f_r(\chi^2_\alpha)+$$

$$+O(\tau^3)=$$

$$=F_r(\chi^2_\alpha)+O(\tau^3)=1-\alpha+O(\tau^3). \qquad (B.139)$$

QED

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 2.3:</u> Εφόσον το στατιστικό (2.27) έχει ένα στοχαστικό ανάπτυγμα της μορφής

$$w=w_o+\tau w_1+\tau^2 w_2+\omega(\tau^3),$$

όπου $w_o=b'Qb$, το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο στατιστικό (2.33) έχει το στοχαστικό ανάπτυγμα

$$\hat{w}=w_o+\tau w_1+\tau^2 w_2+\omega(\tau^3)-\tau^2\left[\frac{h_1}{r}+\frac{h_2}{r(r+2)}(w_o+\tau w_1+\tau^2 w_2+\omega(\tau^3))\right]\cdot$$

$$\cdot(w_o+\tau w_1+\tau^2 w_2+\omega(\tau^3))=$$

$$=w_o+\tau w_1+\tau^2 w_2-\tau^2\left(\frac{h_1}{r}+\frac{h_2}{r(r+2)}w_o\right)w_o+\omega(\tau^3)=$$

$$=w_o+\tau w_1+\tau^2(w_2-w_3), \qquad (B.140)$$

όπου

$$w_3=\left(\frac{h_1}{r}+\frac{h_2}{r(r+2)}w_o\right)w_o. \qquad (B.141)$$

Έστω s ένας φανταστικός αριθμός. Η χαρακτηριστική συνάρτηση της κεντρικής χ^2_r κατανομής είναι η (B.134) για την οποία ισχύει η ιδιότητα (B.135). Χρησιμοποιώντας το Λήμμα A.4 για $\gamma=0$, $\delta=0$ και την απόδειξη του Λήμματος 2.3 βρίσκουμε

$$\mu=(t-1)GQ\delta=0$$

και (B.142)

$$\Sigma Q=tGQ \Rightarrow trQ\Sigma=t\ trGQ=rt.$$

Άρα, κάνοντας χρήση του Λήμματος A.8 παίρνουμε

$$E(z'Qz)=trQ\Sigma=rt \qquad (B.143)$$

και

$$E\left[(z'Qz)^2\right]=E(z'Qzz'Qz)=(trQ\Sigma)(trQ\Sigma)+2(trQ\Sigma Q\Sigma)=$$

$$=t(trQG)t(trQG)+2t^2(trQGQG)=t^2(trQG)^2+2t^2(trQG)=$$

$$=t^2r^2+2t^2r=t^2(r+2)r. \qquad (B.144)$$

Συνεπώς, από το Λήμμα Α.4, για $\gamma=0$ και $\delta=0$, τις (B.134), (B.135), (B.143) και (B.144) παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$(i)\ E\left[e^{sw_o}w_o\right]=E\left[e^{sb'Qb}b'Qb\right]=\varphi_r(s)E(z'Qz)=\varphi_r(s)rt=r\varphi_{r+2}(s) \qquad (B.145)$$

και

$$(ii)\ E\left[e^{sw_o}w_o^2\right]=E\left[e^{sb'Qb}(b'Qb)^2\right]=\varphi_r(s)E\left[(z'Qz)^2\right]=\varphi_r(s)t^2(r+2)r=$$

$$=r(r+2)\varphi_{r+4}(s). \qquad (B.146)$$

Συμβολίζουμε με $\varphi_w(s)$ και $\varphi_r(s)$ τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις του στατιστικού (2.27) και μιας χ^2 μεταβλητής με r βαθμούς ελευθερίας, αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.3, την (B.140) και τα αποτελέσματα (B.145) και (B.146) βρίσκουμε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση του στατιστικού (2.33) είναι

$$\varphi_{\hat{w}}(s)=E\left[e^{s\hat{w}}\right]=E\left[e^{s\left[w_o+\tau w_1+\tau^2(w_2-w_3)+o(\tau^3)\right]}\right]=$$

$$=E\left[e^{sw_o}e^{s\left[\tau w_1+\tau^2(w_2-w_3)\right]}\right]+O(\tau^3)=$$

$$=E\left[e^{sw_o}\left[1+s(\tau w_1+\tau^2(w_2-w_3))+s^2(\tau w_1+\tau^2(w_2-w_3))^2/2\right]\right]+O(\tau^3)=$$

$$=E\left[e^{sw_o}\left[1+s\tau w_1+s\tau^2(w_2+sw_1^2/2)\right]\right]-E\left[e^{sw_o}s\tau^2w_3\right]+O(\tau^3)=$$

$$=\varphi_w(s)-\tau^2sE\left[e^{sw_o}w_3\right]+O(\tau^3)=$$

$$=\varphi_w(s)-\tau^2sE\left[e^{sw_o}\left(\frac{h_1}{r}w_o+\frac{h_2}{r(r+2)}w_o^2\right)\right]+O(\tau^3)=$$

$$=\varphi_w(s)-\tau^2s\left[\frac{h_1}{r}r\varphi_{r+2}(s)+\frac{h_2}{r(r+2)}r(r+2)\varphi_{r+4}(s)\right]+O(\tau^3)=$$

$$=\varphi_w(s)-\tau^2s\left[h_1\varphi_{r+2}(s)+h_2\varphi_{r+4}(s)\right]+O(\tau^3),$$

οπότε, χρησιμοποιώντας την (B.136), το Λήμμα Α.2, διαιρώντας δια $-s$ και αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό Fourier και κάνοντας χρήση του Λήμματος 2.3, παίρνουμε

$$-\varphi_{\hat{w}}(s)/s = -\varphi_{w}(s)/s+\tau^2\left[h_1\varphi_{r+2}(s)+h_2\varphi_{r+4}(s)\right]+O(\tau^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Pr(\hat{w} \le x) = Pr(w \le x)+\tau^2\left[h_1 f_{r+2}(x)+h_2 f_{r+4}(x)\right]+O(\tau^3) =$$

$$= Pr(w \le x)+\tau^2\left[h_1 x f_r(x)/r+h_2 x^2 f_r(x)/r(r+2)\right]+O(\tau^3) =$$

$$= Pr(w \le x)-\tau^2\left(\frac{h_1}{r}+\frac{h_2}{r(r+2)}x\right)x f_r(x)+$$

$$+\tau^2\left(\frac{h_1}{r}+\frac{h_2}{r(r+2)}x\right)x f_r(x)+O(\tau^3) =$$

$$= F_r(x)+O(\tau^3), \qquad (B.147)$$

όπου $F_r(\cdot)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της χ^2 κατανομής με r βαθμούς ελευθερίας. Η εγκυρότητα της ασυμπτωτικής προσέγγισης (B.147) αποδεικνύεται όπως ακριβώς εγκυρότητα της ασυμπτωτικής προσέγγισης του Λήμματος 2.3.

QED

ΛΗΜΜΑ B.5: Έστω $F_r(\cdot)$, $f_r(\cdot)$ οι συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας, αντίστοιχα, μιας χ^2 μεταβλητής με r βαθμούς ελευθερίας. Επίσης, έστω $F^r_{T-n}(\cdot)$, $f^r_{T-n}(\cdot)$ οι συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας, αντίστοιχα, μιας F μεταβλητής με r και T−n βαθμούς ελευθερίας. Τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$F^r_{T-n}(x) = F_r(rx)+\frac{\tau^2}{2}(r-2-rx)rx f_r(rx)+O(\tau^4)$$

και (B.148)

$$f^r_{T-n}(x) = r f_r(rx)+O(\tau^2).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Γνωρίζουμε ότι για το στατιστικό (2.27) ισχύει η σχέση

$$w \xrightarrow[T\to\infty]{} \chi^2_r, \qquad (B.149)$$

όπου T είναι το μέγεθος του δείγματος. Από το θεώρημα 2.3 γνωρίζουμε ότι το στατιστικό (2.33) κατανέμεται, με ένα λάθος τάξης $O(\tau^3)$, ως μια χ^2 μεταβλητή με r βαθμούς ελευθερίας, ανεξάρτητα από τις τιμές των h_1 και h_2. Τα h_1, h_2 δίνονται από τις σχέσεις (B.132) και (B.133). Επιπλέον, από τον ορισμό του υποδείγματός μας και το Λήμμα B.4 γνωρίζουμε ότι, όταν το γ είναι ένα γνωστό διάνυσμα

$$\Lambda=0,\ \lambda=\mu=0,\ \mu_o=0,\ \lambda_o=2 \qquad (B.150)$$

και τα h_1 και h_2 δίνονται από τις σχέσεις

$$h_1=-r(r-2)/2 \Rightarrow \frac{h_1}{r}=-\frac{r-2}{2},$$

και (B.151)

$$h_2=r(r+2)/2 \Rightarrow \frac{h_2}{r(r+2)}=\frac{1}{2}.$$

Συνεπώς, όταν το γ είναι γνωστό, το στατιστικό (2.33), λαμβάνοντας υπόψη τις (B.151), γίνεται

$$\hat{w}=w-\tau^2\left[-(r-2)/2+(1/2)w\right]w+\omega(\tau^4)=w+\tau^2\left[(r-2)/2-(1/2)w\right]w+\omega(\tau^4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w=\hat{w}-\tau^2\left[(r-2)/2-(1/2)w\right]w+\omega(\tau^4), \qquad (B.152)$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$w=\hat{w}+\omega(\tau^2). \qquad (B.153)$$

Χρησιμοποιώντας την (B.153) και τα αποτελέσματα (B.145) και (B.146) (βλ. την απόδειξη του θεωρήματος 2.3), παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\text{(i)}\ E\left[e^{s\hat{w}}w\right]=E\left[e^{s[w+\omega(\tau^2)]}w\right]=E\left[e^{sw}w\right]+O(\tau^2)=r\varphi_{r+2}(s)+O(\tau^2) \qquad (B.154)$$

και

$$\text{(ii)}\ E\left[e^{s\hat{w}}w^2\right]=E\left[e^{s[w+\omega(\tau^2)]}w^2\right]=E\left[e^{sw}w^2\right]+O(\tau^2)=$$

$$=r(r+2)\varphi_{r+4}(s)+O(\tau^2). \qquad (B.155)$$

'Εστω

$$v=w/r=(H\hat{\beta}-h)'\left[H(X'\hat{\Omega}X)^{-1}H'\right]^{-1}(H\hat{\beta}-h)/r\hat{\sigma}^2 \qquad (B.156)$$

το στατιστικό του Wald διορθωμένο για τους βαθμούς ελευθερίας του αριθμητού. 'Οταν η μήτρα Ω είναι γνωστή, δηλαδή όταν το διάνυσμα γ είναι γνωστό, το στατιστικό (B.156) κατανέμεται ως μια F μεταβλητή με r και T-n βαθμούς ελευθερίας. 'Εστω

$$y=rx \Leftrightarrow x=y/r. \qquad (B.157)$$

Τότε

$$Pr(v \le x)=Pr(w/r \le x)=Pr(w \le rx)=Pr(w \le y). \qquad (B.158)$$

Επιπλέον, θεωρώντας ότι η μήτρα Ω είναι γνωστή, έχουμε

$$Pr(v \le x)=F^{r}_{T-n}(x)\,. \qquad (B.159)$$

Έστω s ένας φανταστικός αριθμός. Από τις σχέσεις (B.152), (B.154) και (B.155) και το θεώρημα 2.3 βρίσκουμε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση του στατιστικού (2.27) είναι

$$\varphi_{v}(s)=E\left[e^{sv}\right]=E\left[e^{s\left[\hat{w}-\tau^{2}((r-2)/2-(1/2)w)w+o(\tau^{4})\right]}\right]=$$

$$=E\left[e^{s\hat{w}-s\left[\tau^{2}((r-2)/2-(1/2)w)w\right]}\right]+O(\tau^{4})=$$

$$=E\left[e^{s\hat{w}}\left[1-s\tau^{2}((r-2)/2-(1/2)w)w\right]\right]+O(\tau^{4})=$$

$$=\varphi_{\hat{w}}(s)-\tau^{2}sE\left[e^{s\hat{w}}((r-2)/2-(1/2)w)w\right]+O(\tau^{4})=$$

$$=\varphi_{\hat{w}}(s)-\tau^{2}s\left[(r-2)r\varphi_{r+2}(s)/2-r(r+2)\varphi_{r+4}(s)/2\right]+O(\tau^{4})$$

και διαιρώντας δια −s παίρνουμε

$$-\varphi_{v}(s)/s=-\varphi_{\hat{w}}(s)/s+\frac{\tau^{2}}{2}\left[(r-2)r\varphi_{r+2}(s)-r(r+2)\varphi_{r+4}(s)\right]+O(\tau^{4})\,.$$

Χρησιμοποιώντας τις (B.157), (B.158) και (B.159), τα Λήμματα A.2 και A.5 και το θεώρημα 2.3, αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό Fourier και χρησιμοποιώντας επιχειρήματα ανάλογα με αυτά του Λήμματος 2.3, μπορούμε να αποδείξουμε την εγκυρότητα της ασυμπτωτικής προσέγγισης:

$$Pr(w \le y)=Pr(\hat{w} \le y)+\frac{\tau^{2}}{2}\left[(r-2)rf_{r+2}(y)-r(r+2)f_{r+4}(y)\right]+O(\tau^{4})=$$

$$=F_{r}(y)+\frac{\tau^{2}}{2}(r-2-y)yf_{r}(y)+O(\tau^{4}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F^{r}_{T-n}(x)=F_{r}(rx)+\frac{\tau^{2}}{2}(r-2-rx)rxf_{r}(rx)+O(\tau^{4})\,. \qquad (B.160)$$

Από την (B.160) έπεται ότι

$$F^{r}_{T-n}(x)=F_{r}(rx)+O(\tau^{2})\,. \qquad (B.161)$$

Παραγωγίζοντας την (B.161) ως προς x παίρνουμε

$$\partial F^{r}_{T-n}(x)/\partial x = \partial F_{r}(rx)/\partial x+O(\tau^{2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{r}_{T-n}(x)=rf_{r}(rx)+O(\tau^{2})\,. \qquad (B.162)$$

QED

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΛΗΜΜΑΤΟΣ 2.4: Χρησιμοποιώντας το Λήμμα B.5 τον ορισμό (2.35) και τις σχέσεις (B.157) και (B.158) βρίσκουμε

$$F_{r}(y)=F_{r}(rx)=F^{r}_{T-n}(x)-\frac{\tau^{2}}{2}(r-2-rx)rxf_{r}(rx)+O(\tau^{4}) \qquad (B.163)$$

και χρησιμοποιώντας, επιπλέον, το Λήμμα 2.3 παίρνουμε

$$Pr(v\le x)=Pr(w\le y)=F_{r}(y)-\tau^{2}\left[\frac{h_{1}}{r}+\frac{h_{2}}{r(r+2)}\,y\right]yf_{r}(y)+O(\tau^{3})=$$

$$=F^{r}_{T-n}(x)-\frac{\tau^{2}}{2}(r-2-rx)rxf_{r}(rx)-\tau^{2}\left[\frac{h_{1}}{r}+\frac{h_{2}}{r(r+2)}\,rx\right]rxf_{r}(rx)+O(\tau^{3})$$

$$=F^{r}_{T-n}(x)-\tau^{2}\left[\left(\frac{h_{1}}{r}+\frac{r-2}{2}\right)+\left(\frac{h_{2}}{r+2}-\frac{r}{2}\right)x\right]xf^{r}_{T-n}(x)+O(\tau^{3})\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Pr(v\le x)=F^{r}_{T-n}(x)-\tau^{2}(q_{1}+q_{2}x)xf^{r}_{T-n}(x)+O(\tau^{3})\,, \qquad (B.164)$$

όπου

$$q_{1}=h_{1}/r+(r-2)/2$$

και (B.165)

$$q_{2}=h_{2}/(r+2)-r/2\,.$$

Η εγκυρότητα της ασυμπτωτικής προσέγγισης (B.164) προκύπτει από την εγκυρότητα των ασυμπτωτικών προσεγγίσεων στα Λήμματα 2.3 και B.5, ανωτέρω.

Όταν το διάνυσμα γ είναι γνωστό, από το Λήμμα B.4 και τους ορισμούς (2.4), (2.6) και (2.8) παίρνουμε

$$\Lambda=0,\ \lambda=\mu=0,\ \mu_{o}=0,\ \lambda_{o}=2. \qquad (B.166)$$

Συνεπώς, όπως αποδείξαμε στην (B.151), παίρνουμε

$$h_{1}=-r(r-2)/2$$

και (B.167)

$$h_{2}=r(r+2)/2\,.$$

Επομένως, οι (B.165) και (B.167) συνεπάγονται ότι, όταν το διάνυσμα γ είναι γνωστό, οι παράμετροι q_{1} και q_{2} δίνονται από τις σχέσεις:

$$q_1=h_1/r+(r-2)/2= -(r-2)/2+(r-2)/2=0$$

και (B.168)

$$q_2=h_2/(r+2)-r/2=r/2-r/2=0$$

και ως εκ τούτου το στατιστικό (2.35) κατανέμεται ακριβώς ως μια F μεταβλητή με r και T-n βαθμούς ελευθερίας.

QED

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΠΟΡΙΣΜΑΤΟΣ 2.6: Από το Λήμμα 2.4 και την (2.38), αναπτύσσοντας κατά Taylor τις $F^r_{T-n}(F^*_\alpha)$ και $f^r_{T-n}(F^*_\alpha)$ περί το F_α, παίρνουμε

$$\Pr(v \le F^*_\alpha)=F^r_{T-n}(F^*_\alpha)-\tau^2(q_1+q_2F^*_\alpha)F^*_\alpha f^r_{T-n}(F^*_\alpha)+O(\tau^3)=$$

$$=F^r_{T-n}(F_\alpha)+\tau^2(q_1+q_2F_\alpha)F_\alpha f^r_{T-n}(F_\alpha)-$$

$$-\tau^2\left[q_1+q_2\left[F_\alpha+\tau^2(q_1+q_2F_\alpha)F_\alpha\right]\right]\left[x_\alpha+\tau^2(q_1+q_2F_\alpha)F_\alpha\right]\cdot$$

$$\cdot\left[f^r_{T-n}(F_\alpha)+\tau^2(q_1+q_2x_\alpha)F_\alpha f'^r_{T-n}(F_\alpha)\right]+O(\tau^3)=$$

$$=F^r_{T-n}(F_\alpha)+\tau^2(q_1+q_2F_\alpha)F_\alpha f^r_{T-n}(F_\alpha)-\tau^2(q_1+q_2F_\alpha)F_\alpha f^r_{T-n}(F_\alpha)+O(\tau^3)=$$

$$=F^r_{T-n}(F_\alpha)+O(\tau^3)=1-\alpha+O(\tau^3)\,. \qquad \text{(B.169)}$$

QED

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 2.4: Από τους ορισμούς (2.27) και (2.35) γνωρίζουμε ότι

$$v=w/r. \qquad \text{(B.170)}$$

Εφόσον κάτω από την υπόθεση (2.26) το στατιστικό (2.27) έχει το στοχαστικό ανάπτυγμα

$$w=w_o+\tau w_1+\tau^2 w_2+\omega(\tau^3),$$

όπου $w_o=b'Qb$, μπορούμε να δείξουμε ότι, κάτω από την ίδια υπόθεση, το στατιστικό (2.35) έχει ένα στοχαστικό ανάπτυγμα της μορφής

$$v=v_o+\tau v_1+\tau^2 v_2+\omega(\tau^3), \qquad \text{(B.171)}$$

όπου

$$v_o=w_o/r=b'Qb/r. \qquad \text{(B.172)}$$

Επομένως, το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο στατιστικό (2.39) έχει το στοχαστικό ανάπτυγμα

$$\hat{v}=v_o+\tau v_1+\tau^2 v_2+\omega(\tau^3)-\tau^2\left[q_1+q_2(v_o+\tau v_1+\tau^2 v_2+\omega(\tau^3))\right]\cdot$$
$$\cdot(v_o+\tau v_1+\tau^2 v_2+\omega(\tau^3))=$$
$$=v_o+\tau v_1+\tau^2 v_2-\tau^2(q_1+q_2 v_o)v_o+\omega(\tau^3)=$$
$$=v_o+\tau v_1+\tau^2(v_2-v_3)+\omega(\tau^3), \qquad (B.173)$$

όπου

$$v_3=(q_1+q_2 v_o)v_o. \qquad (B.174)$$

Έστω s και s_* δύο φανταστικοί αριθμοί με $s_*=s/r$. Κατ' αντιστοιχία με τις (B.117), (B.134) και (B.135) έχουμε ότι

$$t_*=(1-2s_*)^{-1},$$
$$\varphi_r(s_*)=(1-2s_*)^{-r/2}, \qquad (B.175)$$
$$t_*^k\varphi_r(s_*)=\varphi_{r+2k}(s_*),$$

όπου $\varphi_r(s_*)$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της χ^2 κατανομής με r βαθμούς ελευθερίας. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Α.4 για $\gamma=0$, $\delta=0$, $t=t_*$ και $s=s_*$ και εφόσον $b\sim N(0,G)$, κατ' αντιστοιχία προς την (B.142), βρίσκουμε ότι

$$\mu=(t_*-1)GQ\delta=0$$
και $\qquad (B.176)$
$$\Sigma Q=t_* GQ \Rightarrow \mathrm{tr}Q\Sigma=t_*\mathrm{tr}GQ=rt_*.$$

Κατ' αντιστοιχία προς τις (B.143) και (B.144) και κάνοντας χρήση του Λήμματος Α.8 βρίσκουμε ότι

$$E(z'Qz)=rt_* \qquad (B.177)$$
και
$$E\left[(z'Qz)^2\right]=t_*^2(r+2)r. \qquad (B.178)$$

Συνεπώς, από το Λήμμα Α.4, για $\gamma=0$ και $\delta=0$, τις (B.175), (B.177) και (B.178) βρίσκουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\text{(i)}\ E\left[e^{sv_o}v_o\right]=E\left[e^{sw_o/r}w_o/r\right]=\frac{1}{r}E\left[e^{(s/r)w_o}w_o\right]=\frac{1}{r}E\left[e^{s_* w_o}w_o\right]=$$
$$=\frac{1}{r}E\left[e^{s_* b'Qb}b'Qb\right]=\frac{1}{r}\varphi_r(s_*)E(z'Qz)=$$
$$=\frac{1}{r}\varphi_r(s_*)rt_*=\varphi_{r+2}(s_*)=\varphi_{r+2}(s/r) \qquad (B.179)$$

και

$$\text{(ii)}\quad E\left[e^{sv_o v_o^2}\right]=E\left[e^{sv_o/r\, w_o^2/r^2}\right]=\frac{1}{r^2}E\left[e^{(s/r)v_o w_o^2}\right]=\frac{1}{r^2}E\left[e^{s_* v_o w_o^2}\right]=$$

$$=\frac{1}{r^2}E\left[e^{s_* b'Qb}(b'Qb)^2\right]=\frac{1}{r^2}\varphi_r(s_*)E\left[(z'Qz)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{r^2}\varphi_r(s_*)r(r+2)t_*^2=\frac{r+2}{r}\varphi_{r+4}(s_*)=\frac{r+2}{r}\varphi_{r+4}(s/r)\,. \qquad \text{(B.180)}$$

Από το Λήμμα A.5 για $\gamma=0$ και για $y=rx$ παίρνουμε

$$yf_r(y)=rf_{r+2}(y)\ \Rightarrow\ (rx)f_r(rx)=rf_{r+2}(rx) \qquad \text{(B.181)}$$

και

$$y^2f_r(y)=r(r+2)f_{r+4}(y)\ \Rightarrow\ (rx)^2f_r(rx)=r(r+2)f_{r+4}(rx)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow rx^2f_r(rx)=(r+2)f_{r+4}(rx)\,. \qquad \text{(B.182)}$$

Συμβολίζουμε με $\varphi_v(s)$, $\varphi_r(s)$ τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις του στατιστικού (2.35) και μιας χ^2 μεταβλητής με r βαθμούς ελευθερίας, αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας τις (B.173), (B.174), (B.179) και (B.180), το Λήμμα 2.4, το Λήμμα B.5 και κατ' αντιστοιχία προς την απόδειξη του θεωρήματος 2.3, βρίσκουμε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση του στατιστικού (2.39) είναι

$$\varphi_{\hat{v}}(s)=E\left[e^{s\hat{v}}\right]=E\left[e^{s\left[v_o+\tau v_1+\tau^2(v_2-v_3)+\omega(\tau^3)\right]}\right]=$$

$$=E\left[e^{sv_o}e^{s\left[\tau v_1+\tau^2(v_2-v_3)\right]}\right]+O(\tau^3)=$$

$$=\varphi_v(s)-\tau^2sE\left[e^{sv_o}v_3\right]+O(\tau^3)=$$

$$=\varphi_v(s)-\tau^2sE\left[e^{sv_o}(q_1v_o+q_2v_o^2)\right]+O(\tau^3)=$$

$$=\varphi_v(s)-\tau^2s\left[q_1\varphi_{r+2}(s/r)+q_2\frac{r+2}{r}\varphi_{r+4}(s/r)\right]+O(\tau^3),$$

οπότε, χρησιμοποιώντας τις (B.181) και (B.182), το Λήμμα A.2, διαιρώντας δια $-s$ και αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό Fourier, παίρνουμε

$$-\varphi_{\hat{v}}(s)/s=-\varphi_v(s)/s+\tau^2\left[q_1\varphi_{r+2}(s/r)+q_2\frac{r+2}{r}\varphi_{r+4}(s/r)\right]+O(\tau^3)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{\hat{v}}(x)=\Pr(v\le x)+\tau^2\left[q_1rf_{r+2}(rx)+q_2\frac{r+2}{r}rf_{r+4}(rx)\right]+O(\tau^3)=$$

$$=Pr(v \le x)+\tau^2\left[q_1 r x f_r(rx)+q_2 r x^2 f_r(rx)\right]+O(\tau^3)=$$

$$=Pr(v \le x)+\tau^2(q_1+q_2 x)\,r x f_r(rx)+O(\tau^3)=$$

$$=F^r_{T-n}(x)-\tau^2(q_1+q_2 x)\,x f^r_{T-n}(x)+\tau^2(q_1+q_2 x)\,x r f_r(rx)+O(\tau^3)=$$

$$=F^r_{T-n}(x)-\tau^2(q_1+q_2 x)\,x f^r_{T-n}(x)+\tau^2(q_1+q_2 x)\,x f^r_{T-n}(x)+O(\tau^3)=$$

$$=F^r_{T-n}(x)+O(\tau^3),$$

όπου $F^r_{T-n}(\cdot)$, $f^r_{T-n}(\cdot)$ είναι οι συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας, αντίστοιχα, μιας F μεταβλητής με r και T-n βαθμούς ελευθερίας.

Το Θεώρημα A.5 συνεπάγεται ότι η $F_{\hat{v}}(\cdot)$ είναι μια έγκυρη ασυμπτωτική προσέγγιση της συνάρτησης κατανομής των τριών πρώτων όρων του αναπτύγματος (B.173), με ένα σφάλμα τάξης $o(\tau^2)$. Η F συνάρτηση πυκνότητας είναι φραγμένη. Άρα, η F συνάρτηση κατανομής και συνεπώς η $F_{\hat{v}}(\cdot)$ είναι μια ομαλή (smooth) συνάρτηση. Επομένως, το θεώρημα A.3 συνεπάγεται ότι

$$Pr(\hat{v} \le x)=F_{\hat{v}}(x)+o(\tau^2)=F^r_{T-n}(x)+o(\tau^2). \qquad (B.183)$$

Στην πράξη, διατηρώντας έναν ακόμα όρο στο ανάπτυγμα (B.173), μπορούμε να δείξουμε ότι το σφάλμα στην (B.183) είναι τάξης $O(\tau^3)$, δηλαδή

$$Pr(\hat{v} \le x)=F^r_{T-n}(x)+O(\tau^3). \qquad (B.184)$$

Εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη του Λήματος 2.4 μπορούμε να αποδείξουμε πως, όταν το διάνυσμα γ είναι γνωστό, ισχύει ότι $q_1=q_2=0$, γεγονός που συνεπάγεται ότι το στατιστικό (2.39) ισούται με το στατιστικό (2.35) και κατανέμεται ακριβώς ως μια F μεταβλητή με r και T-n βαθμούς ελευθερίας.

QED

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΠΟΡΙΣΜΑΤΟΣ 2.7: Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.4, το Θεώρημα 2.4 και αναπτύσσοντας κατά Taylor την $F^r_{T-n}(\hat{v}_o)$ περί το v_o, βρίσκουμε

$$\hat{v}_o=v_o-\tau^2(q_1+q_2 v_o)v_o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F^{r}_{T-n}(\hat{v}_o)=F^{r}_{T-n}\left[v_o-\tau^2(q_1+q_2v_o)v_o\right]=$$

$$=F^{r}_{T-n}(v_o)-\tau^2(q_1+q_2v_o)v_o f^{r}_{T-n}(v_o)+O(\tau^3)=$$

$$=Pr(v \leq v_o)+O(\tau^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Pr(v > v_o)=1-F^{r}_{T-n}(\hat{v}_o)+O(\tau^3). \qquad (B.185)$$

QED

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΠΟΡΙΣΜΑΤΟΣ 2.8: Από τις (2.14), (2.28) και (2.29) και εφόσον $H=I_n$ προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

(i) $Q=I_n'(I_nGI_n')^{-1}I_n=G^{-1}$,

(ii) $P=GQG=GG^{-1}G=G$,

(iii) $A_iP=A_iG$, (B.186)

(iv) $C_{ij}P=C_{ij}G=A^{*}_{ij}G-2A_iGA_jG+A_{ij}G/2$,

(v) $D_{ij}=A_iPA_j/2=A_iGA_j/2 \Rightarrow D_{ij}P=D_{ij}G=A_iGA_jG/2$.

Επομένως, βρίσκουμε ότι

(α) το i-στοιχείο του διανύσματος c είναι

$$c_i=trA_iG, \qquad (B.187)$$

(β) το (i,j)-στοιχείο της μήτρας C είναι

$$c_{ij}=trC_{ij}G=tr(A^{*}_{ij}G-2A_iGA_jG+A_{ij}G/2), \qquad (B.188)$$

(γ) το (i,j)-στοιχείο της μήτρας D είναι

$$d_{ij}=trD_{ij}G=trA_iGA_jG/2. \qquad (B.189)$$

Συνδυάζοντας τις (B.188) και (B.189) βρίσκουμε ότι το (i,j)-στοιχείο της μήτρας $C^{*}=C+D$ είναι

$$c^{*}_{ij}=c_{ij}+d_{ij}=trC_{ij}G+trD_{ij}G=trA^{*}_{ij}G-2trA_iGA_jG+trA_{ij}G/2+trA_iGA_jG/2=$$

$$=(trA^{*}_{ij}G+trA_{ij}G/2)-4trA_iGA_jG/2+trA_iGA_jG/2=$$

$$=tr(A^{*}_{ij}+A_{ij}/2)G-3trA_iGA_jG/2=tr(A^{*}_{ij}+A_{ij}/2)G-3d_{ij}. \qquad (B.190)$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.31) και (2.37) και εφόσον r=n και $C^{*}=C+D$ βρίσκουμε ότι

$$q_1=h_1/n+(n-2)/2=$$

$$=\left[tr(\Lambda C^{*})-c'\Lambda c/4+c'\mu\right]/n+c'\lambda/2-\mu_o-(n-2)\lambda_o/4+2(n-2)/4=$$

$$= \left[tr(\Lambda C^{*}) - c'\Lambda c/4 + c'\mu \right]/n + c'\lambda/2 - \mu_o - (n-2)(\lambda_o - 2)/4 \qquad \text{(B.191)}$$

και

$$q_2 = h_2/(n+2) - n/2 =$$

$$= \frac{1}{n+2}\left[tr(\Lambda D) + \left[c'\Lambda c - (n+2)(2c'\lambda - n\lambda_o) \right]/4 \right] - \frac{2n(n+2)}{4(n+2)} =$$

$$= \frac{1}{n+2}\left[tr(\Lambda D) + \frac{1}{4}\left[c'\Lambda c - (n+2)(2c'\lambda - n\lambda_o + 2n) \right] \right] =$$

$$= \frac{1}{n+2}\left[tr(\Lambda D) + \frac{1}{4}\left[c'\Lambda c - (n+2)(2c'\lambda - n(\lambda_o - 2)) \right] \right]. \qquad \text{(B.191)}$$

QED

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 3

ΟΡΙΣΜΟΣ Γ.1: Εισάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό: Για κάθε δείκτη i, που παίρνει όλες τις ακέραιες (και μόνον) τιμές στο διάστημα $[\alpha_1,\alpha_2]$, γράφουμε

$$i \in \langle\langle \alpha_1,\alpha_2 \rangle\rangle, \qquad (\Gamma.1)$$

όπου α_1 και α_2 είναι ακέραιοι αριθμοί.

ΛΗΜΜΑ Γ.1: Για κάθε $0 \le r < 1$ έχουμε

$$\sum_{i=1}^{T} r^i = \frac{r(1-r^T)}{1-r}, \qquad \sum_{i=0}^{T} r^i = \frac{1-r^{T+1}}{1-r}$$

και $\qquad (\Gamma.2)$

$$\sum_{i=1}^{T} ir^i = \sum_{i=0}^{T} ir^i = \frac{r[1-(T+1)r^T+Tr^{T+1}]}{(1-r)^2}.$$

Έστω R η TxT μήτρα με (i,j)-στοιχείο το $r_{ij}=\rho^{|i-j|}$, όπου $|\rho| < 1$. Επίσης ορίζουμε

$$r=\rho^2, \quad |r| < 1. \qquad (\Gamma.3)$$

Τότε έχουμε:

$$trR/T=1, \quad trR^2/T=(1+\rho^2)/(1-\rho^2)+o(T^{-1})$$

και $\qquad (\Gamma.4)$

$$trR^3/T=(1+\rho^4)/(1-\rho^2)^2+o(T^{-1}).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$(i)\quad trR/T=\sum_{i=1}^{T}\rho^{|i-i|}/T=T/T=1. \qquad (\Gamma.5)$$

$$(ii)\quad trR^2=\sum_{i=1}^{T}\sum_{k=1}^{T}\rho^{|i-k|+|k-i|}=\sum_{i=1}^{T}S(i), \qquad (\Gamma.6)$$

όπου για $j=k-i \in \langle\langle 1-i, T-i \rangle\rangle$ από την (Γ.2) έχουμε

$$S(i)=\sum_{k=1}^{T}\rho^{2|k-i|}=\sum_{j=1-i}^{T-i}\rho^{2|j|}=\sum_{j=1-i}^{T-i}r^{|j|}=\sum_{j=1-i}^{-1}r^{|j|}+\sum_{j=0}^{T-i}r^j=$$

$$=\sum_{j+i=1}^{i-1}r^{|j+i|}+\sum_{j=0}^{T-i}r^j=\sum_{k=1}^{i-1}r^k+\sum_{j=0}^{T-i}r^j=\frac{r(1-r^{(i-1)})}{1-r}+\frac{1-r^{T-i+1}}{1-r}=$$

$$= \frac{r-r^{i}+1-r^{T-i+1}}{1-r} = \frac{1+r}{1-r} - \frac{1}{1-r}(r^{i}+r^{T-i+1}) . \qquad (\Gamma.7)$$

Θέτοντας $j=T-i+1 \in \langle\langle 1,T \rangle\rangle$ από τις (Γ.2), (Γ.6) και (Γ.7) παίρνουμε

$$trR^{2}/T = \sum_{i=1}^{T} S(i)/T = \sum_{i=1}^{T} \left[\frac{1+r}{1-r} - \frac{1}{1-r}(r^{i}+r^{T-i+1}) \right] / T =$$

$$= \left[\frac{T(1+r)}{1-r} - \frac{1}{1-r}\left(\sum_{i=1}^{T} r^{i} + \sum_{j=1}^{T} r^{j} \right) \right] / T =$$

$$= \frac{1+r}{1-r} - \frac{2r(1-r^{T})}{T(1-r)^{2}} . \qquad (\Gamma.8)$$

Παραλείποντας τους όρους της (Γ.8) που τείνουν στο μηδέν καθώς το $T \longrightarrow \infty$ και χρησιμοποιώντας την (Γ.3) βρίσκουμε

$$trR^{2}/T = (1+\rho^{2})/(1-\rho^{2}) + o(T^{-1}) = (1+\rho^{2})/(1-\rho^{2}) + O(T^{-1}) . \qquad (\Gamma.9)$$

(iii) Έστω w_{ll} το l-διαγώνιο στοιχείο της μήτρας R^{3}. Έχουμε

$$w_{ll} = \sum_{m=1}^{T} \sum_{k=1}^{T} \rho^{|l-k|+|k-m|+|m-l|} .$$

Θέτοντας $i=m-l$ και $j=k-l$, με $i,j \in \langle\langle 1-l, T-l \rangle\rangle$ βρίσκουμε

$$w_{ll} = \sum_{i=1-l}^{T-l} \sum_{j=1-l}^{T-l} \rho^{|i|+|j|+|j-i|} \qquad (\Gamma.10)$$

και

$$trR^{3}/T = \sum_{l=1}^{T} w_{ll}/T .$$

Εφόσον το (i,j)-στοιχείο έχει την ίδια συμβολή με τό (j,i)-στοιχείο, το Διάγραμμα Γ.1 δείχνει ότι μπορούμε να γράψουμε

$$w_{ll} = 2(S_{1}+S_{2}+S_{3}) - S_{0} , \qquad (\Gamma.11)$$

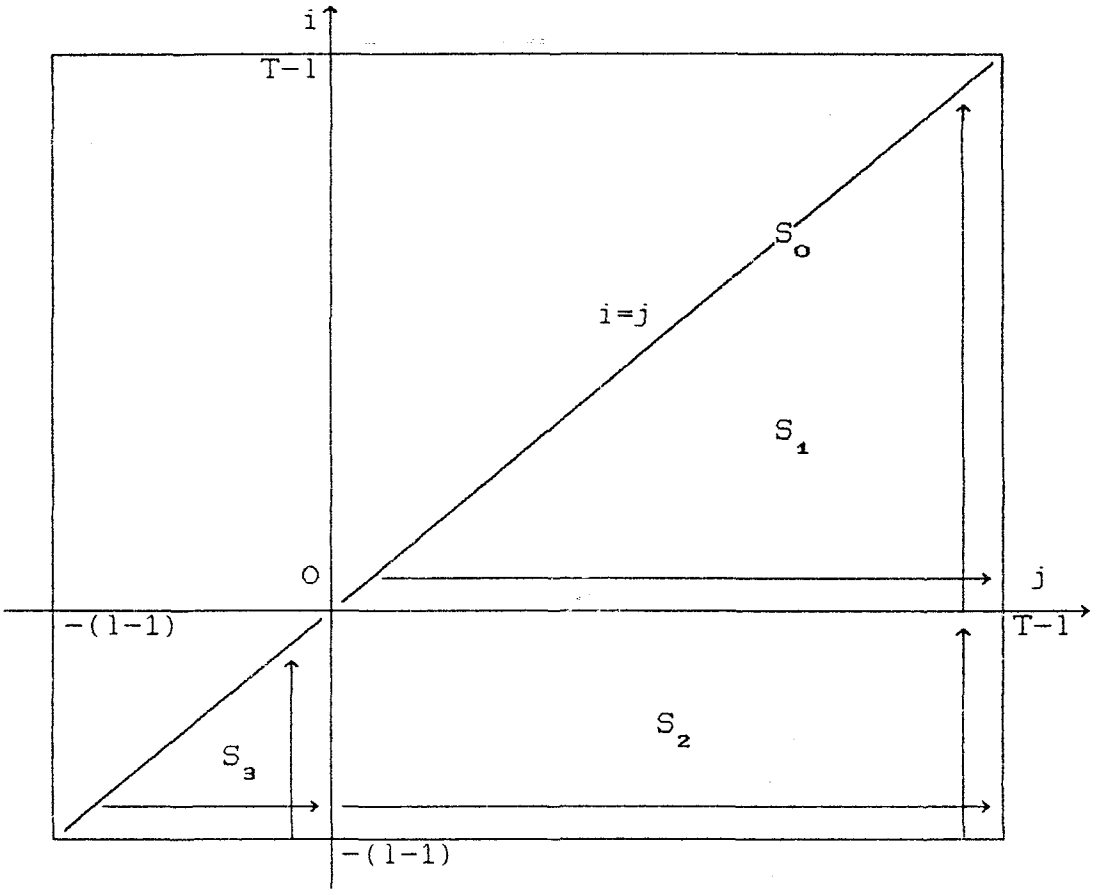
όπου τα S_{0}, S_{1}, S_{2} και S_{3} υπολογίζονται στην συνέχεια. Εργαζόμενοι όπως στον υπολογισμό του S(i), στο (ii) ανωτέρω, βρίσκουμε

$$S_{0} = \sum_{i=1-l}^{T-l} \rho^{2|i|} = \sum_{i=1-l}^{T-l} r^{|i|} = \frac{1+r}{1-r} - \frac{1}{1-r}(r^{l}+r^{T-l+1}) . \qquad (\Gamma.12)$$

Για το S_{1} έχουμε

$$S_{1} = \sum_{i=0}^{T-l} \sum_{j=i}^{T-l} \rho^{i+j+j-i} = \sum_{i=0}^{T-l} \left(\sum_{j=0}^{T-l} \rho^{2j} - \sum_{j=0}^{i-1} \rho^{2j} \right) = \sum_{i=0}^{T-l} \left(\sum_{j=0}^{T-l} r^{j} - \sum_{j=0}^{i-1} r^{j} \right) =$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ Γ.1



$$= \sum_{i=0}^{T-l} \left(\frac{1-r^{T-l+1}}{1-r} - \frac{1-r^{i-1+1}}{1-r} \right) = \sum_{i=0}^{T-l} \frac{r^i}{1-r} - \sum_{i=0}^{T-l} \frac{r^{T-l+1}}{1-r} =$$

$$= \frac{1-r^{T-l+1}}{(1-r)^2} - \frac{(T-l+1)r^{T-l+1}}{1-r} \quad . \qquad (\Gamma.13)$$

Θέτοντας $k = -i \in \langle\langle 1, l-1 \rangle\rangle$ υπολογίζουμε το S_2 ως εξής:

$$S_2 = \sum_{i=1-l}^{-1} \sum_{j=1}^{T-l} \rho^{-i+j+j-i} = \sum_{i=1-l}^{-1} \rho^{-2i} \sum_{j=1}^{T-l} \rho^{2j} = \sum_{k=1}^{l-1} \rho^{2k} \sum_{j=1}^{T-l} \rho^{2j} = \sum_{k=1}^{l-1} r^k \sum_{j=1}^{T-l} r^j =$$

$$= \frac{r(1-r^{T-l})}{1-r} \cdot \frac{r(1-r^{l-1})}{1-r} = \frac{r^2}{(1-r)^2}(1+r^{T-1}-r^{T-l}-r^{l-1}) \, . \qquad (\Gamma.14)$$

Θέτοντας $k = -i \in \langle\langle 0, l-1 \rangle\rangle$ υπολογίζουμε το S_3 ως εξής:

$$S_3 = \sum_{i=1-l}^{0} \sum_{j=i}^{0} \rho^{-i-j+j-i} - 1 = \sum_{i=1-l}^{0} (i+1)\rho^{-2i} - 1 = \sum_{k=0}^{l-1} (1-k)\rho^{2k} - 1 =$$

$$= \sum_{k=0}^{l-1} r^k - \sum_{k=0}^{l-1} kr^k - 1 = \frac{1-r^{l-1+1}}{1-r} - \frac{r[1-(l-1+1)r^{l-1}+(l-1)r^{l-1+1}]}{(1-r)^2} - 1 =$$

$$= \frac{-r^2+(l-1)r^l-(l-2)r^{l+1}}{(1-r)^2} \quad . \qquad (\Gamma.15)$$

Από τις (Γ.13), (Γ.14) και (Γ.15) έπεται ότι

$$S_* = S_1+S_2+S_3 =$$

$$= \frac{1-r^{T-l+1}}{(1-r)^2} - \frac{(T-l+1)r^{T-l+1}(1-r)}{(1-r)^2} + \frac{r^2}{(1-r)^2}(1+r^{T-1}-r^{T-l}-r^{l-1}) +$$

$$+ \frac{-r^2+(l-1)r^l-(l-2)r^{l+1}}{(1-r)^2} =$$

$$= (1-r)^{-2}\left[1+r^{T+1}+(l-1)r^l-(T-l+2)r^{T-l+1}+(T-1)r^{T-l+2}-(l-1)r^{l+1}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{l=1}^{T} S_* = \sum_{l=1}^{T} (1-r)^{-2}\left[1+r^{T+1}+(l-1)r^l-(T-l+2)r^{T-l+1}+(T-1)r^{T-l+2}-\right.$$

$$\left.-(l-1)r^{T-l}\right] =$$

$$= \frac{T(1+r^{T+1})}{(1-r)^2} + \frac{S_1+S_2+S_3+S_4}{(1-r)^2} \quad , \qquad (\Gamma.16)$$

όπου τα S_1, S_2, S_3 και S_4 υπολογίζονται ως ακολούθως:

$$S_1 = \sum_{l=1}^{T} (l-1)r^l = \sum_{l=1}^{T} lr^l - \sum_{l=1}^{T} r^l = \frac{r[1-(T+1)r^T+Tr^{T+1}]}{(1-r)^2} - \frac{r(1-r^T)}{1-r} =$$

$$= \frac{r^2-Tr^{T+1}+(T-1)r^{T+2}}{(1-r)^2} \quad . \qquad (\Gamma.17)$$

Θέτοντας $i=T-l \in \langle\langle 0, T-1\rangle\rangle$ βρίσκουμε

$$S_2 = \sum_{l=1}^{T} -(T-l+2)r^{T-l+1} = -\sum_{i=0}^{T-1} (i+2)r^{i+1} = -r\sum_{i=0}^{T-1} (i+2)r^i =$$

$$= -r\left[\sum_{i=0}^{T-1} ir^i + 2\sum_{i=0}^{T-1} r^i\right] = -r\left[\frac{r[1-Tr^{T-1}+(T-1)r^T]}{(1-r)^2} + \frac{2(1-r^T)}{1-r}\right] =$$

$$= \frac{-2r+r^2+(T+2)r^{T+1}-(T+1)r^{T+2}}{(1-r)^2} \qquad (\Gamma.18)$$

και εργαζόμενοι όμοια παίρνουμε

$$s_3=\sum_{i=1}^{T}(T-1)r^{T-i+2}=\sum_{i=0}^{T-1}ir^{i+2}=r^2\sum_{i=0}^{T-1}ir^i=r^2\frac{r[1-Tr^{T-1}+(T-1)r^T]}{(1-r)^2}=$$

$$=\frac{r^3-Tr^{T+2}+(T-1)r^{T+3}}{(1-r)^2}\ . \qquad (\Gamma.19)$$

Θέτοντας $k=i-1\in\langle\langle 0,T-1\rangle\rangle$ βρίσκουμε

$$s_4=\sum_{i=1}^{T}-(i-1)r^{i+1}=-\sum_{i=1}^{T}(i-1)r^{(i-1)+2}=-\sum_{k=0}^{T-1}kr^{k+2}=-r^2\sum_{k=0}^{T-1}kr^k=$$

$$=-r^2\frac{r[1-Tr^{T-1}+(T-1)r^T]}{(1-r)^2}=\frac{-r^3+Tr^{T+2}-(T-1)r^{T+3}}{(1-r)^2}\ . \qquad (\Gamma.20)$$

Από τις (Γ.17), (Γ.18), (Γ.19) και (Γ.20) έπεται ότι

$$s_1+s_2+s_3+s_4=(1-r)^{-2}\Big[r^2-Tr^{T+1}+(T-1)r^{T+2}-2r+r^2+(T+2)r^{T+1}-(T+1)r^{T+2}+$$

$$+r^3-Tr^{T+2}+(T-1)r^{T+3}-r^3+Tr^{T+2}-(T-1)r^{T+3}\Big]=$$

$$=2(1-r)^{-2}(r^2-r+r^{T+1}-r^{T+2})\ . \qquad (\Gamma.21)$$

Θέτοντας $i=T-i+1\in\langle\langle 1,T\rangle\rangle$ και κάνοντας χρήση της (Γ.12) βρίσκουμε

$$\sum_{i=1}^{T}S_o=\frac{T(1+r)}{1-r}-\frac{1}{1-r}\Big[\sum_{i=1}^{T}r^i+\sum_{i=1}^{T}r^{T-i+1}\Big]=$$

$$=\frac{T(1+r)}{1-r}-\frac{1}{1-r}\Big[\sum_{i=1}^{T}r^i+\sum_{i=1}^{T}r^i\Big]=\frac{T(1+r)}{1-r}-\frac{2r(1-r^T)}{(1-r)^2}\ . \qquad (\Gamma.22)$$

Οι σχέσεις (Γ.10), (Γ.11), (Γ.16), (Γ.21) και (Γ.22) συνεπάγονται ότι

$$trR^3/T=\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}w_{ii}=\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}[2(S_1+S_2+S_3)-S_o]=\frac{1}{T}\Big[2\sum_{i=1}^{T}S_*-\sum_{i=1}^{T}S_o\Big]=$$

$$=\frac{1}{T}\Big[2\Big[\frac{T(1+r^{T+1})}{(1-r)^2}+\frac{2(1-r)^{-2}[r^2-r+r^{T+1}-r^{T+2}]}{(1-r)^2}\Big]-\frac{T(1+r)}{1-r}+$$

$$+\frac{2r(1-r^T)}{(1-r)^2}\Big]=$$

$$=\frac{2(1+r^{T+1})}{(1-r)^2}+\frac{4[r^2-r+r^{T+1}-r^{T+2}]}{T(1-r)^4}-\frac{(1+r)}{1-r}+$$

$$+\frac{2r(1-r^T)}{T(1-r)^2}\ . \qquad (\Gamma.23)$$

Παραλείποντας τους όρους της (Γ.23) που τείνουν στο μηδέν καθώς το

$T\longrightarrow\infty$ και εφόσον $|r|<1$ (βλ. (Γ.3)) παίρνουμε

$$trR^3/T=\frac{2(1+r^{T+1})}{(1-r)^2}-\frac{1+r}{1-r}+o(T^{-1})=\frac{2+2r^{T+1}-(1-r^2)}{(1-r)^2}+o(T^{-1})=$$

$$=\frac{1+r^2}{(1-r)^2}+o(T^{-1})=(1+(\rho^2)^2)/(1-\rho^2)^2+o(T^{-1})=$$

$$=(1+\rho^4)/(1-\rho^2)^2+o(T^{-1})=(1+\rho^4)/(1-\rho^2)^2+O(T^{-1}). \qquad (\Gamma.24)$$

QED

<u>ΛΗΜΜΑ Γ.2:</u> Ορίζουμε την TxT μήτρα Δ, η οποία έχει μονάδες στις (1,1) και (T,T) θέσεις και μηδέν οπουδήποτε αλλού. Έστω δ_{ij} το (i,j)-στοιχείο της μήτρας Δ. Επιπλέον, ορίζουμε τις μήτρες

$$E=\Delta R,\quad Z=R\Delta R,\quad \mathscr{K}=(\Delta R)^2=E^2,\quad \Theta=R(\Delta R)^2=R\mathscr{K}, \qquad (\Gamma.25)$$

$$\Phi=(\Delta R)^3=\Delta R(\Delta R)^2=E\mathscr{K},\quad \Psi=\Delta R^3.$$

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$trE=2,\quad trZ=2(1-\rho^{2T})/(1-\rho^2),\quad tr\mathscr{K}=2(1+\rho^{2(T-1)}),$$

$$tr\Theta=2\left[T\rho^{2(T-1)}+\frac{1-\rho^{2T}}{1-\rho^2}\right],\quad tr\Phi=2(1+3\rho^{2(T-1)}), \qquad (\Gamma.26)$$

$$tr\Psi=2/(1-\rho^2)+o(T^{-1}).$$

Επιπλέον, όλα αυτά τα ίχνη (traces) είναι φραγμένα καθώς το $T\longrightarrow\infty$. Υπενθυμίζουμε ότι $r=\rho^2$, $|\rho|<1$.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ:</u> Από τον ορισμό της μήτρας Δ είναι φανερό πως για το (i,j)-στοιχείο, δ_{ij}, της Δ ισχύει ότι $\delta_{ij}=1$, για $i=j=1$ και $i=j=T$, ενώ $\delta_{ij}=0$ οπουδήποτε αλλού. Εξάλλου, το (i,j)-στοιχείο της μήτρας R είναι $\rho^{|i-j|}$. Χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέσεις και τον Ορισμό Γ.1 παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

(i) Το (i,j)-στοιχείο της μήτρας E=ΔR είναι

$$\varepsilon_{ij}=\sum_{k=1}^{T}\delta_{ik}\rho^{|k-j|}=\delta_{ii}\rho^{|i-j|}, \qquad (\Gamma.27)$$

διότι $\delta_{ik}=0$ για $k\neq i$. Συνεπώς, από την (Γ.27) παίρνουμε

$$trE=\sum_{i=1}^{T}\varepsilon_{ii}=\sum_{i=1}^{T}\delta_{ii}\rho^{|i-i|}=\delta_{11}+\delta_{TT}=2. \qquad (\Gamma.28)$$

(ii) Το (i,j)-στοιχείο της μήτρας Z=RΔR=RE είναι

$$z_{ij}=\sum_{k=1}^{T}\rho^{|i-k|}\varepsilon_{kj}=\sum_{k=1}^{T}\rho^{|i-k|}\delta_{kk}\rho^{|k-j|}=$$

$$=\rho^{|i-1|+|1-j|}\delta_{11}+\rho^{|i-T|+|T-j|}\delta_{TT}=\rho^{i+j-2}+\rho^{2T-i-j}. \qquad (\Gamma.29)$$

Από την (Γ.29) και θέτοντας $j=T-i+1\in\langle\langle 1,T\rangle\rangle$, δηλαδή $j-1=T-i$, παίρνουμε

$$trZ=\sum_{i=1}^{T}z_{ii}=\sum_{i=1}^{T}\rho^{2(i-1)}+\sum_{i=1}^{T}\rho^{2(T-i)}=\sum_{i=1}^{T}\rho^{2(i-1)}+\sum_{j=1}^{T}\rho^{2(j-1)}=$$

$$=2\sum_{i=1}^{T}\rho^{2(i-1)}. \qquad (\Gamma.30)$$

Θέτοντας $j=i-1\in\langle\langle 0,T-1\rangle\rangle$ στην (Γ.30) και χρησιμοποιώντας τις (Γ.2) και (Γ.3) βρίσκουμε

$$trZ=2\sum_{j=0}^{T-1}\rho^{2j}=2\sum_{j=0}^{T-1}r^{j}=2(1-r^{T})/(1-r)=2(1-\rho^{2T})/(1-\rho^{2}). \qquad (\Gamma.31)$$

(iii) Εργαζόμενοι όπως στο (ii) βρίσκουμε ότι το (i,j)-στοιχείο της μήτρας $\mathcal{H}=(\Delta R)^{2}=E^{2}$ είναι

$$\eta_{ij}=\sum_{k=1}^{T}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj}=\sum_{k=1}^{T}\delta_{ii}\rho^{|i-k|}\delta_{kk}\rho^{|k-j|}=\delta_{ii}\sum_{k=1}^{T}\rho^{|i-k|+|k-j|}\delta_{kk}=$$

$$=\delta_{ii}(\rho^{i+j-2}+\rho^{2T-i-j}). \qquad (\Gamma.32)$$

Η σχέση (Γ.32) συνεπάγεται ότι

$$tr\mathcal{H}=\sum_{i=1}^{T}\eta_{ii}=\sum_{i=1}^{T}\delta_{ii}(\rho^{2(i-1)}+\rho^{2(T-i)})=$$

$$=\delta_{11}(\rho^{2(1-1)}+\rho^{2(T-1)})+\delta_{TT}(\rho^{2(T-1)}+\rho^{2(T-T)})=$$

$$=2(1+\rho^{2(T-1)}). \qquad (\Gamma.33)$$

(iv) Κάνοντας χρήση της (Γ.32) βρίσκουμε ότι το (i,j)-στοιχείο της μήτρας $\Theta=R(\Delta R)^{2}=R\mathcal{H}$ είναι

$$\theta_{ij}=\sum_{k=1}^{T}\rho^{|i-k|}\eta_{kj}=\sum_{k=1}^{T}\rho^{|i-k|}\delta_{kk}(\rho^{k+j-2}+\rho^{2T-k-j})=$$

$$=\delta_{11}\rho^{|i-1|}(\rho^{j-1}+\rho^{2T-j-1})+\delta_{TT}\rho^{|i-T|}(\rho^{T+j-2}+\rho^{T-j})=$$

$$=\rho^{i+j-2}+\rho^{2T+i-j-2}+\rho^{2T-i+j-2}\rho^{2T-i-j}. \qquad (\Gamma.34)$$

Θέτοντας $j=i-1\in\langle\langle 0,T-1\rangle\rangle$ και $k=T-i\in\langle\langle 0,T-1\rangle\rangle$ στην (Γ.34) και

χρησιμοποιώντας τις (Γ.2) και (Γ.3) βρίσκουμε ότι

$$\mathrm{tr}\Theta = \sum_{i=1}^{T} \theta_{ii} = \sum_{i=1}^{T} (\rho^{2i-2}+2\rho^{2T-2}+\rho^{2T-2i}) =$$

$$=2T\rho^{2(T-1)}+\sum_{i=1}^{T}\rho^{2(i-1)}+\sum_{i=1}^{T}\rho^{2(T-i)}=2T\rho^{2(T-1)}+\sum_{k=0}^{T-1}\rho^{2j}+\sum_{k=0}^{T-1}\rho^{2k}=$$

$$=2\left[T\rho^{2(T-1)}+\sum_{j=0}^{T-1}\rho^{2j}\right]=2\left[T\rho^{2(t-1)}+\sum_{j=0}^{T-1}r^{j}\right]=$$

$$=2\left[T\rho^{2(T-1)}+\frac{1-r^{T}}{1-r}\right]=2\left[T\rho^{2(T-1)}+\frac{1-\rho^{2T}}{1-\rho^{2}}\right]. \qquad (\Gamma.35)$$

(v) Από τις (Γ.27) και (Γ.32) έπεται ότι το (i,j)-στοιχείο της μήτρας $\Phi=(\Delta R)^3=\Delta R(\Delta R)^2=E\mathscr{R}$ είναι

$$\varphi_{ij}=\sum_{k=1}^{T}\varepsilon_{ik}\eta_{kj}=\sum_{k=1}^{T}\delta_{ii}\rho^{|i-k|}\delta_{kk}(\rho^{k+j-2}+\rho^{2T-k-j}) =$$

$$=\delta_{ii}\left[\delta_{11}\rho^{|i-1|}(\rho^{j-1}+\rho^{2T-1-j})+\delta_{TT}\rho^{|i-T|}(\rho^{T+j-2}+\rho^{T-j})\right]=$$

$$=\delta_{ii}(\rho^{i+j-2}+\rho^{2T+i-j-2}+\rho^{2T-i+j-2}+\rho^{2T-i-j}). \qquad (\Gamma.36)$$

Συνεπώς,

$$\mathrm{tr}\Phi = \sum_{i=1}^{T}\varphi_{ii}=\sum_{i=1}^{T}\delta_{ii}(\rho^{2(i-1)}+2\rho^{2(T-1)}+\rho^{2(T-i)}) =$$

$$=\delta_{11}(\rho^{2(1-1)}+3\rho^{2(T-1)})+\delta_{TT}(3\rho^{2(T-1)}+\rho^{2(T-T)}) =$$

$$=2(1+3\rho^{2(T-1)}). \qquad (\Gamma.37)$$

(vi) Συμβολίζουμε με w_{ij} το (i,j)-στοιχείο της μήτρας R^3. Το (i,j)-στοιχείο της μήτρας $\Psi=\Delta R^3$ είναι

$$\psi_{ij}=\sum_{k=1}^{T}\delta_{ik}w_{kj}=\delta_{ii}w_{ij}, \qquad (\Gamma.38)$$

διότι $\delta_{ik}=0$ για $k\neq i$. Επομένως,

$$\mathrm{tr}\Psi = \sum_{i=1}^{T}\psi_{ii}=\sum_{i=1}^{T}\delta_{ii}w_{ii}=\delta_{11}w_{11}+\delta_{TT}w_{TT}=w_{11}+w_{TT}. \qquad (\Gamma.39)$$

Από την απόδειξη του Λήμματος Γ.1 έχουμε ότι

$$w_{ll}=2(S_1+S_2+S_3)-S_0=2S_*-S_0=$$

$$=2(1-r)^{-2}\left[1+r^{T+1}+(l-1)r^{l}-(T-l+2)r^{T-l+1}+(T-l)r^{T-l+2}-(l-1)r^{l+1}\right]-$$

$$- \frac{1+r}{1-r} + \frac{(r^{l}+r^{T-l+1})}{1-r} =$$

$$=(1-r)^{-2}\left[2+2r^{T+1}+2(l-1)r^{l}-2(T-l+2)r^{T-l+1}+2(T-l)r^{T-l+2}-\right.$$

$$\left.-2(l-1)r^{l+1}-1+r^{2}+r^{l}+r^{T-l+1}-r^{l+1}-r^{T-l+2}\right]=$$

$$=(1-r)^{-2}\left[1+2r^{T+1}+(2l-1)r^{l}-(2l-1)r^{l+1}+r^{2}-(2(T-l)+3)r^{T-l+1}+\right.$$

$$\left.+(2(T-l)-1)r^{T-l+2}\right]. \qquad (\Gamma.40)$$

Παραλείποντας τους όρους της (Γ.40) που τείνουν στο μηδέν καθώς το $T\longrightarrow\infty$ και κάνοντας χρήση της (Γ.3) βρίσκουμε (βλ. την απόδειξη του (vii), κατωτέρω)

$$w_{11}=(1-r)^{-2}(1+r-r^{2}+r^{2})+o(T^{-1})=(1+r)/(1-r)^{2}+o(T^{-1})=$$

$$=(1+\rho^{2})/(1-\rho^{2})^{2}+o(T^{-1})$$

και $\qquad (\Gamma.41)$

$$w_{TT}=(1-r)^{-2}(1+r^{2}-3r-r^{2})+o(T^{-1})=(1-3r)/(1-r)^{2}+o(T^{-1})=$$

$$=(1-3\rho^{2})/(1-\rho^{2})^{2}+o(T^{-1}).$$

Από τις (Γ.39) και (Γ.41) έπεται ότι

$$tr\Psi = w_{11}+w_{TT}=(1+\rho^{2}+1-3\rho^{2})/(1-\rho^{2})^{2}+o(T^{-1})=(2-2\rho^{2})/(1-\rho^{2})^{2}+o(T^{-1})=$$

$$=2/(1-\rho^{2})+o(T^{-1}). \qquad (\Gamma.42)$$

(vii) Σε όλα τα ίχνη (traces), που εξετάσαμε στο λήμμα αυτό, εμφανίζονται όροι της μορφής $T^{n}r^{T}$, όπου n είναι ένας θετικός ακέραιος. Εφόσον $0 \le r < 1$, έχουμε

$$\lim_{T\longrightarrow\infty} T^{n}r^{T}= \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{T^{n}}{r^{-T}} = \frac{\infty}{\infty} \qquad (\Gamma.43)$$

και εφαρμόζοντας διαδοχικά τον κανόνα του L'Hospital βρίσκουμε

$$\lim_{T\longrightarrow\infty} T^{n}r^{T}= \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{T^{n}}{r^{-T}} = \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{\partial\, T^{n}/\partial\, T}{\partial\, r^{-T}/\partial\, T} = \frac{n}{(-\ln r)} \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{T^{n-1}}{r^{-T}} =...=$$

$$= \frac{n!}{(-\ln r)^{n}} \lim_{T\longrightarrow\infty} \frac{1}{r^{-T}} = \frac{n!}{(-\ln r)^{n}} \lim_{T\longrightarrow\infty} r^{T}=0. \qquad (\Gamma.44)$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι οι όροι της μορφής $T^{n}r^{T}$ τείνουν στο μηδέν και επομένως τα ίχνη των μητρών E, Z, $\mathscr{H}$, Θ, Φ και Ψ είναι φραγμένα καθώς το $T\longrightarrow\infty$.

QED

ΛΗΜΜΑ Γ.3: Θεωρούμε την T×T μήτρα

$$\Omega = (1+\rho^2) I_T - \rho D - \rho^2 \Delta, \qquad (\Gamma.45)$$

όπου I_T είναι η T×T ταυτοτική μήτρα που εφεξής θα την συμβολίζουμε, για απλούστευση, με I, D είναι μια μήτρα με στοιχεία μονάδες αν $|i-j|=1$ και μηδέν οπουδήποτε αλλού και Δ είναι μια μήτρα που έχει μονάδες στις θέσεις (1,1) και (T,T) και μηδέν οπουδήποτε αλλού. Από την (3.4) γνωρίζουμε ότι

$$\Omega^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} R = \frac{1}{\alpha} R, \text{ όπου } \alpha = 1-\rho^2. \qquad (\Gamma.46)$$

Ορίζουμε

$$\alpha_* = \frac{\rho^2}{1-\rho^2} = \frac{\rho^2}{\alpha} . \qquad (\Gamma.47)$$

Έστω

$$\Omega_\rho = \partial \Omega/\partial \rho = 2\rho I - D - 2\rho\Delta = \Omega_1 - \rho\Delta$$

και (Γ.48)

$$\Omega_{\rho\rho} = \partial^2\Omega/\partial \rho^2 = 2I - 2\Delta = 2(I-\Delta),$$

όπου

$$\Omega_i = \Omega_\rho + i\rho\Delta, \quad \Omega_{ii} = \Omega_{\rho\rho} + i\Delta \quad (i=1,2). \qquad (\Gamma.49)$$

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$tr\Omega_\rho\Omega^{-1}/T = O(T^{-1}), \; tr(\Omega_\rho\Omega^{-1})^2/T = 2/(1-\rho^2) + O(T^{-1}),$$

$$tr(\Omega_\rho\Omega^{-1})^3/T = 2(2-3\rho^2)/\rho(1-\rho^2)^2 + O(T^{-1}). \qquad (\Gamma.50)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

(i) Από τις (Γ.48) και (Γ.49) παίρνουμε

$$\Omega_1 = \Omega_\rho + \rho\Delta = 2\rho I - D - \rho\Delta = \frac{1}{\rho}\left[2\rho^2 I - \rho D - \rho^2\Delta\right] = \frac{1}{\rho}\left[I + \rho^2 I - \rho D - \rho^2\Delta - I + \rho^2 I\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[(1+\rho^2) I - \rho D - \rho^2\Delta - (1-\rho^2) I\right] = \frac{1}{\rho}(\Omega - \alpha I). \qquad (\Gamma.51)$$

Επομένως, από τις (Γ.46) και (Γ.51) έπεται ότι

$$\Omega_1\Omega^{-1} = \frac{1}{\rho}(\Omega - \alpha I)\Omega^{-1} = \frac{1}{\rho}(\Omega\Omega^{-1} - \alpha\Omega^{-1}) = \frac{1}{\rho}(I - R). \qquad (\Gamma.52)$$

Κάνοντας χρήση των (Γ.25), (Γ.47), (Γ.49) και (Γ.52) βρίσκουμε

$$\Omega_\rho\Omega^{-1}=(\Omega_1-\rho\Delta)\Omega^{-1}=\Omega_1\Omega^{-1}-\rho\Delta\Omega^{-1}=\frac{1}{\rho}(I-R)-\frac{\rho}{\alpha}\Delta R=\frac{1}{\rho}(I-R-\frac{\rho^2}{\alpha}\Delta R)=$$

$$=\frac{1}{\rho}(I-R-\alpha_*E)\,. \qquad (\Gamma.53)$$

Από τα Λήμματα Γ.1 και Γ.2 και την (Γ.53) παίρνουμε

$$tr\Omega_\rho\Omega^{-1}/T=\frac{1}{\rho}\,tr(I-R-\alpha_*E)/T=\frac{1}{\rho}(T-T-2\alpha_*)/T=2\alpha_*/\rho T=O(T^{-1})\,. \qquad (\Gamma.54)$$

(ii) Από την (Γ.53) έπεται ότι

$$(\Omega_\rho\Omega^{-1})^2=\frac{1}{\rho}(I-R-\alpha_*E)\frac{1}{\rho}(I-R-\alpha_*E)=$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\left[I-2R+R^2+\alpha_*(ER+RE-2E)+\alpha_*^2E^2\right]. \qquad (\Gamma.55)$$

Άρα, χρησιμοποιώντας τα Λήμματα Γ.1 και Γ.2 βρίσκουμε

$$tr(\Omega_\rho\Omega^{-1})^2/T=\frac{1}{\rho^2}\,tr\left[I-2R+R^2+\alpha_*(ER+RE-2E)+\alpha_*^2E^2\right]/T=$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\left[trI-2trR+trR^2+2\alpha_*(trRE-trE)+\alpha_*^2trE^2\right]/T=$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\left[trI-2trR+trR^2+2\alpha_*(trZ-trE)+\alpha_*^2tr\mathscr{K}\right]/T=$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\left[trI/T-2trR/T+trR^2/T+O(T^{-1})\right]=\frac{1}{\rho^2}\left[1-2+(1+\rho^2)/(1-\rho^2)\right]+O(T^{-1})=$$

$$=2\rho^2/\rho^2(1-\rho^2)+O(T^{-1})=2/(1-\rho^2)+O(T^{-1})\,. \qquad (\Gamma.56)$$

(iii) Από τις (Γ.53) και (Γ.55) παίρνουμε

$$(\Omega_\rho\Omega^{-1})^3=\frac{1}{\rho^2}\left[I-2R+R^2+\alpha_*(ER+RE-2E)+\alpha_*^2E^2\right]\frac{1}{\rho}\left[I-R-\alpha_*E\right]=$$

$$=\frac{1}{\rho^3}\left[I-3R+3R^2-R^3+\alpha_*(3RE+3ER-3E-RER-ER^2-R^2E)-\alpha_*^2(ERE+RE^2+E^2R-3E^2)-\right.$$

$$\left.-\alpha_*^3E^3\right]. \qquad (\Gamma.57)$$

Από την (Γ.57) και τα Λήμματα Γ.1 και Γ.2 βρίσκουμε

$$tr(\Omega_\rho\Omega^{-1})^3)/T=\frac{1}{\rho^3}\,tr\left[I-3R+3R^2-R^3+\alpha_*(3RE+3ER-3E-RER-ER^2-R^2E)-\right.$$

$$\left.-\alpha_*^2(ERE+RE^2+E^2R-3E^2)-\alpha_*^3E^3\right]/T=$$

$$=\frac{1}{\rho^3}\left[trI-3trR+3trR^2-trR^3+\alpha_*(6trRE-3trE-3trER^2)-\right.$$

$$-\alpha_*^2(3\mathrm{tr}RE^2-3\mathrm{tr}E^2)-\alpha_*^3\mathrm{tr}E^3]/T=$$

$$=\frac{1}{\rho^3}[\mathrm{tr}I-3\mathrm{tr}R+3\mathrm{tr}R^2-\mathrm{tr}R^3+\alpha_*(6\mathrm{tr}Z-3\mathrm{tr}E-3\mathrm{tr}\Psi)-$$

$$-\alpha_*^2(3\mathrm{tr}\Theta-3\mathrm{tr}\mathscr{R})-\alpha_*^3\mathrm{tr}\Phi]/T=$$

$$=\frac{1}{\rho^3}[\mathrm{tr}I/T-3\mathrm{tr}R/T+3\mathrm{tr}R^2/T-\mathrm{tr}R^3/T+O(T^{-1})]=$$

$$=\frac{1}{\rho^3}[1-3+3(1+\rho^2)/(1-\rho^2)-(1+\rho^4)/(1-\rho^2)^2]+O(T^{-1})=$$

$$=2\rho^2(2-3\rho^2)/\rho^3(1-\rho^2)^2+O(T^{-1})=2(2-3\rho^2)/\rho(1-\rho^2)^2+O(T^{-1}). \qquad (\Gamma.58)$$

QED

ΛΗΜΜΑ Γ.4: Έστω X η T×n μήτρα των παρατηρήσεων των εξωγενών μεταβλητών. Στις (3.10) και (3.11) ορίσαμε τις μήτρες

$$A=X'\Omega X/T,\quad F=X'X/T,\quad \Gamma=X'RX/T,\quad G=A^{-1}. \qquad (\Gamma.59)$$

(I) Ορίζουμε τις μήτρες

$$A_\rho=X'\Omega_\rho X/T,\quad A_{\rho\rho}=X'\Omega_{\rho\rho}X/T,\quad A^*_{\rho\rho}=X'\Omega_\rho\Omega^{-1}\Omega_\rho X/T. \qquad (\Gamma.60)$$

Μπορούμε να εκφράσουμε τις μήτρες A_ρ, $A_{\rho\rho}$ και $A^*_{\rho\rho}$ σε όρους των μητρών A, F και Γ ως εξής:

$$A_\rho=\frac{1}{\rho}(A-\alpha F)+O(T^{-1}),\quad A_{\rho\rho}=2F+O(T^{-1}),$$

$$A^*_{\rho\rho}=\frac{1}{\rho^2}(A-2\alpha F+\alpha\Gamma)+O(T^{-1}). \qquad (\Gamma.61)$$

(II) Έστω H μια r×n μήτρα βαθμού r. Ορίζουμε τις μήτρες

$$Q=H'(HGH')^{-1}H,\quad P=GQG. \qquad (\Gamma.62)$$

Σημειώστε ότι η μήτρα

$$AP=AGQG=G^{-1}GQG=QG=H'(HGH')^{-1}HG \qquad (\Gamma.63)$$

είναι ο G-ορθογώνιος προβολικός τελεστής στον χώρο που δημιουργείται από τις στήλες της μήτρας H', δηλαδή είναι μια ταυτοδύναμη μήτρα βαθμού r. Γράφουμε

$$F_1=FGF,\quad F_2=FPF,\quad f=\mathrm{tr}FP,\quad f_i=\mathrm{tr}F_iP\ (i=1,2),\quad \Gamma_*=\mathrm{tr}\Gamma P,$$

$$C_{\rho\rho}=A_{\rho\rho}/2+A^*_{\rho\rho}-2A_\rho GA_\rho,\quad D_{\rho\rho}=A_\rho PA_\rho/2. \qquad (\Gamma.64)$$

Θα δείξουμε ότι

$$\mathrm{tr}A_\rho P=\frac{1}{\rho}\left[r-(1-\rho^2)f\right]+O(T^{-1})=\frac{1}{\rho}(\mathrm{tr}AP-\alpha\,\mathrm{tr}FP)+O(T^{-1}),$$

$$\mathrm{tr}A_\rho PA_\rho P=\frac{1}{\rho^2}\left[r-2(1-\rho^2)f+(1-\rho^2)^2f_2\right]+O(T^{-1}),$$

$$(\mathrm{tr}A_\rho P)^2\pm 2\mathrm{tr}A_\rho PA_\rho P=$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\left[r(r\pm 2)-2(1-\rho^2)(r\pm 2)f+(1-\rho^2)^2(f^2\pm 2f_2)\right]+O(T^{-1}),$$

$$C_{\rho\rho}=\frac{1}{\rho^2}\left[F-\rho A_\rho+\alpha(\Gamma-2\alpha FGF)\right]+O(T^{-1}),$$

(Γ.65)

$$\mathrm{tr}C_{\rho\rho}P=\mathrm{tr}(A_{\rho\rho}/2+A^*_{\rho\rho}-2A_\rho GA_\rho)P=$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\left[-r+(2-\rho^2)f+(1-\rho^2)\Gamma_*-2(1-\rho^2)^2f_1\right]+O(T^{-1})=$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\,\mathrm{tr}FP-\frac{1}{\rho}\,\mathrm{tr}A_\rho P+\frac{\alpha}{\rho^2}\,\mathrm{tr}\Gamma P-2\frac{\alpha^2}{\rho^2}\,\mathrm{tr}FGFP+O(T^{-1}),$$

$$\mathrm{tr}D_{\rho\rho}P=\mathrm{tr}(A_\rho PA_\rho/2)P=\frac{1}{2\rho^2}\left[r-2(1-\rho^2)f+(1-\rho^2)^2f_2\right]+O(T^{-1})=$$

$$=\frac{1}{2\rho^2}\,\mathrm{tr}AP-\frac{\alpha}{\rho^2}\,\mathrm{tr}FP+\frac{\alpha^2}{2\rho^2}\,\mathrm{tr}FPFP+O(T^{-1}).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

(I) (i) Από το Λήμμα Γ.3 έχουμε

$$\Omega_\rho=\Omega_1-\rho\Delta=\frac{1}{\rho}(\Omega-\alpha I)-\rho\Delta\Rightarrow\rho\Omega_\rho=\Omega-\alpha I-\rho^2\Delta.\qquad(\Gamma.66)$$

Η (Γ.66) συνεπάγεται ότι

$$A_\rho=X'\Omega_\rho X/T=\frac{1}{\rho}\,X'\rho\Omega_\rho X/T=\frac{1}{\rho}\,X'(\Omega-\alpha I-\rho^2\Delta)X/T=$$

$$=\frac{1}{\rho}(X'\Omega X/T-\alpha X'X/T-\rho^2X'\Delta X/T).\qquad(\Gamma.67)$$

Από τον ορισμό (3.10) γνωρίζουμε ότι οι μήτρες $X'\Omega X/T$ και $X'X/T$ συγκλίνουν σε μη ιδιάζουσες μήτρες καθώς το $T\longrightarrow\infty$. Έστω x_{ij} και δ_{ij} τα (i,j)-στοιχεία των μητρών X και Δ, αντίστοιχα. Ο ορισμός (3.10) συνεπάγεται ότι τα x_{ij} είναι πεπερασμένα. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της μήτρας Δ βρίσκουμε ότι το (i,j)-στοιχείο της μήτρας $U=X'\Delta X$ είναι

$$u_{ij}=\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}x_{it}\delta_{ts}x_{sj}=\sum_{t=1}^{T}x_{it}\delta_{tt}x_{tj}=x_{i1}\delta_{11}x_{1j}+x_{iT}\delta_{TT}x_{Tj}=$$

$$=x_{i1}x_{1j}+x_{iT}x_{Tj}, \qquad (\Gamma.68)$$

που είναι πεπερασμένο. Αυτό σημαίνει ότι για την μήτρα U ισχύει

$$U/T=X'\Delta X/T=O(T^{-1}). \qquad (\Gamma.69)$$

Από τις (Γ.59), (Γ.67) και (Γ.69) έπεται ότι

$$A_{\rho}=\frac{1}{\rho}(A-\alpha F)+O(T^{-1}). \qquad (\Gamma.70)$$

(I) (ii) Από το Λήμμα Γ.3, τον ορισμό της μήτρας U και την (Γ.69) έχουμε

$$A_{\rho\rho}=X'\Omega_{\rho\rho}X/T=2X'(I-\Delta)X/T=2(X'X/T-U/T)=2F+O(T^{-1}). \qquad (\Gamma.71)$$

(I) (iii) Από το Λήμμα Γ.3 και την (Γ.66) έπεται ότι

$$\Omega_{\rho}\Omega^{-1}\Omega_{\rho}=(\Omega_{\rho}\Omega^{-1})\Omega_{\rho}=\frac{1}{\rho}(I-R-\alpha_{*}E)\frac{1}{\rho}(\Omega-\alpha I-\rho^{2}\Delta)=$$

$$=\frac{1}{\rho^{2}}(I-R)(\Omega-\alpha I)-\frac{\alpha_{*}}{\rho^{2}}E(\Omega-\alpha I-\rho^{2}\Delta)-(I-R)\Delta=$$

$$=\frac{1}{\rho^{2}}(I-R)(\Omega-\alpha I)+J=\frac{1}{\rho^{2}}(\Omega-\alpha I-R\Omega+\alpha R)+J$$

$$=\frac{1}{\rho^{2}}(\Omega-\alpha I-\alpha\Omega^{-1}\Omega+\alpha R)+J=\frac{1}{\rho^{2}}(\Omega-2\alpha I+\alpha R)+J, \qquad (\Gamma.72)$$

όπου, από το Λήμμα Γ.2 έχουμε ότι

$$J=-\frac{\alpha_{*}}{\rho^{2}}E(\Omega-\alpha I-\rho^{2}\Delta)-(I-R)\Delta=-\frac{\rho^{2}/\alpha}{\rho^{2}}\Delta R(\Omega-\alpha I-\rho^{2}\Delta)-(I-R)\Delta=$$

$$=-\frac{\alpha}{\alpha}\Delta\Omega^{-1}(\Omega-\alpha I-\rho^{2}\Delta)-(I-R)\Delta=-\Delta+\alpha\Delta\Omega^{-1}+\rho^{2}\Delta\Omega^{-1}\Delta-\Delta+R\Delta=$$

$$=-2\Delta+\Delta R+\frac{\rho^{2}}{\alpha}\Delta R\Delta+R\Delta=-2\Delta+\Delta R+R\Delta+\alpha_{*}\Delta R\Delta. \qquad (\Gamma.73)$$

Από την σχέση (Γ.69) γνωρίζουμε ότι $X'\Delta X/T=O(T^{-1})$. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τον Ορισμό Γ.1, θέτοντας $k=s-1\in\langle\langle 0,T-1\rangle\rangle$ και $l=T-s\in\langle\langle 0,T-1\rangle\rangle$ για $s\in\langle\langle 1,T\rangle\rangle$ και κάνοντας χρήση των Λημμάτων Γ.1 και Γ.2 βρίσκουμε ότι το (i,j)-στοιχείο της μήτρας $V=X'EX=X'\Delta RX$ είναι

$$v_{ij}=\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}x_{it}\varepsilon_{ts}x_{sj}=\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}x_{it}\delta_{tt}\rho^{|t-s|}x_{sj}=$$

$$= \sum_{s=1}^{T} [x_{i1}\delta_{11}\rho^{|1-s|}x_{sj}+x_{iT}\delta_{TT}\rho^{|T-s|}x_{sj}]=$$

$$=x_{i1}(\sum_{s=1}^{T} x_{sj}\rho^{s-1})+x_{iT}(\sum_{s=1}^{T} x_{sj}\rho^{T-s})=$$

$$=x_{i1}(\sum_{k=0}^{T-1} x_{k+1,j}\rho^{k})+x_{iT}(\sum_{l=0}^{T-1} x_{l+1,j}\rho^{l})=(x_{i1}+x_{iT})\sum_{l=0}^{T-1} x_{l+1,j}\rho^{l}. \qquad (\Gamma.74)$$

Υποθέτοντας ότι η μήτρα $X'X/T$ είναι φραγμένη, δηλαδή ότι για $l \in \langle\langle 0,T-1\rangle\rangle$ ισχύει

$$|x_{l+1,j}| \leq M < \infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\sum_{l=0}^{T-1} x_{l+1,j}\rho^{l}| \leq \sum_{l=0}^{T-1} |x_{l+1,j}||\rho^{l}| \leq M\sum_{l=0}^{T-1} |\rho^{l}|=M\,\frac{1-|\rho|^{T}}{1-|\rho|}\,, \qquad (\Gamma.75)$$

βρίσκουμε ότι το v_{ij} είναι φραγμένο, δηλαδή ότι για την μήτρα V ισχύει η σχέση

$$V/T=X'\Delta RX/T=O(T^{-1})\,. \qquad (\Gamma.76)$$

Όμοια μπορούμε να δείξουμε ότι

$$X'R\Delta X/T=O(T^{-1})\,. \qquad (\Gamma.77)$$

Κάνοντας χρήση του Λήμματος Γ.2 έχουμε ότι το (i,j)-στοιχείο της μήτρας $K=\Delta R\Delta=E\Delta$ είναι

$$\kappa_{ij}=\sum_{k=1}^{T} \varepsilon_{ik}\delta_{kj}=\varepsilon_{ij}\delta_{jj} \qquad (\Gamma.78)$$

και συνεπώς το (i,j)-στοιχείο της μήτρας $\Pi=X'KX$ είναι

$$\pi_{ij}=\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T} x_{it}\kappa_{ts}x_{sj}=\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T} x_{it}\varepsilon_{ts}\delta_{ss}x_{sj}=\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T} x_{it}\delta_{tt}\rho^{|t-s|}\delta_{ss}x_{sj}=$$

$$=\sum_{t=1}^{T} x_{it}\delta_{tt}\sum_{s=1}^{T}\delta_{ss}\rho^{|t-s|}x_{sj}=\sum_{t=1}^{T} x_{it}\delta_{tt}(\delta_{11}\rho^{|t-1|}x_{1j}+\delta_{TT}\rho^{|t-T|}x_{Tj})=$$

$$=x_{i1}\delta_{11}(x_{1j}\rho^{1-1}+x_{Tj}\rho^{T-1})+x_{iT}\delta_{TT}(x_{1j}\rho^{T-1}+x_{Tj}\rho^{T-T})=$$

$$=x_{i1}(x_{1j}+x_{Tj}\rho^{T-1})+x_{iT}(x_{1j}\rho^{T-1}+x_{Tj})\,. \qquad (\Gamma.79)$$

Από την (Γ.79) έπεται ότι το π_{ij} είναι φραγμένο και συνεπώς για την μήτρα Π ισχύει η σχέση

$$\Pi=X'\Delta R\Delta X/T=O(T^{-1}). \qquad (\Gamma.80)$$

Οι σχέσεις (Γ.69), (Γ.73), (Γ.76), (Γ.77) και (Γ.80) συνεπάγονται ότι

$$X'JX/T= -2X'\Delta X/T+X'\Delta RX/T+X'R\Delta X/T+\alpha_* X'\Delta R\Delta X/T=O(T^{-1}). \qquad (\Gamma.81)$$

Από τις (Γ.72) και (Γ.81) και τους ορισμούς (3.10) και (3.11) παίρνουμε

$$A^*_{\rho\rho}=X'\Omega_\rho\Omega^{-1}\Omega_\rho X/T= \frac{1}{\rho^2} X'(\Omega-2\alpha I+\alpha R)X/T+X'JX/T=$$

$$= \frac{1}{\rho^2}(X'\Omega X/T-2\alpha X'X/T+\alpha X'RX/T)+O(T^{-1})=$$

$$= \frac{1}{\rho^2}(A-2\alpha F+\alpha\Gamma)+O(T^{-1}). \qquad (\Gamma.82)$$

Σημειώστε ότι οι μήτρες A και F υπολογίζονται από την παλινδρόμηση. Το (i,j)-στοιχείο της μήτρας Γ είναι

$$\Gamma_{ij}=\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T} x_{it}\rho^{|t-s|}x_{sj}/T, \qquad (\Gamma.83)$$

δηλαδή η μήτρα Γ μπορεί να υπολογιστεί με μια διπλή επανάληψη που πιθανώς θα διακόπτεται για μικρές τιμές του $\rho^{|t-s|}$. Επιπλέον, από την (Γ.83) είναι φανερό ότι τα στοιχεία της μήτρας Γ είναι φραγμένα και επομένως ισχύει ότι

$$\Gamma=X'RX/T=O(T^{-1}). \qquad (\Gamma.84)$$

(II) Χρησιμοποιώντας τις (Γ.61), (Γ.62), (Γ.63) και (Γ.64) αποδεικνύουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\text{(II) (i) } A_\rho P= \frac{1}{\rho}(A-\alpha F)P+O(T^{-1}). \qquad (\Gamma.85)$$

Συνεπώς,

$$trA_\rho P= \frac{1}{\rho}(trAP-\alpha\ trFP)+O(T^{-1})= \frac{1}{\rho}[r-(1-\rho^2)f]+O(T^{-1}). \qquad (\Gamma.86)$$

$$\text{(II) (ii) } A_\rho PA_\rho P=\left[\frac{1}{\rho}(AP-\alpha FP)+O(T^{-1})\right]\left[\frac{1}{\rho}(AP-\alpha FP)+O(T^{-1})\right]=$$

$$= \frac{1}{\rho^2}(AP-\alpha FPAP-\alpha APFP+\alpha^2 FPFP)+O(T^{-1}), \qquad (\Gamma.87)$$

διότι η μήτρα AP είναι ταυτοδύναμη. Επιπλέον, έχουμε

$$trAPFP=trQGFGQG=trFGQGQG=trFGQG=trFP=f. \qquad (\Gamma.88)$$

διότι QGQ=Q. Επίσης,

$$trFPFP=trF_2P=f_2. \qquad (\Gamma.89)$$

Από τις (Γ.87), (Γ.88) και (Γ.89) έπεται ότι

$$trA_\rho PA_\rho P=\frac{1}{\rho^2}\,tr(AP-\alpha FPAP-\alpha APFP+\alpha^2FPFP)+O(T^{-1})=$$

$$=\frac{1}{\rho^2}(trAP-2\alpha\, trAPFP+\alpha^2 trFPFP)+O(T^{-1})=$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\left[r-2(1-\rho^2)f+(1-\rho^2)^2f_2\right]+O(T^{-1}). \qquad (\Gamma.90)$$

(II) (iii) Από τις (Γ.86) και (Γ.90) παίρνουμε

$$(trA_\rho P)^2\pm 2trA_\rho PA_\rho P=\frac{1}{\rho^2}\left[r-(1-\rho^2)f\right]^2\pm$$

$$\pm\frac{2}{\rho^2}\left[r-2(1-\rho^2)f+(1-\rho^2)^2f_2\right]+O(T^{-1})=$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\left[r^2-2(1-\rho^2)rf+(1-\rho^2)^2f^2\pm 2r\mp 4(1-\rho^2)f\pm 2(1-\rho^2)^2f_2\right]+O(T^{-1})=$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\left[r(r\pm 2)-2(1-\rho^2)(r\pm 2)f+(1-\rho^2)^2(f^2\pm 2f_2)\right]+O(T^{-1}). \qquad (\Gamma.91)$$

(II) (iv) $C_{\rho\rho}=A_{\rho\rho}/2+A^*_{\rho\rho}-2A_\rho GA_\rho=$

$$=F+\frac{1}{\rho^2}(A-2\alpha F+\alpha\Gamma)-\frac{2}{\rho^2}(A-\alpha F)G(A-\alpha F)+O(T^{-1})=$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\left[\rho^2F+A-2\alpha F+\alpha\Gamma-2(AGA-\alpha FGA-\alpha AGF+\alpha^2FGF)\right]+O(T^{-1})=$$

$$=\frac{1}{\rho^2}(\rho^2F+A-2\alpha F+\alpha\Gamma-2A+2\alpha F+2\alpha F-2\alpha^2FGF)+O(T^{-1})=$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\left[\rho^2F+A+(1-\rho^2)\Gamma-2A+2(1-\rho^2)F-2(1-\rho^2)^2FGF\right]+O(T^{-1})=$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\left[-A+(2-\rho^2)F+(1-\rho^2)\Gamma-2(1-\rho^2)^2FGF\right]+O(T^{-1}) \Rightarrow \qquad (\Gamma.92)$$

$$\Rightarrow C_{\rho\rho}=\frac{1}{\rho^2}\left[-A+(1-\rho^2)F+F+(1-\rho^2)\Gamma-2(1-\rho^2)^2FGF\right]+O(T^{-1})=$$

$$=\frac{1}{\rho^2}(-A+\alpha F+F+\alpha\Gamma-2\alpha^2FGF)+O(T^{-1})=$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\left[F-(A-\alpha F)+\alpha(\Gamma-2\alpha FGF)\right]+O(T^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\left[F-\rho A_\rho+\alpha(\Gamma-2\alpha FGF)\right]+O(T^{-1}) . \qquad (\Gamma.93)$$

Από την (Γ.92) προκύπτει ότι

$$trC_{\rho\rho}P=tr(A_{\rho\rho}/2+A^{*}_{\rho\rho}-2A_\rho GA_\rho)P=$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\left[-trAP+(2-\rho^2)\,trFP+(1-\rho^2)\,tr\Gamma P-2(1-\rho^2)^2 trFGFP\right]+O(T^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\left[-trAP+(2-\rho^2)\,trFP+(1-\rho^2)\,tr\Gamma P-2(1-\rho^2)^2 trF_1P\right]+O(T^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\left[-r+(2-\rho^2)f+(1-\rho^2)\Gamma_*-2(1-\rho^2)^2 f_1\right]+O(T^{-1}) . \qquad (\Gamma.94)$$

Από την (Γ.93) παίρνουμε

$$trC_{\rho\rho}P= \frac{1}{\rho^2}\left[trFP-\rho\ trA_\rho P+\alpha\ tr(\Gamma P-2\alpha FGFP)\right]+O(T^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\,trFP- \frac{1}{\rho}\,trA_\rho P+\frac{\alpha}{\rho^2}\,tr\Gamma P-2\frac{\alpha^2}{\rho^2}\,trFGFP+O(T^{-1}) . \qquad (\Gamma.95)$$

(II) (v) $D_{\rho\rho}=A_\rho PA_\rho/2 \Rightarrow trD_{\rho\rho}P=tr(A_\rho PA_\rho/2)P=trA_\rho PA_\rho P/2=$

$$= \frac{1}{2\rho^2}(trAP-2\alpha\ trAPFP+\alpha^2 trFPFP)+O(T^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{2\rho^2}\,trAP- \frac{\alpha}{\rho^2}\,trFP+ \frac{\alpha^2}{2\rho^2}\,trFPFP+O(T^{-1}) =$$

$$= \frac{1}{2\rho^2}\left[r-2(1-\rho^2)f+(1-\rho^2)^2 f_2\right]+O(T^{-1}) , \qquad (\Gamma.96)$$

λόγω της (Γ.90).

QED

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΗΣ ΠΡΟΤΑΣΗΣ 3.1:</u> Αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα του Λήμματος Γ.4 στις (2.13) και (2.28) βρίσκουμε τα επόμενα αποτελέσματα:

(i) $l=l_\rho=e'GA_\rho Ge/e'Ge=h'G\left[(A-\alpha F)/\rho+O(\tau^2)\right]Gh=$

$$=h'GAGh/\rho-\alpha h'GFGh/\rho+O(\tau^2)=e'Ge/e'Ge\rho-\alpha h'GFGh/\rho+O(\tau^2)=$$

$$= \frac{1}{\rho}-\frac{\alpha}{\rho}\,h'GFGh+O(\tau^2) . \qquad (\Gamma.97)$$

(ii) $L=l_{\rho\rho}=e'GC_{\rho\rho}Ge/e'Ge=h'G\left[\frac{1}{\rho^2}[F-\rho A_\rho+\alpha(\Gamma-2\alpha FGF)]+O(\tau^2)\right]Gh=$

$=h'GFGh/\rho^2-h'GA_\rho Gh/\rho+\alpha h'G(\Gamma-2\alpha FGF)Gh/\rho^2+O(\tau^2)=$

$$=\frac{1}{\rho^2}h'GFGh-\frac{l}{\rho}+\frac{\alpha}{\rho^2}h'G(\Gamma-2\alpha FGF)Gh+O(\tau^2). \qquad (\Gamma.98)$$

Αλλά από την (Γ.97) παίρνουμε

$$\rho l=1-\alpha h'GFGh+O(\tau^2)\Rightarrow h'GFGh=\frac{1-\rho l}{\alpha}+O(\tau^2). \qquad (\Gamma.99)$$

Οι (Γ.98) και (Γ.99) συνεπάγονται ότι

$$L=\frac{1-\rho l}{\alpha\rho^2}-\frac{l}{\rho}+\frac{\alpha}{\rho^2}h'G(\Gamma-2\alpha FGF)Gh+O(\tau^2). \qquad (\Gamma.100)$$

(iii) $c=trA_\rho P=trAP/\rho-\alpha\, tr(FP)/\rho+O(\tau^2)=$

$$=\frac{r}{\rho}-\frac{\alpha}{\rho}tr(FP)+O(\tau^2). \qquad (\Gamma.101)$$

(iv) $C=trC_{\rho\rho}P=\frac{1}{\rho^2}trFP-\frac{1}{\rho}trA_\rho P+\frac{\alpha}{\rho^2}tr\Gamma P-2\frac{\alpha^2}{\rho^2}trFGFP+O(\tau^2)=$

$$=\frac{1}{\rho^2}trFP-\frac{c}{\rho}+\frac{\alpha}{\rho^2}tr\Gamma P-2\frac{\alpha^2}{\rho^2}trFGFP+O(\tau^2). \qquad (\Gamma.102)$$

Αλλά από την (Γ.101) έπεται ότι

$$\frac{\alpha}{\rho}trFP=\frac{r-\rho c}{\rho}+O(\tau^2)\Rightarrow\frac{1}{\rho^2}trFP=\frac{r-\rho c}{\alpha\rho^2}+O(\tau^2). \qquad (\Gamma.103)$$

Από τις (Γ.102) και (Γ.103) έπεται ότι

$$C=\frac{r-\rho c}{\alpha\rho^2}-\frac{c}{\rho}+\frac{\alpha}{\rho^2}tr\Gamma P-2\frac{\alpha^2}{\rho^2}trFGFP+O(\tau^2). \qquad (\Gamma.104)$$

(v) $D=trD_{\rho\rho}P=trAP/2\rho^2-\alpha\, trFP/\rho^2+\alpha^2 trFPFP/2\rho^2+O(\tau^2)=$

$$=\frac{r}{2\rho^2}-\frac{\alpha}{\rho^2}trFP+\frac{\alpha^2}{2\rho^2}trFPFP+O(\tau^2). \qquad (\Gamma.105)$$

Από τις (Γ.103) και (Γ.105) παίρνουμε

$$D=\frac{r}{2\rho^2}-\frac{r-\rho c}{\rho^2}+\frac{\alpha^2}{2\rho^2}trFPFP+O(\tau^2)=$$

$$=\frac{c}{\rho}-\frac{r}{2\rho^2}+\frac{\alpha^2}{2\rho^2}tr(FP)^2+O(\tau^2). \qquad (\Gamma.106)$$

QED

<u>ΛΗΜΜΑ Γ.5:</u> Χρησιμοποιώντας τα Λήμματα Γ.1, Γ.2, Γ.3 και Γ.4 και τους ορισμούς του υποδείγματός μας για την περίπτωση της

αυτοσυσχέτισης πρώτου βαθμού μπορούμε να αποδείξουμε τα επόμενα αποτελέσματα:

$$\text{(I)}\quad \mathrm{tr}\Omega_1\Omega^{-1}=\mathrm{tr}(I-R)/\rho=0,\quad \mathrm{tr}\Omega^{-1}\Delta=2/\alpha,\quad \mathrm{tr}\Omega_2\Omega^{-1}=2\rho/\alpha. \tag{Γ.107}$$

(II) Για $i=1,2,\rho$

$$\mathrm{tr}\Omega^{-1}\Omega_i\Omega^{-1}=-2\rho T/\alpha^2+O(1),$$

$$\mathrm{tr}(\Omega_i\Omega^{-1})^2=2T/\alpha+O(1),$$

$$\mathrm{tr}\Omega^{-1}(\Omega_i\Omega^{-1})^2=2(2\rho^2-1)T/\alpha^3+O(1),$$

$$\mathrm{tr}(\Omega_i\Omega^{-1})^3=2(2-3\rho^2)T/\rho\alpha^2+O(1), \tag{Γ.108}$$

$$\mathrm{tr}P_x\Omega_i=(\mathrm{tr}AB-n\alpha)/\rho+O(\tau^2),$$

$$\mathrm{tr}P_x\Omega_i\Omega^{-1}=(n-\mathrm{tr}B\Gamma)/\rho+O(\tau^2),$$

$$\mathrm{tr}P_x\Omega_iP_x\Omega^{-1}=(\mathrm{tr}AB\Gamma B/\alpha-\mathrm{tr}B\Gamma)/\rho+O(\tau^2).$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ:</u>

(I) Από τους ορισμούς (3.4) και (Γ.49) και τα Λήμματα Γ.1, Γ.2 και Γ.3 βρίσκουμε τα ακόλουθα:

(i) $\Omega_1\Omega^{-1}=(I-R)/\rho \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathrm{tr}\Omega_1\Omega^{-1}=\mathrm{tr}(I-R)/\rho=(\mathrm{tr}I-\mathrm{tr}R)/\rho=(T-T)/\rho=0. \tag{Γ.109}$$

$$\text{(ii)}\quad \mathrm{tr}\Omega^{-1}\Delta=\mathrm{tr}R\Delta/\alpha=\mathrm{tr}\Delta R/\alpha=\mathrm{tr}E/\alpha=2/\alpha. \tag{Γ.110}$$

$$\text{(iii)}\quad \mathrm{tr}\Omega_2\Omega^{-1}=\mathrm{tr}(\Omega_1+\rho\Delta)\Omega^{-1}=\mathrm{tr}\Omega_1\Omega^{-1}+\rho\ \mathrm{tr}\Delta\Omega^{-1}=0+\rho\ \mathrm{tr}\Omega^{-1}\Delta/\alpha=$$

$$=2\rho/\alpha. \tag{Γ.111}$$

(II) Από το Λήμμα Γ.2 γνωρίζουμε ότι τα ίχνη (traces) των μητρών E, Z, $\mathcal{H}$, Θ, Φ, Ψ είναι φραγμένα, δηλαδή είναι τάξης O(1). Επίσης έχουμε ήδη αποδείξει στο Λήμμα Γ.4 ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$X'X/T=O(\tau^2),\quad X'\Delta X/T=O(\tau^2),\quad X'RX/T=O(\tau^2),$$
$$X'\Delta RX/T=O(\tau^2),\ X'R\Delta X/T=O(\tau^2),\ X'\Delta R\Delta X/T=O(\tau^2). \tag{Γ.112}$$

Από τα Λήμματα Γ.1, Γ.2, Γ.3 και Γ.4 και την (Γ.112) αποδεικνύουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

(i) (a) Για $i=1$ έχουμε

$$\Omega^{-1}\Omega_1\Omega^{-1}=\Omega^{-1}(\Omega_1\Omega^{-1})=\frac{1}{\alpha}\,R\,\frac{1}{\rho}(I-R)=\frac{1}{\alpha\rho}(R-R^2). \tag{Γ.113}$$

Συνεπώς,

$$tr\Omega^{-1}\Omega_1\Omega^{-1}=tr\left[\frac{1}{\alpha\rho}(R-R^2)\right]=\frac{1}{\alpha\rho}(trR-trR^2)=$$

$$=\frac{1}{\alpha\rho}\left[T-(1+\rho^2)T/(1-\rho^2)+o(1)\right]=\frac{T}{\alpha\rho}\,\frac{1-\rho^2-1-\rho^2}{1-\rho^2}+o(1)=$$

$$=-2\rho^2T/\rho(1-\rho^2)^2+o(1)=-2\rho T/\alpha^2+O(1)\,. \qquad (\Gamma.114)$$

(i) (b) Για i=2 έχουμε

$$\Omega^{-1}\Omega_2\Omega^{-1}=\Omega^{-1}(\Omega_1+\rho\Delta)\Omega^{-1}=\Omega^{-1}\Omega_1\Omega^{-1}+\rho\Omega^{-1}\Delta\Omega^{-1}=$$

$$=\Omega^{-1}\Omega_1\Omega^{-1}+(\rho/\alpha^2)R\Delta R=\Omega^{-1}\Omega_1\Omega^{-1}+(\rho/\alpha^2)Z\,. \qquad (\Gamma.115)$$

Επομένως,

$$tr\Omega^{-1}\Omega_2\Omega^{-1}=tr\left[\Omega^{-1}\Omega_1\Omega^{-1}+(\rho/\alpha^2)Z\right]=tr\Omega^{-1}\Omega_1\Omega^{-1}+(\rho/\alpha^2)trZ=$$

$$=-2\rho T/\alpha^2+O(1)\,. \qquad (\Gamma.116)$$

(i) (c) Για i=ρ και εργαζόμενοι όπως στο (i) (b) βρίσκουμε

$$\Omega^{-1}\Omega_\rho\Omega^{-1}=\Omega^{-1}(\Omega_1-\rho\Delta)\Omega^{-1}=\Omega^{-1}\Omega_1\Omega^{-1}-(\rho/\alpha^2)Z\,. \qquad (\Gamma.117)$$

Άρα,

$$tr\Omega^{-1}\Omega_\rho\Omega^{-1}=tr\left[\Omega^{-1}\Omega_1\Omega^{-1}-(\rho/\alpha^2)Z\right]=tr\Omega^{-1}\Omega_1\Omega^{-1}-(\rho/\alpha^2)trZ=$$

$$=-2\rho T/\alpha^2+O(1)\,. \qquad (\Gamma.118)$$

(ii) (a) Για i=1 έχουμε

$$(\Omega_1\Omega^{-1})^2=(\Omega_1\Omega^{-1})(\Omega_1\Omega^{-1})=\frac{1}{\rho}(I-R)\frac{1}{\rho}(I-R)=\frac{1}{\rho^2}(I-2R+R^2)\,. \qquad (\Gamma.119)$$

Συνεπώς,

$$tr(\Omega_1\Omega^{-1})^2=tr\left[\frac{1}{\rho^2}(I-2R+R^2)\right]=\frac{1}{\rho^2}(trI-2trR+trR^2)=$$

$$=\frac{1}{\rho^2}\left[T-2T+(1+\rho^2)T/(1-\rho^2)+o(1)\right]=\frac{T}{\rho^2}\,\frac{-1+\rho^2+1+\rho^2}{1-\rho^2}+o(1)=$$

$$=2\rho^2T/\rho^2(1-\rho^2)+o(1)=2T/\alpha+O(1)\,. \qquad (\Gamma.120)$$

(ii) (b) Για i=2 έχουμε

$$\Omega_2\Omega^{-1}=(\Omega_1+\rho\Delta)\Omega^{-1}=\Omega_1\Omega^{-1}+\rho\Delta\Omega^{-1}=\Omega_1\Omega^{-1}+\frac{\rho}{\alpha}\Delta R\,. \qquad (\Gamma.121)$$

Η (Γ.121) συνεπάγεται ότι

$$(\Omega_2\Omega^{-1})^2=(\Omega_2\Omega^{-1})(\Omega_2\Omega^{-1})=(\Omega_1\Omega^{-1}+\frac{\rho}{\alpha}\Delta R)(\Omega_1\Omega^{-1}+\frac{\rho}{\alpha}\Delta R)=$$

$$=(\Omega_1\Omega^{-1})^2+(\rho/\alpha)\Omega_1\Omega^{-1}\Delta R+(\rho/\alpha)\Delta R\Omega_1\Omega^{-1}+(\rho^2/\alpha^2)(\Delta R)^2=$$

$$=(\Omega_1\Omega^{-1})^2+(\rho/\rho\alpha)(I-R)\Delta R+(\rho/\rho\alpha)\Delta R(I-R)+(\rho^2/\alpha^2)(\Delta R)^2=$$

$$=(\Omega_1\Omega^{-1})^2+(1/\alpha)\,(\Delta R-R\Delta R)+(1/\alpha)\,(\Delta R-\Delta RR)+(\rho^2/\alpha^2)\,(\Delta R)^2=$$

$$=(\Omega_1\Omega^{-1})^2+(2/\alpha)\,E-(1/\alpha)\,Z-(1/\alpha)\,\Delta RR+(\rho^2/\alpha^2)\,\mathscr{E}. \qquad (\Gamma.122)$$

Επιπλέον,

$$tr\Delta RR=trR\Delta R=trZ. \qquad (\Gamma.123)$$

Συνδυάζοντας τις (Γ.122) και(Γ.123) βρίσκουμε

$$tr(\Omega_2\Omega^{-1})^2=tr\left[(\Omega_1\Omega^{-1})^2+(2/\alpha)\,E-(1/\alpha)\,Z-(1/\alpha)\,\Delta RR+(\rho^2/\alpha^2)\,\mathscr{E}\right]=$$

$$=tr(\Omega_1\Omega^{-1})^2+(2/\alpha)\,trE-(2/\alpha)\,trZ+(\rho^2/\alpha^2)\,tr\mathscr{E}=$$

$$=2T/\alpha+O(1). \qquad (\Gamma.124)$$

(ii) (c) Για i=ρ από το Λήμμα Γ.3 έχουμε

$$tr(\Omega_\rho\Omega^{-1})^2/T=2/(1-\rho^2)+O(T^{-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tr(\Omega_\rho\Omega^{-1})^2=2T/\alpha+O(1). \qquad (\Gamma.125)$$

(iii) (a) Από την (Γ.119) έπεται ότι για i=1 ισχύει

$$\Omega^{-1}(\Omega_1\Omega^{-1})^2=\frac{1}{\alpha}\,R\,\frac{1}{\rho^2}(I-2R+R^2)=\frac{1}{\alpha\rho^2}(R-2R^2+R^3). \qquad (\Gamma.126)$$

Συνεπώς,

$$tr\Omega^{-1}(\Omega_1\Omega^{-1})^2=tr\left[\frac{1}{\alpha\rho^2}(R-2R^2+R^3)\right]=\frac{1}{\alpha\rho^2}(trR-2trR^2+trR^3)=$$

$$=\frac{1}{\alpha\rho^2}\left[T-2(1+\rho^2)\,T/(1-\rho^2)+(1+\rho^4)\,T/(1-\rho^2)^2+o(1)\right]=$$

$$=\frac{T}{\alpha\rho^2}\,\frac{1-2\rho^2+\rho^4-2+2\rho^4+1+\rho^4}{(1-\rho^2)^2}+o(1)=$$

$$=(4\rho^4-2\rho^2)\,T/\rho^2(1-\rho^2)^3+o(1)=2\rho^2(2\rho^2-1)\,T/\rho^2(1-\rho^2)^3+o(1)=$$

$$=2(2\rho^2-1)\,T/\alpha^3+O(1). \qquad (\Gamma.127)$$

(iii) (b) Για i=2 και κάνοντας χρήση της (Γ.122) έχουμε

$$\Omega^{-1}(\Omega_2\Omega^{-1})^2=\Omega^{-1}\left[(\Omega_1\Omega^{-1})^2+(2/\alpha)\,E-(1/\alpha)\,Z-(1/\alpha)\,\Delta RR+(\rho^2/\alpha^2)\,\mathscr{E}\right]=$$

$$=\Omega^{-1}(\Omega_i\Omega^{-1})^2+(2/\alpha)\,\Omega^{-1}\Delta R-(1/\alpha)\,\Omega^{-1}R\Delta R-(1/\alpha)\,\Omega^{-1}\Delta R^2+(\rho^2/\alpha^2)\,\Omega^{-1}(\Delta R)^2=$$

$$=\Omega^{-1}(\Omega_1\Omega^{-1})^2+(2/\alpha^2)\,R\Delta R-(1/\alpha^2)\,R^2\Delta R-(1/\alpha^2)\,R\Delta R^2+(\rho^2/\alpha^3)\,R(\Delta R)^2=$$

$$=\Omega^{-1}(\Omega_1\Omega^{-1})^2+(2/\alpha^2)\,Z-(1/\alpha^2)\,R^2\Delta R-(1/\alpha^2)\,R\Delta R^2+(\rho^2/\alpha^3)\,\Theta. \qquad (\Gamma.128)$$

Επιπλέον,

$$trR^2\Delta R=trR\Delta R^2=tr\Delta R^3=tr\Psi. \qquad (\Gamma.129)$$

Από τις (Γ.128) και (Γ.129) βρίσκουμε

$$tr\Omega^{-1}(\Omega_2\Omega^{-1})^2=$$

$$=tr\left[\Omega^{-1}(\Omega_1\Omega^{-1})^2+(2/\alpha^2)Z-(1/\alpha^2)R^2\Delta R-(1/\alpha^2)R\Delta R^2+(\rho^2/\alpha^3)\Theta\right]=$$

$$=tr\Omega^{-1}(\Omega_1\Omega^{-1})^2+(2/\alpha^2)trZ-(2/\alpha^2)tr\Psi+(\rho^2/\alpha^3)tr\Theta=$$

$$=2(2\rho^2-1)T/\alpha^3+O(1). \qquad (\Gamma.130)$$

(iii) (c) Για i=ρ και εργαζόμενοι όπως στο (ii) (b) βρίσκουμε

$$\Omega_\rho\Omega^{-1}=(\Omega_1-\rho\Delta)\Omega^{-1}=\Omega_1\Omega^{-1}-\rho\Delta\Omega^{-1}=\Omega_1\Omega^{-1}-\frac{\rho}{\alpha}\Delta R, \qquad (\Gamma.131)$$

η οποία συνεπάγεται ότι

$$(\Omega_\rho\Omega^{-1})^2=(\Omega_\rho\Omega^{-1})(\Omega_\rho\Omega^{-1})=(\Omega_1\Omega^{-1}-\frac{\rho}{\alpha}\Delta R)(\Omega_1\Omega^{-1}-\frac{\rho}{\alpha}\Delta R)=$$

$$=(\Omega_1\Omega^{-1})^2-(2/\alpha)E+(1/\alpha)Z+(1/\alpha)\Delta RR+(\rho^2/\alpha^2)\mathscr{K}. \qquad (\Gamma.132)$$

Εργαζόμενοι όπως στην περίπτωση (iii) (b) παίρνουμε

$$\Omega^{-1}(\Omega_\rho\Omega^{-1})^2=\Omega^{-1}\left[(\Omega_1\Omega^{-1})^2-(2/\alpha)E+(1/\alpha)Z+(1/\alpha)\Delta RR+(\rho^2/\alpha^2)\mathscr{K}\right]=$$

$$=\Omega^{-1}(\Omega_1\Omega^{-1})^2-(2/\alpha^2)Z+(1/\alpha^2)R^2\Delta R+(1/\alpha^2)R\Delta R^2+(\rho^2/\alpha^3)\Theta. \qquad (\Gamma.133)$$

Από τις (Γ.129) και (Γ.133) έχουμε

$$tr\Omega^{-1}(\Omega_\rho\Omega^{-1})^2=$$

$$=tr\left[\Omega^{-1}(\Omega_1\Omega^{-1})^2-(2/\alpha^2)Z+(1/\alpha^2)R^2\Delta R+(1/\alpha^2)R\Delta R^2+(\rho^2/\alpha^3)\Theta\right]=$$

$$=tr\Omega^{-1}(\Omega_1\Omega^{-1})^2-(2/\alpha^2)trZ+(2/\alpha^2)tr\Psi+(\rho^2/\alpha^3)tr\Theta=$$

$$=2(2\rho^2-1)T/\alpha^3+O(1). \qquad (\Gamma.134)$$

(iv) (a) Για i=1 έχουμε

$$(\Omega_1\Omega^{-1})^3=(\Omega_1\Omega^{-1})(\Omega_1\Omega^{-1})^2=\frac{1}{\rho}(I-R)\frac{1}{\rho^2}(I-2R+R^2)=$$

$$=\frac{1}{\rho^3}(I-3R+3R^2-R^3). \qquad (\Gamma.135)$$

Συνεπώς,

$$tr(\Omega_1\Omega^{-1})^3=tr\left[\frac{1}{\rho^3}(I-3R+3R^2-R^3)\right]=\frac{1}{\rho^3}(trI-3trR+3trR^2-trR^3)=$$

$$=\frac{1}{\rho^3}\left[T-3T+3(1+\rho^2)T/(1-\rho^2)-(1+\rho^4)T/(1-\rho^2)^2+o(1)\right]=$$

$$=\frac{T}{\rho^3}\,\frac{-2+4\rho^2-2\rho^4+3-3\rho^4-1-\rho^4}{(1-\rho^2)^2}+o(1)=$$

$$=(4\rho^2-6\rho^4)\,T/\rho^3(1-\rho^2)^2+o(1)=2\rho^2(2-3\rho^2)\,T/\rho^3(1-\rho^2)^2+o(1)=$$

$$=2(2-3\rho^2)\,T/\rho\alpha^2+O(1)\,. \qquad (\Gamma.136)$$

(iv) (b) Για i=2 και χρησιμοποιώντας τις (Γ.121) και (Γ.122) βρίσκουμε

$$(\Omega_2\Omega^{-1})^3=(\Omega_2\Omega^{-1})^2(\Omega_2\Omega^{-1})=$$

$$=\left[(\Omega_1\Omega^{-1})^2+(2/\alpha)E-(1/\alpha)Z-(1/\alpha)\Delta RR+(\rho^2/\alpha^2)\mathscr{R}\right]\left[\Omega_1\Omega^{-1}+(\rho/\alpha)\Delta R\right]=$$

$$=\left[(\Omega_1\Omega^{-1})^2+(1/\alpha)(2\Delta R-R\Delta R-\Delta R^2)+(\rho^2/\alpha^2)(\Delta R)^2\right]\left[\Omega_1\Omega^{-1}+(\rho/\alpha)\Delta R\right]=$$

$$=(\Omega_1\Omega^{-1})^3+(\rho/\alpha)(\Omega_1\Omega^{-1})^2\Delta R+(1/\alpha)(2\Delta R-R\Delta R-\Delta R^2)\Omega_1\Omega^{-1}+$$

$$+(\rho/\alpha^2)(2\Delta R-R\Delta R-\Delta R^2)\Delta R+(\rho^2/\alpha^2)(\Delta R)^2\Omega_1\Omega^{-1}+(\rho^3/\alpha^3)(\Delta R)^3=$$

$$=(\Omega_1\Omega^{-1})^3+(\rho/\rho^2\alpha)(I-2R+R^2)\Delta R+(1/\rho\alpha)\left[2\Delta R-R\Delta R-\Delta R^2+(\rho^2/\alpha)(\Delta R)^2\right]\cdot$$

$$\cdot(I-R)+(\rho/\alpha^2)(2\Delta R-R\Delta R-\Delta R^2)\Delta R+(\rho^3/\alpha^3)(\Delta R)^3=$$

$$=(\Omega_1\Omega^{-1})^3+(1/\alpha\rho)\left[\Delta R-2R\Delta R+R^2\Delta R+2\Delta R-R\Delta R-\Delta R^2+(\rho^2/\alpha)(\Delta R)^2-2\Delta R^2+\right.$$

$$\left.+R\Delta R^2+\Delta R^3-(\rho^2/\alpha)(\Delta R)^2R\right]+(\rho/\alpha^2)\left[2(\Delta R)^2-R(\Delta R)^2-\Delta R^2\Delta R\right]+$$

$$+(\rho^3/\alpha^3)(\Delta R)^3=$$

$$=(\Omega_1\Omega^{-1})^3+(1/\alpha\rho)(3\Delta R-3R\Delta R-3\Delta R^2+R^2\Delta R+R\Delta R^2+\Delta R^3)+$$

$$+(\rho/\alpha^2)\left[3(\Delta R)^2-(\Delta R)^2R-R(\Delta R)^2-\Delta R^2\Delta R\right]+(\rho^3/\alpha^3)(\Delta R)^3\,. \qquad (\Gamma.137)$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τις (Γ.123) και (Γ.129) και τις σχέσεις

$$trR(\Delta R)^2=tr(\Delta R)^2R=tr\theta$$

και (Γ.138)

$$tr\Delta R^2\Delta R=tr\Delta R\Delta R^2=tr\Delta R\Delta RR=tr(\Delta R)^2R=tr\theta$$

βρίσκουμε

$$tr(\Omega_2\Omega^{-1})^3=tr\left[(\Omega_1\Omega^{-1})^3+(1/\alpha\rho)(3\Delta R-3R\Delta R-3\Delta R^2+R^2\Delta R+R\Delta R^2+\Delta R^3)+\right.$$

$$\left.+(\rho/\alpha^2)\left[3(\Delta R)^2-(\Delta R)^2R-R(\Delta R)^2-\Delta R^2\Delta R\right]+(\rho^3/\alpha^3)(\Delta R)^3\right]=$$

$$=tr(\Omega_1\Omega^{-1})^3+(3/\alpha\rho)(trE-2trZ+tr\Psi)+(3\rho/\alpha^2)(tr\mathscr{R}-tr\theta)+(\rho^3/\alpha^3)tr\Phi\,=$$

$$=2(2-3\rho^2)\,T/\rho\alpha^2+O(1)\,. \qquad (\Gamma.139)$$

(iv) (c) Για i=ρ από το Λήμμα Γ.3 έχουμε

$$tr(\Omega_\rho\Omega^{-1})^3/T=2(2-3\rho^2)/\rho(1-\rho^2)^2+O(T^{-1}) \Rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{tr}(\Omega_\rho \Omega^{-1})^3 = 2(2-3\rho^2)T/\rho\alpha^2 + O(1)\,. \qquad (\Gamma.140)$$

(v) (a) Για i=1 έχουμε

$$P_X \Omega_1 = P_X \frac{1}{\rho}(\Omega - \alpha I) = \frac{1}{\rho}(P_X \Omega - \alpha P_X)\,. \qquad (\Gamma.141)$$

Σημειώστε ότι

$$P_X = X(X'X)^{-1}X' \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{tr} P_X = \operatorname{tr} X(X'X)^{-1}X' = \operatorname{tr}(X'X)^{-1}X'X = \operatorname{tr} I_n = n. \qquad (\Gamma.142)$$

Από τις (Γ.141) και (Γ.142) έπεται ότι

$$\operatorname{tr} P_X \Omega_1 = \operatorname{tr}\left[\frac{1}{\rho}(P_X \Omega - \alpha P_X)\right] = (1/\rho)\left[\operatorname{tr} X(X'X)^{-1}X'\Omega - \alpha \operatorname{tr} P_X\right] =$$

$$= (1/\rho)\left[\operatorname{tr}(X'\Omega X/T)(X'X/T)^{-1} - \alpha \operatorname{tr} P_X\right] = (\operatorname{tr} AB - n\alpha)/\rho. \qquad (\Gamma.143)$$

(v) (b) Για i=2 έχουμε

$$P_X \Omega_2 = P_X(\Omega_1 + \rho\Delta) = P_X \Omega_1 + \rho P_X \Delta. \qquad (\Gamma.144)$$

Επομένως,

$$\operatorname{tr} P_X \Omega_2 = \operatorname{tr}(P_X \Omega_1 + \rho P_X \Delta) = \operatorname{tr} P_X \Omega_1 + \rho \operatorname{tr} X(X'X)^{-1}X'\Delta =$$

$$= \operatorname{tr} P_X \Omega_1 + \rho \operatorname{tr}(X'X/T)^{-1}(X'\Delta X/T) = (\operatorname{tr} AB - n\alpha)/\rho + O(\tau^2)\,. \qquad (\Gamma.145)$$

(v) (c) Για i=ρ έχουμε

$$P_X \Omega_\rho = P_X(\Omega_1 - \rho\Delta) = P_X \Omega_1 - \rho P_X \Delta. \qquad (\Gamma.146)$$

Εργαζόμενοι όπως στο (v) (b) βρίσκουμε

$$\operatorname{tr} P_X \Omega_\rho = \operatorname{tr} P_X \Omega_1 - \rho \operatorname{tr}(X'X/T)^{-1}(X'\Delta X/T) = (\operatorname{tr} AB - n\alpha)/\rho + O(\tau^2)\,. \qquad (\Gamma.147)$$

(vi) (a) Για i=1 έχουμε

$$P_X \Omega_1 \Omega^{-1} = P_X \frac{1}{\rho}(I - R) = \frac{1}{\rho}(P_X - P_X R)\,. \qquad (\Gamma.148)$$

Συνεπώς,

$$\operatorname{tr} P_X \Omega_1 \Omega^{-1} = \operatorname{tr}\left[\frac{1}{\rho}(P_X - P_X R)\right] = (1/\rho)\left[\operatorname{tr} P_X - \operatorname{tr} X(X'X)^{-1}X'R\right] =$$

$$= (1/\rho)\left[\operatorname{tr} P_X - \operatorname{tr}(X'X/T)^{-1}(X'RX/T)\right] = (n - \operatorname{tr} B\Gamma)/\rho. \qquad (\Gamma.149)$$

(vi) (b) Για i=2 έχουμε

$$P_X \Omega_2 \Omega^{-1} = P_X(\Omega_1 + \rho\Delta)\Omega^{-1} = P_X \Omega_1 \Omega^{-1} + \rho P_X \Delta \Omega^{-1}. \qquad (\Gamma.150)$$

Επομένως,

$$\operatorname{tr} P_X \Omega_2 \Omega^{-1} = \operatorname{tr}\left[P_X \Omega_1 \Omega^{-1} + \rho P_X \Delta \Omega^{-1}\right] = \operatorname{tr} P_X \Omega_1 \Omega^{-1} + (\rho/\alpha) \operatorname{tr} X(X'X)^{-1}X'\Delta R =$$

$$=\mathrm{tr}P_X\Omega_1\Omega^{-1}+(\rho/\alpha)\,\mathrm{tr}(X'X/T)^{-1}(X'\Delta RX/T)=$$

$$=(n-\mathrm{tr}B\Gamma)/\rho+O(\tau^2)\,. \qquad (\Gamma.151)$$

(vi) (c) Για $i=\rho$ έχουμε

$$P_X\Omega_\rho\Omega^{-1}=P_X(\Omega_1-\rho\Delta)\Omega^{-1}=P_X\Omega_1\Omega^{-1}-\rho P_X\Delta\Omega^{-1}\,. \qquad (\Gamma.152)$$

Εργαζόμενοι όπως στο (vi) (b) βρίσκουμε

$$\mathrm{tr}P_X\Omega_\rho\Omega^{-1}=\mathrm{tr}P_X\Omega_1\Omega^{-1}-(\rho/\alpha)\,\mathrm{tr}(X'X/T)^{-1}(X'\Delta RX/T)=$$

$$=(n-\mathrm{tr}B\Gamma)/\rho+O(\tau^2)\,. \qquad (\Gamma.153)$$

(vii) (a) Για $i=1$ έχουμε

$$P_X\Omega_1P_X\Omega^{-1}=P_X\,\frac{1}{\rho}(\Omega-\alpha I)P_X\,\frac{1}{\alpha}\,R=(1/\alpha\rho)(P_X\Omega P_XR-\alpha P_XR)\,, \qquad (\Gamma.154)$$

διότι η μήτρα P_X είναι ταυτοδύναμη. Συνεπώς,

$$\mathrm{tr}P_X\Omega_1P_X\Omega^{-1}=\mathrm{tr}\left[(1/\alpha\rho)(P_X\Omega P_XR-\alpha P_XR)\right]=$$

$$=(1/\alpha\rho)\left[\mathrm{tr}X(X'X)^{-1}X'\Omega X(X'X)^{-1}X'R-\alpha\,\mathrm{tr}X(X'X)^{-1}X'R\right]=$$

$$=(1/\alpha\rho)\left[\mathrm{tr}(X'X/T)^{-1}(X'\Omega X/T)(X'X/T)^{-1}(X'RX/T)-\right.$$

$$\left.-\alpha\,\mathrm{tr}(X'X/T)^{-1}(X'RX/T)\right]=$$

$$=(1/\alpha\rho)(\mathrm{tr}BAB\Gamma-\alpha\,\mathrm{tr}B\Gamma)=(\mathrm{tr}AB\Gamma B/\alpha-\mathrm{tr}B\Gamma)/\rho\,. \qquad (\Gamma.155)$$

(vii) (b) Για $i=2$ έχουμε

$$P_X\Omega_2P_X\Omega^{-1}=P_X(\Omega_1+\rho\Delta)P_X\Omega^{-1}=P_X\Omega_1P_X\Omega^{-1}+(\rho/\alpha)P_X\Delta P_XR\,. \qquad (\Gamma.156)$$

Επομένως,

$$\mathrm{tr}P_X\Omega_2P_X\Omega^{-1}=\mathrm{tr}\left[P_X\Omega_1P_X\Omega^{-1}+(\rho/\alpha)P_X\Delta P_XR\right]=$$

$$=\mathrm{tr}P_X\Omega_1P_X\Omega^{-1}+(\rho/\alpha)\,\mathrm{tr}X(X'X)^{-1}X'\Delta X(X'X)^{-1}X'R=$$

$$=\mathrm{tr}P_X\Omega_1P_X\Omega^{-1}+(\rho/\alpha)\,\mathrm{tr}(X'X/T)^{-1}(X'\Delta X/T)(X'X/T)^{-1}(X'RX/T)=$$

$$=(\mathrm{tr}AB\Gamma B/\alpha-\mathrm{tr}B\Gamma)/\rho+O(\tau^2)\,. \qquad (\Gamma.157)$$

(vii) (c) Για $i=\rho$ έχουμε

$$P_X\Omega_\rho P_X\Omega^{-1}=P_X(\Omega_1-\rho\Delta)P_X\Omega^{-1}=P_X\Omega_1P_X\Omega^{-1}-(\rho/\alpha)P_X\Delta P_XR\,. \qquad (\Gamma.158)$$

Εργαζόμενοι όπως στο (vii) (b) βρίσκουμε

$$\mathrm{tr}P_X\Omega_\rho P_X\Omega^{-1}=\mathrm{tr}P_X\Omega_1P_X\Omega^{-1}-(\rho/\alpha)\,\mathrm{tr}(X'X/T)^{-1}(X'\Delta X/T)(X'X/T)^{-1}(X'RX/T)=$$

$$=(\mathrm{tr}AB\Gamma B/\alpha-\mathrm{tr}B\Gamma)/\rho+O(\tau^2)\,. \qquad (\Gamma.159)$$

QED

ΛΗΜΜΑ Γ.6: Έστω $\tilde{\rho}_{LS}$ ο OLS εκτιμητής του ρ. Ο $\tilde{\rho}_{LS}$ έχει το ακόλουθο ανάπτυγμα:

$$\tilde{\rho}_{LS}=\rho+\tau(\rho_1+\tau\rho_2)+\omega(\tau^3)\,, \qquad (\Gamma.160)$$

όπου

$$\rho_1=-\alpha u'\Omega_2 u/2\sqrt{T}$$

και (Γ.161)

$$\rho_2=-(\alpha u'\bar{P}_X\Omega_2\bar{P}_X u/2-\alpha^2 u'uu'\Omega_2 u/2T)\,.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Για τον OLS εκτιμητή του ρ γράφουμε

$$\tilde{\rho}_{LS}=\sum_{t=2}^{T}\tilde{u}_t\tilde{u}_{t-1}\Big/\sum_{t=1}^{T}\tilde{u}_t^2=\sum_{t=1}^{T-1}\tilde{u}_t\tilde{u}_{t+1}\Big/\sum_{t=1}^{T}\tilde{u}_t^2=N/\mathcal{D}, \qquad (\Gamma.162)$$

όπου $\tilde{u}_t$ είναι τα OLS κατάλοιπα της εξίσωσης (3.1). Υπενθυμίζουμε ότι

$$u_t\sim N(0,1/\alpha)\,,\quad \alpha=1-\rho^2\,,\quad \sigma_u^2=\mathrm{Var}(u_t)=1/\alpha\quad (t=1,\ldots,T) \qquad (\Gamma.163)$$

και ότι η μήτρα D είναι η μήτρα της οποίας το (i,j)-στοιχείο είναι 1 αν $|i-j|=1$ και μηδέν οπουδήποτε αλλού. Τότε από την (Γ.162) έπεται ότι

$$N=\frac{1}{2}\,\tilde{u}'D\tilde{u}/T\sigma^2\sigma_u^2$$

και (Γ.164)

$$\mathcal{D}=\tilde{u}'\tilde{u}/T\sigma^2\sigma_u^2\,.$$

Έστω $\tilde{\beta}$ ο OLS εκτιμητής του β. Εφόσον

$$y=X\beta+\sigma u\,, \qquad (\Gamma.165)$$

έχουμε

$$\tilde{u}=y-X\tilde{\beta}=(\sigma u+X\beta-X\tilde{\beta})=\sigma\left[u-\tau\sqrt{T}\;X(\tilde{\beta}-\beta)/\sigma\right]=\sigma(u-\tau Xm)\,, \qquad (\Gamma.166)$$

όπου

$$m=\sqrt{T}(\tilde{\beta}-\beta)/\sigma=\sqrt{T}\left[(X'X)^{-1}X'y-\beta\right]/\sigma=\sqrt{T}\left[(X'X)^{-1}X'(X\beta+\sigma u)-\beta\right]/\sigma=$$

$$=\sqrt{T}(X'X)^{-1}X'u=(X'X/T)^{-1}X'u/\sqrt{T}. \qquad (\Gamma.167)$$

Χρησιμοποιώντας την (Γ.167) βρίσκουμε

$$X'u/\sqrt{T}=(X'X/T)m. \qquad (\Gamma.168)$$

Από την (Γ.166) παίρνουμε

$$\tilde{u}'D\tilde{u}/\sigma^2=\sigma^2(u-\tau Xm)'D(u-\tau Xm)/\sigma^2=$$

$$=u'Du-2m'(X'Du/\sqrt{T})+m'(X'DX/T)m. \qquad (\Gamma.169)$$

Από τις (Γ.164), (Γ.167) και (Γ.169) παίρνουμε

$$N=\tilde{u}'D\tilde{u}/2T\sigma^2\sigma_u^2=(\tilde{u}'D\tilde{u}/\sigma^2)/2T\sigma_u^2=$$

$$=u'Du/2T\sigma_u^2-2\left[u'X(X'X/T)^{-1}/\sqrt{T}\right](X'Du/\sqrt{T})/2T\sigma_u^2+$$

$$+\left[u'X(X'X/T)^{-1}/\sqrt{T}\right](X'DX/T)\left[(X'X/T)^{-1}X'u/\sqrt{T}\right]/2T\sigma_u^2=$$

$$=u'Du/2T\sigma_u^2+\tau^2(u'P_xDP_xu/2\sigma_u^2-u'P_xDu/\sigma_u^2)=$$

$$=\rho-\rho+u'Du/2T\sigma_u^2+\tau^2(u'P_xDP_xu/2-u'P_xDu)/\sigma_u^2=$$

$$=\rho+\tau\left[\sqrt{T}(u'Du/2T\sigma_u^2-\rho)\right]+\tau^2(u'P_xDP_xu/2-u'P_xDu)/\sigma_u^2=$$

$$=\rho+\tau N_1+\tau^2N_2, \qquad (\Gamma.170)$$

όπου

$$N_1=\sqrt{T}(\frac{1}{2}u'Du/T\sigma_u^2-\rho)=\sqrt{T}(\sum_{t=1}^{T-1}u_tu_{t+1}/T\sigma_u^2-\rho)$$

και (Γ.171)

$$N_2=(u'P_xDP_xu/2-u'P_xDu)/\sigma_u^2.$$

Όμοια, χρησιμοποιώντας τις (Γ.166), (Γ.167) και (Γ.168) βρίσκουμε

$$\tilde{u}'\tilde{u}/\sigma^2=\sigma^2(u-\tau Xm)'(u-\tau Xm)/\sigma^2=u'u-2m'X'u/\sqrt{T}+m'(X'X/T)m=$$

$$=u'u-2m'(X'X/T)m+m'(X'X/T)m=u'u-m'(X'X/T)m=$$

$$=u'u-(u'X/\sqrt{T})(X'X/T)^{-1}(X'X/T)(X'X/T)^{-1}(X'u/\sqrt{T})=$$

$$=u'u-u'P_xu. \qquad (\Gamma.172)$$

Από τις (Γ.164) και (Γ.172) παίρνουμε

$$\mathcal{D}=\tilde{u}'\tilde{u}/T\sigma^2\sigma_u^2=(\tilde{u}'\tilde{u}/\sigma^2)/T\sigma_u^2=u'u/T\sigma_u^2-\tau^2u'P_xu/\sigma_u^2=$$

$$=1-1+u'u/T\sigma_u^2-\tau^2u'P_xu/\sigma_u^2=1+\tau\left[\sqrt{T}(u'u/T\sigma_u^2-1)\right]-\tau^2u'P_xu/\sigma_u^2=$$

$$=1+\tau D_1-\tau^2D_2, \qquad (\Gamma.173)$$

όπου

$$D_1=\sqrt{T}(u'u/T\sigma_u^2-1), \quad D_2=u'P_xu/\sigma_u^2. \qquad (\Gamma.174)$$

Κάνοντας χρήση του Λήμματος Α.1 και της (Γ.173) βρίσκουμε

$$\mathcal{D}=1+\tau(D_1-\tau D_2) \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathcal{D}^{-1}=\left[1+\tau(D_1-\tau D_2)\right]^{-1}=1-\tau(D_1-\tau D_2)+\tau^2(D_1-\tau D_2)^2+\tau^3\omega(\tau^2)=$$

$$=1-\tau D_1+\tau^2(D_1^2+D_2)+\omega(\tau^3). \qquad (\Gamma.175)$$

Από τις (Γ.162), (Γ.170) και (Γ.175) παίρνουμε

$$\tilde{\rho}_{LS}=N\mathcal{D}^{-1}=(\rho+\tau N_1+\tau^2 N_2)\left[1-\tau D_1+\tau^2(D_1^2+D_2)+\omega(\tau^3)\right]=$$

$$=\rho-\tau\rho D_1+\tau^2\rho(D_1^2+D_2)+\tau N_1-\tau^2 N_1 D_1+\tau^3 N_1(D_1^2+D_2)+\tau^2 N_2-\tau^3 N_2 D_1+$$

$$+\tau^4 N_2(D_1^2+D_2)+\omega(\tau^3)=$$

$$=\rho-\tau(\rho D_1-N_1)+\tau^2\left[N_2-N_1 D_1+\rho(D_1^2+D_2)\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=\rho+\tau(\rho_1+\tau\rho_2)+\omega(\tau^3), \qquad (\Gamma.176)$$

όπου

$$\rho_1=-(\rho D_1-N_1)$$

και (Γ.177)

$$\rho_2=N_2-N_1 D_1+\rho(D_1^2+D_2).$$

Γνωρίζουμε ότι $\Omega_\rho=\partial\,\Omega/\partial\,\rho$. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς (3.6) και (Γ.49) παίρνουμε

$$\Omega_2=\Omega_\rho+2\rho\Delta=2\rho I-D-2\rho\Delta+2\rho\Delta=2\rho I-D. \qquad (\Gamma.178)$$

Στην συνέχεια θα εκφράσουμε τις ποσότητες ρ_1 και ρ_2 συναρτήσει του Ω_2. Από τις (Γ.163), (Γ.171), (Γ.174), (Γ.177) και (Γ.178) βρίσκουμε:

(i) $$\rho_1=-(\rho D_1-N_1)=-\left[\rho\sqrt{T}(u'u/T\sigma_u^2-1)-\sqrt{T}(u'Du/2T\sigma_u^2-\rho)\right]=$$

$$=-\sqrt{T}(2\rho u'u-u'Du)/2T\sigma_u^2=-u'(2\rho I-D)u/2\sqrt{T}\sigma_u^2=$$

$$=-\alpha u'\Omega_2 u/2\sqrt{T}. \qquad (\Gamma.179)$$

(ii) $$\rho_2=N_2-N_1 D_1+\rho(D_1^2+D_2)=N_2-N_1 D_1+\rho D_1^2+\rho D_2=N_2+\rho D_2+D_1(\rho D_1-N_1)=$$

$$=N_2+\rho D_2-D_1\left[-(\rho D_1-N_1)\right]=N_2+\rho D_2-D_1\rho_1. \qquad (\Gamma.180)$$

Από τις (Γ.171), (Γ.174) και (Γ.178) προκύπτει ότι

$$2\sigma_u^2(N_2+\rho D_2)=2\sigma_u^2\left[(u'P_X DP_X u/2-u'P_X Du)/\sigma_u^2+\rho u'P_X u/\sigma_u^2\right]=$$

$$=u'P_X DP_X u-2u'P_X Du+2\rho u'P_X u=$$

$$=u'(I-\bar{P}_X)D(I-\bar{P}_X)u-2u'(I-\bar{P}_X)Du+2\rho u'(I-\bar{P}_X)u=$$

$$=u'\bar{P}_x D\bar{P}_x u+u'Du-2u'\bar{P}_x Du-2u'Du+2u'\bar{P}_x Du+2\rho u'u-2\rho u'\bar{P}_x u=$$

$$=u'\bar{P}_x D\bar{P}_x u-2\rho u'\bar{P}_x u+2\rho u'u-u'Du=$$

$$=u'\bar{P}_x (D-2\rho I)\bar{P}_x u+u'(2\rho I-D)u=-u'\bar{P}_x\Omega_2\bar{P}_x u+u'\Omega_2 u, \qquad (\Gamma.181)$$

διότι η μήτρα $\bar{P}_x$ είναι ταυτοδύναμη. Από τις (Γ.163), (Γ.174), (Γ.179), (Γ.180) και (Γ.181) παίρνουμε

$$2\sigma_u^2\rho_2=2\sigma_u^2[(N_2+\rho D_2)-D_1\rho_1]=$$

$$=-u'\bar{P}_x\Omega_2\bar{P}_x u+u'\Omega_2 u+2\sigma_u^2\sqrt{T}(u'u/T\sigma_u^2-1)\alpha u'\Omega_2 u/2\sqrt{T}=$$

$$=-u'\bar{P}_x\Omega_2\bar{P}_x u+u'\Omega_2 u+u'uu'\Omega_2 u/T\sigma_u^2-u'\Omega_2 u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_2=-u'\bar{P}_x\Omega_2\bar{P}_x u/2\sigma_u^2+u'uu'\Omega_2 u/2T\sigma_u^2\sigma_u^2=$$

$$=-(\alpha u'\bar{P}_x\Omega_2\bar{P}_x u/2-\alpha^2 u'uu'\Omega_2 u/2T). \qquad (\Gamma.182)$$

ΩΕD

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΗΣ ΠΡΟΤΑΣΗΣ 3.2:

(a) Στην περίπτωση της αυτοσυσχέτισης πρώτου βαθμού το διάνυσμα παραμέτρων γ είναι βαθμωτό μέγεθος και ισχύει η σχέση

$$\gamma=\rho. \qquad (\Gamma.183)$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Β.4, την (Γ.183) και το γεγονός ότι οι μήτρες Ω, Ω^{-1} και Ω_ρ είναι συμμετρικές, βρίσκουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$(i)\quad A=\partial vec\Omega/\partial\gamma'=\partial vec\Omega/\partial\rho=vec(\partial\Omega/\partial\rho)=vec\Omega_\rho. \qquad (\Gamma.184)$$

Επομένως,

$$A'(vec\Omega^{-1})=(vec\Omega_\rho)'(vec\Omega^{-1})=(vec\Omega_\rho')'(vec\Omega^{-1})=tr\Omega_\rho\Omega^{-1}. \qquad (\Gamma.185)$$

(ii) Όμοια αποδεικνύεται ότι

$$(vec\Omega^{-1})'A=tr\Omega_\rho\Omega^{-1}. \qquad (\Gamma.186)$$

$$(iii)\quad A'(\Omega^{-1}\otimes\Omega^{-1})A=(vec\Omega_\rho)'(\Omega^{-1}\otimes\Omega^{-1})(vec\Omega_\rho)=$$

$$=(vec\Omega_\rho')'[(\Omega^{-1})'\otimes\Omega^{-1}](vec\Omega_\rho)=tr\Omega_\rho\Omega^{-1}\Omega_\rho\Omega^{-1}=tr(\Omega_\rho\Omega^{-1})^2. \qquad (\Gamma.187)$$

Από το Λήμμα Β.4, το Λημμα Γ.3 και τις (Γ.185), (Γ.186) και (Γ.187) έπεται ότι

$$\begin{bmatrix}\lambda_o & \lambda'\\ \lambda & \Lambda\end{bmatrix}=\lim_{T\to\infty}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}tr\Omega_\rho\Omega^{-1}/T\\ -\frac{1}{2}tr\Omega_\rho\Omega^{-1}/T & \frac{1}{2}tr(\Omega_\rho\Omega^{-1})^2/T\end{bmatrix}^{-1}=$$

$$= \lim_{T\to\infty} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & O(T^{-1}) \\ O(T^{-1}) & \frac{1}{2}\,\frac{2}{(1-\rho^2)}+O(T^{-1}) \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \Lambda=\alpha,\ \lambda=0,\ \lambda_o=2. \qquad (\Gamma.188)$$

Το αποτέλεσμα (Γ.188) ισχύει για οποιονδήποτε ασυμπτωτικά αποτελεσματικό εκτιμητή του ρ.

(b) Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Γ.6 και τους ορισμούς του υποδείγματός μας βρίσκουμε ότι το δειγματοληπτικό σφάλμα του $\tilde{\rho}_{LS}$ είναι

$$\delta_*^{LS}=\sqrt{T}(\tilde{\rho}_{LS}-\rho)=(\tilde{\rho}_{LS}-\rho)/\tau=\left[\rho+\tau(\rho_1+\tau\rho_2)+\omega(\tau^3)-\rho\right]/\tau=$$

$$=\rho_1+\tau\rho_2+\omega(\tau^2). \qquad (\Gamma.189)$$

Από το Λήμμα Α.8, το Λήμμα Γ.5 και την (Γ.189) παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$(i)\quad E(u'\Omega_2 u)=tr\Omega_2\Omega^{-1}=2\rho/\alpha. \qquad (\Gamma.190)$$

$$(ii)\quad E(u'uu'\Omega_2 u)=(tr\Omega^{-1})(tr\Omega_2\Omega^{-1})+2(tr\Omega^{-1}\Omega_2\Omega^{-1})=$$

$$=(1/\alpha)(trR)(tr\Omega_2\Omega^{-1})+2(tr\Omega^{-1}\Omega_2\Omega^{-1})=$$

$$=(T/\alpha)(2\rho/\alpha)+2\left[-2\rho T/\alpha^2+O(1)\right]=2\rho T/\alpha^2-4\rho T/\alpha^2+O(1)=$$

$$=-2\rho T/\alpha^2+O(1). \qquad (\Gamma.191)$$

$$(iii)\quad E(u'\bar{P}_x\Omega_2\bar{P}_x u)=tr\bar{P}_x\Omega_2\bar{P}_x\Omega^{-1}=tr(I-P_x)\Omega_2(I-P_x)\Omega^{-1}=$$

$$=tr(\Omega_2\Omega^{-1}-\Omega_2P_x\Omega^{-1}-P_x\Omega_2\Omega^{-1}+P_x\Omega_2P_x\Omega^{-1})=$$

$$=tr\Omega_2\Omega^{-1}-2trP_x\Omega_2\Omega^{-1}+trP_x\Omega_2P_x\Omega^{-1}=$$

$$=2\rho/\alpha-2(n-trB\Gamma)/\rho+(trAB\Gamma B/\alpha-trB\Gamma)/\rho+O(\tau^2)=$$

$$=2\rho/\alpha-2n/\rho+2trB\Gamma/\rho+trAB\Gamma B/\alpha\rho-trB\Gamma/\rho+O(\tau^2)=$$

$$=(1/\rho\alpha)(2\rho^2-2n\alpha+\alpha\ trB\Gamma+trAB\Gamma B)+O(\tau^2)=$$

$$=(1/\rho\alpha)\left[2(\rho^2-n\alpha)+\alpha\ trB\Gamma+trAB\Gamma B\right]+O(\tau^2), \qquad (\Gamma.192)$$

διότι, εφόσον οι μήτρες Ω^{-1}, Ω_2 και P_x είναι συμμετρικές, έχουμε

$$tr\Omega_2P_x\Omega^{-1}=tr\Omega^{-1}\Omega_2P_x=tr(\Omega^{-1}\Omega_2P_x)'=trP_x\Omega_2\Omega^{-1}. \qquad (\Gamma.193)$$

Από το Λήμμα Γ.6 και τις (Γ.190), (Γ.191) και (Γ.192) έπεται ότι

$$E(\tilde{\rho}_{LS})=E\left[\rho+\tau(\rho_1+\tau\rho_2)+\bar{\omega}(\tau^3)\right]=\rho+\tau\left[E(\rho_1)+\tau E(\rho_2)\right]+O(\tau^3)=$$

$$=\rho+\tau\left[-(2\rho/\alpha)(\alpha/2\sqrt{T})+\tau\left[(\alpha^2/2T)(-2\rho T/\alpha^2)-(\alpha/2\rho\alpha)\left[2(\rho^2-n\alpha)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\alpha\ trB\Gamma+trAB\Gamma B\right]\right]\right]+O(\tau^3)=$$

$$=\rho-(\tau^2/2\rho)\left[2\rho^2+2\rho^2+2\left[\rho^2-n(1-\rho^2)\right]+\alpha\ trB\Gamma+trAB\Gamma B\right]+O(\tau^3)=$$

$$=\rho-(\tau^2/2\rho)(6\rho^2-2n+2n\rho^2+\alpha\ trB\Gamma+trAB\Gamma B)+O(\tau^3)=$$

$$=\rho-(\tau^2/2\rho)\left[2(n+3)\rho^2-2n+c_1\right]+O(\tau^3),\qquad(\Gamma.194)$$

όπου

$$c_1=\alpha\ trB\Gamma+trAB\Gamma B.\qquad(\Gamma.195)$$

Από τις (Γ.189) και (Γ.194) και τους ορισμούς του υποδείγματός μας βρίσκουμε ότι

$$\mu_{LS}=\lim_{T\to\infty}E(\sqrt{T}\delta_*^{LS})=\lim_{T\to\infty}E\left[T(\tilde{\rho}_{LS}-\rho)\right]=\lim_{T\to\infty}\left[E(\tilde{\rho}_{LS})-\rho\right]/\tau^2=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left[\rho-(\tau^2/2\rho)\left[2(n+3)\rho^2-2n+c_1\right]+O(\tau^3)-\rho\right]/\tau^2=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left[-(1/2\rho)\left[2(n+3)\rho^2-2n+c_1\right]+O(T^{-1/2})\right]=$$

$$=-\left[(n+3)\rho+(c_1-2n)/2\rho\right].\qquad(\Gamma.196)$$

(c) Ο επαναληπτικός Prais-Winsten εκτιμητής του ρ είναι (βλ. Magee (1985), σελ. 279-281):

$$\hat{\rho}_{PW}=\tilde{\rho}_{LS}-\tau^2\alpha\left[u'\bar{P}_X\Omega_2P_X\Sigma\Omega u+(1/2)u'\Omega\Sigma P_X\Omega_2P_X\Sigma\Omega u\right]+\omega(\tau^3),\qquad(\Gamma.197)$$

όπου

$$\Sigma=\Omega^{-1}-X(X'\Omega X)^{-1}X'=\left[I-X(X'\Omega X)^{-1}X'\Omega\right]\Omega^{-1}=M\Omega^{-1}.\qquad(\Gamma.198)$$

Ο επαναληπτικός Prais-Winsten εκτιμητής του ρ ισούται με τον GLS εκτιμητή του ρ, δηλαδή $\hat{\rho}_{PW}=\hat{\rho}_{GL}$. Το δειγματοληπτικό σφάλμα των δύο αυτών εκτιμητών είναι

$$\delta_*^{GL}=\delta_*^{PW}=\sqrt{T}(\hat{\rho}_{PW}-\rho)=$$

$$=\left[(\tilde{\rho}_{LS}-\rho)-\tau^2\alpha\left[u'\bar{P}_x\Omega_2P_x\Sigma\Omega u+(1/2)u'\Omega\Sigma P_x\Omega_2P_x\Sigma\Omega u\right]+\omega(\tau^3)\right]/\tau =$$

$$=\delta_*^{LS}-\tau\alpha\left[u'\bar{P}_x\Omega_2P_x\Sigma\Omega u+(1/2)u'\Omega\Sigma P_x\Omega_2P_x\Sigma\Omega u\right]+\omega(\tau^2)\,. \qquad (\Gamma.199)$$

Από την (Γ.198) συμπεραίνουμε ότι

$$\Sigma\Omega\Sigma=\left[\Omega^{-1}-X(X'\Omega X)^{-1}X'\right]\Omega\left[\Omega^{-1}-X(X'\Omega X)^{-1}X'\right]=$$

$$=\Omega^{-1}\Omega\Omega^{-1}-X(X'\Omega X)^{-1}\Omega\Omega^{-1}-\Omega^{-1}\Omega X(X'\Omega X)^{-1}X'+X(X'\Omega X)^{-1}X'\Omega X(X'\Omega X)^{-1}X'=$$

$$=\Omega^{-1}-2X(X'\Omega X)^{-1}X'+X(X'\Omega X)^{-1}X'=\Omega^{-1}-X(X'\Omega X)^{-1}X'=\Sigma. \qquad (\Gamma.200)$$

και

$$\Sigma\bar{P}_x=\left[\Omega^{-1}-X(X'\Omega X)^{-1}X'\right]\bar{P}_x=\Omega^{-1}\bar{P}_x-X(X'\Omega X)^{-1}X'\left[I-X(X'X)^{-1}X'\right]=$$

$$=\Omega^{-1}\bar{P}_x-X(X'\Omega X)^{-1}X'+X(X'\Omega X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}X'=$$

$$=\Omega^{-1}\bar{P}_x-X(X'\Omega X)^{-1}X'+X(X'\Omega X)^{-1}X'=\Omega^{-1}\bar{P}_x\,. \qquad (\Gamma.201)$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Α.8, το Λήμμα Γ.5 και τις (Γ.193), (Γ.200) και (Γ.201) βρίσκουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

(i) $E(u'\bar{P}_x\Omega_2P_x\Sigma\Omega u)=tr\bar{P}_x\Omega_2P_x\Sigma\Omega\Omega^{-1}=tr\Omega_2P_x\Sigma\bar{P}_x=tr\Omega_2P_x\Omega^{-1}\bar{P}_x=$

$$=tr\bar{P}_x\Omega_2P_x\Omega^{-1}=tr(I-P_x)\Omega_2P_x\Omega^{-1}=tr\Omega_2P_x\Omega^{-1}-trP_x\Omega_2P_x\Omega^{-1}=$$

$$=trP_x\Omega_2\Omega^{-1}-trP_x\Omega_2P_x\Omega^{-1}=(n-trB\Gamma)/\rho-(trAB\Gamma B/\alpha-trB\Gamma)/\rho+O(\tau^2)=$$

$$=(n-trB\Gamma-trAB\Gamma B/\alpha+trB\Gamma)/\rho+O(\tau^2)=(n-trAB\Gamma B/\alpha)/\rho+O(\tau^2)\,. \qquad (\Gamma.202)$$

(ii) $E(u'\Omega\Sigma P_x\Omega_2P_x\Sigma\Omega u)=tr\Omega\Sigma P_x\Omega_2P_x\Sigma\Omega\Omega^{-1}=trP_x\Omega_2P_x\Sigma\Omega\Sigma=trP_x\Omega_2P_x\Sigma=$

$$=trP_x\Omega_2P_x\left[\Omega^{-1}-X(X'\Omega X)^{-1}X'\right]=$$

$$=trP_x\Omega_2P_x\Omega^{-1}-trX(X'X)^{-1}X'\Omega_2X(X'X)^{-1}X'X(X'\Omega X)^{-1}X'=$$

$$=trP_x\Omega_2P_x\Omega^{-1}-trX'\Omega_2X(X'\Omega X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}=$$

$$=trP_x\Omega_2P_x\Omega^{-1}-trX'(\Omega_1+\rho\Delta)X(X'\Omega X)^{-1}=$$

$$=trP_x\Omega_2P_x\Omega^{-1}-trX'\Omega_1X(X'\Omega X)^{-1}-\rho trX'\Delta X(X'\Omega X)^{-1}=$$

$$=trP_x\Omega_2P_x\Omega^{-1}-(1/\rho)trX'(\Omega-\alpha I)X(X'\Omega X)^{-1}+O(1)=$$

$$=trP_x\Omega_2P_x\Omega^{-1}-(1/\rho)\left[trX'\Omega X(X'\Omega X)^{-1}-\alpha\ trX'X(X'\Omega X)^{-1}\right]+O(1)=$$

$$=trP_x\Omega_2P_x\Omega^{-1}-(1/\rho)\left[trI_n-\alpha\ tr(X'X/T)(X'\Omega X/T)^{-1}\right]+O(1)=$$

$$=(trAB\Gamma B/\alpha-trB\Gamma)/\rho-(n-\alpha\ trFG)/\rho+O(\tau^2)=$$

$$=-(n-trAB\Gamma B/\alpha)/\rho+(\alpha\ trFG-trB\Gamma)/\rho+O(\tau^2)\,, \qquad (\Gamma.203)$$

διότι από την απόδειξη του Λήμματος Γ.4 γνωρίζουμε ότι $X'\Delta X=O(1)$.

Από τις (Γ.197), (Γ.202) και (Γ.203) έπεται ότι

$$E(\hat{\rho}_{PW})=E\left[\tilde{\rho}_{LS}-\tau^2\alpha\left[u'\bar{P}_X\Omega_2P_X\Sigma\Omega u+(1/2)u'\Omega\Sigma P_X\Omega_2P_X\Sigma\Omega u\right]+\omega(\tau^3)\right]=$$

$$=E(\tilde{\rho}_{LS})-\tau^2\alpha\left[E(u'\bar{P}_X\Omega_2P_X\Sigma\Omega u)+(1/2)E(u'\Omega\Sigma P_X\Omega_2P_X\Sigma\Omega u)\right]+O(\tau^3)=$$

$$=E(\tilde{\rho}_{LS})-\tau^2\alpha\left[(n-trAB\Gamma B/\alpha)/\rho+(1/2)\left[-(n-trAB\Gamma B/\alpha)/\rho+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(\alpha\ trFG-trB\Gamma)/\rho\right]\right]+O(\tau^3)=$$

$$=E(\tilde{\rho}_{LS})-(\tau^2\alpha/2\rho)(n-trAB\Gamma B/\alpha+\alpha\ trFG-trB\Gamma)+O(\tau^3)=$$

$$=E(\tilde{\rho}_{LS})-(\tau^2/2\rho)\left[n\alpha-(trAB\Gamma B+\alpha\ trB\Gamma)+\alpha^2trFG\right]+O(\tau^3)=$$

$$=E(\tilde{\rho}_{LS})-(\tau^2/2\rho)(\alpha n-c_1+\alpha c_2)+O(\tau^3), \qquad (\Gamma.204)$$

όπου

$$c_1=trAB\Gamma B+\alpha\ trB\Gamma$$

και (Γ.205)

$$c_2=\alpha\ trFG.$$

Από τις (Γ.196), (Γ.199) και (Γ.204) και τους ορισμούς του υποδείγματός μας βρίσκουμε ότι

$$\mu_{GL}=\mu_{PW}=\lim_{T\to\infty}E(\sqrt{T}\delta_*^{PW})=\lim_{T\to\infty}E\left[T(\hat{\rho}_{PW}-\rho)\right]=\lim_{T\to\infty}\left[E(\hat{\rho}_{PW})-\rho\right]/\tau^2=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left[E(\tilde{\rho}_{LS})-\rho-(\tau^2/2\rho)(\alpha n-c_1+\alpha c_2)+O(\tau^3)\right]/\tau^2=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left[\left[E(\tilde{\rho}_{LS})-\rho\right]/\tau^2-(1/2\rho)(\alpha n-c_1+\alpha c_2)+O(T^{-1/2})\right]=$$

$$=\mu_{LS}-\alpha c_2/2\rho+(c_1-\alpha n)/2\rho. \qquad (\Gamma.206)$$

(d) Ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας του ρ είναι (βλ Beach και MacKinnon (1978), σελ. 52-54 και Magee (1985), σελ. 281-284):

$$\hat{\rho}_{ML}=\hat{\rho}_{PW}+\tau^2\left[\rho\alpha(u_1^2+u_T^2)-\rho\right]+\omega(\tau^3). \qquad (\Gamma.207)$$

Το δειγματοληπτικό σφάλμα του $\hat{\rho}_{ML}$ είναι

$$\delta_*^{ML}=\sqrt{T}(\hat{\rho}_{ML}-\rho)=\left[(\hat{\rho}_{PW}-\rho)+\tau^2\left[\rho\alpha(u_1^2+u_T^2)-\rho\right]+\omega(\tau^3)\right]/\tau=$$

$$=\delta_*^{PW}+\tau\left[\rho\alpha(u_1^2+u_T^2)-\rho\right]+\omega(\tau^2). \qquad (\Gamma.208)$$

Από τους ορισμούς του υποδείγματός μας έπεται ότι $E(u_t^2)=1/\alpha$. Συνεπώς,

$$E(u_1^2+u_T^2)=E(u_1^2)+E(u_T^2)=1/\alpha+1/\alpha=2/\alpha. \qquad (\Gamma.209)$$

Οι (Γ.207) και (Γ.209) συνεπάγονται ότι

$$E(\hat{\rho}_{ML})=E\left[\hat{\rho}_{PW}+\tau^2\left[\rho\alpha(u_1^2+u_T^2)-\rho\right]+\omega(\tau^3)\right]=$$

$$=E(\hat{\rho}_{PW})+\tau^2\left[\rho\alpha E(u_1^2+u_T^2)-\rho\right]+O(\tau^3)=E(\hat{\rho}_{PW})+\tau^2(\rho\alpha 2/\alpha-\rho)+O(\tau^3)=$$

$$=E(\hat{\rho}_{PW})+\tau^2\rho+O(\tau^3). \qquad (\Gamma.210)$$

Από τις (Γ.206), (Γ.208) και (Γ.210) βρίσκουμε

$$\mu_{ML}=\lim_{T\to\infty}E(\sqrt{T}\delta_*^{ML})=\lim_{T\to\infty}E\left[T(\hat{\rho}_{ML}-\rho)\right]=\lim_{T\to\infty}\left[E(\hat{\rho}_{ML})-\rho\right]/\tau^2=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left[E(\hat{\rho}_{PW})-\rho+\tau^2\rho+O(\tau^3)\right]/\tau^2=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left[\left[E(\hat{\rho}_{PW})-\rho\right]/\tau^2+\rho+O(T^{-1/2})\right]=$$

$$=\mu_{PW}+\rho=\mu_{GL}+\rho. \qquad (\Gamma.211)$$

(e) Ο Durbin-Watson εκτιμητής του ρ είναι

$$\hat{\rho}_{DW}=1-d/2, \qquad (\Gamma.212)$$

όπου d είναι το στατιστικό Durbin-Watson. Γνωρίζουμε ότι

$$d=\frac{\sum_{t=2}^{T}(\tilde{u}_t-\tilde{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T}\tilde{u}_t^2}=$$

$$=\frac{\sum_{t=2}^{T}(\tilde{u}_t^2+\tilde{u}_{t-1}^2-2\tilde{u}_t\tilde{u}_{t-1})}{\sum_{t=1}^{T}\tilde{u}_t^2}=\frac{\sum_{t=2}^{T}\tilde{u}_t^2+\sum_{t=2}^{T}\tilde{u}_{t-1}^2-2\sum_{t=2}^{T}\tilde{u}_t\tilde{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T}\tilde{u}_t^2}=$$

$$=\frac{\sum_{t=1}^{T}\tilde{u}_t^2-\tilde{u}_1^2+\sum_{t=1}^{T}\tilde{u}_t^2-\tilde{u}_T^2-2\sum_{t=2}^{T}\tilde{u}_t\tilde{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T}\tilde{u}_t^2}. \qquad (\Gamma.213)$$

διότι

$$\sum_{t=1}^{T}\tilde{u}_t^2=(\tilde{u}_1^2+\tilde{u}_2^2+\ldots+\tilde{u}_{T-1}^2)+\tilde{u}_T^2=\sum_{t=1}^{T-1}\tilde{u}_t^2+\tilde{u}_T^2=\sum_{t=2}^{T}\tilde{u}_{t-1}^2+\tilde{u}_T^2. \qquad (\Gamma.214)$$

Από τις (Γ.212) και (Γ.213) έπεται ότι

$$d=\frac{2\sum_{t=1}^{T}\tilde{u}_t^2-(2\sum_{t=2}^{T}\tilde{u}_t\tilde{u}_{t-1}+\tilde{u}_1^2+\tilde{u}_T^2)}{\sum_{t=1}^{T}\tilde{u}_t^2}=2-\frac{2\sum_{t=2}^{T}\tilde{u}_t\tilde{u}_{t-1}+\tilde{u}_1^2+\tilde{u}_T^2}{\sum_{t=1}^{T}\tilde{u}_t^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\rho}_{DW}=1-d/2=1-\left[1-\frac{\sum_{t=2}^{T}\tilde{u}_t\tilde{u}_{t-1}+(\tilde{u}_1^2+\tilde{u}_T^2)/2}{\sum_{t=1}^{T}\tilde{u}_t^2}\right]=$$

$$=\frac{\sum_{t=2}^{T}\tilde{u}_t\tilde{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T}\tilde{u}_t^2}+\frac{(\tilde{u}_1^2+\tilde{u}_T^2)/2}{\sum_{t=1}^{T}\tilde{u}_t^2}=\tilde{\rho}_{LS}+\frac{(\tilde{u}_t^2+\tilde{u}_T^2)/2T\sigma^2\sigma_u^2}{\sum_{t=1}^{T}\tilde{u}_t^2/\,T\sigma^2\sigma_u^2}=$$

$$=\tilde{\rho}_{LS}+\frac{1}{2\,T}\frac{(\tilde{u}_1^2+\tilde{u}_T^2)\,(1/\sigma^2\sigma_u^2)}{(\sum_{t=1}^{T}\tilde{u}_t^2/T)\,(1/\sigma^2\sigma_u^2)}=\tilde{\rho}_{LS}+\frac{1}{2\,T}\frac{(\tilde{u}_1^2+\tilde{u}_T^2)/\sigma^2}{\sigma_u^2}+\omega(\tau^3)=$$

$$=\tilde{\rho}_{LS}+\tau^2\alpha(u_1^2+u_T^2)/2+\omega(\tau^3), \qquad (\Gamma.215)$$

διότι το $\tilde{u}_t$ είναι ένας συνεπής εκτιμητής του σu_t και το $\sum_{t=1}^{T}\tilde{u}_t^2/T$ είναι ένας συνεπής εκτιμητής του $\sigma^2\sigma_u^2$ με ένα σφάλμα τάξης $\omega(\tau^3)$. Το δειγματοληπτικό σφάλμα του $\hat{\rho}_{DW}$ είναι

$$\delta_*^{DW}=\sqrt{T}(\hat{\rho}_{DW}-\rho)=\left[(\hat{\rho}_{LS}-\rho)+\tau^2\alpha(u_1^2+u_T^2)/2+\omega(\tau^3)\right]/\tau=$$

$$=\delta_*^{LS}+\tau\alpha(u_1^2+u_T^2)/2+\omega(\tau^2). \qquad (\Gamma.216)$$

Από τις (Γ.209) και (Γ.215) παίρνουμε

$$E(\hat{\rho}_{DW})=E\left[\tilde{\rho}_{LS}+\tau^2\alpha(u_1^2+u_T^2)/2+\omega(\tau^3)\right]=E(\tilde{\rho}_{LS})+\tau^2\alpha E(u_1^2+u_T^2)/2+O(\tau^3)=$$

$$=E(\tilde{\rho}_{LS})+(\tau^2\alpha/2)\,(2/\alpha)+O(\tau^3)=E(\tilde{\rho}_{LS})+\tau^2+O(\tau^3). \qquad (\Gamma.217)$$

Χρησιμοποιώντας τις (Γ.216) και(Γ.217) βρίσκουμε

$$\mu_{DW}=\lim_{T\to\infty}E(\sqrt{T}\delta_*^{DW})=\lim_{T\to\infty}E\left[T(\hat{\rho}_{DW}-\rho)\right]=\lim_{T\to\infty}\left[E(\hat{\rho}_{DW})-\rho\right]/\tau^2=$$

$$= \lim_{T\longrightarrow\infty}\left[E(\tilde{\rho}_{LS})-\rho+\tau^2+O(\tau^3)\right]/\tau^2 = \lim_{T\longrightarrow\infty}\left[\left[E(\tilde{\rho}_{LS})-\rho\right]/\tau^2+1+O(T^{-1/2})\right] =$$

$$=\mu_{LS}+1. \qquad (\Gamma.218)$$

(f) Από το Λήμμα Γ.6 και τις σχέσεις (Γ.197), (Γ.207) και (Γ.215) έπεται ότι για όλους τους εκτιμητές του ρ που μελετήσαμε ισχύει η σχέση

$$\hat{\rho}=\rho+\tau\rho_1+\omega(\tau^2), \qquad (\Gamma.219)$$

όπου το $\hat{\rho}$ συμβολίζει τον εκτιμητή του ρ και

$$\rho_1= -\alpha u'\Omega_2 u/2\sqrt{T}. \qquad (\Gamma.220)$$

Οι (Γ.219) και (Γ.220) συνεπάγονται ότι

$$\hat{\rho}-\rho=\tau\rho_1+\omega(\tau^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{T}(\hat{\rho}-\rho)=(\hat{\rho}-\rho)/\tau=\rho_1+\omega(\tau)= -\alpha u'\Omega_2 u/2\sqrt{T}+\omega(\tau). \qquad (\Gamma.221)$$

Έστω $\Omega=P'P$. Η εξίσωση (3.1) μπορεί να μετασχηματιστεί ως εξής:

$$Py=PX\beta+P\sigma u. \qquad (\Gamma.222)$$

Εφόσον η μήτρα Ω είναι άγνωστη, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την $\hat{\Omega}$ αντί της Ω και θέτοντας $\hat{\Omega}=\hat{P}'\hat{P}$ γράφουμε την μετασχηματισμένη εξίσωση ως εξής:

$$\hat{P}y=\hat{P}X\beta+\hat{P}\sigma u. \qquad (\Gamma.223)$$

Έστω $\hat{\beta}$ ο εφικτός (feasible) GLS εκτιμητής του β και $\hat{u}$ τα κατάλοιπα από την μετασχηματισμένη εξίσωση (Γ.223). Από το Λήμμα Β.1 έχουμε ότι

$$\hat{\beta}=\beta+(X'\hat{\Omega}X)^{-1}X'\hat{\Omega}\sigma u$$

και $\qquad (\Gamma.224)$

$$\hat{\beta}-\beta=\tau\sigma b+\tau^2\sigma b_*=\tau\sigma b+\omega(\tau^2),$$

όπου τα b και b_* έχουν οριστεί στο Λήμμα Β.1. Ορίζουμε το $n\times 1$ διάνυσμα

$$k=\sqrt{T}(\hat{\beta}-\beta)/\sigma=(\hat{\beta}-\beta)/\tau\sigma=b+\omega(\tau). \qquad (\Gamma.225)$$

Επιπλέον, συνδυάζοντας τις (Γ.224) και(Γ.225) βρίσκουμε ότι

$$k=\sqrt{T}(\hat{\beta}-\beta)/\sigma=\sqrt{T}(X'\hat{\Omega}X)^{-1}X'\hat{\Omega}u=(X'\hat{\Omega}X/T)^{-1}X'\hat{\Omega}u/\sqrt{T} \Rightarrow \qquad (\Gamma.226)$$

$$\Rightarrow (X'\hat{\Omega}X/T)k=(X'\hat{\Omega}X/T)(X'\hat{\Omega}X/T)^{-1}X\ \hat{\Omega}u/\sqrt{T}=X'\hat{\Omega}u/\sqrt{T}. \qquad (\Gamma.227)$$

Από τις (3.1), (Γ.223) και (Γ.225) έπεται ότι

$$\hat{u}=\hat{P}y-\hat{P}X\hat{\beta}=\hat{P}(y-X\hat{\beta})=\hat{P}(\sigma u+X\beta-X\hat{\beta})=\hat{P}\sigma\left[u-\tau X(\hat{\beta}-\beta)/\tau\sigma\right]=\hat{P}\sigma(u-\tau Xk). \qquad (\Gamma.228)$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας τις (Γ.227) και (Γ.228) βρίσκουμε

$$\hat{u}'\hat{u}=\sigma^2(u-\tau Xk)'\hat{P}'\hat{P}(u-\tau Xk)=\sigma^2(u'-k'X'/\sqrt{T})\hat{\Omega}(u-Xk/\sqrt{T})=$$

$$=\sigma^2\left[u'\hat{\Omega}u-2k'X'\hat{\Omega}u/\sqrt{T}+k'(X'\hat{\Omega}X/T)k\right]=$$

$$=\sigma^2\left[u'\hat{\Omega}u-2k'(X'\hat{\Omega}X/T)k+k'(X'\hat{\Omega}X/T)\right]=$$

$$=\sigma^2\left[u'\hat{\Omega}u-k'(X'\hat{\Omega}X/T)k\right]=\sigma^2(u'\hat{\Omega}u-k'\hat{A}k). \qquad (\Gamma.229)$$

Εφόσον $\partial\Omega/\partial\rho=\Omega_\rho$ και $\partial^2\Omega/\partial\rho^2=\Omega_{\rho\rho}$, αναπτύσσοντας κατά Taylor την ποσότητα $u'\hat{\Omega}u/T$ περί το $u'\Omega u/T$ και χρησιμοποιώντας την (Γ.221) παίρνουμε

$$u'\hat{\Omega}u/T=u'\Omega u/T+(u'\Omega_\rho u/T)(\hat{\rho}-\rho)+(1/2)(u'\Omega_{\rho\rho}u/T)(\hat{\rho}-\rho)^2+\omega(\tau^3)=$$

$$=u'\Omega u/T+\tau(u'\Omega_\rho u/T)\frac{\hat{\rho}-\rho}{\tau}+\frac{\tau^2}{2}(u'\Omega_{\rho\rho}u/T)\frac{(\hat{\rho}-\rho)^2}{\tau^2}+\omega(\tau^3)=$$

$$=u'\Omega u/T+\tau(u'\Omega_\rho u/T)\rho_1+(\tau^2/2)(u'\Omega_{\rho\rho}u/T)\rho_1^2+\omega(\tau^3)=$$

$$=1-\tau\sqrt{T}+\tau\sqrt{T}(u'\Omega u/T)+\tau^2\sqrt{T}(u'\Omega_\rho u/T)\rho_1+(\tau^2/2)(u'\Omega_{\rho\rho}u/T)\rho_1^2+\omega(\tau^3)=$$

$$=1+\tau\sqrt{T}(u'\Omega u/T-1)+\tau^2\left[(u'\Omega_\rho u/\sqrt{T})\rho_1+\frac{1}{2}(u'\Omega_{\rho\rho}u/T)\rho_1^2\right]+\omega(\tau^3). \qquad (\Gamma.230)$$

Από το Λήμμα B.2 και την (Γ.225) παίρνουμε

$$k'\hat{A}k=(b+\omega(\tau))'(A+\omega(\tau))(b+\omega(\tau))=b'Ab+\omega(\tau) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k'\hat{A}k/T=b'Ab/T+\omega(\tau^3). \qquad (\Gamma.231)$$

Χρησιμοποιώντας τις (Γ.229), (Γ.230) και (Γ.231) βρίσκουμε

$$\hat{u}'\hat{u}/T=\sigma^2(u'\hat{\Omega}u/T-k'\hat{A}k/T)=$$

$$=\sigma^2\left[1+\tau\sqrt{T}(u'\Omega u/T-1)+\tau^2\left[(u'\Omega_\rho u/\sqrt{T})\rho_1+\frac{1}{2}(u'\Omega_{\rho\rho}u/T)\rho_1^2\right]-b'Ab/T\right]+$$

$$+\omega(\tau^3). \qquad (\Gamma.232)$$

Ορίζουμε τις ποσότητες

$$\sigma_0=\sqrt{T}(u'\Omega u/T-1)$$

και (Γ.233)

$$\sigma_1=(u'\Omega_\rho u/\sqrt{T})\rho_1+\frac{1}{2}(u'\Omega_{\rho\rho}u/T)\rho_1^2-b'Ab+n.$$

Επιπλέον, από την (Γ.228), τους ορισμούς του υποδείγματός μας και εφόσον $\hat{\Omega}=\hat{P}'\hat{P}$, ισχύει ότι

$$\hat{\sigma}^2=\hat{u}'\hat{u}/(T-n) \Rightarrow (T-n)\hat{\sigma}^2=\hat{u}'\hat{u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{u}'\hat{u}/T=(T-n)\hat{\sigma}^2/T=\hat{\sigma}^2-\hat{\sigma}^2 n/T=\hat{\sigma}^2-\hat{\sigma}^2 n\tau^2. \qquad (\Gamma.234)$$

Θέτοντας $\hat{\sigma}^2=\sigma^2+\omega(\tau)$ βρίσκουμε ότι

$$\hat{\sigma}^2 n\tau^2=(\sigma^2+\omega(\tau))n\tau^2=\sigma^2 n\tau^2+\omega(\tau^3). \qquad (\Gamma.235)$$

Από τις (Γ.232), (Γ.233), (Γ.234) και (Γ.235) προκύπτει ότι

$$\hat{\sigma}^2-\sigma^2 n\tau^2=$$

$$=\sigma^2+\sigma^2\left[\tau\sqrt{T}(u'\Omega u/T-1)+\tau^2\left[(u'\Omega_\rho u/\sqrt{T})\rho_1+\frac{1}{2}(u'\Omega_{\rho\rho}u/T)\rho_1^2-b'Ab\right]\right]+\omega(\tau^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}^2=\sigma^2+\sigma^2\left[\tau\sqrt{T}(u'\Omega u/T-1)+\tau^2\left[(u'\Omega_\rho u/\sqrt{T})\rho_1+\frac{1}{2}(u'\Omega_{\rho\rho}u/T)\rho_1^2-\right.\right.$$

$$\left.\left.-b'Ab+n\right]\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=\sigma^2+\sigma^2(\tau\sigma_0+\tau^2\sigma_1)+\omega(\tau^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_0=(\hat{\sigma}^2-\sigma^2)/\tau\sigma^2=\sigma_0+\tau\sigma_1+\omega(\tau^2). \qquad (\Gamma.236)$$

Από τους ορισμούς του υποδείγματός μας και την (Γ.236) έπεται ότι

$$\mu_0=\lim_{T\to\infty}E(\sqrt{T}\delta_0)=\lim_{T\to\infty}E\left[\sqrt{T}(\sigma_0+\tau\sigma_1+\omega(\tau^2))\right]=\lim_{T\to\infty}E\left[(\sqrt{T}\sigma_0+\sigma_1)+\omega(\tau)\right]=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left[E(\sqrt{T}\sigma_0+\sigma_1)+O(T^{-1/2})\right]=\lim_{T\to\infty}\left[\sqrt{T}E(\sigma_0)+E(\sigma_1)\right]. \qquad (\Gamma.237)$$

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε τις $E(\sigma_0)$ και $E(\sigma_1)$.

(i) Από το Λήμμα Α.8 παίρνουμε

$$E(\sigma_0)=E\left[\sqrt{T}(u'\Omega u/T-1)\right]=\sqrt{T}\left[E(u'\Omega u)/T-1\right]=(tr\Omega\Omega^{-1}/T-1)/\tau=$$

$$=(trI_T/T-1)/\tau=(T/T-1)/\tau=0. \qquad (\Gamma.238)$$

(ii) Χρησιμοποιώντας τα Λήμματα Α.8, Γ.1, Γ.2, Γ.3 και Γ.5, τους ορισμούς (3.6) και (Γ.49) και τις σχέσεις (Γ.220) και (Γ.233) βρίσκουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

(α) Εφόσον $tr\Omega_\rho\Omega^{-1}/T=O(T^{-1})$, έπεται ότι

$$tr\Omega_\rho\Omega^{-1}=O(1). \qquad (\Gamma.239)$$

Επίσης,

$$\Omega_2\Omega^{-1}=(\Omega_\rho+2\rho\Delta)\Omega^{-1}=\Omega_\rho\Omega^{-1}+2\rho\Delta\Omega^{-1}=\Omega_\rho\Omega^{-1}+(2\rho/\alpha)\Delta R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{tr}\Omega_2\Omega^{-1}=\mathrm{tr}\Omega_\rho\Omega^{-1}+(2\rho/\alpha)\,\mathrm{tr}\Delta R=\mathrm{tr}\Omega_\rho\Omega^{-1}+(2\rho/\alpha)\,\mathrm{tr}E=$$

$$=\mathrm{tr}\Omega_\rho\Omega^{-1}+4\rho/\alpha=O(1). \qquad (\Gamma.240)$$

Επιπλέον,

$$\Omega_\rho\Omega^{-1}\Omega_2\Omega^{-1}=(\Omega_1-\rho\Delta)\Omega^{-1}(\Omega_1+\rho\Delta)\Omega^{-1}=(\Omega_1\Omega^{-1}-\rho\Delta\Omega^{-1})(\Omega_1\Omega^{-1}+\rho\Delta\Omega^{-1})=$$

$$=\left[\Omega_1\Omega^{-1}-(\rho/\alpha)\Delta R\right]\left[\Omega_1\Omega^{-1}+(\rho/\alpha)\Delta R\right]=$$

$$=(\Omega_1\Omega^{-1})^2-(\rho/\alpha)\Delta R\Omega_1\Omega^{-1}+(\rho/\alpha)\Omega_1\Omega^{-1}\Delta R-(\rho/\alpha)^2(\Delta R)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{tr}\Omega_\rho\Omega^{-1}\Omega_2\Omega^{-1}=\mathrm{tr}(\Omega_1\Omega^{-1})^2-(\rho/\alpha)\,\mathrm{tr}\Delta R\Omega_1\Omega^{-1}+(\rho/\alpha)\,\mathrm{tr}\Omega_1\Omega^{-1}\Delta R-$$

$$-(\rho/\alpha)^2\mathrm{tr}(\Delta R)^2=$$

$$=\mathrm{tr}(\Omega_1\Omega^{-1})^2-(\rho/\alpha)\,\mathrm{tr}\Delta R\Omega_1\Omega^{-1}+(\rho/\alpha)\,\mathrm{tr}\Delta R\Omega_1\Omega^{-1}-(\rho/\alpha)^2\mathrm{tr}\mathscr{R}=$$

$$=\mathrm{tr}(\Omega_1\Omega^{-1})^2+O(1). \qquad (\Gamma.241)$$

Συνεπώς, οι (Γ.239), (Γ.240) και (Γ.241) συνεπάγονται ότι

$$E(u'\Omega_\rho uu'\Omega_2 u)=(\mathrm{tr}\Omega_\rho\Omega^{-1})(\mathrm{tr}\Omega_2\Omega^{-1})+2(\mathrm{tr}\Omega_\rho\Omega^{-1}\Omega_2\Omega^{-1})=$$

$$=2\mathrm{tr}(\Omega_1\Omega^{-1})^2+O(1)=2(2T/\alpha)+O(1)=4T/\alpha+O(1). \qquad (\Gamma.242)$$

(β) Κάτω από τις υποθέσεις του υποδείγματός μας ισχύει ότι η ποσότητα

$$u'\Delta u=\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}u_{it}\delta_{ts}u_{sj}=\sum_{t=1}^{T}u_{it}\delta_{tt}u_{tj}=\delta_{11}u_{i1}u_{1j}+\delta_{TT}u_{iT}u_{Tj}=$$

$$=u_{i1}u_{1j}+u_{iT}u_{Tj}=O(1), \qquad (\Gamma.243)$$

δηλαδή είναι φραγμένη ποσότητα. Άρα,

$$\Omega_{\rho\rho}=2(I-\Delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'\Omega_{\rho\rho}u=2u'(I-\Delta)u=2u'u-2u'\Delta u=2u'u+O(1). \qquad (\Gamma.244)$$

Επομένως,

$$E\left[(u'\Omega_{\rho\rho}u)(u'\Omega_2 u)^2/2\right]=E\left[2u'u(u'\Omega_2 u)^2/2+O(1)\right]=$$

$$=E\left[(u'u)(u'\Omega_2 u)(u'\Omega_2 u)\right]+O(1)=$$

$$=(\mathrm{tr}\Omega^{-1})(\mathrm{tr}\Omega_2\Omega^{-1})(\mathrm{tr}\Omega_2\Omega^{-1})+2(\mathrm{tr}\Omega^{-1})(\mathrm{tr}\Omega_2\Omega^{-1}\Omega_2\Omega^{-1})+$$

$$+2(\mathrm{tr}\Omega_2\Omega^{-1})(\mathrm{tr}\Omega^{-1}\Omega_2\Omega^{-1})+2(\mathrm{tr}\Omega_2\Omega^{-1})(\mathrm{tr}\Omega^{-1}\Omega_2\Omega^{-1})+$$

$$+8(tr\Omega^{-1}\Omega_2\Omega^{-1}\Omega_2\Omega^{-1})+O(1)=$$

$$=(tr\Omega^{-1})\left[(tr\Omega_2\Omega^{-1})^2+2tr(\Omega_2\Omega^{-1})^2\right]+4(tr\Omega_2\Omega^{-1})(tr\Omega^{-1}\Omega_2\Omega^{-1})+$$

$$+8tr\Omega^{-1}(\Omega_2\Omega^{-1})^2+O(1)=$$

$$=(T/\alpha)\left[(2\rho/\alpha)^2+2(2T/\alpha+O(1))\right]+4(2\rho/\alpha)(-2\rho T/\alpha^2+O(1))+$$

$$+8\left[2(2\rho^2-1)T/\alpha^3+O(1)\right]+O(1)=$$

$$=(T/\alpha)(4\rho^2/\alpha^2+4T/\alpha)-16\rho^2T/\alpha^3+32\rho^2T/\alpha^3-16T/\alpha^3+O(T)=$$

$$=4T^2/\alpha^2+O(T), \qquad (\Gamma.245)$$

διότι $tr\Omega^{-1}=(1/\alpha)trR=T/\alpha$.

$$(\gamma)\quad E(b'Ab)=trAG=trI_n=n. \qquad (\Gamma.246)$$

Από τις (Γ.220), (Γ.233), (Γ.242), (Γ.245) και (Γ.246) παίρνουμε

$$\sigma_1=(u'\Omega_\rho u/\sqrt{T})(-\alpha u'\Omega_2 u/2\sqrt{T})+(u'\Omega_{\rho\rho}u/T)(-\alpha u'\Omega_2 u/2\sqrt{T})^2/2-$$

$$-b'Ab+n=$$

$$=(-\alpha/2T)(u'\Omega_\rho uu'\Omega_2 u)+(\alpha^2/4T^2)\left[(u'\Omega_{\rho\rho}u)(u'\Omega_2 u)^2/2\right]-b'Ab+n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(\sigma_1)=(-\alpha/2T)E(u'\Omega_\rho uu'\Omega_2 u)+(\alpha^2/4T^2)E\left[(u'\Omega_{\rho\rho}u)(u'\Omega_2 u)^2/2\right]-$$

$$-E(b'Ab)+n=$$

$$=(-\alpha/2T)(4T/\alpha+O(1))+(\alpha^2/4T^2)(4T^2/\alpha^2+O(T))-n+n=$$

$$=-2+O(T^{-1})+1+O(T^{-1})=-1+O(T^{-1}). \qquad (\Gamma.247)$$

Αντικαθιστώντας στην (Γ.237) από τις (Γ.238) και (Γ.247) βρίσκουμε

$$\mu_o=\lim_{T\to\infty}\left[\sqrt{T}E(\sigma_o)+E(\sigma_1)\right]=\lim_{T\to\infty}\left[-1+O(T^{-1})\right]=-1. \qquad (\Gamma.248)$$

QED

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 4

Πριν προχωρήσουμε στις αποδείξεις των προτάσεων του Κεφαλαίου 4 σημειώνουμε ότι, τα x_t', z_t' είναι οι γραμμές των μητρών X, Z, αντίστοιχα, και συνεπώς ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$X=\begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_T' \end{bmatrix},\quad Z=\begin{bmatrix} z_1' \\ \vdots \\ z_T' \end{bmatrix},\quad X'X=(x_1,\ldots,x_T)\begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_T' \end{bmatrix}=\sum_{t=1}^{T} x_t x_t',\quad Z'Z=\sum_{t=1}^{T} z_t z_t'. \qquad (\Delta.1)$$

ΛΗΜΜΑ Δ.1: Από τους ορισμούς του γενικού υποδείγματός μας (βλ. Κεφάλαιο 2) και την (Δ.1) παίρνουμε ότι

$$\Omega=\begin{bmatrix} (z_1'\gamma)^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (z_T'\gamma)^{-1} \end{bmatrix}=\mathrm{diag}(\sigma_t^{-2})=\mathrm{diag}(\omega_t), \qquad (\Delta.2)$$

όπου

$$\omega_t=\sigma_t^{-2}=(z_t'\gamma)^{-1}. \qquad (\Delta.3)$$

Ορίζουμε τις μήτρες

$$\Omega_i=\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_i}=\mathrm{diag}(\omega_{ti}),\ \text{όπου}\ \omega_{ti}=\frac{\partial\omega_t}{\partial\gamma_i},$$

$$\Omega_{ij}=\frac{\partial^2\Omega}{\partial\gamma_i\partial\gamma_j}=\mathrm{diag}(\omega_{tij}),\ \text{όπου}\ \omega_{tij}=\frac{\partial^2\omega_t}{\partial\gamma_i\partial\gamma_j}, \qquad (\Delta.4)$$

$$\Omega_{ij}^{*}=\Omega_i\Omega^{-1}\Omega_j=\mathrm{diag}(\omega_{tij}^{*}),\ \text{όπου}\ \omega_{tij}^{*}=\omega_{ti}\omega_t^{-1}\omega_{tj}.$$

Αποδεικνύονται οι σχέσεις:

$$\omega_{ti}=-z_{ti}/\sigma_t^4=-\omega_t^2 z_{ti},\qquad \Omega_i=-\mathrm{diag}(z_{ti})\Omega^2,$$

$$\omega_{tij}=2z_{ti}z_{tj}/\sigma_t^6=2\omega_t^3 z_{ti}z_{tj},\qquad \Omega_{ij}=2\mathrm{diag}(z_{ti}z_{tj})\Omega^3, \qquad (\Delta.5)$$

$$\omega_{tij}^{*}=\omega_t^3 z_{ti}z_{tj},\qquad \Omega_{ij}^{*}=\mathrm{diag}(z_{ti}z_{tj})\Omega^3.$$

Επίσης ορίζουμε τις μήτρες

$$A_i=X'\Omega_i X/T,\qquad A_{ij}=X'\Omega_{ij}X/T,\qquad A_{ij}^{*}=X'\Omega_{ij}^{*}X/T=X'\Omega_i\Omega^{-1}\Omega_j X/T. \qquad (\Delta.6)$$

Αποδεικνύονται οι σχέσεις:

$$A_i = -\sum_{t=1}^{T} \sigma_t^{-4} z_{ti} x_t x_t'/T,$$

$$A_{ij} = 2\sum_{t=1}^{T} \sigma_t^{-6} z_{ti} z_{tj} x_t x_t'/T, \qquad (\Delta.7)$$

$$A_{ij}^{*} = \sum_{t=1}^{T} \sigma_t^{-6} z_{ti} z_{tj} x_t x_t'/T.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

(Α) Χρησιμοποιώντας τις (4.1), (4.2), (Δ.2), (Δ.3) και (Δ.4) και το γεγονός ότι οι μήτρες Ω, Ω_i και Ω_{ij} είναι διαγώνιες βρίσκουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\text{(i)}\quad \omega_{ti} = \frac{\partial \omega_t}{\partial \gamma_i} = \frac{\partial (z_t'\gamma)^{-1}}{\partial \gamma_i} = \frac{\partial}{\partial \gamma_i}(1/z_t'\gamma) = -z_{ti}/(z_t'\gamma)^2 =$$

$$= -z_{ti}/\sigma_t^4 = -\omega_t^2 z_{ti} \Rightarrow \qquad (\Delta.8)$$

$$\Rightarrow \Omega_i = \mathrm{diag}(\omega_{ti}) = \mathrm{diag}(-\omega_t^2 z_{ti}) = -\mathrm{diag}(\omega_t^2)\,\mathrm{diag}(z_{ti}) =$$

$$= -\Omega^2 \mathrm{diag}(z_{ti}) = -\mathrm{diag}(z_{ti})\Omega^2. \qquad (\Delta.9)$$

$$\text{(ii)}\quad \omega_{tij} = \frac{\partial^2 \omega_t}{\partial \gamma_i \partial \gamma_j} = \frac{\partial}{\partial \gamma_j}\left(\frac{\partial \omega_t}{\partial \gamma_i}\right) = \frac{\partial}{\partial \gamma_j}\left[-z_{ti}/(z_t'\gamma)^2\right] =$$

$$= -z_{ti}\frac{\partial}{\partial \gamma_j}\left[1/(z_t'\gamma)^2\right] = -z_{ti}\left[-2z_{tj}(z_t'\gamma)/(z_t'\gamma)^4\right] = 2z_{ti}z_{tj}/(z_t'\gamma)^3 =$$

$$= 2z_{ti}z_{tj}/\sigma_t^6 = 2\omega_t^3 z_{ti}z_{tj} \Rightarrow \qquad (\Delta.10)$$

$$\Rightarrow \Omega_{ij} = \mathrm{diag}(\omega_{tij}) = \mathrm{diag}(2\omega_t^3 z_{ti}z_{tj}) = 2\mathrm{diag}(\omega_t^3)\,\mathrm{diag}(z_{ti}z_{tj}) =$$

$$= 2\Omega^3 \mathrm{diag}(z_{ti}z_{tj}) = 2\mathrm{diag}(z_{ti}z_{tj})\Omega^3. \qquad (\Delta.11)$$

Χρησιμοποιώντας την (Δ.8) βρίσκουμε

$$\omega_{tij}^{*} = \omega_{ti}\omega_t^{-1}\omega_{tj} = (-\omega_t^2 z_{ti})\,\omega_t^{-1}(-\omega_t^2 z_{tj}) = \omega_t^3 z_{ti}z_{tj}, \qquad (\Delta.12)$$

από την οποία, εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη της (Δ.11), παίρνουμε ότι

$$\Omega_{ij}^{*} = \mathrm{diag}(z_{ti}z_{tj})\Omega^3. \qquad (\Delta.13)$$

Από τις (Δ.10), (Δ.11), (Δ.12) και (Δ.13) έπονται οι σχέσεις:

$$\omega_{tij}=2\omega^{*}_{tij}, \qquad \Omega_{ij}=2\Omega^{*}_{ij}. \tag{Δ.14}$$

(Β) Από τις (Δ.1), (Δ.8), (Δ.10) και (Δ.12) και το γεγονός ότι οι μήτρες Ω_i, Ω_{ij} και Ω^{*}_{ij} είναι διαγώνιες παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\text{(i)}\quad A_i=X'\Omega_i X/T=\frac{1}{T}(x_1,\ldots,x_T)\begin{bmatrix}\omega_{1i} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_{Ti}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_T'\end{bmatrix}=\sum_{t=1}^{T}\omega_{ti}x_t x_t'/T=$$

$$=-\sum_{t=1}^{T}\omega_t^2 z_{ti}x_t x_t'/T=-\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}z_{ti}x_t x_t'/T. \tag{Δ.15}$$

Εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη της (Δ.15) βρίσκουμε:

$$\text{(ii)}\quad A_{ij}=X'\Omega_{ij}X/T=\sum_{t=1}^{T}\omega_{tij}x_t x_t'/T=2\sum_{t=1}^{T}\omega_t^3 z_{ti}z_{tj}x_t x_t'/T=$$

$$=2\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-6}z_{ti}z_{tj}x_t x_t'/T. \tag{Δ.16}$$

$$\text{(iii)}\quad A^{*}_{ij}=X'\Omega^{*}_{ij}X/T=\sum_{t=1}^{T}\omega^{*}_{tij}x_t x_t'/T=\sum_{t=1}^{T}\omega_t^3 z_{ti}z_{tj}x_t x_t'/T=$$

$$=\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-6}z_{ti}z_{tj}x_t x_t'/T. \tag{Δ.17}$$

Από τις (Δ.16) και (Δ.17) προκύπτει ότι

$$A_{ij}=2A^{*}_{ij}. \tag{Δ.18}$$

QED

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΗΣ ΠΡΟΤΑΣΗΣ 4.1:</u>

(Α) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό (2.14) και την (Δ.18) παίρνουμε

$$C_{ij}=A^{*}_{ij}-2A_iGA_j+A_{ij}/2=A^{*}_{ij}-2A_iGA_j+2A^{*}_{ij}/2=2A^{*}_{ij}-2A_iGA_j=$$

$$=2(A^{*}_{ij}-A_iGA_j). \tag{Δ.19}$$

Στην (2.29) έχουμε ορίσει τις μήτρες

$$P=GQG, \qquad Q=H'(HGH')^{-1}H, \tag{Δ.20}$$

όπου H είναι μια γνωστή r×n μήτρα βαθμού r. Από το Τμήμα 2.5 του Κεφαλαίου 2, το σχετικό με την σύγκριση των ελέγχων t και F (βλ. σχέση (2.45)), γνωρίζουμε ότι στην περίπτωση του t ελέγχου ισχύει ότι H=e', όπου e είναι ένα n×1 γνωστό διάνυσμα. Επομένως, θέτοντας H=e' στην (Δ.20) παίρνουμε

$$Q=H'(HGH')^{-1}H=e(e'Ge)^{-1}e'=kk', \qquad (\Delta.21)$$

όπου

$$k=e/(e'Ge)^{1/2}. \qquad (\Delta.22)$$

Συνεπώς,

$$P=GQG=Gee'G/e'Ge=Gkk'G. \qquad (\Delta.23)$$

Από τον ορισμό (2.13) και την (Δ.23) προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\text{(i)}\quad l_i=e'GA_iGe/e'Ge=k'GA_iGk=trk'GA_iGk=trA_iGkk'G=trA_iP, \qquad (\Delta.24)$$

$$\text{(ii)}\quad l_{ij}=e'GC_{ij}Ge/e'Ge=k'GC_{ij}Gk=trk'GC_{ij}Gk=trC_{ij}Gkk'G=$$

$$=trC_{ij}P, \qquad (\Delta.25)$$

$$\text{(iii)}\quad trx_sx_t'P=trx_t'Px_s=x_t'Px_s=x_t'Gkk'Gx_s=x_t'hh'x_s=$$

$$=(x_t'h)(x_s'h), \qquad (\Delta.26)$$

όπου

$$h=Gk=Ge/(e'Ge)^{1/2}. \qquad (\Delta.27)$$

Από την (Δ.26) έπεται ότι

$$\text{(iv)}\quad trx_tx_t'P=(x_t'h)(x_t'h)=(x_t'h)^2. \qquad (\Delta.28)$$

Συνδυάζοντας τους ορισμούς (2.12), τις (4.1), (4.2), (Δ.19), (Δ.24), (Δ.25), (Δ.26) και (Δ.28) και το Λήμμα Δ.1 βρίσκουμε:

$$\text{(a)}\quad l_i=trA_iP=tr\left[-\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}z_{ti}x_tx_t'/T\right]P=tr\left[-\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}z_{ti}x_tx_t'P/T\right]=$$

$$=-\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}z_{ti}(trx_tx_t'P)/T=-\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}z_{ti}(x_t'h)^2/T=$$

$$=-\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}z_{ti}(x_t'h)^2\sigma_t^{-2}z_t'\gamma/T=-\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-6}(x_t'h)^2z_{ti}z_t'\gamma/T. \qquad (\Delta.29)$$

Συνεπώς,

$$l=\left[(l_i)_{i=1,\ldots,K}\right]=\begin{bmatrix}l_1\\ \vdots\\ l_K\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-6}(x_t'h)^2z_{t1}z_t'\gamma/T\\ \vdots\\ -\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-6}(x_t'h)^2z_{tK}z_t'\gamma/T\end{bmatrix}=$$

$$= -\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-\sigma}(x_t'h)^2\begin{bmatrix}z_{t1}\\ \vdots\\ z_{tk}\end{bmatrix}z_t'\gamma/T= -\left[\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-\sigma}(x_t'h)^2z_tz_t'/T\right]\gamma=$$

$$= -L(h)\gamma, \qquad (\Delta.30)$$

όπου

$$L(h)=\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-\sigma}(x_t'h)^2z_tz_t'/T. \qquad (\Delta.31)$$

$$(b)\quad l_{ij}=trC_{ij}P=tr2(A_{ij}^{*}-A_iGA_j)P=2(trA_{ij}^{*}P-trA_iGA_jP). \qquad (\Delta.32)$$

'Ομως,

$$trA_{ij}^{*}P=tr\left[\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-\sigma}z_{ti}z_{tj}x_tx_t'/T\right]P=tr\left[\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-\sigma}z_{ti}z_{tj}x_tx_t'P/T\right]=$$

$$=\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-\sigma}z_{ti}z_{tj}(trx_tx_t'P)/T=\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-\sigma}(x_t'h)^2z_{ti}z_{tj}/T \qquad (\Delta.33)$$

και

$$trA_iGA_jP=tr\left[-\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}z_{ti}x_tx_t'/T\right]G\left[-\sum_{s=1}^{T}\sigma_s^{-4}z_{sj}x_sx_s'/T\right]P=$$

$$=tr\left[\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}\sigma_t^{-4}\sigma_s^{-4}z_{ti}z_{sj}x_tx_t'Gx_sx_s'P/T^2\right]=$$

$$=\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}\sigma_t^{-4}\sigma_s^{-4}z_{ti}z_{sj}(trx_tx_t'Gx_sx_s'P)/T^2=$$

$$=\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}\sigma_t^{-4}\sigma_s^{-4}z_{ti}z_{sj}(trx_t'Gx_sx_s'Px_t)/T^2=$$

$$=\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}\sigma_t^{-4}\sigma_s^{-4}z_{ti}z_{sj}x_t'Gx_sx_s'Px_t/T^2=$$

$$=\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}\sigma_t^{-4}\sigma_s^{-4}z_{ti}z_{sj}x_t'Gx_s(x_s'h)(x_t'h)/T^2=$$

$$=\left[\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}(x_t'h)z_{ti}x_t'/T\right]G\left[\sum_{s=1}^{T}\sigma_s^{-4}(x_s'h)x_sz_{sj}/T\right]. \qquad (\Delta.34)$$

Από τις (Δ.32), (Δ.33) και (Δ.34) έπεται ότι

$$l_{ij}=2\left[\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-\sigma}(x_t'h)^2z_{ti}z_{tj}/T-\right.$$

$$\left.-\left[\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}(x_t'h)z_{ti}x_t'/T\right]G\left[\sum_{s=1}^{T}\sigma_s^{-4}(x_s'h)x_sz_{sj}/T\right]\right]. \qquad (\Delta.35)$$

Συνεπώς, εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη της (Δ.30), βρίσκουμε

$$L=\left[(l_{ij})_{i,j=1,\ldots,\kappa}\right]=2\left[\left[\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-\sigma}(x_t'h)^2 z_{ti}z_{tj}/T\right]_{i,j}-\right.$$

$$\left.-\left[\left[\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}(x_t'h)z_{ti}x_t'/T\right]G\left[\sum_{t=1}^{T}\sigma_s^{-4}(x_s'h)x_s z_{sj}/T\right]\right]_{i,j}\right]=$$

$$=2\left[\left[\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-\sigma}(x_t'h)^2 z_t z_t'/T\right]-\right.$$

$$\left.-\left[\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}(x_t'h)z_t x_t'/T\right]G\left[\sum_{s=1}^{T}\sigma_s^{-4}(x_s'h)x_s z_s'/T\right]\right]=$$

$$=2\left[L(h)-C(h)GC'(h)\right], \qquad (\Delta.36)$$

όπου

$$L(h)=\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-\sigma}(x_t'h)^2 z_t z_t'/T, \qquad C(h)=\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}(x_t'h)z_t x_t'/T. \qquad (\Delta.37)$$

(Β) Έστω Η μια r×n γνωστή μήτρα βαθμού r < n. Από τις (4.8) και (4.9) είναι γνωστό ότι η μήτρα G είναι μια n×n θετικά ορισμένη και συμμετρική μήτρα. Τότε, η μήτρα HGH' είναι μια r×r θετικά ορισμένη και συμμετρική μήτρα (βλ. Δρεττάκης, Γραμμική Άλγεβρα, σελ. 132-133 (β)), δηλαδή

$$HGH'=(HGH')' \overset{d}{>} 0. \qquad (\Delta.38)$$

Από την (Δ.38) έπεται ότι η μήτρα $(HGH')^{-1}$ είναι μια θετικά ορισμένη και συμμετρική μήτρα (βλ. Mardia et.al., Multivariate Analysis, Corollary A.7.2.2., σελ. 475), δηλαδή

$$(HGH')^{-1} \overset{d}{>} 0, \qquad (\Delta.39)$$

από την οποίαν έπεται ότι η μήτρα $(HGH')^{-1}$ είναι θετικά ημιορισμένη, δηλαδή

$$(HGH')^{-1} \overset{d}{\geq} 0. \qquad (\Delta.40)$$

Από την (Δ.40) προκύπτει ότι για την n×n μήτρα Q ισχύει

$$Q=H'(HGH')^{-1}H \overset{d}{\geq} 0 \qquad (\Delta.41)$$

και για την n×n μήτρα P ισχύει ότι

$$P=GQG=G'QG \overset{d}{\geq} 0 \qquad (\Delta.42)$$

(βλ. Mardia et.al., Multivariate Analysis, Theorem A.7.3, σελ. 475-476). Έστω λ_i οι ιδιοτιμές της μήτρας P. Λόγω της (Δ.42) έχουμε ότι

$$\lambda_i \geq 0 \quad (i=1,2,\ldots,n). \qquad (\Delta.43)$$

Ορίζουμε την n×r μήτρα

$$V=G^{1/2}H', \qquad (\Delta.44)$$

όπου η $G^{1/2}$ είναι μια θετικά ορισμένη και συμμετρική μήτρα όπως και η G. Ο προβολικός τελεστής στον χώρο που δημιουργείται από τις στήλες της μήτρας V είναι

$$P_V=V(V'V)^{-1}V'=G^{1/2}H'(HG^{1/2}G^{1/2}H')^{-1}HG^{1/2}=G^{1/2}H'(HGH')^{-1}HG^{1/2}=$$
$$=G^{1/2}QG^{1/2}. \qquad (\Delta.45)$$

Επειδή

$$P_VV=V(V'V)^{-1}V'V=V, \qquad (\Delta.46)$$

η μήτρα V έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα της μήτρας P_V. Επομένως, κάνοντας χρήση του ορισμού (Δ.20) και της (Δ.45) βρίσκουμε ότι

$$P=GQG=G^{1/2}(G^{1/2}QG^{1/2})G^{1/2}=G^{1/2}P_VG^{1/2}. \qquad (\Delta.47)$$

Εφόσον η μήτρα G είναι συμμετρική, θετικά ορισμένη και μή ιδιάζουσα, τό ίδιο είναι και η μήτρα $G^{1/2}$. Συνεπώς (βλ. Mardia et.al., Multivariate Analysis, (A.4.2f), σελ. 464), ο βαθμός της μήτρας P ισούται με τον βαθμό της μήτρας P_V, δηλαδή

$$\text{rank}(P)=\text{rank}(G^{1/2}P_VG^{1/2})=\text{rank}(P_V). \qquad (\Delta.48)$$

Όμως, η μήτρα P_V είναι ταυτοδύναμη και ο βαθμός της ισούται με το ίχνος της, δηλαδή

$$\text{rank}(P_V)=\text{tr}P_V=\text{tr}V(V'V)^{-1}V'=\text{tr}(V'V)^{-1}V'V=\text{tr}I_r=r. \qquad (\Delta.49)$$

Από τις (Δ.48) και (Δ.49) προκύπτει ότι

$$\text{rank}(P)=r. \qquad (\Delta.50)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (Δ.43) και (Δ.50) συμπεραίνουμε ότι r από τις ιδιοτιμές της μήτρας P είναι θετικές και οι

υπόλοιπες n-r ιδιοτιμές της ισούνται με το μηδέν. Έστω $\mathcal{L}$ μια nxn διαγώνια μήτρα με στοιχεία τις ιδιοτιμές, λ_i, της μήτρας P και W μια nxn ορθογώνια μήτρα με στήλες τα ορθοκανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα, w_i, της μήτρας P. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της φασματικής ανάλυσης μιας μήτρας (spectral decomposition theorem), η μήτρα P γράφεται

$$P=W\mathcal{L}W'=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i w_i w_i'=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i w_i w_i'. \qquad (\Delta.51)$$

Εφόσον οι ιδιοτιμές $\lambda_i > 0$ (i=1,...,r), οι τετραγωνικές τους ρίζες υπάρχουν. Επομένως,

$$P=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i w_i w_i'=\sum_{i=1}^{r}(\lambda_i^{1/2}w_i)(\lambda_i^{1/2}w_i)'=\sum_{i=1}^{r}h_i h_i', \qquad (\Delta.52)$$

όπου

$$h_i=\lambda_i^{1/2}w_i. \qquad (\Delta.53)$$

Σε συμβολισμό μητρών, εφόσον οι μήτρες $\mathcal{L}$ και $\mathcal{L}^{1/2}$ είναι συμμετρικές, έχουμε

$$P=W\mathcal{L}W'=W\mathcal{L}^{1/2}\mathcal{L}^{1/2}W'=(W\mathcal{L}^{1/2})(W\mathcal{L}^{1/2})'=YY', \qquad (\Delta.54)$$

όπου

$$Y=W\mathcal{L}^{1/2}, \qquad (\Delta.55)$$

με στήλες τα διανύσματα $h_i=\lambda_i^{1/2}w_i$. Από τις (Δ.52), (Δ.53), (Δ.54) και (Δ.55) έπεται ότι

$$x_t'Px_s=x_t'YY'x_s=\sum_{i=1}^{r}x_t'h_i h_i'x_s=\sum_{i=1}^{r}h_i'x_t h_i'x_s \qquad (\Delta.56)$$

και συνεπώς

$$x_t'Px_t=\sum_{i=1}^{r}(h_i'x_t)^2. \qquad (\Delta.57)$$

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς (2.28) και (2.29), τις (4.1), (4.2), (Δ.19), (Δ.29), (Δ.33), (Δ.34), (Δ.37), (Δ.56) και (Δ.57) και το Λήμμα Δ.1 βρίσκουμε:

(a) Το j-στοιχείο του διανύσματος c είναι

$$c_j=trA_jP=-\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}z_{tj}(trx_t x_t'P)/T=-\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}z_{tj}(trx_t'Px_t)/T=$$

$$=-\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}z_{tj}x_t'Px_t/T=-\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}z_{tj}\left[\sum_{i=1}^{r}(h_i'x_t)^2\right]/T=$$

$$= -\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{r}\sigma_t^{-4}(h_i'x_t)^2 z_{tj}/T = -\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{r}\sigma_t^{-4}(h_i'x_t)^2 z_{tj}\sigma_t^{-2}z_t'\gamma/T =$$

$$= -\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{r}\sigma_t^{-6}(h_i'x_t)^2 z_{tj}z_t'\gamma/T. \qquad (\Delta.58)$$

Συνεπώς,

$$c=\left[(c_j)_{j=1,\ldots,x}\right]=\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{r}\sigma_t^{-6}(h_i'x_t)^2 z_{t1}z_t'\gamma/T\\ \vdots\\ -\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{r}\sigma_t^{-6}(h_i'x_t)^2 z_{tx}z_t'\gamma/T\end{bmatrix}=$$

$$= -\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{r}\sigma_t^{-6}(h_i'x_t)^2\begin{bmatrix}z_{t1}\\ \vdots\\ z_{tx}\end{bmatrix}z_t'\gamma/T = -\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{r}\sigma_t^{-6}(h_i'x_t)^2 z_t z_t'\gamma/T =$$

$$= -\sum_{t=1}^{r}\left[\sum_{i=1}^{T}\sigma_t^{-6}(x_t'h_i)^2 z_t z_t'/T\right]\gamma = -\left[\sum_{i=1}^{r}L(h_i)\right]\gamma = -C_1\gamma, \qquad (\Delta.59)$$

όπου

$$C_1=\sum_{i=1}^{r}L(h_i), \qquad L(h_i)=\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-6}(x_t'h_i)^2 z_t z_t'/T. \qquad (\Delta.60)$$

(b) Το (j,m)-στοιχείο της μήτρας C είναι

$$c_{jm}=trC_{jm}P=2(trA^{*}_{jm}P-trA_jGA_mP)=$$

$$=2\left[\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-6}z_{tj}z_{tm}(trx_tx_t'P)/T-\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}\sigma_t^{-4}\sigma_s^{-4}z_{tj}z_{sm}x_t'Gx_sx_s'Px_t/T^2\right]=$$

$$=2\left[\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-6}z_{tj}z_{tm}(trx_t'Px_t)/T-\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}\sigma_t^{-4}\sigma_s^{-4}z_{tj}z_{sm}x_t'Gx_sx_s'Px_t/T^2\right]=$$

$$=2\left[\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-6}z_{tj}z_{tm}x_t'Px_t/T-\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}\sigma_t^{-4}\sigma_s^{-4}z_{tj}z_{sm}x_t'Gx_sx_s'Px_t/T^2\right]=$$

$$=2\left[\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-6}z_{tj}z_{tm}\left[\sum_{i=1}^{r}(h_i'x_t)^2\right]/T-\right.$$

$$\left.-\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}\sigma_t^{-4}\sigma_s^{-4}z_{tj}z_{sm}x_t'Gx_s\left[\sum_{i=1}^{r}(h_i'x_s)(h_i'x_t)\right]/T^2\right]=$$

$$=2\sum_{i=1}^{r}\left[\left[\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-6}(h_i'x_t)^2 z_{tj}z_{tm}/T\right]-\right.$$

$$-\left[\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}(h_i'x_t)z_{tj}x_t'/T\right]G\left[\sum_{s=1}^{T}\sigma_s^{-4}(h_i'x_s)x_sz_{sm}/T\right]\Bigg]. \qquad (\Delta.61)$$

Συνεπώς, εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη της (Δ.59), βρίσκουμε

$$C=\left[(c_{jm})_{j,m=1,\ldots,\kappa}\right]=$$

$$=2\sum_{i=1}^{r}\Bigg[\left[\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-\sigma}(h_i'x_t)^2z_{tj}z_{tm}/T\right]_{j,m}-$$

$$-\left[\left[\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}(h_i'x_t)z_{tj}x_t'/T\right]G\left[\sum_{s=1}^{T}\sigma_s^{-4}(h_i'x_s)x_sz_{sm}/T\right]\right]_{j,m}\Bigg]=$$

$$=2\sum_{i=1}^{r}\Bigg[\left[\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-\sigma}(x_t'h_i)^2z_tz_t'/T\right]-$$

$$-\left[\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}(x_t'h_i)z_tx_t'/T\right]G\left[\sum_{s=1}^{T}\sigma_s^{-4}(x_s'h_i)x_sz_s'/T\right]\Bigg]=$$

$$=2\sum_{i=1}^{r}\left[L(h_i)-C(h_i)GC'(h_i)\right]=2\left[\sum_{i=1}^{r}L(h_i)-\sum_{i=1}^{r}C(h_i)GC'(h_i)\right]=$$

$$=2(C_1-C_2), \qquad (\Delta.62)$$

όπου

$$C_1=\sum_{i=1}^{r}L(h_i), \qquad C_2=\sum_{i=1}^{r}C(h_i)GC'(h_i)$$

και (Δ.63)

$$L(h_i)=\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-\sigma}(x_t'h_i)^2z_tz_t'/T, \qquad C(h_i)=\sum_{t=}^{T}\sigma_t^{-4}(x_t'h_i)z_tx_t'/T.$$

(c) Το (j,m)-στοιχείο της μήτρας D είναι

$$d_{jm}=trD_{jm}P, \qquad (\Delta.64)$$

όπου

$$D_{jm}=A_jPA_m/2. \qquad (\Delta.65)$$

Χρησιμοποιώντας τις (Δ.64) και (Δ.65), εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη της (Δ.61) και αντικαθιστώντας την μήτρα P στην θέση της μήτρας G, βρίσκουμε ότι

$$d_{jm}=trA_jPA_mP/2=$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \left[\left[\sum_{t=1}^{T} \sigma_t^{-4} (x_t' h_i) z_{tj} x_t'/T \right] P \left[\sum_{s=1}^{T} \sigma_s^{-4} (x_s' h_i) x_s z_{sm}/T \right] \right]. \qquad (\Delta.66)$$

Επομένως, εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη της (Δ.62), βρίσκουμε

$$D = \left[(d_{jm})_{j,m=1,\ldots,\kappa} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \left[\left[\left[\sum_{t=1}^{T} \sigma_t^{-4} (x_t' h_i) z_{tj} x_t'/T \right] P \left[\sum_{s=1}^{T} \sigma_s^{-4} (x_s' h_i) x_s z_{sm}/T \right] \right]_{j,m} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \left[\sum_{t=1}^{T} \sigma_t^{-4} (x_t' h_i) z_t x_t'/T \right] P \left[\sum_{s=1}^{T} \sigma_s^{-4} (x_s' h_i) x_s z_s'/T \right] \Bigg] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{r} C(h_i) P C'(h_i) \right] = \frac{1}{2} C_3, \qquad (\Delta.67)$$

όπου

$$C_3 = \sum_{i=1}^{r} C(h_i) P C'(h_i), \quad C(h_i) = \sum_{t=1}^{T} \sigma_t^{-4} (x_t' h_i) z_t x_t'/T. \qquad (\Delta.68)$$

QED

ΛΗΜΜΑ Δ.2: Ορίζουμε τις ποσότητες

$$a_i = -E(u' \Omega_i u/T), \quad a_{ij} = \frac{1}{2} E(u' \Omega_{ij} u/T). \qquad (\Delta.69)$$

Επιπλέον, ορίζουμε το κ×1 διάνυσμα

$$a = \left[(a_i)_{i=1,\ldots,\kappa} \right]. \qquad (\Delta.70)$$

Αποδεικνύονται οι σχέσεις:

$$a_i = z_i' \Omega^2 Z \gamma/T, \; a = \bar{A} \gamma, \; a_{ij} = z_i' \Omega^2 z_j/T, \; \bar{A} = \left[(a_{ij})_{i,j=1,\ldots,\kappa} \right], \qquad (\Delta.71)$$

όπου z_i είναι η i-στήλη της μήτρας Z. Επίσης ορίζουμε τα βαθμωτά

$$w_o = \sqrt{T}(u' \Omega u/T - 1),$$

$$w_i = \sqrt{T}(u' \Omega_i u/T + a_i), \qquad (\Delta.72)$$

$$w_{ij} = \sqrt{T}(u' \Omega_{ij} u/T - 2a_{ij}).$$

Αποδεικνύονται τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$E(w_o) = 0, \; E(w_i) = 0, \; E(w_{ij}) = 0,$$

$$E(w_o^2) = 2, \; E(w_i^2) = 2a_{ii}, \; E(w_{ij}^2) = \frac{8}{T} \sum_{t=1}^{T} (z_{ti}^2 z_{tj}^2/\sigma_t^8). \qquad (\Delta.73)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

(Α) Από τον ορισμό του υποδείγματός μας έχουμε ότι

$$u \sim N(0, \Omega^{-1}). \qquad (\Delta.74)$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Α.8, τις (4.1), (4.2) και (4.8) και το Λήμμα Δ.1 βρίσκουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$(i)\ E(u'\Omega u) = tr\Omega\Omega^{-1} = trI_T = T \Rightarrow E(u'\Omega u/T) = T/T = 1. \qquad (\Delta.75)$$

$$(ii)\ E(u'\Omega_i u) = tr\Omega_i\Omega^{-1} = tr\left[-diag(z_{ti})\Omega^2\Omega^{-1}\right] = -tr\left[diag(z_{ti})\Omega\right] =$$

$$= -tr\left[diag(z_{ti})diag(\sigma_t^{-2})\right] = -tr\left[diag(\sigma_t^{-2}z_{ti})\right] = -\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-2}z_{ti} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_i = -E(u'\Omega_i u/T) = \sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-2}z_{ti}/T = \sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-2}z_{ti}\sigma_t^{-2}z_t'\gamma/T = \sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}z_{ti}z_t'\gamma/T =$$

$$= \left[\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}z_{ti}z_t'/T\right]\gamma = z_i'\Omega^2 Z\gamma/T, \qquad (\Delta.76)$$

όπου z_i είναι η i-στήλη της μήτρας Z. Συνεπώς, το κx1 διάνυσμα a είναι

$$a = \left[(a_i)_{i=1,\ldots,\kappa}\right] = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_\kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}z_{t1}z_t'\gamma/T \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}z_{t\kappa}z_t'\gamma/T \end{bmatrix} = \sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}\begin{bmatrix} z_{t1} \\ \vdots \\ z_{t\kappa} \end{bmatrix} z_t'\gamma/T =$$

$$= \sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}z_t z_t'\gamma/T = \left[\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}z_t z_t'/T\right]\gamma = \bar{A}\gamma. \qquad (\Delta.77)$$

(iii) Εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη της (Δ.76) βρίσκουμε

$$E(u'\Omega_{ij}u) = tr\Omega_{ij}\Omega^{-1} = tr\left[2diag(z_{ti}z_{tj})\Omega^3\Omega^{-1}\right] =$$

$$= 2tr\left[diag(z_{ti}z_{tj})\Omega^2\right] = 2\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}z_{ti}z_{tj} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{ij} = \frac{1}{2}E(u'\Omega_{ij}u/T) = \sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}z_{ti}z_{tj}/T = z_i'\Omega^2 z_j/T. \qquad (\Delta.78)$$

Από τις (4.2), (4.8) και (Δ.78) έπεται ότι

$$\bar{A} = \sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}z_t z_t'/T = \sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}\begin{bmatrix} z_{t1} \\ \vdots \\ z_{t\kappa} \end{bmatrix}(z_{t1},\ldots,z_{t\kappa})/T =$$

$$= \left[\left[\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}z_{ti}z_{tj}/T\right]_{i,j}\right] = \left[(a_{ij})_{i,j=1,\ldots,\kappa}\right]. \qquad (\Delta.79)$$

(Β) Από τις (Δ.72) και (Δ.75) έπεται ότι

$$E(w_o)=E\left[\sqrt{T}(u'\Omega u/T-1)\right]=\sqrt{T}\left[E(u'\Omega u/T)-1\right]=\sqrt{T}(1-1)=0. \qquad (\Delta.80)$$

Από τις (Δ.69) και (Δ.72) παίρνουμε τις σχέσεις:

$$E(w_i)=E\left[\sqrt{T}(u'\Omega_i u/T+a_i)\right]=\sqrt{T}\left[E(u'\Omega_i u/T)+a_i\right]=\sqrt{T}(-a_i+a_i)=0 \qquad (\Delta.81)$$

και

$$E(w_{ij})=E\left[\sqrt{T}(u'\Omega_{ij}u/T-2a_{ij})\right]=\sqrt{T}\left[E(u'\Omega_{ij}u/T)-2a_{ij}\right]=$$

$$=\sqrt{T}(2a_{ij}-2a_{ij})=0. \qquad (\Delta.82)$$

(Γ) Από τον ορισμό του υποδείγματός μας για την περίπτωση της ετεροσκεδαστικότητας έχουμε

$$u_t\sim N(0,\sigma_t^2). \qquad (\Delta.83)$$

Ορίζουμε την μεταβλητή

$$\psi_t=u_t/\sigma_t, \qquad (\Delta.84)$$

για την οποίαν ισχύουν οι σχέσεις

$$\psi_t=(u_t/\sigma_t)\sim N(0,1), \quad \psi_t^2=(u_t^2/\sigma_t^2)\sim\chi_1^2, \qquad (\Delta.85)$$

όπου χ_1^2 είναι η χ^2 κατανομή με έναν βαθμό ελευθερίας. Από την (Δ.85) προκύπτουν οι σχέσεις:

$$E(\psi_t^2)=E(u_t^2/\sigma_t^2)=1, \quad E\left[(\psi_t^2-1)^2\right]=E\left[(u_t^2/\sigma_t^2-1)^2\right]=2,$$

$$\sum_{t=1}^{T}\psi_t^2=\sum_{t=1}^{T}(u_t^2/\sigma_t^2)\sim\chi_T^2, \quad E\left[\sum_{t=1}^{T}\psi_t^2\right]=E\left[\sum_{t=1}^{T}(u_t^2/\sigma_t^2)\right]=T, \qquad (\Delta.86)$$

$$E\left[\left[\sum_{t=1}^{T}\psi_t^2-T\right]^2\right]=E\left[\left[\sum_{t=1}^{T}(u_t^2/\sigma_t^2)-T\right]^2\right]=2T.$$

Από τις (4.1), (4.2), (Δ.69), (Δ.72) (Δ.75), (Δ.76), (Δ.78), (Δ.85) και (Δ.86) και το Λήμμα Δ.1 βρίσκουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\text{(i)}\quad w_o=\sqrt{T}(u'\Omega u/T-1)=\sqrt{T}\left[\frac{1}{T}(u_1,\ldots,u_T)\,\mathrm{diag}(\sigma_t^{-2})\begin{bmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_T\end{bmatrix}-1\right]=$$

$$=\sqrt{T}\left[\sum_{t=1}^{T}(u_t^2/\sigma_t^2)/T-1\right]=\left[\sum_{t=1}^{T}\psi_t^2-T\right]\Big/\sqrt{T}\Rightarrow w_o^2=\left[\sum_{t=1}^{T}\psi_t^2-T\right]^2\Big/T\Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(w_o^2)=E\left[\left[\sum_{t=1}^{T}\psi_t^2-T\right]^2\Big/T\right]=2T/T=2. \qquad (\Delta.87)$$

Εργαζόμενοι όπως στην προηγούμενη απόδειξη βρίσκουμε ότι για τα w_i και w_{ij} ισχύουν οι σχέσεις:

$$(ii)\quad w_i=\sqrt{T}(u'\Omega_i u/T+a_i)=\sqrt{T}\left[\sum_{t=1}^{T}\omega_{ti}u_t^2/T+a_i\right]=$$

$$=\sqrt{T}\left[-\sum_{t=1}^{T}z_{ti}\sigma_t^{-4}u_t^2/T+\sum_{t=1}^{T}z_{ti}\sigma_t^{-2}/T\right]=-\left[\sum_{t=1}^{T}\frac{z_{ti}}{\sigma_t^2}\frac{u_t^2}{\sigma_t^2}-\sum_{t=1}^{T}\frac{z_{ti}}{\sigma_t^2}\right]\Big/\sqrt{T}=$$

$$=-\tau\sum_{t=1}^{T}\frac{z_{ti}}{\sigma_t^2}(\psi_t^2-1), \qquad (\Delta.88)$$

όπου $\tau=1/\sqrt{T}$ και $\psi_t^2\sim\chi_1^2$. Εφόσον τα ψ_t^2 και ψ_s^2 είναι ανεξάρτητα για $t\neq s$, έπεται ότι

$$E\left[(\psi_t^2-1)(\psi_s^2-1)\right]=\delta_{ts}E\left[(\psi_t^2-1)^2\right]=2\delta_{ts}, \qquad (\Delta.89)$$

όπου δ_{ts} είναι το δ του Kronecker. Συνεπώς, από τις (Δ.88) και (Δ.89) προκύπτει ότι

$$w_i^2=\tau^2\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}\frac{z_{ti}z_{si}}{\sigma_t^2\sigma_s^2}(\psi_t^2-1)(\psi_s^2-1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(w_i^2)=\tau^2\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}\frac{z_{ti}z_{si}}{\sigma_t^2\sigma_s^2}E\left[(\psi_t^2-1)(\psi_s^2-1)\right]=\tau^2\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}\frac{z_{ti}z_{si}}{\sigma_t^2\sigma_s^2}2\delta_{ts}=$$

$$=2\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}z_{ti}z_{ti}/T=2a_{ii}. \qquad (\Delta.90)$$

$$(iii)\quad w_{ij}=\sqrt{T}(u'\Omega_{ij}u/T-2a_{ij})=\sqrt{T}\left[\sum_{t=1}^{T}\omega_{tij}u_t^2/T-2a_{ij}\right]=$$

$$=\sqrt{T}\left[\sum_{t=1}^{T}2z_{ti}z_{tj}\sigma_t^{-6}u_t^2/T-2\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}z_{ti}z_{tj}/T\right]=$$

$$=\left[\sum_{t=1}^{T}\frac{2z_{ti}z_{tj}}{\sigma_t^4}\frac{u_t^2}{\sigma_t^2}-2\sum_{t=1}^{T}\frac{z_{ti}z_{tj}}{\sigma_t^4}\right]\Big/\sqrt{T}=$$

$$=2\tau\sum_{t=1}^{T}\frac{z_{ti}z_{tj}}{\sigma_t^4}(\psi_t^2-1), \qquad (\Delta.91)$$

όπου $\psi_t^2\sim\chi_1^2$ και τα ψ_t^2 και ψ_s^2 είναι ανεξάρτητα για $t\neq s$. Οι (Δ.89) και (Δ.91) συνεπάγονται ότι

$$w_{ij}^2=4\tau^2\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}\frac{z_{ti}z_{tj}z_{si}z_{sj}}{\sigma_t^4\sigma_s^4}(\psi_t^2-1)(\psi_s^2-1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(w_{ij}^2)=4\tau^2\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}\frac{z_{ti}z_{tj}z_{si}z_{sj}}{\sigma_t^4\sigma_s^4}E\left[(\psi_t^2-1)(\psi_s^2-1)\right]=$$

$$=4\tau^2\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T}\frac{z_{ti}z_{tj}z_{si}z_{sj}}{\sigma_t^4\sigma_s^4}2\delta_{ts}=\frac{8}{T}\sum_{t=1}^{T}(z_{ti}^2z_{tj}^2/\sigma_t^8)\,. \qquad (\Delta.92)$$

QED

ΛΗΜΜΑ Δ.3: Ορίζουμε το T×1 διάνυσμα ν με στοιχεία

$$v_t=2\sigma_t^2x_t'Bx_t-x_t'B\Gamma Bx_t, \qquad (\Delta.93)$$

και τα T×1 διανύσματα $\bar{u}$, ε και $\bar{\varepsilon}$ με στοιχεία

$$\bar{u}_t=u_t^2-\sigma_t^2,$$

$$\varepsilon_t=2u_te_t-\tau e_t^2, \quad e_t=x_t'BX'u/\sqrt{T}, \qquad (\Delta.94)$$

$$\bar{\varepsilon}_t=2u_t\bar{e}_t-\tau\bar{e}_t^2, \quad \bar{e}_t=x_t'GX'\Omega u/\sqrt{T},$$

αντίστοιχα. Αποδεικνύονται τα αποτελέσματα:

$$E(\overline{uu}')=2\Omega^{-2},$$

$$E(\varepsilon_t)=v_t/\sqrt{T}, \quad E(\varepsilon)=v/\sqrt{T}, \qquad (\Delta.95)$$

$$E(\bar{\varepsilon}_t)=x_t'Gx_t/\sqrt{T}, \quad E(\bar{\varepsilon})=XGx_t/\sqrt{T}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Από τον ορισμό του υποδείγματός μας γνωρίζουμε ότι $u\sim N(0,\Omega^{-1})$. Χρησιμοποιώντας τις (4.1), (4.2) και (Δ.2) βρίσκουμε ότι

$$\Omega^{-1}=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_T^2\end{bmatrix}=\left[(\delta_{ts}\sigma_t^2)_{t,s=1,\ldots,T}\right] \qquad (\Delta.96)$$

και

$$\Omega^{-2}=\begin{bmatrix}\sigma_1^4 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_T^4\end{bmatrix}=\left[(\delta_{ts}\sigma_t^4)_{t,s=1,\ldots,T}\right],$$

όπου δ_{ts} είναι το δ του Kronecker. Επομένως, για το T×1 διάνυσμα u ισχύουν οι σχέσεις:

$u=\left[(u_t)_{t=1,\ldots,T}\right]$,

$$E(u)=0, \quad E(uu')=\left[(\delta_{ts}\sigma_t^2)_{t,s=1,\ldots,T}\right], \qquad (\Delta.97)$$

$E(u_t^2)=\sigma_t^2$, $E(u_tu_s)=\delta_{ts}\sigma_t^2=\delta_{ts}E(u_t^2)$.

Εφόσον για $t\neq s$ τα u_t και u_s είναι ανεξάρτητα, τα u_t^2 και u_s^2 είναι ανεξάρτητα όπως επίσης και τα $(u_t^2-\sigma_t^2)$ και $(u_s^2-\sigma_s^2)$. Επιπλέον, ισχύουν οι σχέσεις (Δ.83), (Δ.84), (Δ.85) και (Δ.86) που συνδυαζόμενες με τις (Δ.96) και (Δ.97) δίνουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

(i) Για το $T\times 1$ διάνυσμα $\bar{u}$, με στοιχεία $\bar{u}_t=u_t^2-\sigma_t^2$ και για $t,s=1,\ldots,T$, ισχύει ότι

$$\overline{uu}'=\left[(\bar{u}_t)_{t=1,\ldots,T}\right]\left[(\bar{u}_s)_{s=1,\ldots,T}\right]'=\left[\left[(u_t^2-\sigma_t^2)(u_s^2-\sigma_s^2)\right]_{t,s}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(\overline{uu}')=E\left[\left[(u_t^2-\sigma_t^2)(u_s^2-\sigma_s^2)\right]_{t,s}\right]=\left[\left[E\left[(u_t^2-\sigma_t^2)(u_s^2-\sigma_s^2)\right]\right]_{t,s}\right]=$$

$$=\left[\left[\delta_{ts}E\left[(u_t^2-\sigma_t^2)^2\right]\right]_{t,s}\right]=\left[\left[\delta_{ts}E\left[\left[\sigma_t^2(u_t^2/\sigma_t^2-1)\right]^2\right]\right]_{t,s}\right]=$$

$$=\left[\left[\delta_{ts}\sigma_t^4E\left[(u_t^2/\sigma_t^2-1)^2\right]\right]_{t,s}\right]=2\left[\left[\delta_{ts}\sigma_t^4\right]_{t,s=1,\ldots,T}\right]=2\Omega^{-2}. \qquad (\Delta.98)$$

(ii) Για το $T\times 1$ διάνυσμα ε, με στοιχεία $\varepsilon_t=2u_te_t-\tau e_t^2$, όπου $e_t=x_t'BX'u/\sqrt{T}=u'XBx_t/\sqrt{T}$, για $t,s=1,\ldots,T$ (βλ. τις (4.8) και (4.9)) και κάνοντας χρήση της (Δ.93) βρίσκουμε ότι

$$\varepsilon_t=2u_t(x_t'BX'u/\sqrt{T})-\tau(x_t'BX'u/\sqrt{T})(u'XBx_t/\sqrt{T})=$$

$$=2u_t(x_t'BX'u/\sqrt{T})-\tau(x_t'BX'uu'XBx_t/T)=$$

$$=\left[2u_tx_t'BX'\left[(u_s)_{s=1,\ldots,T}\right]-(x_t'BX'uu'XBx_t/T)\right]\Big/\sqrt{T}=$$

$$=\left[2x_t'BX'\left[(u_tu_s)_s\right]-(x_t'BX'uu'XBx_t/T)\right]\Big/\sqrt{T} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(\varepsilon_t)=\left[2x_t'BX'E\left[(u_tu_s)_s\right]-x_t'BX'E(uu')XBx_t/T\right]\Big/\sqrt{T}=$$

$$=\left[2x_t'B\left[(x_t)_t\right]\left[(\delta_{ts}\sigma_t^2)_t\right]-x_t'BX'\Omega^{-1}XBx_t/T\right]\Big/\sqrt{T}=$$

$$=\left[2x_t'B\left[\sum_{t=1}^{T}x_t\delta_{ts}\sigma_t^2\right]-x_t'B(X'\Omega^{-1}X/T)Bx_t\right]\Big/\sqrt{T}=$$

$$=(2x_t'Bx_t\sigma_t^2-x_t'B\Gamma Bx_t)/\sqrt{T}=v_t/\sqrt{T}, \qquad (\Delta.99)$$

διότι από τις (4.8), (4.9), (Δ.1) και (Δ.96) έπεται ότι

$$\Gamma=\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^2x_tx_t'/T=[(x_t)_t]\,\mathrm{diag}(\sigma_t^2)\,[(x_t')_t]/T=X'\Omega^{-1}X/T. \qquad (\Delta.100)$$

Εφόσον $\varepsilon=[(\varepsilon_t)_{t=1,\ldots,T}]$ και $v=[(v_t)_{t=1,\ldots,T}]$, από την (Δ.99) συνεπάγεται ότι

$$E(\varepsilon)=\left[[E(\varepsilon_t)]_t\right]=[(v_t/\sqrt{T})_t]=[(v_t)_t]/\sqrt{T}=v/\sqrt{T}. \qquad (\Delta.101)$$

(iii) Για το $T\times 1$ διάνυσμα $\bar{\varepsilon}$, με στοιχεία $\bar{\varepsilon}_t=2u_t\bar{e}_t-\tau\bar{e}_t^2$, όπου $\bar{e}_t=x_t'GX'\Omega u/\sqrt{T}=u'\Omega XGx_t/\sqrt{T}$, για $t,s=1,\ldots,T$ (βλ. τις (4.8) και (4.9)) και κάνοντας χρήση των (4.9) και (Δ.2) βρίσκουμε ότι

$$\bar{\varepsilon}_t=2u_t(x_t'GX'\Omega u/\sqrt{T})-\tau(x_t'GX'\Omega u/\sqrt{T})(u'\Omega XGx_t/\sqrt{T})=$$

$$=2u_t(x_t'GX'\Omega u/\sqrt{T})-\tau(x_t'GX'\Omega uu'\Omega XGx_t/T)=$$

$$=\left[2u_tx_t'GX'\Omega[(u_s)_{s=1,\ldots,T}]-(x_t'GX'\Omega uu'\Omega XGx_t/T)\right]\Big/\sqrt{T}=$$

$$=\left[2x_t'GX'\Omega[(u_tu_s)_s]-(x_t'GX'\Omega uu'\Omega XGx_t/T)\right]\Big/\sqrt{T}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(\bar{\varepsilon}_t)=\left[2x_t'GX'\Omega E[(u_tu_s)_s]-x_t'GX'\Omega E(uu')\Omega XGx_t/T\right]\Big/\sqrt{T}=$$

$$=\left[2x_t'G[(x_t)_t]\,\mathrm{diag}(\sigma_t^{-2})\,[(\delta_{ts}\sigma_t^2)_t]-x_t'GX'\Omega\Omega^{-1}\Omega XGx_t/T\right]\Big/\sqrt{T}=$$

$$=\left[2x_t'G\left[\sum_{t=1}^{T}x_t\sigma_t^{-2}\delta_{ts}\sigma_t^2\right]-x_t'G(X'\Omega X/T)Gx_t\right]\Big/\sqrt{T}=$$

$$=(2x_t'Gx_t-x_t'GAGx_t)/\sqrt{T}=(2x_t'Gx_t-x_t'Gx_t)/\sqrt{T}=x_t'Gx_t/\sqrt{T}. \qquad (\Delta.102)$$

Συνεπώς, εφόσον $\bar{\varepsilon}=[(\bar{\varepsilon}_t)_{t=1,\ldots,T}]$, από την (Δ.102) έπεται ότι

$$E(\bar{\varepsilon})=\left[[E(\bar{\varepsilon}_t)]_t\right]=[(x_t'Gx_t/\sqrt{T})_t]=[(x_t'Gx_t)_t]/\sqrt{T}=XGx_t/\sqrt{T}. \qquad (\Delta.103)$$

ΩΕΔ

<u>ΛΗΜΜΑ Δ.4:</u> Για τις μήτρες Ω^2 και $\hat{\Omega}^2$ ισχύει η σχέση

$$\hat{\Omega}^2=\Omega^2+2\tau\sum_{i=1}^{\infty}\Omega\Omega_i d_{ii}+\omega(\tau^2), \qquad (\Delta.104)$$

όπου $\hat{\Omega}^2$ είναι ένας εκτιμητής της μήτρας Ω^2 και d_{1i} είναι το i-στοιχείο του διανύσματος d_{*1}', το οποίο είναι υποδιάνυσμα του διανύσματος $d_1'=(\sigma_o, d_{*1}')$ που έχει οριστεί στη σχέση (2.6).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Χρησιμοποιώντας τις (4.1), (4.2), (Δ.2) και (Δ.3) βρίσκουμε ότι

$$\Omega^2=\mathrm{diag}(\omega_t^2), \quad \omega_t=\sigma_t^{-2}=(z_t'\gamma)^{-1}. \tag{Δ.105}$$

Επομένως, κάνοντας χρήση του Λήμματος Δ.1, βρίσκουμε ότι η παράγωγος της μήτρας Ω^2 ως προς γ_i είναι

$$\partial\Omega^2/\partial\gamma_i=\mathrm{diag}(\partial\omega_t^2/\partial\gamma_i)=\mathrm{diag}(2\omega_t\partial\omega_t/\partial\gamma_i)=\mathrm{diag}(2\omega_t\omega_{ti})=$$

$$=2\mathrm{diag}(\omega_t)\mathrm{diag}(\omega_{ti})=2\Omega\Omega_i. \tag{Δ.106}$$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor την μήτρα $\hat{\Omega}^2$ περί την Ω^2 παίρνουμε

$$\hat{\Omega}^2=\Omega^2+\sum_{i=1}^{\kappa}\frac{\partial\Omega^2}{\partial\gamma_i}(\hat{\gamma}_i-\gamma_i)+\ldots=\Omega^2+\sum_{i=1}^{\kappa}\frac{\partial\Omega^2}{\partial\gamma_i}\tau\frac{(\hat{\gamma}_i-\gamma_i)}{\tau}+\ldots=$$

$$=\Omega^2+\tau\sum_{i=1}^{\kappa}\frac{\partial\Omega^2}{\partial\gamma_i}\delta_i+\omega(\tau^2), \tag{Δ.107}$$

όπου $\delta_i=(\hat{\gamma}_i-\gamma_i)/\tau$. Από τον ορισμό (2.4) και θέτοντας $\sigma = 1$ έχουμε ότι για το $(\kappa+1)\times1$ διάνυσμα δ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\delta=\begin{bmatrix}\delta_o\\ [(\delta_i)_{i=1,\ldots,\kappa}]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\delta_o\\ \delta_*\end{bmatrix}, \quad \delta_*=[(\delta_i)_{i=1,\ldots,\kappa}]=\frac{(\hat{\gamma}-\gamma)}{\tau}$$

και (Δ.108)

$$\delta_o=(\hat{\sigma}^2-1)/\tau.$$

Επιπλέον, το διάνυσμα δ έχει ένα στοχαστικό ανάπτυγμα της μορφής

$$\delta=d_1+\tau d_2+\omega(\tau^2) \tag{Δ.109}$$

και συνεπώς το διάνυσμα δ_* έχει, κατ' αναλογίαν, ένα στοχαστικό ανάπτυγμα της μορφής

$$\delta_*=d_{*1}-\tau d_{*2}+\omega(\tau^2). \tag{Δ.110}$$

Άρα,

$$\delta_i=d_{1i}-\tau d_{2i}+\omega(\tau^2), \tag{Δ.111}$$

όπου τα δ_i, d_{1i}, d_{2i} είναι τα i-στοιχεία των διανυσμάτων δ_*, d_{*1},

d_{*2}, αντίστοιχα. Από τις (Δ.106), (Δ.107) και (Δ.111) συνεπάγεται ότι

$$\hat{\Omega}^2=\Omega^2+\tau\sum_{i=1}^{\infty}2\Omega\Omega_i(d_{1i}-\tau d_{2i}+\omega(\tau^2))+\omega(\tau^2)=$$

$$=\Omega^2+2\tau\sum_{i=1}^{\infty}\Omega\Omega_i d_{1i}+\omega(\tau^2). \qquad (\Delta.112)$$

QED

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΗΣ ΠΡΟΤΑΣΗΣ 4.2:</u> Χρησιμοποιώντας τις (4.1), (4.2), (4.8), (4.9), (Δ.1), (Δ.2), (Δ.96) και (Δ.105) και εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη της (Δ.100), βρίσκουμε ότι

$$A=\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-2}x_t x_t'/T=X'\Omega X/T, \quad G=A^{-1}=(X'\Omega X/T)^{-1},$$

$$\bar{A}=\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}z_t z_t'/T=Z'\Omega^2 Z/T, \quad \bar{G}=\bar{A}^{-1}=(Z'\Omega^2 Z/T)^{-1},$$

$$F=\sum_{t=1}^{T}x_t x_t'/T=X'X/T, \quad B=F^{-1}=(X'X/T)^{-1}, \qquad (\Delta.113)$$

$$\bar{F}=\sum_{t=1}^{T}z_t z_t'/T=Z'Z/T, \quad \bar{B}=\bar{F}^{-1}=(Z'Z/T)^{-1},$$

$$\Gamma=\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{2}x_t x_t'/T=X'\Omega^{-1}X/T, \quad \bar{\Gamma}=\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{4}z_t z_t'/T=Z'\Omega^{-2}Z/T.$$

Από το Λήμμα Β.1, θέτοντας σ = 1, έχουμε

$$\hat{\beta}=\beta+\tau(b+\tau b_*), \qquad (\Delta.114)$$

όπου τα διανύσματα b και b_* έχουν οριστεί στο Λήμμα Β.1 και $b\sim N(0,G)$. Από την (Δ.114) έπεται ότι

$$\hat{\beta}-\beta=\tau(b+\tau b_*) \Rightarrow \sqrt{T}(\hat{\beta}-\beta)=b+\tau b_* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=\sqrt{T}(\hat{\beta}-\beta)-\tau b_*=\sqrt{T}(\hat{\beta}-\beta)+\omega(\tau)=k+\omega(\tau), \qquad (\Delta.115)$$

όπου $k=\sqrt{T}(\hat{\beta}-\beta)$. Συνεπώς, ισχύει ότι $k=b+\omega(\tau)$. Από την απόδειξη της Πρότασης 3.2 έχουμε

$$\hat{u}'\hat{u}=u'\hat{\Omega}u-k'(X'\hat{\Omega}X/T)k, \qquad (\Delta.116)$$

όπου $\hat{u}$ είναι τα GLS κατάλοιπα της εξίσωσης (4.3), δηλαδή

$$\hat{u}=\hat{P}(y-X\hat{\beta}), \quad \hat{\Omega}=\hat{P}'\hat{P}. \qquad (\Delta.117)$$

Αντικαθιστώντας από την (Δ.115) στην (Δ.116) παίρνουμε

$$\hat{u}'\hat{u}=u'\hat{\Omega}u-(b+\omega(\tau))'(X'\hat{\Omega}X/T)(b+\omega(\tau))=$$

$$=u'\hat{\Omega}u-(b'+\omega(\tau))(X'\hat{\Omega}X/T)(b+\omega(\tau))=$$

$$=u'\hat{\Omega}u-b'(X'\hat{\Omega}X/T)b+\omega(\tau) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow =\hat{u}'\hat{u}/T=\left[u'\hat{\Omega}u-b'(X'\hat{\Omega}X/T)b+\omega(\tau)\right]/T. \qquad (\Delta.118)$$

Αναπτύσσουμε κατά Taylor την ποσότητα $u'\hat{\Omega}u/T$ γύρω από την $u'\Omega u/T$. Έχουμε

$$u'\hat{\Omega}u/T=u'\Omega u/T+\sum_{i=1}^{\kappa}(\partial u'\Omega u/\partial\gamma_i)(\hat{\gamma}_i-\gamma_i)/T+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\kappa}\sum_{j=1}^{\kappa}(\partial^2 u'\Omega u/\partial\gamma_i\partial\gamma_j)(\hat{\gamma}_i-\gamma_i)(\hat{\gamma}_j-\gamma_j)/T+\ldots=$$

$$=u'\Omega u/T+\sum_{i=1}^{\kappa}(u'\Omega_i u/T)\tau\frac{(\hat{\gamma}_i-\gamma_i)}{\tau}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\kappa}\sum_{j=1}^{\kappa}(u'\Omega_{ij}u/T)\tau\frac{(\hat{\gamma}_i-\gamma_i)}{\tau}\tau\frac{(\hat{\gamma}_j-\gamma_j)}{\tau}+\ldots=$$

$$=u'\Omega u/T+\tau\sum_{i=1}^{\kappa}(u'\Omega_i u/T)\delta_i+\frac{\tau^2}{2}\sum_{i=1}^{\kappa}\sum_{j=1}^{\kappa}(u'\Omega_{ij}u/T)\delta_i\delta_j+\omega(\tau^3), \qquad (\Delta.119)$$

όπου $\delta_i=(\hat{\gamma}_i-\gamma_i)/\tau$ και $i,j=1,\ldots,\kappa$. Κατ' αναλογία προς το στοχαστικό ανάπτυγμα (Δ.109), το δ_o έχει ένα στοχαστικό ανάπτυγμα της μορφής

$$\delta_o=\sigma_o+\tau\sigma_1+\omega(\tau^2), \qquad (\Delta.120)$$

όπου τα σ_o και σ_1 είναι τα πρώτα στοιχεία των διανυσμάτων d_1 και d_2, αντίστοιχα, της σχέσης (Δ.109). Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τις ποσότητες σ_o και σ_1. Κάνοντας χρήση του Λήμματος Δ.2 και αντικαθιστώντας στην (Δ.119) παίρνουμε (για $i,j=1,\ldots,\kappa$)

$$u'\hat{\Omega}u/T=1-\tau\sqrt{T}+\tau\sqrt{T}(u'\Omega u/T)+\tau\sum_{i=1}^{\kappa}\left[\tau\sqrt{T}(u'\Omega_i u/T)+\tau\sqrt{T}a_i-a_i\right]\delta_i+$$

$$+\frac{\tau^2}{2}\sum_{i=1}^{\kappa}\sum_{j=1}^{\kappa}\left[\tau\sqrt{T}(u'\Omega_{ij}u/T)-\tau\sqrt{T}2a_{ij}+2a_{ij}\right]\delta_i\delta_j+\omega(\tau^3)=$$

$$=1+\tau\left[\sqrt{T}(u'\Omega u/T-1)\right]+\tau^2\sum_{i=1}^{\kappa}\sqrt{T}(u'\Omega_i u/T+a_i)\delta_i-\tau\sum_{i=1}^{\kappa}a_i\delta_i+$$

$$+\frac{\tau^2}{2}\sum_{i=1}^{\kappa}\sum_{j=1}^{\kappa}2a_{ij}\delta_i\delta_j+\frac{\tau^3}{2}\sum_{i=1}^{\kappa}\sum_{j=1}^{\kappa}\sqrt{T}(u'\Omega_{ij}u/T-2a_{ij})\delta_i\delta_j+\omega(\tau^3)=$$

$$=1+\tau w_o+\tau^2\sum_{i=1}^{\kappa}w_i\delta_i-\tau\sum_{i=1}^{\kappa}a_i\delta_i+\tau^2\sum_{i=1}^{\kappa}\sum_{j=1}^{\kappa}a_{ij}\delta_i\delta_j+$$

$$+\frac{\tau^3}{2}\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa} w_{ij}\delta_i\delta_j+\omega(\tau^3)=$$

$$=1+\tau(w_o-\sum_{i=1}^{\varkappa} a_i\delta_i)+\tau^2(\sum_{i=1}^{\varkappa} w_i\delta_i+\sum_{i=1}^{\varkappa}\sum_{j=1}^{\varkappa} a_{ij}\delta_i\delta_j)+\omega(\tau^3)=$$

$$=1+\tau(w_o-a'\delta_*)+\tau^2(w'\delta_*+\delta_*'\bar{A}\delta_*)+\omega(\tau^3), \qquad (\Lambda.121)$$

όπου

$$w=\left[(w_i)_{i=1,\ldots,\varkappa}\right], \quad a=\left[(a_i)_{i=1,\ldots,\varkappa}\right], \qquad (\Lambda.122)$$

$$A=\left[(a_{ij})_{i,j=1,\ldots,\varkappa}\right], \quad \delta=\left[(\delta_i)_{i=1,\ldots,\varkappa}\right].$$

Αντικαθιστώντας από την (Λ.110) στην (Λ.121) παίρνουμε

$$u'\hat{\Omega}u/T=1+\tau\left[w_o-a'(d_{*_1}-\tau d_{*_2}+\omega(\tau^2)\right]+$$

$$+\tau^2\left[w'(d_{*_1}-\tau d_{*_2}+\omega(\tau^2))+(d_{*_1}-\tau d_{*_2}+\omega(\tau^2))'\bar{A}(d_{*_1}-\tau d_{*_2}+\omega(\tau^2))\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=1+\tau(w_o-a'd_{*_1})+\tau^2(w'd_{*_1}+d_{*_1}'\bar{A}d_{*_1}+a'd_{*_2})+\omega(\tau^3). \qquad (\Lambda.123)$$

Από την απόδειξη της Πρότασης 3.2 και θέτοντας $\sigma = 1$ έχουμε ότι

$$\hat{u}'\hat{u}/T=\hat{\sigma}^2-\hat{\sigma}^2 n\tau^2 \Rightarrow \hat{\sigma}^2=\hat{u}'\hat{u}/T+\hat{\sigma}^2 n\tau^2$$

και (Λ.124)

$$\hat{\sigma}^2=1+\omega(\tau) \Rightarrow \hat{\sigma}^2 n\tau^2=(1+\omega(\tau))n\tau^2=n\tau^2+\omega(\tau^3)$$

και ότι ισχύει

$$\hat{A}=A+\omega(\tau) \Rightarrow b'\hat{A}b=b'Ab+\omega(\tau) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T}\,b'\hat{A}b=\tau^2 b'\hat{A}b=\tau^2(b'Ab+\omega(\tau))=\tau^2 b'Ab+\omega(\tau^3)=\frac{1}{T}\,b'Ab+\omega(\tau^3). \qquad (\Lambda.125)$$

Από τις σχέσεις (Λ.118), (Λ.120), (Λ.124) και (Λ.125) και χρησιμοποιώντας τον ορισμό (2.4) βρίσκουμε ότι

$$\hat{\sigma}^2=\hat{u}'\hat{u}/T+n\tau^2+\omega(\tau^3)=$$

$$=\left[u'\hat{\Omega}u-b'(X'\hat{\Omega}X/T)b+\omega(\tau)\right]/T+n\tau^2+\omega(\tau^3)=$$

$$=u'\hat{\Omega}u/T+\tau^2(-b'\hat{A}b+n)+\omega(\tau^3)=u'\hat{\Omega}u/T+\tau^2(-b'Ab+n)+\omega(\tau^3)=$$

$$=1+\tau(w_o-a'd_{*_1})+\tau^2(w'd_{*_1}+d_{*_1}'\bar{A}d_{*_1}+a'd_{*_2})+\tau^2(-b'Ab+n)+\omega(\tau^3)=$$

$$=1+\tau(w_o-a'd_{*_1})+\tau^2(w'd_{*_1}+d_{*_1}'\bar{A}d_{*_1}+a'd_{*_2}-b'Ab+n)+\omega(\tau^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_o=(\hat{\sigma}^2-1)/\tau=(w_o-a'd_{*_1})+\tau(w'd_{*_1}+d_{*_1}'\bar{A}d_{*_1}+a'd_{*_2}-b'Ab+n)+\omega(\tau^2)=$$

$$=\sigma_o+\tau\sigma_1+\omega(\tau^2), \qquad (\Lambda.126)$$

όπου

$$\sigma_o=w_o-a'd_{*1}$$

και (Δ.127)

$$\sigma_1=w'd_{*1}+d_{*1}'\bar{A}d_{*1}+a'd_{*2}-b'Ab+n.$$

Έστω $\tilde{u}$ το T×1 διάνυσμα των OLS καταλοίπων από την εξίσωση (4.3). Ισχύει ότι

$$\tilde{u}=u-X(X'X)^{-1}X'u. \quad (\Delta.128)$$

Έστω $\tilde{u}_t$ το t-στοιχείο του διανύσματος $\tilde{u}$. Από τους ορισμούς (4.8) και (4.9) και τις (Δ.94) και (Δ.128) έπεται ότι

$$\tilde{u}_t=u_t-x_t'(X'X)^{-1}X'u=u_t-x_t'(X'X/T)^{-1}X'u/T=$$

$$=u_t-\tau x_t'BX'u/\sqrt{T}=u_t-\tau e_t, \quad (\Delta.129)$$

όπου $e_t=x_t'BX'u/\sqrt{T}$. Από τις υποθέσεις μας έπεται ότι το T×1 διάνυσμα

$$e=\left[(e_t)_{t=1,\ldots,T}\right]=O(1). \quad (\Delta.130)$$

Επομένως,

$$\tilde{u}_t^2=(u_t-\tau e_t)^2=u_t^2-2\tau u_t e_t+\tau^2 e_t^2=u_t^2-\tau(2u_t e_t-\tau e_t^2)=u_t^2-\tau\varepsilon_t, \quad (\Delta.131)$$

όπου $\varepsilon_t=2u_t e_t-\tau e_t^2$. Έστω $\hat{u}$ το T×1 διάνυσμα των GLS καταλοίπων από την εξίσωση (4.3), όταν η μήτρα Ω είναι γνωστή. Ισχύει ότι

$$\hat{u}=u-X(X'\Omega X)^{-1}X'\Omega u. \quad (\Delta.132)$$

Έστω $\hat{u}_t$ το t-στοιχείο του διανύσματος $\hat{u}$. Από τους ορισμούς (4.8) και (4.9) και τις (Δ.94) και (Δ.132) έπεται ότι

$$\hat{u}_t=u_t-x_t'(X'\Omega X)^{-1}X'\Omega u=u_t-x_t'(X'\Omega X/T)^{-1}X'\Omega u/T=$$

$$=u_t-\tau x_t'GX'\Omega u/\sqrt{T}=u_t-\tau\bar{e}_t, \quad (\Delta.133)$$

όπου $\bar{e}_t=x_t'GX'\Omega u/\sqrt{T}$. Από τις υποθέσεις μας έπεται ότι το T×1 διάνυσμα

$$\bar{e}=\left[(\bar{e}_t)_{t=1,\ldots,T}\right]=O(1). \quad (\Delta.134)$$

Συνεπώς,

$$\hat{u}_t^2=(u_t-\tau\bar{e}_t)^2=u_t^2-2\tau u_t\bar{e}_t+\tau^2\bar{e}_t^2=u_t^2-\tau(2u_t\bar{e}_t-\tau\bar{e}_t^2)=u_t^2-\tau\bar{\varepsilon}_t, \quad (\Delta.135)$$

όπου $\bar{\varepsilon}_t=2u_t\bar{e}_t-\tau\bar{e}_t^2$.

Ο GQ εκτιμητής του γ είναι

$$\hat{\gamma}_{GQ}=\left[\sum_{t=1}^{T} z_t z_t'\right]^{-1}\sum_{t=1}^{T} z_t(y_t-x_t'\tilde{\beta})^2, \qquad (\Delta.136)$$

όπου $\tilde{\beta}$ είναι ο OLS εκτιμητής του β και $y_t-x_t'\tilde{\beta}=\tilde{u}_t$ είναι τα OLS κατάλοιπα από την εξίσωση (4.3). Ορίζουμε το T×1 διάνυσμα

$$\tilde{U}=\left[(\tilde{u}_t^2)_{t=1,\ldots,T}\right]. \qquad (\Delta.137)$$

Ο GQ εκτιμητής του γ είναι ο OLS εκτιμητής του γ από την εξίσωση

$$\tilde{U}=Z\gamma+\upsilon, \qquad (\Delta.138)$$

όπου

$$\upsilon\sim N(0,\Omega^{-2}). \qquad (\Delta.139)$$

Το αποτέλεσμα αυτό αποδεικνύεται εύκολα με χρήση των (Δ.1), (Δ.137), (Δ.138) και (Δ.139), διότι

$$\hat{\gamma}_{OLS}=(Z'Z)^{-1}Z'\tilde{U}=\left[\sum_{t=1}^{T} z_t z_t'\right]^{-1}\sum_{t=1}^{T} z_t(y_t-x_t'\tilde{\beta})^2=\hat{\gamma}_{GQ}. \qquad (\Delta.140)$$

Από τις (4.1), (4.2), (Δ.131), (Δ.138) και (Δ.139) βρίσκουμε ότι το t-στοιχείο του T×1 διανύσματος $\upsilon=\left[(\upsilon_t)_{t=1,\ldots,T}\right]$ είναι

$$\upsilon_t=\tilde{u}_t^2-z_t'\gamma=u_t^2-\tau\varepsilon_t-\sigma_t^2=(u_t^2-\sigma_t^2)-\tau\varepsilon_t=\bar{u}_t-\tau\varepsilon_t, \qquad (\Delta.141)$$

όπου $\bar{u}_t=u_t^2-\sigma_t^2$. Συνεπώς,

$$\upsilon=\bar{u}-\tau\varepsilon, \quad \bar{u}=\left[(\bar{u}_t)_{t=1,\ldots,T}\right]. \qquad (\Delta.142)$$

Από τις (Δ.1), (Δ.108), (Δ.110), (Δ.113), (Δ.138), (Δ.140) και (Δ.142) παίρνουμε

$$\hat{\gamma}_{GQ}=(Z'Z)^{-1}Z'\tilde{U}=(Z'Z)^{-1}Z'(Z\gamma+\upsilon)=$$

$$=(Z'Z)^{-1}Z'Z\gamma+(Z'Z)^{-1}Z'\upsilon=\gamma+(Z'Z)^{-1}Z'\upsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_*^{GQ}=\sqrt{T}(\hat{\gamma}_{GQ}-\gamma)=\sqrt{T}(Z'Z)^{-1}Z'\upsilon=\sqrt{T}(Z'Z/T)^{-1}Z'\upsilon/T=$$

$$=\bar{B}Z'(\bar{u}-\tau\varepsilon)/\sqrt{T}=\bar{B}Z'\bar{u}/\sqrt{T}-\tau\bar{B}Z'\varepsilon/\sqrt{T}=$$

$$=d_{*1}^{GQ}-\tau d_{*2}^{GQ}, \qquad (\Delta.143)$$

όπου

$$d_{*1}^{GQ}=\bar{B}Z'\bar{u}/\sqrt{T}, \quad d_{*2}^{GQ}=\bar{B}Z'\varepsilon/\sqrt{T}. \qquad (\Delta.144)$$

Ο A εκτιμητής του γ είναι

$$\hat{\gamma}_A=\left[\sum_{t=1}^{T}(z_t'\hat{\gamma}_{GQ})^{-2}z_t z_t'\right]^{-1}\sum_{t=1}^{T}(z_t'\hat{\gamma}_{GQ})^{-2}z_t(y_t-x_t'\tilde{\beta})^2, \qquad (\Delta.145)$$

όπου $\tilde{\beta}$ είναι ο OLS εκτιμητής του β και $y_t-x_t'\tilde{\beta}=\tilde{u}_t$ είναι τα OLS κατάλοιπα από την εξίσωση (4.3). Χρησιμοποιώντας τις (Δ.1), (Δ.137), (Δ.138) και (Δ.139) βρίσκουμε ότι ο Α εκτιμητής του γ είναι ο GLS εκτιμητής του γ από την εξίσωση (Δ.138), διότι

$$\hat{\gamma}_{GLS}=(Z'\hat{\Omega}^{-2}Z)^{-1}Z'\hat{\Omega}^{-2}\tilde{U}=$$

$$=\left[\sum_{t=1}^{T}(z_t'\hat{\gamma}_{GQ})^{-2}z_tz_t'\right]^{-1}\sum_{t=1}^{T}(z_t'\hat{\gamma}_{GQ})^{-2}z_t(y_t-x_t'\tilde{\beta})^2=\hat{\gamma}_A, \qquad (\Delta.146)$$

όπου

$$\hat{\Omega}=\hat{\Omega}_{GQ}=\mathrm{diag}\left[(z_t'\hat{\gamma}_{GQ})^{-1}\right]. \qquad (\Delta.147)$$

Από τις (Δ.1), (Δ.108), (Δ.110), (Δ.113), (Δ.138), (Δ.146) και (Δ.147) παίρνουμε

$$\hat{\gamma}_A=(Z'\hat{\Omega}^{-2}Z)^{-1}Z'\hat{\Omega}^{-2}\tilde{U}=(Z'\hat{\Omega}^{-2}Z)^{-1}Z'\hat{\Omega}^{-2}(Z\gamma+\upsilon)=$$

$$=(Z'\hat{\Omega}^{-2}Z)^{-1}Z'\hat{\Omega}^{-2}Z\gamma+(Z'\hat{\Omega}^{-2}Z)^{-1}Z'\hat{\Omega}^{-2}\upsilon=\gamma+(Z'\hat{\Omega}^{-2}Z)^{-1}Z'\hat{\Omega}^{-2}\upsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_*^A=\sqrt{T}(\hat{\gamma}_A-\gamma)=\sqrt{T}(Z'\hat{\Omega}^{-2}Z)^{-1}Z'\hat{\Omega}^{-2}\upsilon=\sqrt{T}(Z'\hat{\Omega}^{-2}Z/T)^{-1}Z'\hat{\Omega}^{-2}\upsilon/T=$$

$$=\hat{\bar{G}}Z'\hat{\Omega}^{-2}\upsilon/\sqrt{T}, \qquad (\Delta.148)$$

όπου

$$\hat{\bar{G}}=(Z'\hat{\Omega}^{-2}Z/T)^{-1}, \quad \hat{\Omega}=\hat{\Omega}_{GQ}=\mathrm{diag}\left[(z_t'\hat{\gamma}_{GQ})^{-1}\right]. \qquad (\Delta.149)$$

Από το Λήμμα Α.1, τις (4.8) και (4.9), το Λήμμα Δ.4 και την (Δ.147) παίρνουμε

$$Z'\hat{\Omega}^{-2}Z/T=Z'\Omega^{-2}Z/T+2\tau\sum_{i=1}^{\kappa}(Z'\Omega\Omega_iZ/T)d_{1i}^{GQ}+\omega(\tau^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\bar{A}}=\bar{A}+2\tau\sum_{i=1}^{\kappa}\bar{A}_id_{1i}^{GQ}+\omega(\tau^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\bar{G}}=(\hat{\bar{A}})^{-1}=\left[\bar{A}+2\tau\sum_{i=1}^{\kappa}\bar{A}_id_{1i}^{GQ}+\omega(\tau^2)\right]^{-1}=\bar{A}^{-1}-2\tau\sum_{i=1}^{\kappa}\bar{A}^{-1}\bar{A}_i\bar{A}^{-1}d_{1i}^{GQ}+\omega(\tau^2)=$$

$$=\bar{G}-2\tau\sum_{i=1}^{\kappa}\bar{G}\bar{A}_i\bar{G}d_{1i}^{GQ}+\omega(\tau^2), \qquad (\Delta.150)$$

όπου

$$\bar{A}_i=Z'\Omega\Omega_iZ/T. \qquad (\Delta.151)$$

Επιπλέον, κάνοντας χρήση του Λήμματος Δ.4 και της (Δ.142) παίρνουμε

$$Z'\hat{\Omega}^2 u/\sqrt{T}=Z'\hat{\Omega}^2(\bar{u}-\tau\varepsilon)/\sqrt{T}=$$

$$=Z'\Omega^2(\bar{u}-\tau\varepsilon)/\sqrt{T}+2\tau\sum_{i=1}^{\infty}\left[\,Z'\Omega\Omega_i(\bar{u}-\tau\varepsilon)/\sqrt{T}\,\right]d_{1i}^{GQ}+\omega(\tau^2)=$$

$$=Z'\Omega^2\bar{u}/\sqrt{T}-\tau Z'\Omega^2\varepsilon/\sqrt{T}+2\tau\sum_{i=1}^{\infty}(Z'\Omega\Omega_i\bar{u}/\sqrt{T})\,d_{1i}^{GQ}+\omega(\tau^2)\,. \qquad (\Delta.152)$$

Αντικαθιστώντας στην (Δ.148) από τις (Δ.150) και (Δ.152) βρίσκουμε ότι

$$\delta_*^A=\left[\bar{G}-2\tau\sum_{i=1}^{\infty}\overline{GA}_i\bar{G}d_{1i}^{GQ}+\omega(\tau^2)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[Z'\Omega^2\bar{u}/\sqrt{T}-\tau Z'\Omega^2\varepsilon/\sqrt{T}+2\tau\sum_{j=1}^{\infty}(Z'\Omega\Omega_j\bar{u}/\sqrt{T})\,d_{1j}^{GQ}+\omega(\tau^2)\right]=$$

$$=\bar{G}(Z'\Omega^2\bar{u}/\sqrt{T})-\tau\bar{G}(Z'\Omega^2\varepsilon/\sqrt{T})+2\tau\sum_{j=1}^{\infty}\bar{G}(Z'\Omega\Omega_j\bar{u}/\sqrt{T})\,d_{1j}^{GQ}-$$

$$-2\tau\sum_{i=1}^{\infty}\overline{GA}_i\bar{G}(Z'\Omega^2\bar{u}/\sqrt{T})\,d_{1i}^{GQ}+\omega(\tau^2)=$$

$$=\bar{G}(Z'\Omega^2\bar{u}/\sqrt{T})-$$

$$-\tau\left[\bar{G}(Z'\Omega^2\varepsilon/\sqrt{T})+2\sum_{i=1}^{\infty}\overline{GA}_i\bar{G}(Z'\Omega^2\bar{u}/\sqrt{T})\,d_{1i}^{GQ}-2\sum_{i=1}^{\infty}\bar{G}(Z'\Omega\Omega_i\bar{u}/\sqrt{T})\,d_{1i}^{GQ}\right]+\omega(\tau^2)=$$

$$=d_{*_1}^A-\tau d_{*_2}^A+\omega(\tau^2)\,, \qquad (\Delta.153)$$

όπου

$$d_{*_1}^A=\bar{G}(Z'\Omega^2\bar{u}/\sqrt{T})$$

και (Δ.154)

$$d_{*_2}^A=\bar{G}(Z'\Omega^2\varepsilon/\sqrt{T})+2\sum_{i=1}^{\infty}\overline{GA}_i\bar{G}(Z'\Omega^2\bar{u}/\sqrt{T})\,d_{1i}^{GQ}-2\sum_{i=1}^{\infty}\bar{G}(Z'\Omega\Omega_i\bar{u}/\sqrt{T})\,d_{1i}^{GQ}.$$

Ο ΙΑ εκτιμητής του γ είναι

$$\hat{\gamma}_\alpha=\left[\sum_{t=1}^{T}(z_t'\hat{\gamma}_{\alpha-1})^{-2}z_t z_t'\right]^{-1}\sum_{t=1}^{T}(z_t'\hat{\gamma}_{\alpha-1})^{-2}z_t(y_t-x_t'\hat{\beta}_{\alpha-1})^2, \qquad (\Delta.155)$$

όπου $\hat{\beta}_{\alpha-1}$, $\hat{\gamma}_{\alpha-1}$ είναι ο εφικτός (feasible) GLS εκτιμητής του β και ο αντίστοιχος εκτιμητής του γ κατά την προηγούμενη επανάληψη και $y_t-x_t'\hat{\beta}_{\alpha-1}=\hat{u}_t$ είναι τα GLS κατάλοιπα από την εξίσωση (4.3). Έστω $\hat{\gamma}_1=\gamma_A$. Χρησιμοποιώντας την (4.1) και τον $\hat{\gamma}_A$ υπολογίζουμε την $\hat{\Omega}$ και με την GLS μέθοδο εκτιμούμε τον $\hat{\beta}_1=\hat{\beta}_A$. Για $\alpha=2,3,\ldots,$ εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι ο $\hat{\gamma}_\alpha$ είναι ο GLS εκτιμητής του γ από την εξίσωση

$$\hat{U}=Z\gamma+\upsilon, \qquad (\Delta.156)$$

όπου

$$\hat{U}=\left[(\hat{u}_t^2)_{t=1,\ldots,T}\right] \qquad (\Delta.157)$$

και για το υ ισχύει η (Δ.139). Πράγματι, θέτοντας

$$\hat{\Omega}=\hat{\Omega}_{\alpha-1}=\mathrm{diag}\left[(z_t'\hat{\gamma}_{\alpha-1})^{-1}\right], \qquad (\Delta.158)$$

βρίσκουμε

$$\hat{\gamma}_{GLS}=(Z'\hat{\Omega}^2Z)^{-1}Z'\hat{\Omega}^2\hat{U}=$$

$$=\left[\sum_{t=1}^{T}(z_t'\hat{\gamma}_{\alpha-1})^{-2}z_tz_t'\right]^{-1}\sum_{t=1}^{T}(z_t'\hat{\gamma}_{\alpha-1})^{-2}z_t(y_t-x_t'\hat{\beta}_{\alpha-1})^2=\hat{\gamma}_{\alpha}. \qquad (\Delta.159)$$

Από τις (Δ.1), (Δ.108), (Δ.110), (Δ.113), (Δ.149), (Δ.156), (Δ.158) και (Δ.159) παίρνουμε ότι

$$\hat{\gamma}_{\alpha}=(Z'\hat{\Omega}^2Z)^{-1}Z'\hat{\Omega}^2\hat{U}=(Z'\hat{\Omega}^2Z)^{-1}Z'\hat{\Omega}^2(Z\gamma+\upsilon)=$$

$$=(Z'\hat{\Omega}^2Z)^{-1}Z'\hat{\Omega}^2Z\gamma+(Z'\hat{\Omega}^2Z)^{-1}Z'\hat{\Omega}^2\upsilon=\gamma+(Z'\hat{\Omega}^2Z)^{-1}Z'\hat{\Omega}^2\upsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_*^{\alpha}=\sqrt{T}(\hat{\gamma}_{\alpha}-\gamma)=\sqrt{T}(Z'\hat{\Omega}^2Z)^{-1}Z'\hat{\Omega}^2\upsilon=$$

$$=\sqrt{T}(Z'\hat{\Omega}^2Z/T)^{-1}Z'\hat{\Omega}^2\upsilon/T=\hat{\bar{G}}Z'\hat{\Omega}^2\upsilon/\sqrt{T}. \qquad (\Delta.160)$$

Στην περίπτωση που μελετούμε, τα $\hat{u}_t$ είναι τα GLS κατάλοιπα από την εξίσωση (4.3), όταν η μήτρα Ω δεν είναι γνωστή. Εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη της (Δ.133) παίρνουμε

$$\hat{u}_t=u_t-\tau x_t'\hat{G}X'\hat{\Omega}u/\sqrt{T}. \qquad (\Delta.161)$$

'Ομως, από τα Λήμματα B.2 και B.3 παίρνουμε ότι

$$\hat{G}=G+\omega(\tau), \quad \hat{\Omega}=\Omega+\omega(\tau). \qquad (\Delta.162)$$

Αντικαθιστώντας από την (Δ.162) στην (Δ.161) και λαμβάνοντας υπόψη την (Δ.133) βρίσκουμε

$$\hat{u}_t=u_t-\tau x_t'GX'\Omega u/\sqrt{T}+\omega(\tau)=u_t-\tau\bar{e}_t+\omega(\tau). \qquad (\Delta.163)$$

Από τις (4.1), (4.2), (Δ.139), (Δ.156) και (Δ.163) παίρνουμε ότι το t-στοιχείο του T×1 διανύσματος $\upsilon=\left[(\upsilon_t)_{t=1,\ldots,T}\right]$ είναι

$$\upsilon_t=\hat{u}_t^2-z_t'\gamma=u_t^2-\tau\bar{\varepsilon}_t-\sigma_t^2+\omega(\tau^2)=(u_t^2-\sigma_t^2)-\tau\bar{\varepsilon}_t+\omega(\tau^2)=\bar{u}_t-\tau\bar{\varepsilon}_t+\omega(\tau^2), \qquad (\Delta.164)$$

όπου $\bar{u}_t=u_t^2-\sigma_t^2$. Συνεπώς,

$$\upsilon=\bar{u}-\tau\bar{\varepsilon}+\omega(\tau^2), \quad \bar{u}=\left[(\bar{u}_t)_{t=1,\ldots,T}\right]. \qquad (\Delta.165)$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Α.1, την (Δ.113), το Λήμμα Δ.4 και την (Δ.158) και εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη της (Δ.150), βρίσκουμε ότι

$$\hat{\bar{G}}=\bar{G}-2\tau\sum_{i=1}^{k}\overline{GA}_i\bar{G}d_{1i}^{A}+\omega(\tau^2), \qquad (\Delta.166)$$

όπου η μήτρα $\bar{A}_i$ έχει οριστεί στην (Δ.151). Επιπλέον, από το Λήμμα Δ.4 και την (Δ.165) έπεται ότι

$$Z'\hat{\Omega}^2\upsilon/\sqrt{T}=Z'\Omega^2\left[\bar{u}-\tau\bar{\varepsilon}+\omega(\tau^2)\right]/\sqrt{T}+\omega(\tau^2)=$$

$$=Z'\Omega^2\left[\bar{u}-\tau\bar{\varepsilon}+\omega(\tau^2)\right]/\sqrt{T}+2\tau\sum_{i=1}^{\infty}\left[Z'\Omega\Omega_i\left[\bar{u}-\tau\bar{\varepsilon}+\omega(\tau^2)\right]/\sqrt{T}\right]d_{1i}^{A}+\omega(\tau^2)=$$

$$=Z'\Omega^2(\bar{u}-\tau\bar{\varepsilon})/\sqrt{T}+2\tau\sum_{i=1}^{\infty}\left[Z'\Omega\Omega_i(\bar{u}-\tau\bar{\varepsilon})/\sqrt{T}\right]d_{1i}^{A}+\omega(\tau^2)=$$

$$=Z'\Omega^2\bar{u}/\sqrt{T}-\tau Z'\Omega^2\bar{\varepsilon}/\sqrt{T}+2\tau\sum_{i=1}^{\infty}(Z'\Omega\Omega_i\bar{u}/\sqrt{T})d_{1i}^{A}+\omega(\tau^2). \qquad (\Delta.167)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (Δ.154), (Δ.160), (Δ.166) και (Δ.167) και εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη της (Δ.153), βρίσκουμε

$$\delta_*^{\alpha}=\bar{G}(Z'\Omega^2\bar{u}/\sqrt{T})-$$

$$-\tau\left[\bar{G}(Z'\Omega^2\bar{\varepsilon}/\sqrt{T})+2\sum_{i=1}^{\infty}\overline{GA}_i\bar{G}(Z'\Omega^2\bar{u}/\sqrt{T})d_{1i}^{A}-2\sum_{i=1}^{\infty}\bar{G}(Z'\Omega\Omega_i\bar{u}/\sqrt{T})d_{1i}^{A}\right]+\omega(\tau^2)=$$

$$=d_{*1}^{A}-\tau d_{*2}^{\alpha}+\omega(\tau^2), \qquad (\Delta.168)$$

όπου

$$d_{*1}^{A}=\bar{G}(Z'\Omega^2\bar{u}/\sqrt{T})$$

και (Δ.169)

$$d_{*2}^{\alpha}=\bar{G}(Z'\Omega^2\bar{\varepsilon}/\sqrt{T})+2\sum_{i=1}^{\infty}\overline{GA}_i\bar{G}(Z'\Omega^2\bar{u}/\sqrt{T})d_{1i}^{A}-2\sum_{i=1}^{\infty}\bar{G}(Z'\Omega\Omega_i\bar{u}/\sqrt{T})d_{1i}^{A}.$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.6), (Δ.108), (Δ.110) και (Δ.126) παίρνουμε ότι

$$\delta=\begin{bmatrix}\delta_o\\ \delta_*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_o+\tau\sigma_1\\ d_{*1}-\tau d_{*2}\end{bmatrix}+\omega(\tau^2)=\begin{bmatrix}\sigma_o\\ d_{*1}\end{bmatrix}+\tau\begin{bmatrix}\sigma_1\\ -d_{*2}\end{bmatrix}+\omega(\tau^2)=d_1+\tau d_2+\omega(\tau^2), \qquad (\Delta.170)$$

όπου

$$d_1'=(\sigma_o,d_{*1}'), \quad d_2'=(\sigma_1,-d_{*2}'). \qquad (\Delta.171)$$

Από τις (2.8), (Δ.170) και (Δ.171) συνεπάγονται τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\text{(i)}\quad \begin{bmatrix}\lambda_o & \lambda' \\ \lambda & \Lambda\end{bmatrix}=\lim_{T\to\infty} E\left[\begin{bmatrix}\sigma_o \\ d_{*_1}\end{bmatrix}(\sigma_o, d'_{*_1})\right]=\lim_{T\to\infty} E\begin{bmatrix}\sigma_o^2 & \sigma_o d'_{*_1} \\ \sigma_o d_{*_1} & d_{*_1}d'_{*_1}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_o=\lim_{T\to\infty} E(\sigma_o^2),\quad \lambda=\lim_{T\to\infty} E(\sigma_o d_{*_1}),\quad \Lambda=\lim_{T\to\infty} E(d_{*_1}d'_{*_1}), \qquad (\Delta.172)$$

$$\text{(ii)}\quad \begin{bmatrix}\mu_o \\ \mu\end{bmatrix}=\lim_{T\to\infty} E\begin{bmatrix}\sqrt{T}\sigma_o+\sigma_1 \\ \sqrt{T}d_{*_1}-d_{*_2}\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_o=\lim_{T\to\infty} E(\sqrt{T}\sigma_o+\sigma_1),\quad \mu=\lim_{T\to\infty} E(\sqrt{T}d_{*_1}-d_{*_2}). \qquad (\Delta.173)$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Α.8, το Λήμμα Δ.2 και τις (Δ.127), (Δ.144), (Δ.154), (Δ.169), (Δ.172) και (Δ.173) μπορούμε να δείξουμε ότι για οποιονδήποτε εκτιμητή του γ ισχύουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\text{(i)}\quad E(\sigma_o^2)=E\left[(w_o-a'd_{*_1})^2\right]=E(w_o^2-2w_o a'd_{*_1}+a'd_{*_1}d'_{*_1}a)=$$

$$=E(w_o^2)-2a'E(w_o d_{*_1})+a'E(d_{*_1}d'_{*_1})a=2-2a'E(w_o d_{*_1})+a'E(d_{*_1}d'_{*_1})a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_o=\lim_{T\to\infty} E(\sigma_o^2)=2-2a'\lim_{T\to\infty} E(w_o d_{*_1})+a'\lim_{T\to\infty} E(d_{*_1}d'_{*_1})a=$$

$$=2-2a'\lim_{T\to\infty} E(w_o d_{*_1})+a'\Lambda a. \qquad (\Delta.174)$$

$$\text{(ii)}\quad E(\sigma_o d_{*_1})=E\left[(w_o-a'd_{*_1})d_{*_1}\right]=E\left[d_{*_1}(w_o-a'd_{*_1})'\right]=$$

$$=E(w_o d_{*_1}-d_{*_1}d'_{*_1}a)=E(w_o d_{*_1})-E(d_{*_1}d'_{*_1})a\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda=\lim_{T\to\infty} E(\sigma_o d_{*_1})=\lim_{T\to\infty} E(w_o d_{*_1})-\lim_{T\to\infty} E(d_{*_1}d'_{*_1})a=$$

$$=\lim_{T\to\infty} E(w_o d_{*_1})-\Lambda a. \qquad (\Delta.175)$$

(iii) Από τις (Δ.164) και (Δ.165) παίρνουμε

$$E(\bar{u}_t)=E(u_t^2-\sigma_t^2)=\sigma_t^2-\sigma_t^2=0\Rightarrow E(\bar{u})=E\left[(\bar{u}_t)_{t=1,\ldots,T}\right]=0. \qquad (\Delta.176)$$

Επιπλέον, εφόσον $d_{*_1}=d_{*_1}^{GQ}=\bar{B}Z'\bar{u}/\sqrt{T}$, για τον $\hat{\gamma}_{GQ}$ και $d_{*_1}=d_{*_1}^{A}=\bar{G}(Z'\Omega^2\bar{u}/\sqrt{T})$ για τους $\hat{\gamma}_A$, $\hat{\gamma}_\alpha$ και $\hat{\gamma}_{ML}$, έπεται ότι

$$E(d_{*_1})=0. \qquad (\Delta.177)$$

Άρα,

$$E(\sqrt{T}d_{*_1}-d_{*_2})=\sqrt{T}E(d_{*_1})-E(d_{*_2})=-E(d_{*_2})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu=\lim_{T\longrightarrow\infty} E(\sqrt{T}d_{*_1}-d_{*_2})=-\lim_{T\longrightarrow\infty} E(d_{*_2}). \qquad (\Delta.178)$$

(iv) Από το Λήμμα Δ.2, την (Δ.176) και (Δ.178) και εφόσον $b\sim N(0,G)$ και $trAG=trI_n=n$, συνεπάγεται ότι

$$E(\sigma_o)=E(w_o-a'd_{*_1})=E(w_o)-a'E(d_{*_1})=0, \qquad (\Delta.179)$$

και επομένως

$$E(\sqrt{T}\sigma_o+\sigma_1)=\sqrt{T}E(\sigma_o)+E(\sigma_1)=E(\sigma_1)=E(w'd_{*_1}+d_{*_1}'\bar{A}d_{*_1}+a'd_{*_2}-b'Ab+n)=$$

$$=E(w'd_{*_1})+E(d_{*_1}'\bar{A}d_{*_1})+E(a'd_{*_2})-E(b'Ab)+n=$$

$$=E(w'd_{*_1})+tr\bar{A}E(d_{*_1}d_{*_1}')+E(a'd_{*_2})-trAG+n=$$

$$=E(w'd_{*_1})+tr\bar{A}E(d_{*_1}d_{*_1}')+E(a'd_{*_2})-n+n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_o=\lim_{T\longrightarrow\infty} E(\sqrt{T}\sigma_o+\sigma_1)=\lim_{T\longrightarrow\infty} E(\sigma_1)=$$

$$=\lim_{T\longrightarrow\infty} E(w'd_{*_1})+\lim_{T\longrightarrow\infty} tr\bar{A}E(d_{*_1}d_{*_1}')+\lim_{T\longrightarrow\infty} E(a'd_{*_2})=$$

$$=\lim_{T\longrightarrow\infty} E(w'd_{*_1})+tr\bar{A}\lim_{T\longrightarrow\infty} E(d_{*_1}d_{*_1}')+a'\lim_{T\longrightarrow\infty} E(d_{*_2})=$$

$$=\lim_{T\longrightarrow\infty} E(w'd_{*_1})+tr\bar{A}\Lambda-a'\mu. \qquad (\Delta.180)$$

Συνοψίζοντας τις σχέσεις (Δ.126), (Δ.127), (Δ.143), (Δ.144), (Δ.153), (Δ.154), (Δ.168) και (Δ.169), βρίσκουμε ότι για τον GQ εκτιμητή του γ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\delta_*=\delta_*^{GQ},\ d_{*_1}=d_{*_1}^{GQ},\ d_{*_2}=d_{*_2}^{GQ},\ \sigma_o^{GQ}=w_o-a'd_{*_1}^{GQ}, \qquad (\Delta.181)$$

$$\sigma_1^{GQ}=w'd_{*_1}^{GQ}+d_{*_1}^{GQ\prime}\bar{A}d_{*_1}^{GQ}+a'd_{*_2}^{GQ}-b'Ab+n.$$

Επιπλέον, για τον A εκτιμητή του γ έχουμε:

$$\delta_*=\delta_*^{A},\ d_{*_1}=d_{*_1}^{A},\ d_{*_2}=d_{*_2}^{A},\ \sigma_o^{A}=w_o-a'd_{*_1}^{A}, \qquad (\Delta.182)$$

$$\sigma_1^{A}=w'd_{*_1}^{A}+d_{*_1}^{A\prime}\bar{A}d_{*_1}^{A}+a'd_{*_2}^{A}-b'Ab+n.$$

Τέλος, για τον IA και τον ML εκτιμητή του γ έχουμε:

$$\delta_*=\delta_*^{\alpha},\ d_{*_1}=d_{*_1}^{A},\ d_{*_2}=d_{*_2}^{\alpha},\ \sigma_o^{\alpha}=w_o-a'd_{*_1}^{A}=\sigma_o^{A}, \qquad (\Delta.183)$$

$$\sigma_1^{\alpha}=w'd_{*_1}^{A}+d_{*_1}^{A\prime}\bar{A}d_{*_1}^{A}+a'd_{*_2}^{\alpha}-b'Ab+n.$$

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε τις ποσότητες $E(w_o d_{*_1})$ και

$E(w'd_{*_1})$ για όλους τους εκτιμητές του γ που εξετάζουμε. Από την απόδειξη του Λήμματος Δ.2 έχουμε ότι

$$w_o=\left[\sum_{t=1}^{T}\psi_t^2-T\right]\Big/\sqrt{T}=\sum_{t=1}^{T}(\psi_t^2-1)/\sqrt{T},\quad w_i=-\tau\sum_{t=1}^{T}\frac{z_{ti}}{\sigma_t^2}(\psi_t^2-1), \tag{Δ.184}$$

όπου

$$\psi_t^2=u_t^2/\sigma_t^2\sim\chi_1^2,\quad E(\psi_t^2)=1,\quad Var(\psi_t^2)=2,\quad E\left[(\psi_t^2-1)(\psi_s^2-1)\right]=2\delta_{ts}, \tag{Δ.185}$$

όπου δ_{ts} είναι το δ του Kronecker και εφόσον τα ψ_t^2 και ψ_s^2 είναι ανεξάρτητα για $t\neq s$. Οι (Δ.94) και (Δ.185) συνεπάγονται ότι

$$\bar{u}_t=u_t^2-\sigma_t^2=\sigma_t^2(u_t^2/\sigma_t^2-1)=\sigma_t^2(\psi_t^2-1). \tag{Δ.186}$$

Συνδυάζοντας τις (4.1), (Δ.113), (Δ.184), (Δ.185) και (Δ.186) παίρνουμε

$$E(w_o\bar{u}_t/\sqrt{T})=E\left[\sum_{s=1}^{T}\sigma_t^2(\psi_s^2-1)(\psi_t^2-1)/T\right]=\frac{\sigma_t^2}{T}\sum_{s=1}^{T}E\left[(\psi_s^2-1)(\psi_t^2-1)\right]=$$

$$=\frac{\sigma_t^2}{T}\sum_{s=1}^{T}2\delta_{ts}=2\sigma_t^2/T=2z_t'\gamma/T\Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(w_o\bar{u}/\sqrt{T})=E\left[(w_o\bar{u}_t/\sqrt{T})_{t=1,\ldots,T}\right]=\left[(2z_t'\gamma/T)_{t=1,\ldots,T}\right]=$$

$$=2Z\gamma/T. \tag{Δ.187}$$

$$E(w_i\bar{u}_t/\sqrt{T})=E\left[-\tau\sigma_t^2\sum_{s=1}^{T}\frac{z_{si}}{\sigma_s^2}(\psi_s^2-1)(\psi_t^2-1)/\sqrt{T}\right]=$$

$$=-\frac{\sigma_t^2}{T}\sum_{s=1}^{T}\frac{z_{si}}{\sigma_s^2}E\left[(\psi_s^2-1)(\psi_t^2-1)\right]=-\frac{\sigma_t^2}{T}\sum_{s=1}^{T}\frac{z_{si}}{\sigma_s^2}2\delta_{ts}=$$

$$=-2\sigma_t^2z_{ti}/T\sigma_t^2=-2z_{ti}/T\Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(\bar{u}w'/\sqrt{T})=E\left[(w_i\bar{u}_t/\sqrt{T})_{t=1,\ldots,T,i=1,\ldots,x}\right]=$$

$$=\left[(-2z_{ti}/T)_{t=1,\ldots,T,i=1,\ldots,x}\right]=-2Z/T. \tag{Δ.188}$$

Κάνοντας χρήση των (Δ.113), (Δ.181), (Δ.182), (Δ.183), (Δ.187) και (Δ.188) βρίσκουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

(a) Για τον GQ εκτιμητή του γ έχουμε ότι

$$E(w_od_{*_1})=E(w_od_{*_1}^{GQ})=E\left[w_o(\bar{B}Z'\bar{u}/\sqrt{T})\right]=\bar{B}Z'E(w_o\bar{u}/\sqrt{T})=\bar{B}Z'2Z\gamma/T=$$

$$=2(Z'Z/T)^{-1}(Z'Z/T)\gamma=2\gamma \tag{Δ.189}$$

και

$$E(w'd_{*_1})=E(w'd_{*_1}^{GQ})=E(trw'd_{*_1}^{GQ})=E(trd_{*_1}^{GQ}w')=trE(d_{*_1}^{GQ}w')=$$

$$=trE\left[(\bar{B}Z'\bar{u}/\sqrt{T})w'\right]=tr\bar{B}Z'E(\bar{u}w'/\sqrt{T})=tr\bar{B}Z'(-2Z/T)=$$

$$=-2tr(Z'Z/T)^{-1}(Z'Z/T)=-2trI_{\kappa}=-2\kappa. \qquad (\Delta.190)$$

(b) Για τους A, IA, και ML εκτιμητές του γ έχουμε ότι

$$E(w_o d_{*_1})=E(w_o d_{*_1}^{A})=E\left[w_o\bar{G}(Z'\Omega^2\bar{u}/\sqrt{T})\right]=\bar{G}Z'\Omega^2E(w_o\bar{u}/\sqrt{T})=\bar{G}Z'\Omega^2 2Z\gamma/T$$

$$=2(Z'\Omega^2Z/T)^{-1}(Z'\Omega^2Z/T)\gamma=2\gamma \qquad (\Delta.191)$$

και

$$E(w'd_{*_1})=E(w'd_{*_1}^{A})=E(trw'd_{*_1}^{A})=E(trd_{*_1}^{A}w')=trE(d_{*_1}^{A}w')=$$

$$=trE\left[\bar{G}(Z'\Omega^2\bar{u}/\sqrt{T})w'\right]=tr\bar{G}Z'\Omega^2E(\bar{u}w'/\sqrt{T})=tr\bar{G}Z'\Omega^2(-2Z/T)=$$

$$=-2tr(Z'\Omega^2Z/T)^{-1}(Z'\Omega^2Z/T)=-2trI_{\kappa}=-2\kappa. \qquad (\Delta.192)$$

Συνεπώς, συνοψίζοντας τα αποτελέσματα (Δ.189), (Δ.190), (Δ.191) και (Δ.192) έχουμε ότι για όλους τους εκτιμητές του γ ισχύουν οι σχέσεις:

$$E(w_o d_{*_1})=2\gamma \Rightarrow \lim_{T\to\infty} E(w_o d_{*_1})=2\gamma$$

και $\qquad (\Delta.193)$

$$E(w'd_{*_1})=-2\kappa \Rightarrow \lim_{T\to\infty} E(w'd_{*_1})=-2\kappa.$$

Από τις (Δ.174), (Δ.175), (Δ.180) και (Δ.193) έπεται ότι για όλους τους εκτιμητές του γ που μελετήσαμε ισχύουν οι σχέσεις:

$$\lambda_o=\lim_{T\to\infty} E(\sigma_o^2)=2-4a'\gamma+a'\Lambda a,$$

$$\lambda=\lim_{T\to\infty} E(\sigma_o d_{*_1})=2\gamma-\Lambda a, \qquad (\Delta.194)$$

$$\mu_o=\lim_{T\to\infty} E(\sigma_1)=-2\kappa+tr\bar{A}\Lambda-a'\mu=tr\bar{A}\Lambda-2\kappa-a'\mu.$$

Απομένει να υπολογιστούν τα Λ και μ για τους διάφορους εκτιμητές του γ.

(A) Για τον υπολογισμό της μήτρας Λ χρησιμοποιούμε το Λήμμα Δ.3, τις (Δ.113), (Δ.144), (Δ.154), (Δ.169) και (Δ.172) και το γεγονός ότι οι μήτρες $\bar{B}$ και $\bar{G}$ είναι συμμετρικές και βρίσκουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

(i) Για τον GQ εκτιμητή του γ ισχύει

$$E(d_{*_1}d_{*_1}')=E(d_{*_1}^{GQ}d_{*_1}^{GQ\,\prime})=E\left[(\bar{B}Z'\bar{u}/\sqrt{T})\,(\bar{B}Z'\bar{u}/\sqrt{T})'\right]=E(\bar{B}Z'\overline{uu'}Z\bar{B}/T)=$$

$$=\bar{B}Z'E(\overline{uu'})Z\bar{B}/T=\bar{B}Z'(2\Omega^{-2})Z\bar{B}/T=2\bar{B}(Z'\Omega^{-2}Z/T)\bar{B}=2\bar{B}\Gamma\bar{B}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Lambda=\lim_{T\longrightarrow\infty}E(d_{*_1}d_{*_1}')=\lim_{T\longrightarrow\infty}2\overline{B\Gamma B}. \qquad (\Delta.195)$$

Συνεπώς, για τον GQ εκτιμητή του γ η μήτρα Λ μπορεί να εκτιμηθεί ως

$$\Lambda=2\overline{B\Gamma B}. \qquad (\Delta.196)$$

(ii) Για τους A, IA και ML εκτιμητές του γ ισχύει

$$E(d_{*_1}d_{*_1}')=E(d_{*_1}^{A}d_{*_1}^{A\,\prime})=E\left[(\bar{G}Z'\Omega^2\bar{u}/\sqrt{T})\,(\bar{G}Z'\Omega^2\bar{u}/\sqrt{T})'\right]=E(\bar{G}Z'\Omega^2\overline{uu'}\Omega^2Z\bar{G}/T)=$$

$$=\bar{G}Z'\Omega^2E(\overline{uu'})\Omega^2Z\bar{G}/T=\bar{G}Z'\Omega^2(2\Omega^{-2})\Omega^2Z\bar{G}/T=2\bar{G}(Z'\Omega^2Z/T)\bar{G}=2\overline{GAG}=2\bar{G}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Lambda=\lim_{T\longrightarrow\infty}E(d_{*_1}d_{*_1}')=\lim_{T\longrightarrow\infty}2\bar{G}. \qquad (\Delta.197)$$

Επομένως, για τους A, IA και ML εκτιμητές του γ η μήτρα Λ μπορεί να εκτιμηθεί ως

$$\Lambda=2\bar{G}. \qquad (\Delta.198)$$

(B) Για τον υπολογισμό του διανύσματος μ χρησιμοποιούμε το Λήμμα Δ.3, τους ορισμούς (4.14), τις σχέσεις (Δ.113), (Δ.144), (Δ.154), (Δ.169) και (Δ.178) και το γεγονός ότι οι μήτρες Ω, Ω^{-2} και Ω_i είναι διαγώνιες και βρίσκουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

(i) Για τον GQ εκτιμητή του γ ισχύει

$$E(d_{*_2})=E(d_{*_2}^{GQ})=E(\bar{B}Z'\varepsilon/\sqrt{T})=\bar{B}Z'E(\varepsilon)/\sqrt{T}=\bar{B}Z'(v/\sqrt{T})/\sqrt{T}=$$

$$=\bar{B}\left[(z_t)_{t=1,\ldots,T}\right]\left[(v_t)_{t=1,\ldots,T}\right]/T=\bar{B}\sum_{t=1}^{T}v_tz_t/T=\bar{B}\bar{\xi}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu=-\lim_{T\longrightarrow\infty}E(d_{*_2})=-\lim_{T\longrightarrow\infty}\bar{B}\bar{\xi}. \qquad (\Delta.199)$$

Άρα, για τον GQ εκτιμητή του γ το μ μπορεί να εκτιμηθεί ως

$$\mu=-\bar{B}\bar{\xi}. \qquad (\Delta.200)$$

(ii) Για τον A εκτιμητή του γ έχουμε

$$E\left[\bar{G}(Z'\Omega^2\varepsilon/\sqrt{T})\right]=\bar{G}Z'\Omega^2E(\varepsilon)/\sqrt{T}=\bar{G}Z'\Omega^2(v/\sqrt{T})/\sqrt{T}=$$

$$=\bar{G}\left[(z_t)_{t=1,\ldots,T}\right]\mathrm{diag}(\sigma_t^{-4})\left[(v_t)_{t=1,\ldots,T}\right]/T=$$

$$=\bar{G}\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}v_tz_t/T=\bar{G}\bar{\xi}_1, \qquad (\Delta.201)$$

$$E\left[(Z'\Omega^2\bar{u}/\sqrt{T})\,d_{1i}^{GQ}\right]=E\left[(Z'\Omega^2\bar{u}/\sqrt{T})\,(\bar{b}_i'Z'\bar{u}/\sqrt{T})\right]=$$

$$=E\left[(Z'\Omega^2\bar{u}/\sqrt{T})\,(\bar{u}'Z\bar{b}_i/\sqrt{T})\right]=E(Z'\Omega^2\overline{uu'}Z\bar{b}_i/T)=Z'\Omega^2E(\overline{uu'})Z\bar{b}_i/T=$$

$$=Z'\Omega^2(2\Omega^{-2})Z\bar{b}_i/T=2(Z'Z/T)\bar{b}_i=2\overline{Fb}_i, \qquad (\Delta.202)$$

όπου $\bar{b}_i$ είναι η i-στήλη της μήτρας $\bar{B}$. Εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη της (Δ.202) παίρνουμε

$$E\left[(Z'\Omega\Omega_i\bar{u}/\sqrt{T})\,d_{1i}^{GQ}\right]=E(Z'\Omega\Omega_i\overline{uu'}Z\bar{b}_i/T)=Z'\Omega\Omega_iE(\overline{uu'})Z\bar{b}_i/T=$$

$$=Z'\Omega\Omega_i(2\Omega^{-2})Z\bar{b}_i/T=2(Z'\Omega_i\Omega^{-1}Z/T)\bar{b}_i. \qquad (\Delta.203)$$

Συνδυάζοντας τις (Δ.154), (Δ.178), (Δ.201), (Δ.202) και (Δ.203) βρίσκουμε ότι

$$E(d_{*2})=E(d_{*2}^{A})=$$

$$=E\left[\bar{G}(Z'\Omega^2\varepsilon/\sqrt{T})+2\sum_{i=1}^{\infty}\overline{GA}_i\bar{G}(Z'\Omega^2\bar{u}/\sqrt{T})\,d_{1i}^{GQ}-2\sum_{i=1}^{\infty}\bar{G}(Z'\Omega\Omega_i\bar{u}/\sqrt{T})\,d_{1i}^{GQ}\right]=$$

$$=E\left[\bar{G}(Z'\Omega^2\varepsilon/\sqrt{T})\right]+2\sum_{i=1}^{\infty}\overline{GA}_i\bar{G}E\left[(Z'\Omega^2\bar{u}/\sqrt{T})\,d_{1i}^{GQ}\right]-2\sum_{i=1}^{\infty}\bar{G}E\left[(Z'\Omega\Omega_i\bar{u}/\sqrt{T})\,d_{1i}^{GQ}\right]=$$

$$=\bar{G}\xi_1+2\sum_{i=1}^{\infty}\overline{GA}_i\bar{G}2\overline{Fb}_i-2\sum_{i=1}^{\infty}\bar{G}2(Z'\Omega_i\Omega^{-1}Z/T)\bar{b}_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu=-\lim_{T\to\infty}E(d_{*2})=$$

$$=-\lim_{T\to\infty}\left[\bar{G}\xi_1+4\sum_{i=1}^{\infty}\overline{GA}_i\overline{GFb}_i-4\sum_{i=1}^{\infty}\bar{G}(Z'\Omega_i\Omega^{-1}Z/T)\bar{b}_i\right]=$$

$$=-\lim_{T\to\infty}\left[\bar{G}\xi_1+4\sum_{i=1}^{\infty}\left[\overline{GA}_i\overline{GFb}_i-\bar{G}(Z'\Omega_i\Omega^{-1}Z/T)\bar{b}_i\right]\right]=$$

$$=-\lim_{T\to\infty}\left[\bar{G}\xi_1+4\bar{G}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\bar{A}_i\bar{G}e_i-(Z'\Omega_i\Omega^{-1}Z/T)\bar{b}_i\right]\right]=$$

$$=-\lim_{T\to\infty}\left[\bar{G}\xi_1+4\bar{G}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\bar{A}_i\bar{g}_i-(Z'\Omega_i\Omega^{-1}Z/T)\bar{b}_i\right]\right], \qquad (\Delta.204)$$

από όπου συνεπάγεται ότι για τον A εκτιμητή του γ το μ μπορεί να εκτιμηθεί ως

$$\mu=-\bar{G}\xi_1-4\sum_{i=1}^{\infty}\bar{G}\left[\bar{A}_i\bar{g}_i-(Z'\Omega_i\Omega^{-1}Z/T)\bar{b}_i\right], \qquad (\Delta.205)$$

όπου $\bar{A}_i=Z'\Omega\Omega_iZ/T$, $\bar{g}_i$ είναι η i-στήλη της μήτρας $\bar{G}$, $\bar{b}_i$ είναι η

i-στήλη της μήρας $\bar{B}$ και εφόσον ισχύει ότι

$$\overline{FB}=\bar{F}(\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_\kappa)=(\overline{Fb}_1,\ldots,\overline{Fb}_\kappa)=I_\kappa \Rightarrow \overline{Fb}_i=e_i, \qquad (\Delta.206)$$

όπου e_i είναι η i-στήλη της μήτρας I_κ.

(iii) Για τους IA και ML εκτιμητές του γ έχουμε

$$E\left[\bar{G}(Z'\Omega^{2\bar{}}\bar{\varepsilon}/\sqrt{T})\right]=\bar{G}Z'\Omega^2E(\bar{\varepsilon})/\sqrt{T}=\bar{G}Z'\Omega^2(XGx_i/\sqrt{T})/\sqrt{T}=$$

$$=\bar{G}\left[(z_t)_{t=1,\ldots,T}\right]\mathrm{diag}(\sigma_t^{-4})\left[(x_t'Gx_t)_{t=1,\ldots,T}\right]/T=$$

$$=\bar{G}\sum_{t=1}^{T}\sigma_t^{-4}x_t'Gx_tz_t/T=\bar{G}\xi_2, \qquad (\Delta.207)$$

$$E\left[(Z'\Omega^{2\bar{}}\bar{u}/\sqrt{T})\,d_{1i}^{A}\right]=E\left[(Z'\Omega^{2\bar{}}\bar{u}/\sqrt{T})\,(\bar{g}_i'Z'\Omega^{2\bar{}}\bar{u}/\sqrt{T})\right]=$$

$$=E\left[(Z'\Omega^{2\bar{}}\bar{u}/\sqrt{T})\,(\bar{u}'\Omega^{2}Z\bar{g}_i/\sqrt{T})\right]=E(Z'\Omega^{2\overline{uu}}\Omega^{2}Z\bar{g}_i/T)=Z'\Omega^2E(\overline{uu}')\Omega^2Z\bar{g}_i/T=$$

$$=Z'\Omega^2(2\Omega^{-2})\Omega^2Z\bar{g}_i/T=2(Z'\Omega^2Z/T)\bar{g}_i=2\overline{A}\bar{g}_i, \qquad (\Delta.208)$$

όπου $\bar{g}_i$ είναι η i-στήλη της μήτρας $\bar{G}$. Εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη της (Δ.208) παίρνουμε

$$E\left[(Z'\Omega\Omega_i\bar{u}/\sqrt{T})\,d_{1i}^{A}\right]=E(Z'\Omega\Omega_i\overline{uu}'\Omega^2Z\bar{g}_i/T)=Z'\Omega\Omega_iE(\overline{uu}')\Omega^2Z\bar{g}_i/T=$$

$$=Z'\Omega\Omega_i(2\Omega^{-2})\Omega^2Z\bar{g}_i/T=2(Z'\Omega\Omega_iZ/T)\bar{g}_i=2\bar{A}_i\bar{g}_i. \qquad (\Delta.209)$$

Από τις σχέσεις (Δ.169), (Δ.178), (Δ.207), (Δ.208) και (Δ.209) συμπεραίνουμε ότι

$$E(d_{*2})=E(d_{*2}^{\alpha})=$$

$$=E\left[\bar{G}(Z'\Omega^{2\bar{}}\bar{\varepsilon}/\sqrt{T})+2\sum_{i=1}^{\kappa}\overline{GA}_i\bar{G}(Z'\Omega^{2\bar{}}\bar{u}/\sqrt{T})\,d_{1i}^{A}-2\sum_{i=1}^{\kappa}\bar{G}(Z'\Omega\Omega_i\bar{u}/\sqrt{T})\,d_{1i}^{A}\right]=$$

$$=E\left[\bar{G}(Z'\Omega^{2\bar{}}\bar{\varepsilon}/\sqrt{T})\right]+2\sum_{i=1}^{\kappa}\overline{GA}_i\bar{G}E\left[(Z'\Omega^{2\bar{}}\bar{u}/\sqrt{T})\,d_{1i}^{A}\right]-2\sum_{i=1}^{\kappa}\bar{G}E\left[(Z'\Omega\Omega_i\bar{u}/\sqrt{T})\,d_{1i}^{A}\right]=$$

$$=\bar{G}\xi_2+2\sum_{i=1}^{\kappa}\overline{GA}_i\bar{G}2\overline{Ag}_i-2\sum_{i=1}^{\kappa}\bar{G}2\bar{A}_i\bar{g}_i=\bar{G}\xi_2+4\sum_{i=1}^{\kappa}\overline{GA}_i\overline{GAg}_i-4\sum_{i=1}^{\kappa}\overline{GA}_i\bar{g}_i=$$

$$=\bar{G}\xi_2+4\sum_{i=1}^{\kappa}\overline{GA}_i\bar{g}_i-4\sum_{i=1}^{\kappa}\overline{GA}_i\bar{g}_i=\bar{G}\xi_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu=-\lim_{T\to\infty}E(d_{*2})=-\lim_{T\to\infty}\bar{G}\xi_2. \qquad (\Delta.210)$$

Επομένως, για τους IA και ML εκτιμητές του γ το μ μπορεί να εκτιμηθεί ως

$$\mu=-\bar{G}\xi_2. \qquad (\Delta.211)$$

Αντικαθιστώντας στην (Δ.194) από τις (Δ.196) και (Δ.198) και χρησιμοποιώντας το Λήμμα Δ.2 βρίσκουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:
(i) Για τον GQ εκτιμητή του γ οι παράμετροι λ, λ_o και μ_o μπορούν να εκτιμηθούν από τις σχέσεις:

$$\lambda=2\gamma-\Lambda a=2\gamma-\Lambda\bar{A}\gamma=2\gamma-2\overline{B\Gamma BA}\gamma, \qquad (\Delta.212)$$

$$\lambda_o=2-4a'\gamma+a'\Lambda a=2-4\gamma'\bar{A}\gamma+\gamma'\bar{A}\Lambda\bar{A}\gamma=2-2\gamma'\bar{A}\gamma-2\gamma'\bar{A}\gamma+\gamma'\bar{A}\Lambda\bar{A}\gamma=$$
$$=2(1-\gamma'\bar{A}\gamma)-\gamma'\bar{A}(2\gamma-\Lambda\bar{A}\gamma)=2(1-\gamma'\bar{A}\gamma)-\gamma'\bar{A}\lambda, \qquad (\Delta.213)$$

$$\mu_o=tr\Lambda\bar{A}-2\kappa-a'\mu=tr\Lambda\bar{A}-2\kappa-\gamma'\bar{A}\mu. \qquad (\Delta.214)$$

(ii) Για τους A, IA και ML εκτιμητές του γ, εργαζόμενοι όπως στις (Δ.212), (Δ.213) και (Δ.214), βρίσκουμε ότι οι παράμετροι λ, λ_o και μ_o μπορούν να εκτιμηθούν από τις σχέσεις:

$$\lambda=2\gamma-\Lambda\bar{A}\gamma=2\gamma-2\overline{GA}\gamma=2\gamma-2\gamma=0, \qquad (\Delta.215)$$

$$\lambda_o=2-2\gamma'\bar{A}\gamma-2\gamma'\bar{A}\gamma+\gamma'\bar{A}(2\bar{G})\bar{A}\gamma=2(1-\gamma'\bar{A}\gamma)-2\gamma'\bar{A}\gamma+2\gamma'\bar{A}\gamma=$$
$$=2(1-\gamma'\bar{A}\gamma), \qquad (\Delta.216)$$

$$\mu_o=tr\Lambda\bar{A}-2\kappa-\gamma'\bar{A}\mu=tr(2\overline{GA})-2\kappa-\gamma'\bar{A}\mu=2tr\overline{GA}-2\kappa-\gamma'\bar{A}\mu=2trI_x-2\kappa-\gamma'\bar{A}\mu=$$
$$=2\kappa-2\kappa-\gamma'\bar{A}\mu=-\gamma'\bar{A}\mu. \qquad (\Delta.217)$$

Οι σχέσεις (Δ.196), (Δ.198), (Δ.200), (Δ.205), (Δ.211), (Δ.212), (Δ.213), (Δ.214), (Δ.215), (Δ.216) και (Δ.217) συμπληρώνουν την απόδειξη.

QED

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 5

Πρίν προχωρήσουμε στις αποδείξεις των προτάσεων του Κεφαλαίου 5, θα δώσουμε μερικούς επιπλέον συμβολισμούς, ορισμούς και αποτελέσματα.

Έστω u_t' $(t=1,\ldots,T)$ οι γραμμές της μήτρας U, οπότε u_t είναι οι στήλες της μήτρας U'. Επίσης, έστω u_i $(i=1,\ldots,k)$ οι στήλες της μήτρας U, οπότε u_i' είναι οι γραμμές της μήτρας U'. Δηλαδή

$$U=\begin{bmatrix} u_1' \\ \vdots \\ u_T' \end{bmatrix}=\left[(u_t')_{t=1,\ldots,T}\right], \qquad U=(u_1,\ldots,u_k)=\left[(u_i)_{i=1,\ldots,k}\right]. \tag{E.1}$$

Έστω ότι u_t', u_s' είναι οι t- και s-γραμμές της μήτρας U και u_i, u_j είναι οι i- και j-στήλες της μήτρας U. Τότε

$$u_t'=(u_{t1},\ldots,u_{tk}), \qquad u_s'=(u_{s1},\ldots,u_{sk}) \qquad (t,s=1,\ldots,T),$$

$$u_i=\begin{bmatrix} u_{1i} \\ \vdots \\ u_{Ti} \end{bmatrix}, \qquad u_j=\begin{bmatrix} u_{1j} \\ \vdots \\ u_{Tj} \end{bmatrix} \qquad (i,j=1,\ldots,k), \tag{E.2}$$

$$E(u_{ti}u_{sj})=\delta_{ts}\sigma_{ij} \qquad (t,s=1,\ldots,T) \qquad (i,j=1,\ldots,k),$$

όπου δ_{ts} είναι το δέλτα του Kronecker. Χρησιμοποιώντας την (E.2) βρίσκουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

(i) Για την t-γραμμή της μήτρας U ισχύει ότι

$$u_t u_t'=\begin{bmatrix} u_{t1} \\ \vdots \\ u_{tk} \end{bmatrix}(u_{t1},\ldots,u_{tk})=\begin{bmatrix} u_{t1}u_{t1}\ldots u_{t1}u_{tk} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ u_{tk}u_{t1}\ldots u_{tk}u_{tk} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(u_t u_t')=\begin{bmatrix} E(u_{t1}u_{t1})\ldots E(u_{t1}u_{tk}) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ E(u_{tk}u_{t1})\ldots E(u_{tk}u_{tk}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sigma_{11}\ldots\sigma_{1k} \\ \vdots \qquad \vdots \\ \sigma_{k1}\ldots\sigma_{kk} \end{bmatrix}=$$

$$=\left[(\sigma_{ij})_{i,j=1,\ldots,k}\right]=\Sigma. \tag{E.3}$$

(ii) Εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη της (E.3) μπορούμε να δείξουμε ότι για τις i- και j-στήλες της μήτρας U ισχύει ότι

$$E(u_i u_j')=\sigma_{ij}I_T. \tag{E.4}$$

Από τις (5.5), (5.6), (E.1) και (E.4) παίρνουμε ότι

$$u=vec(U)=\begin{bmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_k\end{bmatrix},\qquad u'=(u_1',\ldots,u_k'),$$

όπου u_i $(i=1,\ldots,k)$ είναι η i-στήλη της μήτρας U. Εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη της (Ε.3) βρίσκουμε ότι

$$E(uu')=\begin{bmatrix}\sigma_{11}I_T\ldots\sigma_{1k}I_T\\ \vdots\qquad\qquad\vdots\\ \sigma_{k1}I_T\ldots\sigma_{kk}I_T\end{bmatrix}=\left[(\sigma_{ij}I_T)_{i,j=1,\ldots,k}\right]=\Sigma\otimes I_T=\Omega^{-1}. \tag{Ε.5}$$

Από την (Ε.1) έπεται ότι η μήτρα U'U γράφεται

$$U'U=(u_1,\ldots,u_T)\begin{bmatrix}u_1'\\ \vdots\\ u_T'\end{bmatrix}=\sum_{t=1}^{T}u_tu_t', \tag{Ε.6}$$

όπου οι γραμμές u_t' $(t=1,\ldots,T)$ της $T\times k$ μήτρας U είναι ανεξάρτητα $N_k(0,\Sigma)$ διανύσματα. Συνεπώς, η μήτρα U'U έχει μια Wishart κατανομή με μήτρα στάθμισης Σ και T βαθμούς ελευθερίας και συμβολίζουμε

$$U'U\sim W_k(\Sigma,T). \tag{Ε.7}$$

Από την (Ε.6) έχουμε

$$E(U'U)=\sum_{t=1}^{T}E(u_tu_t')=\sum_{t=1}^{T}\Sigma=T\Sigma. \tag{Ε.8}$$

Από την (5.3) έχουμε ότι

$$R=\left[(\delta_{ij}R_i)_{i,j=1,\ldots,k}\right]=\begin{bmatrix}R_1&&0\\ &\ddots&\\ 0&&R_k\end{bmatrix}=\mathrm{diag}\left[(R_i)_{i=1,\ldots,k}\right],$$

και (Ε.9)

$$\beta=\left[(\beta_i)_{i=1,\ldots,k}\right]=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_k\end{bmatrix}.$$

Οι περιορισμοί (5.2) για όλες τις στήλες της μήτρας B γράφονται

$$\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_1&&0\\ &\ddots&\\ 0&&R_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_k\end{bmatrix}=\left[(\delta_{ij}R_i)_{i,j=1,\ldots,k}\right]\left[(\beta_i)_{i=1,\ldots,k}\right]=R\beta\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow vec(B)=R\beta, \tag{Ε.10}$$

όπου vec(B) είναι ένα $km\times 1$ διάνυσμα. Χρησιμοποιώντας τις (5.5) και

(E.10) βρίσκουμε ότι

$$\mathrm{vec}(ZB)=(I_k\otimes Z)\,\mathrm{vec}(B)=(I_k\otimes Z)R\beta=X\beta, \qquad (E.11)$$

όπου $(I_k\otimes Z)$ και $X=(I_k\otimes Z)R$ είναι $Tk\times km$ και $Tk\times n$ μήτρες, αντίστοιχα.

Ορίζουμε την $n\times n$ μήτρα

$$Q=H'(HGH')^{-1}H, \qquad (E.12)$$

όπου H είναι μια $r\times n$ γνωστή μήτρα βαθμού r.

<u>ΛΗΜΜΑ Ε.1:</u> Έστω Δ_{ij} η $k\times k$ μήτρα που έχει 1 στην (i,j)-θέση και μηδέν οπουδήποτε αλλού, δηλαδή

$$\Delta_{ij}=\left[(\delta_{i\alpha}\delta_{\beta j})_{\alpha,\beta=1,\ldots,k}\right], \qquad (E.13)$$

όπου $\delta_{i\alpha}$ και $\delta_{\beta j}$ είναι δέλτα του Kronecker. Η μήτρα Σ^{-1} δεν υπόκειται σε περιορισμούς. Έστω σ^{ij} το (i,j)-στοιχείο της μήτρας Σ^{-1}, δηλαδή

$$\Sigma^{-1}=\left[(\sigma^{ij})_{i,j=1,\ldots,k}\right]. \qquad (E.14)$$

Ισχύουν οι σχέσεις:

$$\partial\Sigma^{-1}/\partial\sigma^{ij}=\Delta_{ij}, \quad \partial^2\Sigma^{-1}/\partial\sigma^{ij}\partial\sigma^{kl}=0 \quad (i,j,k,l=1,\ldots,k). \qquad (E.15)$$

Ορίζουμε τις μήτρες

$$\Omega_{(ij)}=\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_{(ij)}},$$

$$\Omega_{(ij)(kl)}=\frac{\partial^2\Omega}{\partial\gamma_{(ij)}\partial\gamma_{(kl)}}, \qquad (E.16)$$

$$\Omega^{*}_{(ij)(kl)}=\Omega_{(ij)}\Omega^{-1}\Omega_{(kl)},$$

όπου ο δείκτης (ij) έχει οριστεί στην (5.16) Αποδεικνύονται τα αποτελέσματα:

$$\Omega_{(ij)}=\Delta_{ij}\otimes I_T, \quad \Omega_{(ij)(kl)}=0, \quad \Omega^{*}_{(ij)(kl)}=\sigma_{jk}\Delta_{il}\otimes I_T. \qquad (E.17)$$

Ορίζουμε τις μήτρες

$$A=X'\Omega X/T, \quad A_{(ij)}=\frac{\partial A}{\partial\gamma_{(ij)}}, \qquad (E.18)$$

$$A_{(ij)(kl)}=\frac{\partial^2 A}{\partial\gamma_{(ij)}\partial\gamma_{(kl)}}, \quad A^{*}_{(ij)(kl)}=X'\Omega^{*}_{(ij)(kl)}X/T.$$

Αποδεικνύονται τα αποτελέσματα:

$$A=\left[(\sigma^{ij}B_{ij})_{i,j=1,\ldots,k}\right]=R'(\Sigma^{-1}\otimes\Gamma)R,$$

$$A_{(ij)}=\left[(\delta_{i\alpha}\delta_{\beta j}B_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1,\ldots,k}\right]=R'(\Delta_{ij}\otimes\Gamma)R, \qquad (E.19)$$

$$A_{(ij)(kl)}=0, \qquad A^{*}_{(ij)(kl)}=\sigma_{jk}A_{(il)}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

(Α) Οι (5.6), (5.7), (E.5) και (E.14) συνεπάγονται τις σχέσεις:

$$\Omega=\Sigma^{-1}\otimes I_T=\left[(\sigma^{ij}I_T)_{i,j=1,\ldots,k}\right]$$
και (E.20)
$$\gamma=\mathrm{vec}(\Sigma^{-1})=\left[(\gamma_{(ij)})_{(ij)=1,\ldots,k^2}\right], \qquad \gamma_{(ij)}=\sigma^{ij}.$$

Επομένως, κάνοντας χρήση της (E.15) βρίσκουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$(i)\quad \Omega_{(ij)}=\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma_{(ij)}}=\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma^{ij}}=\left[(\partial\sigma^{kl}I_T/\partial\sigma^{ij})_{k,l=1,\ldots,k}\right]=$$

$$=\left[(\delta_{ik}\delta_{lj}I_T)_{k,l=1,\ldots,k}\right]=\left[(\delta_{ik}\delta_{lj})_{k,l}\right]\otimes I_T=\Delta_{ij}\otimes I_T. \qquad (E.21)$$

$$(ii)\quad \Omega_{(ij)(kl)}=\frac{\partial^2\Omega}{\partial\gamma_{(ij)}\partial\gamma_{(kl)}}=\frac{\partial\Omega_{(ij)}}{\partial\sigma^{kl}}=$$

$$=\left[(\partial\delta_{ik}\delta_{lj}I_T/\partial\sigma^{kl})_{k,l}\right]=0. \qquad (E.22)$$

$$(iii)\quad \Omega^{*}_{(ij)(kl)}=\Omega_{(ij)}\Omega^{-1}\Omega_{(kl)}=(\Delta_{ij}\otimes I_T)(\Sigma\otimes I_T)(\Delta_{kl}\otimes I_T)=$$

$$=(\Delta_{ij}\Sigma\Delta_{kl}\otimes I_T)=\sigma_{jk}\Delta_{il}\otimes I_T, \qquad (E.23)$$

διότι

$$\Delta_{ij}\Sigma\Delta_{kl}=\left[(\delta_{i\alpha}\delta_{\beta j})_{\alpha,\beta}\right]\left[(\sigma_{\beta\gamma})_{\beta,\gamma}\right]\left[(\delta_{k\gamma}\delta_{\varepsilon l})_{\gamma,\varepsilon}\right]=$$

$$=\left[\left(\sum_{\beta=1}^{k}\sum_{\gamma=1}^{k}\delta_{i\alpha}\delta_{\beta j}\sigma_{\beta\gamma}\delta_{k\gamma}\delta_{\varepsilon l}\right)_{\alpha,\varepsilon}\right]=\left[(\sigma_{jk}\delta_{i\alpha}\delta_{\varepsilon l})_{\alpha,\varepsilon}\right]=\sigma_{jk}\left[(\delta_{i\alpha}\delta_{\varepsilon l})_{\alpha,\varepsilon}\right]=$$

$$=\sigma_{jk}\Delta_{il}. \qquad (E.24)$$

(Β) Από τις (5.5), (5.15) και (E.9) έπεται ότι

$$X=(I_k\otimes Z)R=\begin{bmatrix}Z & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & Z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}R_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & R_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ZR_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & ZR_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & X_k\end{bmatrix}=$$

$$=\mathrm{diag}\left[(X_i)_{i=1,\ldots,k}\right] \qquad (E.25)$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας τις (5.5), (5.12), (5.14), (5.15), (E.21), (E.22), (E.23) και (E.25) και απλοποιώντας τον συμβολισμό I_T ή I_k σε I, αποδεικνύουμε τα κάτωθι αποτελέσματα:

(i) $A=X'\Omega X/T=$

$$=\mathrm{diag}\left[(X_i)_{i=1,\ldots,k}\right]'\left[(\sigma^{ij}I_T)_{i,j=1,\ldots,k}\right]\mathrm{diag}\left[(X_j)_{j=1,\ldots,k}\right]/T=$$

$$=\mathrm{diag}\left[(X_i')_i\right]\left[(\sigma^{ij}I_T)_{i,j}\right]\mathrm{diag}\left[(X_j)_j\right]/T=\left[(\sigma^{ij}X_i'X_j/T)_{i,j}\right]=$$

$$=\left[(\sigma^{ij}B_{ij})_{i,j=1,\ldots,k}\right]. \qquad (E.26)$$

(ii) $A=(X'\Omega X/T)=\left[(I_k\otimes Z)R\right]'(\Sigma^{-1}\otimes I_T)\left[(I_k\otimes Z)R\right]/T=$

$$=R'(I\otimes Z')(\Sigma^{-1}\otimes I)(I\otimes Z)R/T=R'\left[\Sigma^{-1}\otimes(Z'Z/T)\right]R=R'(\Sigma^{-1}\otimes\Gamma)R. \qquad (E.27)$$

(iii) $$A_{(ij)}=\frac{\partial A}{\partial\gamma_{(ij)}}=\frac{\partial A}{\partial\sigma^{ij}}=\left[(\partial\sigma^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta}/\partial\sigma^{ij})_{\alpha,\beta=1,\ldots,k}\right]=$$

$$=\left[(\delta_{i\alpha}\delta_{\beta j}B_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1,\ldots,k}\right]. \qquad (E.28)$$

(iv) $$A_{(ij)}=\frac{\partial A}{\partial\gamma_{(ij)}}=\partial(X'\Omega X/T)/\partial\gamma_{(ij)}=X'(\partial\Omega/\partial\gamma_{(ij)})X/T=$$

$$=X'\Omega_{(ij)}X/T=\left[(I_k\otimes Z)R\right]'(\Delta_{ij}\otimes I_T)\left[(I_k\otimes Z)R\right]/T=$$

$$=R'(I\otimes Z')(\Delta_{ij}\otimes I)(I\otimes Z)R/T=R'\left[\Delta_{ij}\otimes(Z'Z/T)\right]R=R'(\Delta_{ij}\otimes\Gamma)R. \qquad (E.29)$$

(v) $$A_{(ij)(kl)}=\frac{\partial^2 A}{\partial\gamma_{(ij)}\partial\gamma_{(kl)}}=\partial^2(X'\Omega X/T)/\partial\gamma_{(ij)}\partial\gamma_{(kl)}=$$

$$=X'(\partial^2\Omega/\partial\gamma_{(ij)}\partial\gamma_{(kl)})X/T=X'\Omega_{(ij)(kl)}X/T=0. \qquad (E.30)$$

(vi) $$A^*_{(ij)(kl)}=X'\Omega^*_{(ij)(kl)}X/T=\left[(I_k\otimes Z)R\right]'(\sigma_{jk}\Delta_{il}\otimes I_T)\left[(I_k\otimes Z)R\right]/T=$$

$$=R'(I\otimes Z')(\sigma_{jk}\Delta_{il}\otimes I)(I\otimes Z)R/T=R'\left[\sigma_{jk}\Delta_{il}\otimes(Z'Z/T)\right]R=$$

$$=\sigma_{jk}R'(\Delta_{il}\otimes\Gamma)R=\sigma_{jk}A_{(il)}. \qquad (E.31)$$

QED

ΛΗΜΜΑ Ε.2: Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς του Κεφαλαίου 5 και το Λήμμα Ε.1 βρίσκουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$tr(A_{\langle ij\rangle}P)=tr(B_{ij}P_{ji}),$$

$$tr(A_{\langle ij\rangle\langle kl\rangle}P)=0,$$

$$tr(A^{*}_{\langle ij\rangle\langle kl\rangle}P)=\sigma_{jk}tr(B_{il}P_{li}),$$

$$A_{\langle ij\rangle}GA_{\langle kl\rangle}=\left[(\delta_{i\alpha}\delta_{\varepsilon l}B_{\alpha j}G_{jk}B_{k\varepsilon})_{\alpha,\varepsilon=1,\ldots,k}\right], \tag{E.32}$$

$$tr(A_{\langle ij\rangle}GA_{\langle kl\rangle}P)=tr(B_{ij}G_{jk}B_{kl}P_{li}),$$

$$A_{\langle ij\rangle}PA_{\langle kl\rangle}=\left[(\delta_{i\alpha}\delta_{\varepsilon l}B_{\alpha j}P_{jk}B_{k\varepsilon})_{\alpha,\varepsilon=1,\ldots,k}\right],$$

$$tr(A_{\langle ij\rangle}PA_{\langle kl\rangle}P)=tr(B_{ij}P_{jk}B_{kl}P_{li}).$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ:</u> Οι n×n μήτρες G και P μπορούν να γραφούν ως

$$G=A^{-1}=\left[(G_{ij})_{i,j=1,\ldots,k}\right],\qquad P=\left[(P_{ij})_{i,j=1,\ldots,k}\right], \tag{E.33}$$

όπου οι μήτρες G_{ij} και P_{ij} είναι $n_i\times n_j$ υπομήτρες των μητρών G και P, αντίστοιχα. Επομένως έχουμε

$$\text{(i)}\quad A_{\langle ij\rangle}P=\left[(\delta_{i\alpha}\delta_{\beta j}B_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1,\ldots,k}\right]\left[(P_{\beta l})_{\beta,l=1,\ldots,k}\right]=$$

$$=\left[\left(\sum_{\beta=1}^{k}\delta_{i\alpha}\delta_{\beta j}B_{\alpha\beta}P_{\beta l}\right)_{\alpha,l}\right]=\left[(\delta_{i\alpha}B_{\alpha j}P_{jl})_{\alpha,l}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow tr(A_{\langle ij\rangle}P)=tr\left[(\delta_{i\alpha}B_{\alpha j}P_{jl})_{\alpha,l}\right]=\sum_{\alpha=1}^{k}\delta_{i\alpha}tr(B_{\alpha j}P_{j\alpha})=$$

$$=tr(B_{ij}P_{ji}). \tag{E.34}$$

$$\text{(ii)}\quad A_{\langle ij\rangle\langle kl\rangle}P=0\Rightarrow tr(A_{\langle ij\rangle\langle kl\rangle}P)=0. \tag{E.35}$$

$$\text{(iii)}\quad A^{*}_{\langle ij\rangle\langle kl\rangle}P=\sigma_{jk}A_{\langle il\rangle}P\Rightarrow$$

$$\Rightarrow tr(A^{*}_{\langle ij\rangle\langle kl\rangle}P)=\sigma_{jk}tr(A_{\langle il\rangle}P)=\sigma_{jk}tr(B_{il}P_{li}). \tag{E.36}$$

$$\text{(iv)}\quad A_{\langle ij\rangle}GA_{\langle kl\rangle}=\left[(\delta_{i\alpha}\delta_{\beta j}B_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1,\ldots,k}\right]\left[(G_{\beta\gamma})_{\beta,\gamma=1,\ldots,k}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[(\delta_{k\gamma}\delta_{\varepsilon l}B_{\gamma\varepsilon})_{\gamma,\varepsilon=1,\ldots,k}\right]=$$

$$=\left[\left(\sum_{\beta=1}^{k}\sum_{\gamma=1}^{k}\delta_{i\alpha}\delta_{\beta j}B_{\alpha\beta}G_{\beta\gamma}\delta_{k\gamma}\delta_{\varepsilon l}B_{\gamma\varepsilon}\right)_{\alpha,\varepsilon}\right]=$$

$$=\left[(\delta_{i\alpha}\delta_{\varepsilon l}B_{\alpha j}G_{jk}B_{k\varepsilon})_{\alpha,\varepsilon=1,\ldots,k}\right]. \tag{E.37}$$

Συνεπώς,

$$A_{\langle ij\rangle}GA_{\langle kl\rangle}P=\left[(\delta_{i\alpha}\delta_{\varepsilon l}B_{\alpha j}G_{jk}B_{k\varepsilon})_{\alpha,\varepsilon=1,\ldots,k}\right]\left[(P_{\varepsilon m})_{\varepsilon,m=1,\ldots,k}\right]=$$

$$=\left[\left(\sum_{\varepsilon=1}^{k}\delta_{i\alpha}\delta_{\varepsilon l}B_{\alpha j}G_{jk}B_{k\varepsilon}P_{\varepsilon m}\right)_{\alpha,m}\right]=\left[\left(\delta_{i\alpha}B_{\alpha j}G_{jk}B_{kl}P_{lm}\right)_{\alpha,m}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow tr(A_{\langle ij\rangle}GA_{\langle kl\rangle}P)=tr\left[\left(\delta_{i\alpha}B_{\alpha j}G_{jk}B_{kl}P_{lm}\right)_{\alpha,m}\right]=$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{k}\delta_{i\alpha}tr(B_{\alpha j}G_{jk}B_{kl}P_{l\alpha})=tr(B_{ij}G_{jk}B_{kl}P_{li})\,. \qquad (E.38)$$

(v) Αντικαθιστώντας την μήτρα $P=\left[(P_{ij})_{i,j=1,\ldots,k}\right]$ στην θέση της μήτρας $G=\left[(G_{ij})_{i,j=1,\ldots,k}\right]$ και εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη των (E.37) και (E.38), βρίσκουμε ότι

$$A_{\langle ij\rangle}PA_{\langle kl\rangle}=\left[\left(\delta_{i\alpha}\delta_{\varepsilon l}B_{\alpha j}P_{jk}B_{k\varepsilon}\right)_{\alpha,\varepsilon=1,\ldots,k}\right] \qquad (E.39)$$

και συνεπώς

$$tr(A_{\langle ij\rangle}PA_{\langle kl\rangle}P)=tr(B_{ij}P_{jk}B_{kl}P_{li})\,. \qquad (E.40)$$

QED

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΗΣ ΠΡΟΤΑΣΗΣ 5.1: Ορίζουμε τις μήτρες

$$D_{\alpha kl\beta}=B_{\alpha k}P_{kl}B_{l\beta}/2,\qquad C_{\alpha kl\beta}=\sigma_{kl}B_{\alpha\beta}-2B_{\alpha kl\beta}\,. \qquad (E.41)$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.14) και (2.29), την (5.14), το Λήμμα E.1, το Λήμμα E.2 και την (E.41) βρίσκουμε ότι

(i) $$C_{\langle ik\rangle\langle lj\rangle}=A^{*}_{\langle ik\rangle\langle lj\rangle}-2A_{\langle ik\rangle}GA_{\langle lj\rangle}+A_{\langle ik\rangle\langle lj\rangle}/2=$$

$$=\sigma_{kl}A_{\langle ij\rangle}-2A_{\langle ik\rangle}GA_{\langle lj\rangle}=$$

$$=\sigma_{kl}\left[\left(\delta_{i\alpha}\delta_{\beta j}B_{\alpha\beta}\right)_{\alpha,\beta=1,\ldots,k}\right]-2\left[\left(\delta_{i\alpha}\delta_{\beta j}B_{\alpha k}G_{kl}B_{l\beta}\right)_{i,j=1,\ldots,k}\right]=$$

$$=\sigma_{kl}\left[\left(\delta_{i\alpha}\delta_{\beta j}B_{\alpha\beta}\right)_{\alpha,\beta}\right]-2\left[\left(\delta_{i\alpha}\delta_{\beta j}B_{\alpha kl\beta}\right)_{\alpha,\beta}\right]=$$

$$=\left[\left(\delta_{i\alpha}\delta_{\beta j}(\sigma_{kl}B_{\alpha\beta}-2B_{\alpha kl\beta})\right)_{\alpha,\beta}\right]=$$

$$=\left[\left(\delta_{i\alpha}\delta_{\beta j}C_{\alpha kl\beta}\right)_{\alpha,\beta=1,\ldots,k}\right]. \qquad (E.42)$$

(ii) $$D_{\langle ik\rangle\langle lj\rangle}=A_{\langle ik\rangle}PA_{\langle lj\rangle}/2=\left[\left(\delta_{i\alpha}\delta_{\beta j}B_{\alpha k}P_{kl}B_{l\beta}\right)_{\alpha,\beta=1,\ldots,k}\right]/2=$$

$$=\left[\left(\delta_{i\alpha}\delta_{\beta j}D_{\alpha kl\beta}\right)_{\alpha,\beta=1,\ldots,k}\right]. \qquad (E.43)$$

(iii) $$GA_{\langle ij\rangle}G=$$

$$=\left[(G_{\alpha k})_{\alpha,k=1,\ldots,k}\right]\left[(\delta_{ik}\delta_{lj}B_{kl})_{k,l=1,\ldots,k}\right]\left[(G_{l\beta})_{l,\beta=1,\ldots,k}\right]=$$

$$=\left[\left(\sum_{k=1}^{k}\sum_{l=1}^{k}\delta_{ik}\delta_{lj}G_{\alpha k}B_{kl}G_{l\beta}\right)_{\alpha,\beta}\right]=$$

$$=\left[\left(G_{\alpha i}B_{ij}G_{j\beta}\right)_{\alpha,\beta=1,\ldots,k}\right]. \qquad (E.44)$$

(iv) Εργαζόμενοι όπως στην περίπτωση (iii) έχουμε

$$GC_{(ik)(lj)}G=$$

$$=\left[(G_{\alpha\phi})_{\alpha,\phi=1,\ldots,k}\right]\left[(\delta_{i\phi}\delta_{\psi j}C_{\phi kl\psi})_{\phi,\psi=1,\ldots,k}\right]\left[(G_{\psi\beta})_{\psi,\beta=1,\ldots,k}\right]=$$

$$=\left[(G_{\alpha i}C_{iklj}G_{j\beta})_{\alpha,\beta}\right]=\left[(G_{\alpha i}(\sigma_{kl}B_{ij}-2B_{iklj})G_{j\beta})_{\alpha,\beta}\right]=$$

$$=\sigma_{kl}\left[(G_{\alpha i}B_{ij}G_{j\beta})_{\alpha,\beta}\right]-2\left[(G_{\alpha i}B_{iklj}G_{j\beta})_{\alpha,\beta}\right]=$$

$$=\sigma_{kl}GA_{(ij)}G-2\left[(G_{\alpha i}B_{iklj}G_{j\beta})_{\alpha,\beta=1,\ldots,k}\right]. \qquad (E.45)$$

Αντικαθιστώντας στις (2.12), (2.13) και (2.28) τα προηγούμενα αποτελέσματα και χρησιμοποιώντας το Λήμμα Ε.2, βρίσκουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

(α) Το (ij)-στοιχείο του $k^2\times 1$ διανύσματος l είναι

$$l_{(ij)}=e'GA_{(ij)}Ge/e'Ge=$$

$$=\left[(e_\alpha)_{\alpha=1,\ldots,k}\right]'\left[(G_{\alpha i}B_{ij}G_{j\beta})_{\alpha,\beta=1,\ldots,k}\right]\left[(e_\beta)_{\beta=1,\ldots,k}\right]/e'Ge=$$

$$=\left[(e'_\alpha)_\alpha\right]\left[(G_{\alpha i}B_{ij}G_{j\beta})_{\alpha,\beta}\right]\left[(e_\beta)_\beta\right]/e'Ge=$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{k}e'_\alpha G_{\alpha i}B_{ij}G_{j\beta}e_\beta/e'Ge=$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{k}(e'_\alpha/(e'Ge)^{1/2})G_{\alpha i}B_{ij}G_{j\beta}(e_\beta/(e'Ge)^{1/2})=$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{k}h'_\alpha G_{\alpha i}B_{ij}G_{j\beta}h_\beta, \qquad (E.46)$$

όπου

$$h_\alpha=e_\alpha/(e'Ge)^{1/2},\quad h_\beta=e_\beta/(e'Ge)^{1/2}. \qquad (E.47)$$

(β) Εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη του (α) βρίσκουμε ότι το ((ik),(lj))-στοιχείο της $k^2\times k^2$ μήτρας L είναι

$$l_{(ik)(lj)}=e'GC_{(ik)(lj)}Ge/e'Ge=$$

$$=e'\left[\sigma_{kl}GA_{(ij)}G-2\left[(G_{\alpha i}B_{iklj}G_{j\beta})_{\alpha,\beta=1,\ldots,k}\right]\right]e/e'Ge=$$

$$=\sigma_{kl}e'GA_{(ij)}Ge/e'Ge-$$

$$-2\left[(e_\alpha)_{\alpha=1,\ldots,k}\right]'\left[(G_{\alpha i}B_{iklj}G_{j\beta})_{\alpha,\beta=1,\ldots,k}\right]\left[(e_\beta)_{\beta=1,\ldots,k}\right]/e'Ge=$$

$$=\sigma_{kl}l_{(ij)}-2\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{k}h'_\alpha G_{\alpha i}B_{iklj}G_{j\beta}h_\beta. \qquad (E.48)$$

(γ) Το (ij)-στοιχείο του $k^2\times 1$ διανύσματος c είναι

$$c_{(ij)}=tr(A_{(ij)}P)=tr(B_{ij}P_{ji})\,. \qquad (E.49)$$

(δ) Το ((ik),(lj))-στοιχείο της $k^2\times k^2$ μήτρας C είναι

$$c_{(ik)(lj)}=tr(C_{(ik)(lj)}P)=tr\left[(\sigma_{kl}A_{(ij)}-2A_{(ik)}GA_{(lj)})P\right]=$$

$$=\sigma_{kl}tr(A_{(ij)}P)-2tr(A_{(ik)}GA_{(lj)}P)=$$

$$=\sigma_{kl}tr(B_{ij}P_{ji})-2tr(B_{ik}G_{kl}B_{lj}P_{ji})=\sigma_{kl}tr(B_{ij}P_{ji})-2tr(B_{iklj}P_{ji})=$$

$$=\sigma_{kl}c_{(ij)}-2tr(B_{iklj}P_{ji})\,. \qquad (E.50)$$

(ε) Το ((ik),(lj))-στοιχείο της $k^2\times k^2$ μήτρας D είναι

$$d_{(ik)(lj)}=tr(D_{(ik)(lj)}P)=tr\left[(A_{(ik)}PA_{(lj)}/2)P\right]=tr(A_{(ik)}PA_{(lj)}P)/2=$$

$$=tr(B_{ik}P_{kl}B_{lj}P_{ji})/2=tr(D_{iklj}P_{ji})\,. \qquad (E.51)$$

QED

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΗΣ ΠΡΟΤΑΣΗΣ 5.2: Όταν οι περιορισμοί επιβάλλονται μόνο στην πρώτη εξίσωση, το $n\times 1$ διάνυσμα e και η $r\times n$ μήτρα H γράφονται

$$e=\begin{bmatrix}e_1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\qquad H=\begin{bmatrix}H_{11} & 0\ldots 0\\0 & 0\ldots 0\\\vdots & \vdots\ \ddots\ \vdots\\0 & 0\ldots 0\end{bmatrix}, \qquad (E.52)$$

όπου e_1 είναι το $n_1\times 1$ υποδιάνυσμα του διανύσματος e και H_{11} είναι η $r_1\times n_1$ υπομήτρα της μήτρας H που χρησιμοποιούνται για να ελέγξουν περιορισμούς επί των διαρθρωτικών παραμέτρων της πρώτης εξίσωσης. Τότε έχουμε

$$e'Ge=(e_1',0,\ldots,0)\left[(G_{ij})_{i,j=1,\ldots,k}\right]\begin{bmatrix}e_1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=e_1'G_{11}e_1 \qquad (E.53)$$

και συνεπώς

$$h=\begin{bmatrix}h_1\\\vdots\\h_k\end{bmatrix}=e/(e'Ge)^{1/2}=\begin{bmatrix}e_1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}(e_1'G_{11}e_1)^{-1/2}=\begin{bmatrix}e_1/(e_1'G_{11}e_1)^{1/2}\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e_*\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}h_\alpha=h_\beta=h_1=e_*=e_1/(e_1'G_{11}e_1)^{1/2}, & \text{αν } \alpha=\beta=1,\\ h_\alpha=h_\beta=0, & \text{αν } \alpha=\beta=2,\ldots,k,\end{cases} \qquad (E.54)$$

όπου h_1 είναι το υποδιάνυσμα του διανύσματος h που αντιστοιχεί στούς περιορισμούς της πρώτης εξίσωσης. Αντικαθιστώντας από την (E.54) στις (E.46) και (E.48) παίρνουμε

$$l_{(ij)}=\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{k} h'_{\alpha}G_{\alpha i}B_{ij}G_{j\beta}h_{\beta}=h'_1G_{1i}B_{ij}G_{j1}h_1=e_*'G_{1i}B_{ij}G_{j1}e_* \qquad (E.55)$$

και

$$l_{(ik)(lj)}=\sigma_{kl}l_{(ij)}-2\sum_{\alpha=1}^{k}\sum_{\beta=1}^{k} h'_{\alpha}G_{\alpha i}B_{iklj}G_{j\beta}h_{\beta}=$$

$$=\sigma_{kl}l_{(ij)}-2h'_1G_{1i}B_{iklj}G_{j1}h_1=\sigma_{kl}l_{(ij)}-2e_*'G_{1i}B_{iklj}G_{j1}e_*. \qquad (E.56)$$

Από την (E.52) έπεται ότι $H_{ij}=0$ για $i,j\neq 1$. Επομένως, χρησιμοποιώντας τις (5.13) και (E.12) βρίσκουμε ότι

$$HGH'=\left[(H_{ik})_{i,k=1,\ldots,k}\right]\left[(G_{kl})_{k,l=1,\ldots,k}\right]\left[(H_{lj})_{l,j=1,\ldots,k}\right]'=$$

$$=\left[(H_{ik})_{i,k}\right]\left[(G_{kl})_{k,l}\right]\left[(H'_{lj})_{l,j}\right]=\left[\left(\sum_{k=1}^{k}\sum_{l=1}^{k}H_{ik}G_{kl}H'_{lj}\right)_{i,j=1,\ldots,k}\right]=$$

$$=\begin{bmatrix} H_{11}G_{11}H'_{11} & 0\ldots 0\\ 0 & 0\ldots 0\\ \vdots & \vdots\ \ddots\ \vdots\\ 0 & 0\ldots 0\end{bmatrix}\Rightarrow \qquad (E.57)$$

$$\Rightarrow Q=H'(HGH')^{-1}H=$$

$$=\left[(H_{ik})_{i,k=1,\ldots,k}\right]'\begin{bmatrix} H_{11}G_{11}H'_{11} & 0\ldots 0\\ 0 & 0\ldots 0\\ \vdots & \vdots\ \ddots\ \vdots\\ 0 & 0\ldots 0\end{bmatrix}^{-1}\left[(H_{lj})_{l,j=1,\ldots,k}\right]=$$

$$=\left[(H'_{ik})_{i,k}\right]\begin{bmatrix} (H_{11}G_{11}H'_{11})^{-1} & 0\ldots 0\\ 0 & 0\ldots 0\\ \vdots & \vdots\ \ddots\ \vdots\\ 0 & 0\ldots 0\end{bmatrix}\left[(H_{lj})_{l,j}\right]=$$

$$=\begin{bmatrix} H'_{11}(H_{11}G_{11}H'_{11})^{-1}H_{11} & 0\ldots 0\\ 0 & 0\ldots 0\\ \vdots & \vdots\ \ddots\ \vdots\\ 0 & 0\ldots 0\end{bmatrix}\Rightarrow \qquad (E.58)$$

$$\Rightarrow P=\left[(P_{ij})_{i,j=1,\ldots,k}\right]=GQG=$$

$$=\left[(G_{ik})_{i,k=1,\ldots,k}\right]\begin{bmatrix} H'_{11}(H_{11}G_{11}H'_{11})^{-1}H_{11} & 0\ldots 0\\ 0 & 0\ldots 0\\ \vdots & \vdots\ \ddots\ \vdots\\ 0 & 0\ldots 0\end{bmatrix}\left[(G_{lj})_{l,j=1,\ldots,k}\right]=$$

$$=\left[\left(G_{ii}H_{ii}'\left(H_{ii}G_{ii}H_{ii}'\right)^{-1}H_{ii}G_{ij}\right)_{i,j=1,\ldots,k}\right]=$$

$$=\left[\left(P_{ij}^{1}\right)_{i,j=1,\ldots,k}\right]. \qquad (E.59)$$

Από την (E.59) έπεται ότι, όταν οι περιορισμοί επιβάλλονται μόνο στην πρώτη εξίσωση, στους τύπους (5.18) μπορούμε να αντικαταστήσουμε την μήτρα P_{ij} με την μήτρα

$$P_{ij}^{1}=G_{ii}H_{ii}'\left(H_{ii}G_{ii}H_{ii}'\right)^{-1}H_{ii}G_{ij}. \qquad (E.60)$$

QED

<u>ΛΗΜΜΑ Ε.3:</u> Επαναλαμβάνουμε για ευκολία τον ορισμό του υποδείγματός μας, το οποίο ορίζεται από την

$$Y=ZB+U, \qquad (E.61)$$

είτε από την

$$y=X\beta+u, \qquad (E.62)$$

όπου

$$y=vec(Y), \quad X=(I_k\otimes Z)R, \quad u=vec(U), \quad vec(B)=R\beta. \qquad (E.63)$$

Για όλους τους εκτιμητές, $\hat{B}_I$ (I=UL, RL, GL, IG, ML), του B ισχύει η σχέση

$$\hat{B}_I=B+\tau B_1^I+\omega(\tau^2), \qquad (E.64)$$

όπου

$$B_1^{UL}=(Z'Z/T)^{-1}Z'U/\sqrt{T},$$

$$vec(B_1^{RL})=R(X'X/T)^{-1}X'u/\sqrt{T}, \qquad (E.65)$$

$$vec(B_1^{GL})=vec(B_1^{IG})=vec(B_1^{ML})=R(X'\Omega X/T)^{-1}X'\Omega u/\sqrt{T}.$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ:</u>

(i) Για τον $\hat{B}_{UL}$ ισχύει

$$\hat{B}_{UL}=(Z'Z)^{-1}Z'Y=(Z'Z)^{-1}Z'(ZB+U)=(Z'Z)^{-1}Z'ZB+(Z'Z)^{-1}Z'U=$$

$$=B+(Z'Z/T)^{-1}Z'U/T=B+\tau(Z'Z/T)^{-1}Z'U/\sqrt{T}=$$

$$=B+\tau B_1^{UL}, \qquad (E.66)$$

όπου

$$B_1^{UL}=(Z'Z/T)^{-1}Z'U/\sqrt{T}. \qquad (E.67)$$

(ii) Για τον $\hat{B}_{RL}$ ισχύει

$$vec(\hat{B}_{RL})=R(X'X)^{-1}X'y=R(X'X)^{-1}X'(X\beta+u)=R(X'X)^{-1}X'X\beta+R(X'X)X'u=$$

$$=R\beta+R(X'X/T)^{-1}X'u/T=R\beta+\tau R(X'X/T)^{-1}X'u/\sqrt{T}=$$

$$vec(B)+\tau vec(B_1^{RL}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{B}_{RL}=B+\tau B_1^{RL}, \qquad (E.68)$$

όπου

$$vec(B_1^{RL})=R(X'X/T)^{-1}X'u/\sqrt{T}. \qquad (E.69)$$

(iii) Για τον $\hat{B}_{GL}$ ισχύει

$$vec(\hat{B}_{GL})=R(X'\hat{\Omega}X)^{-1}X'\hat{\Omega}y=R(X'\hat{\Omega}X)^{-1}X'\hat{\Omega}(X\beta+u)=$$

$$=R(X'\hat{\Omega}X)^{-1}X'\hat{\Omega}X\beta+R(X'\hat{\Omega}X)^{-1}X'\hat{\Omega}u=R\beta+R(X'\hat{\Omega}X/T)^{-1}X'\hat{\Omega}u/T=$$

$$=R\beta+\tau R(X'\hat{\Omega}X/T)^{-1}X'\hat{\Omega}u/\sqrt{T}, \qquad (E.70)$$

όπου $\hat{\Omega}$ είναι ο UL ή ο RL εκτιμητής της μήτρας Ω. Από την απόδειξη του Λήμματος B.3 έχουμε ότι

$$\hat{\Omega}=\Omega+\tau\sum_{\langle ij\rangle=1}^{k^2}\Omega_{\langle ij\rangle}\delta_{\langle ij\rangle}+\omega(\tau^2)=\Omega+\omega(\tau), \qquad (E.71)$$

όπου $\delta_{\langle ij\rangle}=(\hat{\gamma}_{\langle ij\rangle}-\gamma_{\langle ij\rangle})/\tau$ και $\gamma_{\langle ij\rangle}$ είναι το (ij)-στοιχείο του $k^2\times 1$ διανύσματος γ. Αντικαθιστώντας από την (E.71) στην (E.70) και χρησιμοποιώντας το Λήμμα A.1, βρίσκουμε ότι

$$vec(\hat{B}_{GL})=R\beta+\tau R\left[X'(\Omega+\omega(\tau))X/T\right]^{-1}X'(\Omega+\omega(\tau))u/\sqrt{T}=$$

$$=R\beta+\tau R\left[(X'\Omega X/T)+\tau\omega(\tau^2)\right]^{-1}\left[(X'\Omega u/\sqrt{T})+\omega(\tau^2)\right]=$$

$$=R\beta+\tau R\left[(X'\Omega X/T)^{-1}+\tau\omega(\tau^2)\right]\left[(X'\Omega u/\sqrt{T})+\omega(\tau^2)\right]=$$

$$=R\beta+\tau R(X'\Omega X/T)^{-1}X'\Omega u/\sqrt{T}+\omega(\tau^2)=vec(B)+\tau vec(B_1^{GL})+\omega(\tau^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{B}_{GL}=B+\tau B_1^{GL}+\omega(\tau^2), \qquad (E.72)$$

όπου

$$vec(B_1^{GL})=R(X'\Omega X/T)^{-1}X'\Omega u/\sqrt{T}. \qquad (E.73)$$

(iv) Εφόσον οι $\hat{B}_{IG}$ και $\hat{B}_{ML}$ εκτιμητές του B προκύπτουν με επαναληπτική χρησιμοποίηση της GLS εκτιμητικής διαδικασίας, κατ' αναλογία των (E.72) και (E.73) ισχύουν οι σχέσεις:

$$\hat{B}_{IG}=B+\tau B_1^{IG}+\omega(\tau^2) \qquad (E.74)$$

και

$$\hat{B}_{ML}=B+\tau B_1^{ML}+\omega(\tau^2), \qquad (E.75)$$

όπου

$$\mathrm{vec}(B_1^{IG}) = \mathrm{vec}(B_1^{ML}) = \mathrm{vec}(B_1^{GL}) = R(X'\Omega X/T)^{-1}X'\Omega u/\sqrt{T}. \qquad (E.76)$$

Συνοψίζοντας τις (E.66), (E.67), (E.68), (E.69), (E.72), (E.73), (E.74) (E.75) και (E.76) παίρνουμε ότι

$$\hat{B}_I = B + \tau B_1^I + \omega(\tau^2) \quad (I=UL, RL, GL, IG, ML), \qquad (E.77)$$

όπου

$$B_1^{UL} = (Z'Z/T)^{-1}Z'U/\sqrt{T},$$

$$\mathrm{vec}(B_1^{RL}) = R(X'X/T)^{-1}X'u/\sqrt{T}, \qquad (E.78)$$

$$\mathrm{vec}(B_1^{GL}) = \mathrm{vec}(B_1^{IG}) = \mathrm{vec}(B_1^{ML}) = R(X'\Omega X/T)^{-1}X'\Omega u/\sqrt{T}.$$

QED

ΛΗΜΜΑ Ε.4: Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Ε.3 μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\lim_{T\to\infty} TE\left[(\hat{B}_I - \hat{B}_{UL})'\Gamma(\hat{B}_I - \hat{B}_{UL})\right] = \lim_{T\to\infty} E\left[(B_1^I - B_1^{UL})'\Gamma(B_1^I - B_1^{UL})\right]. \qquad (E.79)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Από το Λήμμα Ε.3 παίρνουμε

$$\hat{B}_I - \hat{B}_{UL} = (B+\tau B_1^I+\omega(\tau^2)) - (B+\tau B_1^{UL}) = \tau(B_1^I - B_1^{UL}) + \omega(\tau^2) \Rightarrow \qquad (E.80)$$

$$\Rightarrow (\hat{B}_I - \hat{B}_{UL})'\Gamma(\hat{B}_I - \hat{B}_{UL}) = \left[\tau(B_1^I - B_1^{UL}) + \omega(\tau^2)\right]'\Gamma\left[\tau(B_1^I - B_1^{UL}) + \omega(\tau^2)\right] =$$

$$= \tau^2(B_1^I - B_1^{UL})'\Gamma(B_1^I - B_1^{UL}) + \omega(\tau^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E\left[(\hat{B}_I - \hat{B}_{UL})'\Gamma(\hat{B}_I - \hat{B}_{UL})\right] = E\left[\tau^2(B_1^I - B_1^{UL})'\Gamma(B_1^I - B_1^{UL}) + \omega(\tau^3)\right] =$$

$$= \tau^2 E\left[(B_1^I - B_1^{UL})'\Gamma(B_1^I - B_1^{UL})\right] + O(\tau^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow TE\left[(\hat{B}_I - \hat{B}_{UL})'\Gamma(\hat{B}_I - \hat{B}_{UL})\right] = E\left[(B_1^I - B_1^{UL})'\Gamma(B_1^I - B_1^{UL})\right] + O(\tau) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{T\to\infty} TE\left[(\hat{B}_I - \hat{B}_{UL})'\Gamma(\hat{B}_I - \hat{B}_{UL})\right] = \lim_{T\to\infty}\left[E\left[(B_1^I - B_1^{UL})'\Gamma(B_1^I - B_1^{UL})\right] + O(\tau)\right] =$$

$$= \lim_{T\to\infty} E\left[(B_1^I - B_1^{UL})'\Gamma(B_1^I - B_1^{UL})\right]. \qquad (E.81)$$

QED

ΛΗΜΜΑ Ε.5: Το υπόδειγμά μας δίνεται από την εξίσωση

$$Y = ZB + U, \qquad (E.82)$$

όπου οι γραμμές της μήτρας U των διαταρακτικών όρων είναι ανεξάρτητα $N_k(0,\Sigma)$ διανύσματα, οι μήτρες Y και U έχουν διαστάσεις $T\times k$ και Σ είναι μια $k\times k$ μήτρα. Αποδεικνύεται ότι

$$E(U'U\Sigma^{-1}U'U) = T(k+T+1)\Sigma. \qquad (E.83)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω u_t' $(t=1,\ldots,T)$ οι γραμμές της μήτρας U, οπότε u_t

είναι οι στήλες της μήτρας U'. Επομένως,

$$U'U=\sum_{t=1}^{T} u_t u_t'. \qquad (E.84)$$

Από την (E.84) παίρνουμε ότι

$$U'U\Sigma^{-1}U'U=\Big(\sum_{t=1}^{T} u_t u_t'\Big)\Sigma^{-1}\Big(\sum_{s=1}^{T} u_s u_s'\Big)=\sum_{t=1}^{T}\sum_{s=1}^{T} u_t u_t'\Sigma^{-1}u_s u_s'=$$

$$=\sum_{t=1}^{T} u_t u_t'\Sigma^{-1}u_t u_t'+\sum_{\substack{t=1\\ t\neq s}}^{T}\sum_{s=1}^{T} u_t u_t'\Sigma^{-1}u_s u_s', \qquad (E.85)$$

όπου τα u_t' και u_s' είναι ανεξάρτητα $N_k(0,\Sigma)$ διανύσματα για $t\neq s$. Θεωρούμε το $k\times 1$ αυθαίρετο, μη στοχαστικό διάνυσμα l. Κάνοντας χρήση του Λήμματος A.8 και της (E.3) βρίσκουμε ότι

$$l'(u_t u_t'\Sigma^{-1}u_t u_t')\,l=tr(l'u_t u_t'\Sigma^{-1}u_t u_t'l)=tr(u_t'll'u_t u_t'\Sigma^{-1}u_t)=$$

$$=u_t'll'u_t u_t'\Sigma^{-1}u_t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E\left[l'(u_t u_t'\Sigma^{-1}u_t u_t')\,l\right]=E(u_t'll'u_t u_t'\Sigma^{-1}u_t)=$$

$$=(trll'\Sigma)(tr\Sigma^{-1}\Sigma)+2(trll'\Sigma\Sigma^{-1}\Sigma)=(trl'\Sigma l)(trI_k)+2(trl'\Sigma l)=$$

$$=kl'\Sigma l+2l'\Sigma l=(k+2)\,l'\Sigma l. \qquad (E.86)$$

Εφόσον τα u_t' και u_s' είναι ανεξάρτητα διανύσματα για $t\neq s$, οι σχέσεις (E.85) και (E.86) συνεπάγονται ότι

$$E\left[l'(U'U\Sigma^{-1}U'U)\,l\right]=E\left[l'\Big(\sum_{t=1}^{T} u_t u_t'\Sigma^{-1}u_t u_t'+\sum_{\substack{t=1\\ t\neq s}}^{T}\sum_{s=1}^{T} u_t u_t'\Sigma^{-1}u_s u_s'\Big)\,l\right]=$$

$$=\sum_{t=1}^{T} E\left[l'(u_t u_t'\Sigma^{-1}u_t u_t')\,l\right]+\sum_{\substack{t=1\\ t\neq s}}^{T}\sum_{s=1}^{T} E\left[l'(u_t u_t'\Sigma^{-1}u_s u_s')\,l\right]=$$

$$=\sum_{t=1}^{T} E\left[l'(u_t u_t'\Sigma^{-1}u_t u_t')\,l\right]+\sum_{\substack{t=1\\ t\neq s}}^{T}\sum_{s=1}^{T} l'E(u_t u_t')\Sigma^{-1}E(u_s u_s')\,l=$$

$$=\sum_{t=1}^{T} E\left[l'(u_t u_t'\Sigma^{-1}u_t u_t')\,l\right]+\sum_{\substack{t=1\\ t\neq s}}^{T}\sum_{s=1}^{T} l'\Sigma\Sigma^{-1}\Sigma l=$$

$$=\sum_{t=1}^{T}(k+2)\,l'\Sigma l+\sum_{\substack{t=1\\ t\neq s}}^{T}\sum_{s=1}^{T} l'\Sigma l=T(k+2)\,l'\Sigma l+T(T-1)\,l'\Sigma l=$$

$$=T(k+T+1)\,l'\Sigma l. \qquad (E.87)$$

Εφόσον το l είναι ένα $k\times 1$ αυθαίρετο, μη στοχαστικό διάνυσμα, από την (E.87) βρίσκουμε ότι

$$E\left[l'(U'U\Sigma^{-1}U'U)\,l\right]=l'E(U'U\Sigma^{-1}U'U)\,l=T(k+T+1)\,l'\Sigma l \rightarrow$$

$$\rightarrow E(U'U\Sigma^{-1}U'U)=T(k+T+1)\Sigma. \qquad (E.88)$$

QED

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΗΣ ΠΡΟΤΑΣΗΣ 5.3:</u> Έστω $\hat{U}_I$ τα κατάλοιπα από την εξίσωση

$$Y=ZB+U, \qquad (E.89)$$

όταν χρησιμοποιούμε τον $\hat{B}_I$ (I=UL, RL, GL, IG, ML) εκτιμητή του B. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα E.3 βρίσκουμε ότι

$$\hat{U}_I=Y-Z\hat{B}_I=ZB+U-Z(B+\tau B_1^I+\omega(\tau^2))=ZB+U-ZB-\tau ZB_1^I+\omega(\tau^2)=$$

$$=U-\tau ZB_1^I+\omega(\tau^2). \qquad (E.90)$$

Έστω $\hat{\Sigma}_I$ η εκτιμήτρια της μήτρας Σ από την I (I=UL, RL, GL, IG, ML) μέθοδο εκτίμησης. Ισχύει ότι

$$\hat{\Sigma}_I=\hat{U}_I'\hat{U}_I/T=\left[U-\tau ZB_1^I+\omega(\tau^2)\right]'\left[U-\tau ZB_1^I+\omega(\tau^2)\right]/T=$$

$$=(U-\tau ZB_1^I)'(U-\tau ZB_1^I)/T+\omega(\tau^4)=(U'-\tau B_1^{I\prime}Z')(U-\tau ZB_1^I)/T+\omega(\tau^4)=$$

$$=(U'U-\tau U'ZB_1^I-\tau B_1^{I\prime}Z'U+\tau^2B_1^{I\prime}Z'ZB_1^I)/T+\omega(\tau^4)=$$

$$=U'U/T-\tau U'ZB_1^I/T-\tau B_1^{I\prime}Z'U/T+\tau^2B_1^{I\prime}(Z'Z/T)B_1^I+\omega(\tau^4)=$$

$$=U'U/T-\tau^2U'ZB_1^I/\sqrt{T}-\tau^2B_1^{I\prime}Z'U/\sqrt{T}+\tau^2B_1^{I\prime}(Z'Z/T)B_1^I+\omega(\tau^4)=$$

$$=U'U/T+\tau^2\left[B_1^{I\prime}(Z'Z/T)B_1^I-U'ZB_1^I/\sqrt{T}-B_1^{I\prime}Z'U/\sqrt{T}\,\right]+\omega(\tau^4). \qquad (E.91)$$

Από την (E.78) γνωρίζουμε ότι

$$B_1^{UL}=(Z'Z/T)^{-1}Z'U/\sqrt{T}. \qquad (E.92)$$

Άρα,

$$B_1^{I\prime}Z'U/\sqrt{T}=B_1^{I\prime}(Z'Z/T)(Z'Z/T)^{-1}Z'U/\sqrt{T}=B_1^{I\prime}(Z'Z/T)B_1^{UL}. \qquad (E.93)$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι

$$U'ZB_1^I/\sqrt{T}=B_1^{UL\prime}(Z'Z/T)B_1^I. \qquad (E.94)$$

Από τις (5.12), (E.91), (E.93) και (E.94) έπεται ότι

$$\hat{\Sigma}_I=U'U/T+\tau^2\left[B_1^{I\prime}(Z'Z/T)B_1^I-B_1^{UL\prime}(Z'Z/T)B_1^I-B_1^{I\prime}(Z'Z/T)B_1^{UL}\right]+\omega(\tau^4)=$$

$$=\Sigma-\tau\sqrt{T}\Sigma+\tau\sqrt{T}U'U/T+\tau^2(B_1^{I\prime}\Gamma B_1^I-B_1^{UL\prime}\Gamma B_1^I-B_1^{I\prime}\Gamma B_1^{UL})+\omega(\tau^4). \qquad (E.95)$$

Όμως, ισχύει το κατωτέρω αποτέλεσμα:

$$B_1^{I\prime}\Gamma B_1^I - B_1^{UL\prime}\Gamma B_1^I - B_1^{I\prime}\Gamma B_1^{UL} =$$

$$= B_1^{I\prime}\Gamma B_1^I - B_1^{UL\prime}\Gamma B_1^I - B_1^{I\prime}\Gamma B_1^{UL} + B_1^{UL\prime}\Gamma B_1^{UL} - B_1^{UL\prime}\Gamma B_1^{UL} =$$

$$= (B_1^{I\prime} - B_1^{UL\prime})\Gamma(B_1^I - B_1^{UL}) - \left[(Z'Z/T)^{-1}Z'U/\sqrt{T}\right]'(Z'Z/T)\left[(Z'Z/T)^{-1}Z'U/\sqrt{T}\right] =$$

$$= (B_1^I - B_1^{UL})'\Gamma(B_1^I - B_1^{UL}) - U'Z(Z'Z/T)^{-1}(Z'Z/T)(Z'Z/T)^{-1}Z'U/T =$$

$$= (B_1^I - B_1^{UL})'\Gamma(B_1^I - B_1^{UL}) - U'Z(Z'Z)^{-1}Z'U =$$

$$= (B_1^I - B_1^{UL})'\Gamma(B_1^I - B_1^{UL}) - U'P_Z U, \qquad (E.96)$$

όπου $P_Z = Z(Z'Z)^{-1}Z'$. Αντικαθιστώντας την (E.96) στην (E.95) παίρνουμε

$$\hat{\Sigma}_I = \Sigma + \tau\left[\sqrt{T}(U'U/T - \Sigma)\right] + \tau^2\left[(B_1^I - B_1^{UL})'\Gamma(B_1^I - B_1^{UL}) - U'P_Z U\right] + \omega(\tau^4) =$$

$$= \Sigma + \tau\Sigma_1 + \tau^2\Sigma_2^I + \omega(\tau^4) = \Sigma + \tau(\Sigma_1 + \tau\Sigma_2^I) + \omega(\tau^3), \qquad (E.97)$$

όπου

$$\Sigma_1 = \sqrt{T}(U'U/T - \Sigma)$$

και (E.98)

$$\Sigma_2^I = (B_1^I - B_1^{UL})'\Gamma(B_1^I - B_1^{UL}) - U'P_Z U.$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα A.1 βρίσκουμε ότι

$$\hat{\Sigma}_I^{-1} = \left[\Sigma + \tau(\Sigma_1 + \tau\Sigma_2^I) + \omega(\tau^3)\right]^{-1} =$$

$$= \Sigma^{-1} - \tau\Sigma^{-1}(\Sigma_1 + \tau\Sigma_2^I)\Sigma^{-1} + \tau^2\Sigma^{-1}(\Sigma_1 + \tau\Sigma_2^I)\Sigma^{-1}(\Sigma_1 + \tau\Sigma_2^I)\Sigma^{-1} + \omega(\tau^3) =$$

$$= \Sigma^{-1} - \tau\Sigma^{-1}\Sigma_1\Sigma^{-1} - \tau^2\Sigma^{-1}\Sigma_2^I\Sigma^{-1} + \tau^2\Sigma^{-1}\Sigma_1\Sigma^{-1}\Sigma_1\Sigma^{-1} + \omega(\tau^3) =$$

$$= \Sigma^{-1} - \tau\Sigma^{-1}\Sigma_1\Sigma^{-1} + \tau^2(\Sigma^{-1}\Sigma_1\Sigma^{-1}\Sigma_1\Sigma^{-1} - \Sigma^{-1}\Sigma_2^I\Sigma^{-1}) + \omega(\tau^3) =$$

$$= \Sigma^{-1} - \tau\Sigma^{-1}\Sigma_1\Sigma^{-1} + \tau^2\left[\Sigma^{-1}(\Sigma_1\Sigma^{-1}\Sigma_1 - \Sigma_2^I)\Sigma^{-1}\right] + \omega(\tau^3) =$$

$$= \Sigma^{-1} - \tau S_1 + \tau^2 S_2^I + \omega(\tau^3), \qquad (E.99)$$

όπου

$$S_1 = \Sigma^{-1}\Sigma_1\Sigma^{-1}$$

και (E.100)

$$S_2^I = \Sigma^{-1}(\Sigma_1\Sigma^{-1}\Sigma_1 - \Sigma_2^I)\Sigma^{-1}.$$

Ορίζουμε το $k^2 \times 1$ διάνυσμα

$$\delta_\star = \left[(\delta_{(ij)})_{(ij)=1,\ldots,k^2}\right]. \qquad (E.101)$$

Από τον ορισμό του υποδείγματός μας έχουμε

$$\delta=\begin{bmatrix} \delta_o \\ [(\delta_{(ij)})_{(ij)=1,\ldots k^2}] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\delta_o\\ \delta_*\end{bmatrix}, \qquad (E.102)$$

όπου

$$\delta_o=(\hat{\sigma}^2-1)/\tau, \quad \delta_*=(\hat{\gamma}-\gamma)/\tau, \quad \delta_{(ij)}=(\hat{\gamma}_{(ij)}-\gamma_{(ij)})/\tau. \qquad (E.103)$$

Επιπλέον, από τον ορισμό (2.6) έχουμε ότι το δ έχει ένα στοχαστικό ανάπτυγμα της μορφής

$$\delta=d_1+\tau d_2+\omega(\tau^2) \qquad (E.104)$$

και κατ' αναλογία τα δ_o και δ_* έχουν στοχαστικά αναπτύγματα της μορφής

$$\delta_o=\sigma_o+\tau\sigma_1+\omega(\tau^2)$$
και
$$\delta_*=d_{*_1}+\tau d_{*_2}+\omega(\tau^2), \qquad (E.105)$$

αντίστοιχα, όπου τα d_{*_1} και d_{*_2} είναι $k^2\times 1$ διανύσματα. Από τις (E.102), (E.104) και (E.105) παίρνουμε ότι

$$d_1'=(\sigma_o, d_{*_1}'), \quad d_2'=(\sigma_1, d_{*_2}'). \qquad (E.106)$$

Από τις (5.8), (E.91), (E.99), (E.100) και (E.105) συνεπάγεται ότι

$$\hat{\gamma}_I=\mathrm{vec}\left[(Y-Z\hat{B}_I)'(Y-Z\hat{B}_I)/T\right]^{-1}=\mathrm{vec}(\hat{U}_I'\hat{U}_I/T)^{-1}=\mathrm{vec}(\hat{\Sigma}_I^{-1})=$$
$$=\mathrm{vec}\left[\Sigma^{-1}-\tau S_1+\tau^2 S_2^I+\omega(\tau^3)\right]=\mathrm{vec}(\Sigma^{-1})-\tau\mathrm{vec}(S_1)+\tau^2\mathrm{vec}(S_2^I)+\omega(\tau^3)=$$
$$=\gamma-\tau\mathrm{vec}(S_1)+\tau^2\mathrm{vec}(S_2^I)+\omega(\tau^3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \delta_*=(\hat{\gamma}_I-\gamma)/\tau = -\mathrm{vec}(S_1)+\tau\mathrm{vec}(S_2^I)+\omega(\tau^2)=d_{*_1}+\tau d_{*_2}+\omega(\tau^2), \qquad (E.107)$$

όπου

$$\hat{\Sigma}_I=\hat{U}_I'\hat{U}_I/T$$
και
$$d_{*_1}=-\mathrm{vec}(S_1), \quad d_{*_2}=\mathrm{vec}(S_2^I). \qquad (E.108)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό (2.8) και τις (E.102), (E.105), (E.106) και (E.108) βρίσκουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\text{(a)} \quad \begin{bmatrix}\lambda_o & \lambda' \\ \lambda & \Lambda\end{bmatrix}=\lim_{T\to\infty} E(d_1 d_1')=\lim_{T\to\infty} E\left[\begin{bmatrix}\sigma_o\\ d_{*_1}\end{bmatrix}(\sigma_o, d_{*_1}')\right]=$$

$$= \lim_{T\longrightarrow\infty} E\begin{bmatrix} \sigma_o^2 & \sigma_o d_{*1}' \\ \sigma_o d_{*1} & d_{*1}d_{*1}' \end{bmatrix}, \qquad (E.109)$$

από την οποία συνεπάγονται οι σχέσεις:

$$\lambda_o = \lim_{T\longrightarrow\infty} E(\sigma_o^2),$$

$$\lambda = \lim_{T\longrightarrow\infty} E(\sigma_o d_{*1}) = \lim_{T\longrightarrow\infty} E[-\sigma_o \mathrm{vec}(S_1)] = -\lim_{T\longrightarrow\infty} E[\sigma_o \mathrm{vec}(S_1)], \qquad (E.110)$$

$$\Lambda = \lim_{T\longrightarrow\infty} E(d_{*1}d_{*1}') = \lim_{T\longrightarrow\infty} E[(-\mathrm{vec}(S_1))(-\mathrm{vec}(S_1))'] =$$

$$= \lim_{T\longrightarrow\infty} E[(\mathrm{vec}(S_1))(\mathrm{vec}(S_1))'].$$

$$(b)\quad \begin{bmatrix} \mu_o \\ \mu \end{bmatrix} = \lim_{T\longrightarrow\infty} E(\sqrt{T}d_1 + d_2) = \lim_{T\longrightarrow\infty} E\begin{bmatrix} \sqrt{T}\sigma_o + \sigma_1 \\ \sqrt{T}d_{*1} + d_{*2} \end{bmatrix}, \qquad (E.111)$$

από την οποία συνεπάγονται οι σχέσεις:

$$\mu_o = \lim_{T\longrightarrow\infty} E(\sqrt{T}\sigma_o + \sigma_1)$$

και (E.112)

$$\mu = \lim_{T\longrightarrow\infty} E(\sqrt{T}d_{*1} + d_{*2}) = \lim_{T\longrightarrow\infty} E[\sqrt{T}(-\mathrm{vec}(S_1)) + \mathrm{vec}(S_2^I)].$$

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε τις ποσότητες Λ, λ, λ_o, μ και μ_o. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Α.8, τις (Ε.7) και (Ε.8), το Λήμμα Ε.5 και τις (Ε.97), (Ε.98), (Ε.99) και (Ε.100), βρίσκουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$(i)\quad E(\Sigma_1) = E[\sqrt{T}(U'U/T - \Sigma)] = \sqrt{T}[E(U'U)/T - \Sigma] = \sqrt{T}(T\Sigma/T - \Sigma) = 0. \qquad (E.113)$$

(ii) Εφόσον η μήτρα $U'U \backsim W_k(\Sigma, T)$ και η μήτρα $P_Z = Z(Z'Z)^{-1}Z'$ είναι ταυτοδύναμη, έπεται ότι

$$U'P_Z U \backsim W_k(\Sigma, m), \qquad (E.114)$$

διότι

$$m = \mathrm{rank}(P_Z) = \mathrm{tr}P_Z = \mathrm{tr}Z(Z'Z)^{-1}Z' = \mathrm{tr}(Z'Z)^{-1}Z'Z = \mathrm{tr}I_m. \qquad (E.115)$$

Επιπλέον, από τις (Ε.114) και (Ε.115) έπεται ότι

$$E(U'P_Z U) = (\mathrm{tr}P_Z)\Sigma = m\Sigma. \qquad (E.116)$$

$$(iii)\quad E(S_1) = E(\Sigma^{-1}\Sigma_1\Sigma^{-1}) = \Sigma^{-1}E(\Sigma_1)\Sigma^{-1} = 0, \qquad (E.117)$$

λόγω της (Ε.113).

$$(iv)\quad E(\Sigma_1\Sigma^{-1}\Sigma_1) = E[\sqrt{T}(U'U/T - \Sigma)\Sigma^{-1}\sqrt{T}(U'U/T - \Sigma)] =$$

$$=E\left[T(U'U\Sigma^{-1}U'U/T^2-U'U\Sigma^{-1}\Sigma/T-\Sigma\Sigma^{-1}U'U/T+\Sigma\Sigma^{-1}\Sigma)\right]=$$

$$=E(U'U\Sigma^{-1}U'U/T-2U'U+T\Sigma)=E(U'U\Sigma^{-1}U'U)/T-2E(U'U)+T\Sigma=$$

$$=T(k+T+1)\Sigma/T-2T\Sigma+T\Sigma=(k+T+1)\Sigma-T\Sigma=(k+1)\Sigma. \qquad (E.118)$$

(v) $$E(\Sigma_2^I)=E\left[(B_1^I-B_1^{UL})'\Gamma(B_1^I-B_1^{UL})-U'P_ZU\right]=$$

$$=E\left[(B_1^I-B_1^{UL})'\Gamma(B_1^I-B_1^{UL})\right]-E(U'P_ZU)=$$

$$=E\left[(B_1^I-B_1^{UL})'\Gamma(B_1^I-B_1^{UL})\right]-m\Sigma \Rightarrow \qquad (E.119)$$

$$\rightarrow E(\Sigma^{-1}\Sigma_2^I\Sigma^{-1})=\Sigma^{-1}E(\Sigma_2^I)\Sigma^{-1}=$$

$$=\Sigma^{-1}E\left[(B_1^I-B_1^{UL})'\Gamma(B_1^I-B_1^{UL})\right]\Sigma^{-1}-m\Sigma^{-1}\Sigma\Sigma^{-1}=$$

$$=\Sigma^{-1}E\left[(B_1^I-B_1^{UL})'\Gamma(B_1^I-B_1^{UL})\right]\Sigma^{-1}-m\Sigma^{-1}, \qquad (E.120)$$

λόγω της (E.116).

(vi) Συνδυάζοντας τις (E.100), (E.118) και (E.120) παίρνουμε

$$E(S_2^I)=E\left[\Sigma^{-1}(\Sigma_1\Sigma^{-1}\Sigma_1-\Sigma_2^I)\Sigma^{-1}\right]=E\left[\Sigma^{-1}(\Sigma_1\Sigma^{-1}\Sigma_1)\Sigma^{-1}-\Sigma^{-1}\Sigma_2^I\Sigma^{-1}\right]=$$

$$=\Sigma^{-1}E(\Sigma_1\Sigma^{-1}\Sigma_1)\Sigma^{-1}-E(\Sigma^{-1}\Sigma_2^I\Sigma^{-1})=$$

$$=(k+1)\Sigma^{-1}\Sigma\Sigma^{-1}-\left[\Sigma^{-1}E\left[(B_1^I-B_1^{UL})'\Gamma(B_1^I-B_1^{UL})\right]\Sigma^{-1}-m\Sigma^{-1}\right]=$$

$$=(k+1)\Sigma^{-1}+m\Sigma^{-1}-\Sigma^{-1}E\left[(B_1^I-B_1^{UL})'\Gamma(B_1^I-B_1^{UL})\right]\Sigma^{-1}=$$

$$=(m+k+1)\Sigma^{-1}-\Sigma^{-1}E\left[(B_1^I-B_1^{UL})'\Gamma(B_1^I-B_1^{UL})\right]\Sigma^{-1}. \qquad (E.121)$$

Εκφράζουμε το υπόδειγμά μας στην μορφή

$$y=X\beta+u. \qquad (E.122)$$

Εφαρμόζοντας την I μέθοδο εκτίμησης, εκτιμούμε την μήτρα Ω με τον εκτιμητή $\hat{\Omega}_I=\hat{\Sigma}_I^{-1}\otimes I_T$. Χρησιμοποιώντας την $\hat{\Omega}_I$ εκτιμούμε εκ νέου τις παραμέτρους της (E.122) με την GLS μέθοδο εκτίμησης. Έστω $\hat{\Sigma}_J$ η μήτρα συνδιακύμανσης που υπολογίζεται από τα GLS κατάλοιπα, $\hat{u}_{GL}=vec(\hat{U}_{GL})$, της εξίσωσης (E.122), δηλαδή

$$\hat{\Sigma}_J=\hat{U}_{GL}'\hat{U}_{GL}/T. \qquad (E.123)$$

Έστω $\hat{\beta}_{GL}$ ο GLS εκτιμητής του β από την εξίσωση (E.122). Από την (2.3), και εφόσον η μήτρα $\hat{\Sigma}_I^{-1}$ είναι συμμετρική, έπεται ότι, για I=UL, RL, GL, IG, ML, ισχύει η σχέση

$$\hat{\sigma}_I^2=(y-X\hat{\beta}_{GL})'\hat{\Omega}_I(y-X\hat{\beta}_{GL})/(Tk-n)=\hat{u}_{GL}'(\hat{\Sigma}_I^{-1}\otimes I_T)\hat{u}_{GL}/(Tk-n)=$$

$$=\left[\mathrm{vec}(\hat{U}_{GL})\right]'(\hat{\Sigma}_I^{-1}\otimes I_T)\,\mathrm{vec}(\hat{U}_{GL})/(Tk-n)=$$

$$=\mathrm{tr}\left[\hat{U}_{GL}(\hat{\Sigma}_I^{-1})'\hat{U}_{GL}'\right]/(Tk-n)=\mathrm{tr}(\hat{\Sigma}_I^{-1}\hat{U}_{GL}'\hat{U}_{GL})/(Tk-n)=$$

$$=\mathrm{tr}(\hat{\Sigma}_I^{-1}T\hat{\Sigma}_J)/(Tk-n)=\mathrm{tr}(\hat{\Sigma}_I^{-1}\hat{\Sigma}_J)/((Tk-n)/T)=$$

$$=\mathrm{tr}(\hat{\Sigma}_I^{-1}\hat{\Sigma}_J)/(k-n/T)=\mathrm{tr}(\hat{\Sigma}_I^{-1}\hat{\Sigma}_J)/(k-\tau^2 n)\,. \qquad (E.124)$$

Κατ' αναλογία προς τις (E.97) και (E.98) έχουμε ότι

$$\hat{\Sigma}_J=\Sigma+\tau\Sigma_1+\tau^2\Sigma_2^J+\omega(\tau^3)\,, \qquad (E.125)$$

όπου

$$\Sigma_1=\sqrt{T}(U'U/T-\Sigma)$$

και (E.126)

$$\Sigma_2^J=(B_1^J-B_1^{UL})'\Gamma(B_1^J-B_1^{UL})-U'P_Z U.$$

Χρησιμοποιώντας τις (E.99), (E.100), (E.124) και (E.125) βρίσκουμε ότι

$$\hat{\Sigma}_I^{-1}\hat{\Sigma}_J=\left[\Sigma^{-1}-\tau S_1+\tau^2 S_2^I+\omega(\tau^3)\right]\left[\Sigma+\tau\Sigma_1+\tau^2\Sigma_2^J+\omega(\tau^3)\right]=$$

$$=\Sigma^{-1}\Sigma+\tau\Sigma^{-1}\Sigma_1+\tau^2\Sigma^{-1}\Sigma_2^J-\tau S_1\Sigma-\tau^2 S_1\Sigma_1+\tau^2 S_2^I\Sigma+\omega(\tau^3)=$$

$$=I_k+\tau\Sigma^{-1}\Sigma_1+\tau^2\Sigma^{-1}\Sigma_2^J-\tau\Sigma^{-1}\Sigma_1\Sigma^{-1}\Sigma-\tau^2\Sigma^{-1}\Sigma_1\Sigma^{-1}\Sigma_1+$$

$$+\tau^2\Sigma^{-1}(\Sigma_1\Sigma^{-1}\Sigma_1-\Sigma_2^I)\Sigma^{-1}\Sigma+\omega(\tau^3)=$$

$$=I_k+\tau^2\Sigma^{-1}\Sigma_2^J-\tau^2\Sigma^{-1}\Sigma_1\Sigma^{-1}\Sigma_1+\tau^2\Sigma^{-1}\Sigma_1\Sigma^{-1}\Sigma_1-\tau^2\Sigma^{-1}\Sigma_2^I+\omega(\tau^3)=$$

$$=I_k+\tau^2\Sigma^{-1}(\Sigma_2^J-\Sigma_2^I)+\omega(\tau^3)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{tr}(\hat{\Sigma}_I^{-1}\hat{\Sigma}_J)=\mathrm{tr}\left[I_k+\tau^2\Sigma^{-1}(\Sigma_2^J-\Sigma_2^I)+\omega(\tau^3)\right]=k+\tau^2\mathrm{tr}\Sigma^{-1}(\Sigma_2^J-\Sigma_2^I)+\omega(\tau^3)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}_I^2=\mathrm{tr}(\hat{\Sigma}_I^{-1}\hat{\Sigma}_J)/(k-\tau^2 n)=$$

$$=\left[\tau^2\mathrm{tr}\Sigma^{-1}(\Sigma_2^J-\Sigma_2^I)+k\right]/(k-\tau^2 n)+\omega(\tau^3)\,. \qquad (E.127)$$

'Ομως,

$$\Sigma^{-1}(\Sigma_2^J-\Sigma_2^I)=\Sigma^{-1}(\Sigma_1\Sigma^{-1}\Sigma_1-\Sigma_1\Sigma^{-1}\Sigma_1+\Sigma_2^J-\Sigma_2^I)=$$

$$=\Sigma^{-1}\left[(\Sigma_1\Sigma^{-1}\Sigma_1-\Sigma_2^I)-(\Sigma_1\Sigma^{-1}\Sigma_1-\Sigma_2^J)\right]=$$

$$=\Sigma^{-1}(\Sigma_1\Sigma^{-1}\Sigma_1-\Sigma_2^I)\Sigma^{-1}\Sigma-\Sigma^{-1}(\Sigma_1\Sigma^{-1}\Sigma_1-\Sigma_2^J)\Sigma^{-1}\Sigma=S_2^I\Sigma-S_2^J\Sigma=(S_2^I-S_2^J)\Sigma\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{tr}\Sigma^{-1}(\Sigma_2^J-\Sigma_2^I)=\mathrm{tr}(S_2^I-S_2^J)\Sigma. \qquad (E.128)$$

Από τις (E.103), (E.127) και (E.128) έπεται ότι

$$\hat{\sigma}_I^2=\left[\tau^2\mathrm{tr}(S_2^I-S_2^J)\Sigma+k\right]/(k-\tau^2 n)+\omega(\tau^3)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_0^I=(\hat{\sigma}_I^2-1)/\tau=\hat{\sigma}_I^2/\tau-1/\tau=$$

$$=\left[\tau^2 tr(S_2^I-S_2^J)\Sigma+k\right]/\tau(k-\tau^2 n)-1/\tau+\omega(\tau^2)=$$

$$=\left[\tau\ tr(S_2^I-S_2^J)\Sigma+k/\tau\right]/(k-\tau^2 n)-1/\tau+\omega(\tau^2). \qquad (E.129)$$

Κάνοντας χρήση του Λήμματος Α.1 παίρνουμε

$$1/(k-\tau^2 n)=(k-\tau^2 n)^{-1}=\left[k(1-\tau^2 n/k)\right]^{-1}=k^{-1}(1-\tau^2 n/k)^{-1}=$$

$$=k^{-1}\left[1+\tau^2 n/k+\omega(\tau^4)\right]=(1+\tau^2 n/k)/k+\omega(\tau^4). \qquad (E.130)$$

Αντικαθιστώντας την (E.130) στην (E.129) βρίσκουμε ότι

$$\delta_0^I=\left[\tau\ tr(S_2^I-S_2^J)\Sigma+k/\tau\right]\left[(1+\tau^2 n/k)/k+\omega(\tau^4)\right]-1/\tau+\omega(\tau^2)=$$

$$=\left[\tau\ tr(S_2^I-S_2^J)\Sigma/k+1/\tau\right](1+\tau^2 n/k)-1/\tau+\omega(\tau^2)=$$

$$=\tau\ tr(S_2^I-S_2^J)\Sigma/k+1/\tau+\tau n/k-1/\tau+\omega(\tau^2)=$$

$$=\tau\left[tr(S_2^I-S_2^J)\Sigma+n\right]/k+\omega(\tau^2). \qquad (E.131)$$

Συνδυάζοντας τις (E.105) και (E.131) βρίσκουμε ότι

$$\delta_0^I=\sigma_0+\tau\sigma_1+\omega(\tau^2)=\tau\left[tr(S_2^I-S_2^J)\Sigma+n\right]/k+\omega(\tau^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_0=0, \quad \sigma_1=\left[tr(S_2^I-S_2^J)\Sigma+n\right]/k. \qquad (E.132)$$

Ορίζουμε τις $k\times k$ μήτρες

$$M_I=\lim_{T\longrightarrow\infty} E(S_2^I)$$

και (E.133)

$$\Delta_I=\lim_{T\longrightarrow\infty} TE\left[(\hat{B}_I-\hat{B}_{UL})'\Gamma(\hat{B}_I-\hat{B}_{UL})\right] \quad (I=UL, RL, GL, IG, ML)$$

και την $k^2\times k^2$ μήτρα N με στοιχεία

$$v_{(ij)(kl)}=\sigma_{ik}\sigma_{jl}+\sigma_{il}\sigma_{jk} \quad (i,j,k,l=1,\ldots,k). \qquad (E.134)$$

Από το Λήμμα Ε.4, την (E.121) και τον ορισμό (E.133) παίρνουμε τα κατωτέρω αποτελέσματα:

$$(\alpha)\ M_I=\lim_{T\longrightarrow\infty} E(S_2^I)=\lim_{T\longrightarrow\infty}\left[(m+k+1)\Sigma^{-1}-\Sigma^{-1}E\left[(B_1^I-B_1^{UL})'\Gamma(B_1^I-B_1^{UL})\right]\Sigma^{-1}\right]=$$

$$=(m+k+1)\Sigma^{-1}-\Sigma^{-1}\left[\lim_{T\longrightarrow\infty} E\left[(B_1^I-B_1^{UL})'\Gamma(B_1^I-B_1^{UL})\right]\right]\Sigma^{-1}=$$

$$=(m+k+1)\Sigma^{-1}-\Sigma^{-1}\left[\lim_{T\longrightarrow\infty} TE\left[(\hat{B}_I-\hat{B}_{UL})'\Gamma(\hat{B}_I-\hat{B}_{UL})\right]\right]\Sigma^{-1}=$$

$$=(m+k+1)\Sigma^{-1}-\Sigma^{-1}\Delta_I\Sigma^{-1}. \qquad (E.135)$$

$$(\beta)\quad E\left[(S_2^I-S_2^J)\,\Sigma\right]=\left[E(S_2^I)-E(S_2^J)\right]\Sigma=$$

$$=\Big[(m+k+1)\,\Sigma^{-1}-\Sigma^{-1}E\left[(B_1^I-B_1^{UL})'\Gamma(B_1^I-B_1^{UL})\right]\Sigma^{-1}-$$

$$-(m+k+1)\,\Sigma^{-1}+\Sigma^{-1}E\left[(B_1^J-B_1^{UL})'\Gamma(B_1^J-B_1^{UL})\right]\Sigma^{-1}\Big]\Sigma=$$

$$=-\Sigma^{-1}E\left[(B_1^I-B_1^{UL})'\Gamma(B_1^I-B_1^{UL})\right]\Sigma^{-1}\Sigma+\Sigma^{-1}E\left[(B_1^J-B_1^{UL})'\Gamma(B_1^J-B_1^{UL})\right]\Sigma^{-1}\Sigma\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{T\to\infty} E\left[(S_2^I-S_2^J)\,\Sigma\right]=$$

$$=-\Sigma^{-1}\lim_{T\to\infty} E\left[(B_1^I-B_1^{UL})'\Gamma(B_1^I-B_1^{UL})\right]+\Sigma^{-1}\lim_{T\to\infty} E\left[(B_1^J-B_1^{UL})'\Gamma(B_1^J-B_1^{UL})\right]=$$

$$=-\Sigma^{-1}\lim_{T\to\infty} TE\left[(\hat{B}_I-\hat{B}_{UL})'\Gamma(\hat{B}_I-\hat{B}_{UL})\right]+\Sigma^{-1}\lim_{T\to\infty} TE\left[(\hat{B}_J-\hat{B}_{UL})'\Gamma(\hat{B}_J-\hat{B}_{UL})\right]=$$

$$=-\Sigma^{-1}\Delta_I+\Sigma^{-1}\Delta_J=\Sigma^{-1}(\Delta_J-\Delta_I)=\Sigma^{-1}(\Delta_{GL}-\Delta_I),\qquad (E.136)$$

διότι η J μέθοδος εκτίμησης είναι η μέθοδος GLS. Από την (E.100), εφόσον η μήτρα Σ^{-1} είναι συμμετρική, συνεπάγεται ότι

$$S_1=\Sigma^{-1}\Sigma_1\Sigma^{-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{vec}(S_1)=\left[(\Sigma^{-1})'\otimes\Sigma^{-1}\right]\mathrm{vec}(\Sigma_1)=(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})\,\mathrm{vec}(\Sigma_1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mathrm{vec}(S_1))(\mathrm{vec}(S_1))'=\left[(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})\,\mathrm{vec}(\Sigma_1)\right]\left[(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})\,\mathrm{vec}(\Sigma_1)\right]'=$$

$$=\left[(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})\,\mathrm{vec}(\Sigma_1)\right]\left[(\mathrm{vec}(\Sigma_1))'(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})'\right]=$$

$$=(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})(\mathrm{vec}(\Sigma_1))(\mathrm{vec}(\Sigma_1))'(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1}).\qquad (E.137)$$

Όμως, από τις (E.7) και (E.8) έχουμε ότι η μήτρα $U'U$ έχει μια κατανομή Wishart με $E(U'U)=T\Sigma$. Από την (E.98) έπεται ότι

$$\Sigma_1=\sqrt{T}(U'U/T-\Sigma)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow W=\sqrt{T}\Sigma_1=T(U'U/T-\Sigma)=U'U-T\Sigma,\qquad (E.138)$$

δηλαδή η μήτρα $W=\sqrt{T}\Sigma_1$ είναι μια μήτρα Wishart σε αποκλίσεις από τον μέσο της. Έστω w_{ij} το (i,j)-στοιχείο της μήτρας W. Τότε, αν σ_{ij} είναι το (i,j)-στοιχείο της μήτρας Σ, χρησιμοποιώντας τον ορισμό (E.134) και ακολουθώντας τον Zellner ((1971), σελ.389. (B.58)) έχουμε

$$\mathrm{Cov}(w_{ij},w_{kl})=E(w_{ij}w_{kl})=T(\sigma_{ik}\sigma_{jl}+\sigma_{il}\sigma_{jk})=Tv_{(ij)(kl)}.\qquad (E.139)$$

Οι σχέσεις (E.137) και (E.139) συνεπάγονται ότι

$$E\left[(\mathrm{vec}(S_1))(\mathrm{vec}(S_1))'\right]=(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})\,E\left[(\mathrm{vec}(\Sigma_1))(\mathrm{vec}(\Sigma_1))'\right](\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})=$$

$$=(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})\,(1/T)\,E\left[(\mathrm{vec}(\sqrt{T}\Sigma_1))\,(\mathrm{vec}(\sqrt{T}\Sigma_1))'\right](\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})=$$

$$=(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})\,(1/T)\,E\left[(\mathrm{vec}(W))\,(\mathrm{vec}(W))'\right](\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})=$$

$$=(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})\,(1/T)\,E\left[(w_{ij}w_{kl})_{(ij),(kl)=1,\ldots,k^2}\right](\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})=$$

$$=(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})\,(1/T)\left[(E(w_{ij}w_{kl}))_{(ij),(kl)=1,\ldots,k^2}\right](\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})=$$

$$=(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})\,(1/T)\left[(T\nu_{(ij)(kl)})_{(ij),(kl)=1,\ldots,k^2}\right](\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})=$$

$$=(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})\left[(\nu_{(ij)(kl)})_{(ij),(kl)=1,\ldots,k^2}\right](\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})=$$

$$=(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})N(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{T\to\infty} E\left[(\mathrm{vec}(S_1))\,(\mathrm{vec}(S_1))'\right]=\lim_{T\to\infty}\left[(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})N(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})\right]=$$

$$=(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})N(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1}), \qquad \text{(E.140)}$$

διότι τα διανύσματα $\mathrm{vec}(S_1)$ και $\mathrm{vec}(\sqrt{T}\Sigma_1)=\mathrm{vec}(W)$ είναι $k^2\times 1$. Χρησιμοποιώντας την (E.135) παίρνουμε

$$(M_I-M_{GL})\,\Sigma=\left[(m+k+1)\Sigma^{-1}-\Sigma^{-1}\Delta_I\Sigma^{-1}-(m+k+1)\Sigma^{-1}+\Sigma^{-1}\Delta_{GL}\Sigma^{-1}\right]\Sigma=$$

$$=(\Sigma^{-1}\Delta_{GL}\Sigma^{-1}-\Sigma^{-1}\Delta_I\Sigma^{-1})\,\Sigma=\Sigma^{-1}(\Delta_{GL}-\Delta_I)\,\Sigma^{-1}\Sigma=\Sigma^{-1}(\Delta_{GL}-\Delta_I). \qquad \text{(E.141)}$$

Από τις (E.110), (E.112), (E.117), (E.121), (E.132), (E.135), (E.136), (E.140) και (E.141) προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

(i) $$\lambda_o=\lim_{T\to\infty} E(\sigma_o^2)=0. \qquad \text{(E.142)}$$

(ii) $$\lambda=-\lim_{T\to\infty} E\left[\sigma_o\,\mathrm{vec}(S_1)\right]=0. \qquad \text{(E.143)}$$

(iii) $$\Lambda=\lim_{T\to\infty} E\left[(\mathrm{vec}(S_1))\,(\mathrm{vec}(S_1))'\right]=(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1})N(\Sigma^{-1}\otimes\Sigma^{-1}). \qquad \text{(E.144)}$$

(iv) $$\mu=\lim_{T\to\infty} E\left[\sqrt{T}(-\mathrm{vec}(S_1))+\mathrm{vec}(S_2^I)\right]=\lim_{T\to\infty} E\left[\mathrm{vec}\left[\sqrt{T}(-S_1)+S_2^I\right]\right]=$$

$$=\mathrm{vec}\left[\lim_{T\to\infty} E\left[\sqrt{T}(-S_1)+S_2^I\right]\right]=\mathrm{vec}\left[\lim_{T\to\infty}\left[-\sqrt{T}E(S_1)+E(S_2^I)\right]\right]=$$

$$=\mathrm{vec}\left[\lim_{T\to\infty} E(S_2^I)\right]=\mathrm{vec}(M_I)=\mathrm{vec}\left[(m+k+1)\Sigma^{-1}-\Sigma^{-1}\Delta_I\Sigma^{-1}\right]. \qquad \text{(E.145)}$$

(v) $$\mu_o=\lim_{T\to\infty} E(\sqrt{T}\sigma_o+\sigma_1)=\lim_{T\to\infty} E(\sigma_1)=\lim_{T\to\infty} E\left[\left[\mathrm{tr}(S_2^I-S_2^J)\Sigma+n\right]/k\right]=$$

$$=\mathrm{tr}\left[\lim_{T\to\infty} E\left[(S_2^I-S_2^J)\Sigma\right]\right]\Big/k+n/k=$$

$$=\mathrm{tr}\Sigma^{-1}(\Delta_{GL}-\Delta_I)/k+n/k=\mathrm{tr}(M_I-M_{GL})\,\Sigma/k+n/k. \qquad \text{(E.146)}$$

Αυτό που απομένει είναι να υπολογίσουμε αναλυτικά τις μήτρες

$$\Delta_I = \lim_{T\longrightarrow\infty} TE\left[(\hat{B}_I-\hat{B}_{UL})'\Gamma(\hat{B}_I-\hat{B}_{UL})\right] \quad (I=UL,\ RL,\ GL,\ IG,\ ML), \tag{E.147}$$

για τις οποίες, λόγω του Λήμματος Ε.4, ισχύει ότι

$$\Delta_I = \lim_{T\longrightarrow\infty} E\left[(B_1^I-B_1^{UL})'\Gamma(B_1^I-B_1^{UL})\right]. \tag{E.148}$$

Υπενθυμίζουμε ότι το υπόδειγμά μας ορίζεται, εναλλακτικά, είτε από την σχέση

$$Y=ZB+U, \tag{E.149}$$

όπου οι μήτρες Y, U, Z και B έχουν διαστάσεις T×k, T×k, T×m και m×k, αντίστοιχα, είτε από την σχέση

$$y=X\beta+u, \tag{E.150}$$

όπου $y=vec(Y)$, $X=(I_k\otimes Z)R$, $u=vec(U)$ και $vec(B)=R\beta$. Επιπλέον, οι διαστάσεις των διανυσμάτων y και u είναι Tk×1 και των μητρών $(I_k\otimes Z)$, R και X είναι Tk×km, km×n και Tk×n, αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Ε.3 παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\text{(a)}\ B_1^{UL}=(Z'Z/T)^{-1}Z'U/\sqrt{T}=T(Z'Z)^{-1}Z'U/\sqrt{T}=\sqrt{T}(Z'Z)^{-1}Z'U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow vec(B_1^{UL})=vec\left[\sqrt{T}(Z'Z)^{-1}Z'U\right]=\sqrt{T}vec\left[(Z'Z)^{-1}Z'U\right]=$$

$$=\sqrt{T}\left[I_k\otimes(Z'Z)^{-1}Z'\right]vec(U)=\sqrt{T}\left[I_k\otimes(Z'Z)^{-1}Z'\right]u. \tag{E.151}$$

$$\text{(b)}\ vec(B_1^{RL})=R(X'X/T)^{-1}X'u/\sqrt{T}=TR(X'X)^{-1}X'u/\sqrt{T}=$$

$$=\sqrt{T}R(X'X)^{-1}X'u. \tag{E.152}$$

$$\text{(c)}\ vec(B_1^{GL})=vec(B_1^{IG})=vec(B_1^{ML})=R(X'\Omega X/T)^{-1}X'\Omega u/\sqrt{T}=$$

$$=TR(X'\Omega X)^{-1}X'\Omega u/\sqrt{T}=\sqrt{T}R(X'\Omega X)^{-1}X'\Omega u. \tag{E.153}$$

Από την (Ε.80) έπεται ότι

$$\hat{B}_I-\hat{B}_{UL}=\tau(B_1^I-B_1^{UL})+\omega(\tau^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{T}(\hat{B}_I-\hat{B}_{UL})=\sqrt{T}\left[\tau(B_1^I-B_1^{UL})+\omega(\tau^2)\right]=(B_1^I-B_1^{UL})+\omega(\tau) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow vec\left[\sqrt{T}(\hat{B}_I-\hat{B}_{UL})\right]=\sqrt{T}vec\left[(\hat{B}_I-\hat{B}_{UL})\right]=vec(B_1^I-B_1^{UL})+\omega(\tau). \tag{E.154}$$

Ορίζουμε την μήτρα Φ_I, έτσι ώστε

$$\sqrt{T}\Phi_I u=vec(B_1^I-B_1^{UL}). \tag{E.155}$$

Οι σχέσεις (Ε.154) και (Ε.155) συνεπάγονται ότι

$$\sqrt{T}\,\mathrm{vec}\left[(\hat{B}_I-\hat{B}_{UL})\right]=\sqrt{T}\Phi_I u+\omega(\tau)\,. \qquad (E.156)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (E.151), (E.152), (E.153) και (E.155) βρίσκουμε τα κάτωθι αποτελέσματα:

(i) Για I=UL έχουμε

$$\sqrt{T}\Phi_I u=\sqrt{T}\Phi_{UL}u=\mathrm{vec}(B_1^{UL}-B_1^{UL})=0 \Rightarrow \Phi_{UL}=0\,. \qquad (E.157)$$

(ii) Για I=RL έχουμε

$$\sqrt{T}\Phi_I u=\sqrt{T}\Phi_{RL}u=\mathrm{vec}(B_1^{RL}-B_1^{UL})=\sqrt{T}R(X'X)^{-1}X'u-\sqrt{T}\left[I_k\otimes(Z'Z)^{-1}Z'\right]u=$$

$$=\sqrt{T}\left[R(X'X)^{-1}X'-\left[I_k\otimes(Z'Z)^{-1}Z'\right]\right]u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_{RL}=R(X'X)^{-1}X'-\left[I_k\otimes(Z'Z)^{-1}Z'\right]. \qquad (E.158)$$

(iii) Για I=GL, IG, ML έχουμε

$$\sqrt{T}\Phi_I u=\sqrt{T}\Phi_{GL}u=\sqrt{T}\Phi_{IG}u=\sqrt{T}\Phi_{ML}u=$$

$$=\mathrm{vec}(B_1^{GL}-B_1^{UL})=\mathrm{vec}(B_1^{IG}-B_1^{UL})=\mathrm{vec}(B_1^{ML}-B_1^{UL})=$$

$$=\sqrt{T}R(X'\Omega X)^{-1}X'\Omega u-\sqrt{T}\left[I_k\otimes(Z'Z)^{-1}Z'\right]u=$$

$$=\sqrt{T}\left[R(X'\Omega X)^{-1}X'\Omega-\left[I_k\otimes(Z'Z)^{-1}Z'\right]\right]u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi_{GL}=\Phi_{IG}=\Phi_{ML}=R(X'\Omega X)^{-1}X'\Omega-\left[I_k\otimes(Z'Z)^{-1}Z'\right]. \qquad (E.159)$$

Έστω l ένα αυθαίρετο $k\times 1$ διάνυσμα και $L=ll'$ μια $k\times k$ συμμετρική μήτρα, τέτοια ώστε

$$l=\left[(l_i)_{i=1,\ldots,k}\right]$$

και (E.160)

$$L=\left[(l_{ij})_{i,j=1,\ldots,k}\right]=ll'=\begin{bmatrix}l_1\\ \vdots\\ l_k\end{bmatrix}(l_1,\ldots,l_k)=\begin{bmatrix}l_1l_1\ldots l_1l_k\\ \vdots\qquad\quad\vdots\\ l_kl_1\ldots l_kl_k\end{bmatrix}=$$

$$=\left[(l_il_j)_{i,j=1,\ldots,k}\right] \Rightarrow l_{ij}=l_il_j,\ \text{για } i,j=1,\ldots,k.$$

Ισχύει ότι

$$l'(B_1^I-B_1^{UL})'\Gamma(B_1^I-B_1^{UL})\,l=\mathrm{tr}\left[l'(B_1^I-B_1^{UL})'\Gamma(B_1^I-B_1^{UL})\,l\right]=$$

$$=\mathrm{tr}\left[(B_1^I-B_1^{UL})'\Gamma(B_1^I-B_1^{UL})\,ll'\right]=\mathrm{tr}\left[(B_1^I-B_1^{UL})'\Gamma(B_1^I-B_1^{UL})\,L\right]=$$

$$=\left[\mathrm{vec}(B_1^I-B_1^{UL})\right]'\mathrm{vec}\left[\Gamma(B_1^I-B_1^{UL})\,L\right]=$$

$$=\left[\mathrm{vec}(B_1^I-B_1^{UL})\right]'(L'\otimes\Gamma)\left[\mathrm{vec}(B_1^I-B_1^{UL})\right]=$$

$$=\left[\mathrm{vec}(B_i^I-B_i^{UL})\right]'(L\otimes\Gamma)\left[\mathrm{vec}(B_i^I-B_i^{UL})\right]. \qquad (E.161)$$

Συνδυάζοντας τις (E.5), (E.155) και (E.161) παίρνουμε ότι

$$l'(B_i^I-B_i^{UL})'\Gamma(B_i^I-B_i^{UL})\,l=(\sqrt{T}\Phi_I u)'(L\otimes\Gamma)(\sqrt{T}\Phi_I u)=Tu'\Phi_I'(L\otimes\Gamma)\Phi_I u=$$

$$=T\ \mathrm{tr}\,u'\Phi_I'(L\otimes\Gamma)\Phi_I u=T\ \mathrm{tr}\Phi_I'(L\otimes\Gamma)\Phi_I uu' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E\left[l'(B_i^I-B_i^{UL})'\Gamma(B_i^I-B_i^{UL})\,l\right]=E\left[T\ \mathrm{tr}\Phi_I'(L\otimes\Gamma)\Phi_I uu'\right]=$$

$$=T\ \mathrm{tr}\Phi_I'(L\otimes\Gamma)\Phi_I E(uu')=T\ \mathrm{tr}\Phi_I'(L\otimes\Gamma)\Phi_I(\Sigma\otimes I_T). \qquad (E.162)$$

Από τις (E.148) και (E.162) συνεπάγεται ότι

$$l'\Delta_I l=l'\lim_{T\longrightarrow\infty}E\left[(B_i^I-B_i^{UL})'\Gamma(B_i^I-B_i^{UL})\right]l=\lim_{T\longrightarrow\infty}E\left[l'(B_i^I-B_i^{UL})'\Gamma(B_i^I-B_i^{UL})\,l\right]=$$

$$=\lim_{T\longrightarrow\infty}\left[T\ \mathrm{tr}\Phi_I'(L\otimes\Gamma)\Phi_I(\Sigma\otimes I_T)\right]. \qquad (E.163)$$

Χρησιμοποιώντας την (E.163) παίρνουμε τα κάτωθι αποτελέσματα:

(A) Αντικαθιστώντας την (E.157) στην (E.163) βρίσκουμε ότι για κάθε αυθαίρετο $k\times 1$ διάνυσμα l και για $I=UL$ ισχύει

$$l'\Delta_I l=l'\Delta_{UL}l=\lim_{T\longrightarrow\infty}\left[T\ \mathrm{tr}\Phi_{UL}'(L\otimes\Gamma)\Phi_{UL}(\Sigma\otimes I_T)\right]=0\Rightarrow\Delta_{UL}=0. \qquad (E.164)$$

(B) Από τις (E.9) και (E.25) παίρνουμε

$$X'X=\mathrm{diag}\left[(X_i)_{i=1,\ldots,k}\right]'\mathrm{diag}\left[(X_i)_{i=1,\ldots,k}\right]=$$

$$=\mathrm{diag}\left[(X_i')_i\right]\mathrm{diag}\left[(X_i)_i\right]=\mathrm{diag}\left[(X_i'X_i)_{i=1,\ldots,k}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (X'X)^{-1}=\mathrm{diag}\left[(X_i'X_i)^{-1}_{i=1,\ldots,k}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow R(X'X)^{-1}X'=$$

$$=\mathrm{diag}\left[(R_i)_{i=1,\ldots,k}\right]\mathrm{diag}\left[(X_i'X_i)^{-1}_{i=1,\ldots,k}\right]\mathrm{diag}\left[(X_i')_{i=1,\ldots,k}\right]=$$

$$=\mathrm{diag}\left[(R_i(X_i'X_i)^{-1}X_i')_{i=1,\ldots,k}\right]. \qquad (E.165)$$

Επιπλέον,

$$\left[I_k\otimes(Z'Z)^{-1}Z'\right]=\begin{bmatrix}(Z'Z)^{-1}Z' & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & (Z'Z)^{-1}Z'\end{bmatrix}=$$

$$=\mathrm{diag}\left[((Z'Z)^{-1}Z')_{i=1,\ldots,k}\right]. \qquad (E.166)$$

Αντικαθιστώντας τις (E.165) και (E.166) στην (E.158) παίρνουμε

$$\Phi_{RL}=R(X'X)^{-1}X'-\left[I_k\otimes(Z'Z)^{-1}Z'\right]=$$

$$=\mathrm{diag}\left[(R_i(X_i'X_i)^{-1}X_i')_{i=1,\ldots,k}\right]-\mathrm{diag}\left[((Z'Z)^{-1}Z')_{i=1,\ldots,k}\right]=$$

$$=\mathrm{diag}\left[\left(R_i(X_i'X_i)^{-1}X_i'-(Z'Z)^{-1}Z'\right)_{i=1,\ldots,k}\right]=$$

$$=\mathrm{diag}\left[\left(\varphi_i^{RL}\right)_{i=1,\ldots,k}\right], \qquad \text{(E.167)}$$

όπου

$$\varphi_i^{RL}=R_i(X_i'X_i)^{-1}X_i'-(Z'Z)^{-1}Z'. \qquad \text{(E.168)}$$

Χρησιμοποιώντας την (E.168) και συμβολίζοντας, για απλούστευση, $\varphi_i=\varphi_i^{RL}$, βρίσκουμε

$$\text{(a)}\quad \Phi_{RL}'(L\otimes\Gamma)=\mathrm{diag}\left[\left(\varphi_i'\right)_{i=1,\ldots,k}\right]\left[\left(l_{ij}\right)_{i,j=1,\ldots,k}\otimes\Gamma\right]=$$

$$=\begin{bmatrix}\varphi_1' & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi_k'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_{11}\Gamma & \cdots & l_{1k}\Gamma\\ \vdots & & \vdots\\ l_{k1}\Gamma & \cdots & l_{kk}\Gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_{11}\varphi_1'\Gamma & \cdots & l_{1k}\varphi_1'\Gamma\\ \vdots & & \vdots\\ l_{k1}\varphi_k'\Gamma & \cdots & l_{kk}\varphi_k'\Gamma\end{bmatrix}=$$

$$=\left[\left(l_{ij}\varphi_i'\Gamma\right)_{i,j=1,\ldots,k}\right]. \qquad \text{(E.169)}$$

$$\text{(b)}\quad \Phi_{RL}(\Sigma\otimes I_T)=\mathrm{diag}\left[\left(\varphi_i\right)_{i=1,\ldots,k}\right](\Sigma\otimes I_T)=$$

$$=\begin{bmatrix}\varphi_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{11}I_T & \cdots & \sigma_{1k}I_T\\ \vdots & & \vdots\\ \sigma_{k1}I_T & \cdots & \sigma_{kk}I_T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_{11}\varphi_1 & \cdots & \sigma_{1k}\varphi_1\\ \vdots & & \vdots\\ \sigma_{k1}\varphi_k & \cdots & \sigma_{kk}\varphi_k\end{bmatrix}=$$

$$=\left[\left(\sigma_{ij}\varphi_i\right)_{i,j=1,\ldots,k}\right]. \qquad \text{(E.170)}$$

Οι (E.169) και (E.170) συνεπάγονται ότι

$$\Phi_{RL}'(L\otimes\Gamma)\Phi_{RL}(\Sigma\otimes I_T)=\left[\left(l_{ij}\varphi_i'\Gamma\right)_{i,j=1,\ldots,k}\right]\left[\left(\sigma_{jq}\varphi_j\right)_{j,q=1,\ldots,k}\right]=$$

$$=\left[\left(\sum_{j=1}^{k}l_{ij}\sigma_{jq}\varphi_i'\Gamma\varphi_j\right)_{i,q}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{tr}\,\Phi_{RL}'(L\otimes\Gamma)\Phi_{RL}(\Sigma\otimes I_T)=\mathrm{tr}\left[\left(\sum_{j=1}^{k}l_{ij}\sigma_{jq}\varphi_i'\Gamma\varphi_j\right)_{i,q}\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}l_{ij}\sigma_{ji}\,\mathrm{tr}\left(\varphi_i'\Gamma\varphi_j\right). \qquad \text{(E.171)}$$

Χρησιμοποιώντας τις (5.12) και (E.168) και εφόσον $\varphi_i=\varphi_i^{RL}$, έχουμε

$$\varphi_i'\Gamma\varphi_j=\left[R_i(X_i'X_i)^{-1}X_i'-(Z'Z)^{-1}Z'\right]'(Z'Z/T)\left[R_j(X_j'X_j)^{-1}X_j'-(Z'Z)^{-1}Z'\right]=$$

$$=\left[X_i(X_i'X_i)^{-1}R_i'-Z(Z'Z)^{-1}\right](Z'Z)\left[R_j(X_j'X_j)^{-1}X_j'-(Z'Z)^{-1}Z'\right]/T=$$

$$=\left[X_i(X_i'X_i)^{-1}R_i'Z'ZR_j(X_j'X_j)^{-1}X_j'-X_i(X_i'X_i)^{-1}R_i'Z'Z(Z'Z)^{-1}Z'-\right.$$

$$\left.-Z(Z'Z)^{-1}Z'ZR_j(X_j'X_j)^{-1}X_j'+Z(Z'Z)^{-1}Z'Z(Z'Z)^{-1}Z'\right]/T=$$

$$=\left[X_i(X_i'X_i)^{-1}(ZR_i)'ZR_j(X_j'X_j)^{-1}X_j'-X_i(X_i'X_i)^{-1}(ZR_i)'-\right.$$

$$-ZR_j(X_j'X_j)^{-1}X_j'+Z(Z'Z)^{-1}Z']/T=$$

$$=[X_i(X_i'X_i)^{-1}X_i'X_j(X_j'X_j)^{-1}X_j'-X_i(X_i'X_i)^{-1}X_i'-$$

$$-X_j(X_j'X_j)^{-1}X_j'+Z(Z'Z)^{-1}Z']/T=$$

$$=(P_{X_i}P_{X_j}-P_{X_i}-P_{X_j}+P_Z)/T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tr(\Phi_i'\Gamma\Phi_j)=tr(P_{X_i}P_{X_j}-P_{X_i}-P_{X_j}+P_Z)/T. \qquad (E.172)$$

Από τις (E.160), (E.163), (E.171) και (E.172) έπεται ότι για κάθε αυθαίρετο $k\times 1$ διάνυσμα l και για $I=RL$ ισχύει

$$tr\Phi_{RL}'(L\otimes\Gamma)\Phi_{RL}(\Sigma\otimes I_T)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}l_i\sigma_{ji}tr(P_{X_i}P_{X_j}-P_{X_i}-P_{X_j}+P_Z)/T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T\,tr\Phi_{RL}'(L\otimes\Gamma)\Phi_{RL}(\Sigma\otimes I_T)=T\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}l_i\sigma_{ji}tr(P_{X_i}P_{X_j}-P_{X_i}-P_{X_j}+P_Z)/T=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}l_il_j\sigma_{ji}tr(P_{X_i}P_{X_j}-P_{X_i}-P_{X_j}+P_Z)=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}l_i\sigma_{ji}tr(P_{X_i}P_{X_j}-P_{X_i}-P_{X_j}+P_Z)l_j=$$

$$=l'[(tr(P_{X_i}P_{X_j}-P_{X_i}-P_{X_j}+P_Z)\sigma_{ji})_{i,j}]l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l'\Delta_I l=l'\Delta_{RL}l=\lim_{T\to\infty}[T\,tr\Phi_{RL}'(L\otimes\Gamma)\Phi_{RL}(\Sigma\otimes I_T)]=$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left[l'[(tr(P_{X_i}P_{X_j}-P_{X_i}-P_{X_j}+P_Z)\sigma_{ji})_{i,j}]l\right]=$$

$$=l'\lim_{T\to\infty}[(tr(P_{X_i}P_{X_j}-P_{X_i}-P_{X_j}+P_Z)\sigma_{ji})_{i,j}]l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta_{RL}=\lim_{T\to\infty}[(tr(P_{X_i}P_{X_j}-P_{X_i}-P_{X_j}+P_Z)\sigma_{ji})_{i,j=1,\ldots,k}]. \qquad (E.173)$$

Όμως, οι μήτρες X_i και Z έχουν διαστάσεις $T\times n_i$ και $T\times m$, αντίστοιχα. Επομένως,

$$trP_{X_i}=trX_i(X_i'X_i)^{-1}X_i'=tr(X_i'X_i)^{-1}X_i'X_i=trI_{n_i}=n_i \Rightarrow trP_{X_j}=n_j$$

και (E.174)

$$trP_Z=trZ(Z'Z)^{-1}Z'=tr(Z'Z)^{-1}Z'Z=trI_m=m.$$

Επιπλέον, από την (5.14) έπεται ότι

$$tr(P_{X_i}P_{X_j})=tr[X_i(X_i'X_i)^{-1}X_i'X_j(X_j'X_j)^{-1}X_j']=$$

$$=tr\left[(X_i'X_i)^{-1}X_i'X_j(X_j'X_j)^{-1}X_j'X_i\right]=$$

$$=tr\left[(X_i'X_i/T)^{-1}(X_i'X_j/T)(X_j'X_j/T)^{-1}(X_j'X_i/T)\right]=$$

$$=tr(B_{ii}^{-1}B_{ij}B_{jj}^{-1}B_{ji})\,. \qquad (E.175)$$

Αντικαθιστώντας από τις (E.174) και (E.175) στην (E.173) βρίσκουμε

$$\Delta_{RL}=\lim_{T\longrightarrow\infty}\left[\left[(tr(B_{ii}^{-1}B_{ij}B_{jj}^{-1}B_{ji})-n_i-n_j+m)\,\sigma_{ji}\right]_{i,j}\right]=$$

$$=\left[\left[(tr(B_{ii}^{-1}B_{ij}B_{jj}^{-1}B_{ji})-n_i-n_j+m)\,\sigma_{ji}\right]_{i,j=1,\ldots k}\right]. \qquad (E.176)$$

(Γ) Χρησιμοποιώντας την (E.5) βρίσκουμε

$$T\ tr\Phi_{GL}'(L\otimes\Gamma)\Phi_{GL}(\Sigma\otimes I_T)=T\ tr\Phi_{GL}'(L\otimes\Gamma)\Phi_{GL}\Omega^{-1}=$$

$$=T\ tr\Phi_{GL}\Omega^{-1}\Phi_{GL}'(L\otimes\Gamma)\,. \qquad (E.177)$$

Εφόσον οι μήτρες Ω, X'ΩX και Z'Z είναι συμμετρικές, από τις (5.5), (5.12), (5.13) και (E.159) έπεται ότι

$$\Phi_{GL}\Omega^{-1}\Phi_{GL}'=$$

$$=\left[R(X'\Omega X)^{-1}X'\Omega-\left[I_k\otimes(Z'Z)^{-1}Z'\right]\right]\Omega^{-1}\left[R(X'\Omega X)^{-1}X'\Omega-\left[I_k\otimes(Z'Z)^{-1}Z'\right]\right]'=$$

$$=\left[R(X'\Omega X)^{-1}X'\Omega-\left[I_k\otimes(Z'Z)^{-1}Z'\right]\right]\Omega^{-1}\left[\Omega X(X'\Omega X)^{-1}R'-\left[I_k\otimes Z(Z'Z)^{-1}\right]\right]=$$

$$=R(X'\Omega X)^{-1}X'\Omega\Omega^{-1}\Omega X(X'\Omega X)^{-1}R'-R(X'\Omega X)^{-1}X'\Omega\Omega^{-1}\left[I_k\otimes Z(Z'Z)^{-1}\right]-$$

$$-\left[I_k\otimes(Z'Z)^{-1}Z'\right]\Omega^{-1}\Omega X(X'\Omega X)^{-1}R'+\left[I_k\otimes(Z'Z)^{-1}Z'\right]\Omega^{-1}\left[I_k\otimes Z(Z'Z)^{-1}\right]=$$

$$=R(X'\Omega X)^{-1}R'-R(X'\Omega X)^{-1}X'\left[I_k\otimes Z(Z'Z)^{-1}\right]-\left[I_k\otimes(Z'Z)^{-1}Z'\right]X(X'\Omega X)^{-1}R'+$$

$$+\left[I_k\otimes(Z'Z)^{-1}Z'\right](\Sigma\otimes I_T)\left[I_k\otimes Z(Z'Z)^{-1}\right]=$$

$$=R(X'\Omega X)^{-1}R'-R(X'\Omega X)^{-1}\left[(I_k\otimes Z)R\right]'\left[I_k\otimes Z(Z'Z)^{-1}\right]-$$

$$-\left[I_k\otimes(Z'Z)^{-1}Z'\right](I_k\otimes Z)R(X'\Omega X)^{-1}R'+\left[\Sigma\otimes(Z'Z)^{-1}Z'Z(Z'Z)^{-1}\right]=$$

$$=R(X'\Omega X)^{-1}R'-R(X'\Omega X)^{-1}R'(I_k\otimes Z')\left[I_k\otimes Z(Z'Z)^{-1}\right]-$$

$$-\left[I_k\otimes(Z'Z)^{-1}Z'\right](I_k\otimes Z)R(X'\Omega X)^{-1}R'+\left[\Sigma\otimes(Z'Z)^{-1}\right]=$$

$$=R(X'\Omega X)^{-1}R'-R(X'\Omega X)^{-1}R'\left[I_k\otimes Z'Z(Z'Z)^{-1}\right]-$$

$$-\left[I_k\otimes(Z'Z)^{-1}Z'Z\right]R(X'\Omega X)^{-1}R'+\left[\Sigma\otimes(Z'Z)^{-1}\right]=$$

$$=R(X'\Omega X)R'-R(X'\Omega X)^{-1}R'(I_k\otimes I_m)-(I_k\otimes I_m)R(X'\Omega X)^{-1}R'+\left[\Sigma\otimes(Z'Z)^{-1}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow T\Phi_{GL}\Omega^{-1}\Phi'_{GL}=$$

$$=R(X'\Omega X/T)^{-1}R'-R(X'\Omega X/T)^{-1}R'I_{km}-I_{km}R(X'\Omega X/T)^{-1}R'+\left[\Sigma\otimes(Z'Z/T)^{-1}\right]=$$

$$=RGR'-RGR'-RGR'+(\Sigma\otimes\Gamma^{-1})=(\Sigma\otimes\Gamma^{-1})-RGR', \qquad (E.178)$$

διότι οι μήτρες R, G, Σ και Γ έχουν διαστάσεις **km**×n, n×n, **k**×**k** και m×m, αντίστοιχα και συνεπώς οι μήτρες RGR', $(I_k\otimes I_m)$ και $(\Sigma\otimes\Gamma^{-1})$ έχουν διαστάσεις **km**×**km**. Σημειώνουμε ότι η μήτρα $(I_k\otimes I_m)$ είναι η **km**×**km** ταυτοτική μήτρα. Οι σχέσεις (E.177) και (E.178) συνεπάγονται ότι

$$T\,tr\Phi_{GL}\Omega^{-1}\Phi'_{GL}(L\otimes\Gamma)=trT\Phi_{GL}\Omega^{-1}\Phi'_{GL}(L\otimes\Gamma)=tr\left[\left[(\Sigma\otimes\Gamma^{-1})-RGR'\right](L\otimes\Gamma)\right]=$$

$$=tr\left[(\Sigma\otimes\Gamma^{-1})(L\otimes\Gamma)-RGR'(L\otimes\Gamma)\right]=tr(\Sigma L\otimes\Gamma^{-1}\Gamma)-trRGR'(L\otimes\Gamma)=$$

$$=tr(\Sigma L\otimes I_m)-trGR'(L\otimes\Gamma)R. \qquad (E.179)$$

'Ομως, από τις (5.5), (5.12) και (5.14) βρίσκουμε

$$R'(L\otimes\Gamma)R=R'\left[L\otimes(Z'Z/T)\right]R=R'\left[L\otimes(Z'Z)\right]R/T=$$

$$=R'(I_k\otimes Z')(L\otimes I_T)(I_k\otimes Z)R/T=\left[(I_k\otimes Z)R\right]'(L\otimes I_T)(I_k\otimes Z)R/T=$$

$$=X'(L\otimes I_T)X/T=$$

$$=diag\left[(X_i)_{i=1,\ldots,k}\right]\left[(l_{ij}I_T)_{i,j=1,\ldots,k}\right]diag\left[(X_j)_{j=1,\ldots,k}\right]/T=$$

$$=\left[(l_{ij}(X_i'X_j/T))_{i,j}\right]=\left[(l_{ij}B_{ij})_{i,j=1,\ldots,k}\right]. \qquad (E.180)$$

Συνδυάζοντας τις (E.160), (E.179) και (E.180) παίρνουμε

$$T\,tr\Phi_{GL}\Omega^{-1}\Phi'_{GL}(L\otimes\Gamma)=$$

$$=tr(\Sigma L\otimes I_m)-tr\left[(G_{ij})_{i,j=1,\ldots,k}\right]\left[(l_{jq}B_{jq})_{j,q=1,\ldots,k}\right]=$$

$$=tr(\Sigma L)tr(I_m)-tr\left[\left(\sum_{j=1}^{k}G_{ij}l_{jq}B_{jq}\right)_{i,q=1,\ldots,k}\right]=$$

$$=tr(\Sigma ll')m-tr\left[\left(\sum_{j=1}^{k}l_{jq}G_{ij}B_{jq}\right)_{i,q}\right]=tr(l'\Sigma l)m-\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}l_{ji}tr(G_{ij}B_{ji})=$$

$$=ml'\Sigma l-\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}l_jl_itr(G_{ij}B_{ji})=ml'\Sigma l-\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}l_itr(G_{ij}B_{ji})l_j=$$

$$=l'm\Sigma l-l'\left[(tr(G_{ij}B_{ji}))_{i,j}\right]l=$$

$$=l'\left[m\Sigma-\left[(tr(G_{ij}B_{ji}))_{i,j=1,\ldots,k}\right]\right]l. \qquad (E.181)$$

Χρησιμοποιώντας τις (E.163), (E.177) και (E.181) βρίσκουμε ότι για

κάθε αυθαίρετο $k\times 1$ διάνυσμα l και για I=GL, IG, ML ισχύει ότι

$$l'\Delta_I l=l'\Delta_{GL} l=l'\Delta_{IG} l=l'\Delta_{ML} l=$$

$$=\lim_{T\longrightarrow\infty}\left[T\ tr\Phi'_{GL}(L\otimes\Gamma)\Phi_{GL}(\Sigma\otimes I_T)\right]=\lim_{T\longrightarrow\infty}\left[T\ tr\Phi_{GL}\Omega^{-1}\Phi'_{GL}(L\otimes\Gamma)\right]=$$

$$=\lim_{T\longrightarrow\infty}\left[l'\left[m\Sigma-\left[(tr(G_{ij}B_{ji}))_{i,j=1,\ldots k}\right]\right]l\right]=$$

$$=l'\lim_{T\longrightarrow\infty}\left[m\Sigma-\left[(tr(G_{ij}B_{ji}))_{i,j}\right]\right]l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta_{GL}=\Delta_{IG}=\Delta_{ML}=\lim_{T\longrightarrow\infty}\left[m\Sigma-\left[(tr(G_{ij}B_{ji})_{i,j}\right]\right]=$$

$$=m\Sigma-\left[(tr(G_{ij}B_{ji}))_{i,j=1,\ldots k}\right]. \qquad (E.182)$$

Συνοψίζοντας τις σχέσεις (E.164), (E.176) και (E.182) έχουμε

$$\Delta_{UL}=0,$$

$$\Delta_{RL}=\left[\left[(tr(B_{ii}^{-1}B_{ij}B_{jj}^{-1}B_{ji})-n_i-n_j+m)\sigma_{ji}\right]_{i,j=1,\ldots k}\right], \qquad (E.183)$$

$$\Delta_{GL}=\Delta_{IG}=\Delta_{ML}=m\Sigma-\left[(tr(G_{ij}B_{ji}))_{i,j=1,\ldots k}\right].$$

QED

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ζ

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 6

Ζ.1 ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΑ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΤΗΝ H_o

ΛΗΜΜΑ Ζ.1: Ορίζουμε τις ποσότητες

$$F_*=P_H X,\ G_*=(F_*'F_*/T)^{-1},\ b_*=G_*F_*'u/\sqrt{T},\ c_1^*=q'G_*q,$$
$$N_*=P_H-P_{F_*},\ g=\sqrt{T}(u'u/T-1),\ f=X'u/\sqrt{T},\ E=X'X/T. \tag{Ζ.1}$$

Αποδεικνύεται ότι, κάτω από την μηδενική υπόθεση (6.7), το στατιστικό υπερταυτοποίησης, υπολογισμένο από τα k-τάξης κατάλοιπα της εξίσωσης (6.1), είναι

$$L_k=A_k/B_k, \tag{Ζ.2}$$

όπου

$$A_k=u'P_H u-2e_k'\frac{Y'P_H u}{\sqrt{T}}+e_k'\frac{Y'P_H Y}{T}e_k,$$
$$B_k=\frac{u'u}{T}-2\tau e_k'\frac{Y'u}{T}+e_k'\frac{Y'Y}{T}e_k-\tau^2 A_k, \tag{Ζ.3}$$

και e_k είναι το δειγματοληπτικό σφάλμα του εκτιμητή k-τάξης.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Κάτω από την μηδενική υπόθεση (6.7) έχουμε ότι $H=Z$ και έτσι ο εκτιμητής k-τάξης του β είναι

$$\hat{\beta}_k=(F_k'Y)^{-1}F_k'y=(F_k'Y)^{-1}F_k'(Y\beta+\sigma u)=\beta+(F_k'Y)^{-1}F_k'\sigma u=$$
$$=\beta+\tau\sigma(F_k'Y/T)^{-1}F_k'u/\sqrt{T}, \tag{Ζ.4}$$

όπου

$$F_k=(P_H-\tau^2\alpha\bar{P}_H)Y,\quad \alpha=T(k-1). \tag{Ζ.5}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (6.3), (Ζ.1) και (Ζ.5) και το Θεώρημα Α.2 βρίσκουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\text{(i)}\ \frac{F_k'Y}{T}=\frac{\left[(P_H-\tau^2\alpha\bar{P}_H)Y\right]'Y}{T}=\frac{Y'(P_H-\tau^2\alpha\bar{P}_H)Y}{T}=$$
$$=\frac{Y'P_H Y}{T}-\tau^2\alpha\frac{Y'\bar{P}_H Y}{T}=\frac{(X+uq')'P_H(X+uq')}{T}+\omega(\tau^2)=$$
$$=\frac{X'P_H X+X'P_H uq'+qu'P_H X+qu'P_H uq'}{T}+\omega(\tau^2)=$$

$$= \frac{F_*' F_*}{T} + \tau\left[\frac{F_*'u}{\sqrt{T}}\, q' + q\, \frac{u'F_*}{\sqrt{T}}\right] + \omega(\tau^2), \qquad (Z.6)$$

από την οποία έπεται ότι (βλ. Λήμμα A.1 (I))

$$\left[\frac{F_k'Y}{T}\right]^{-1} = \left[\frac{F_*' F_*}{T} + \tau\left[\frac{F_*'u}{\sqrt{T}}\, q' + q\, \frac{u'F_*}{\sqrt{T}}\right] + \omega(\tau^2)\right]^{-1} =$$

$$= \left[\frac{F_*' F_*}{T}\right]^{-1} - \tau\left[\frac{F_*' F_*}{T}\right]^{-1}\left[\frac{F_*'u}{\sqrt{T}}\, q' + q\, \frac{u'F_*}{\sqrt{T}}\right]\left[\frac{F_*' F_*}{T}\right]^{-1} + \omega(\tau^2) =$$

$$= G_* - \tau G_*\left[\frac{F_*'u}{\sqrt{T}}\, q' + q\, \frac{u'F_*}{\sqrt{T}}\right]G_* + \omega(\tau^2) =$$

$$= G_* - \tau\left[\frac{G_*F_*'u}{\sqrt{T}}\, q'G_* + G_*q\, \frac{u'F_*G_*}{\sqrt{T}}\right] + \omega(\tau^2) =$$

$$= G_* - \tau(b_*q'G_* + G_*qb_*') + \omega(\tau^2). \qquad (Z.7)$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{F_k'u}{\sqrt{T}} = \frac{\left[(P_H - \tau^2\alpha\bar{P}_H)Y\right]'u}{\sqrt{T}} = \frac{Y'(P_H - \tau^2\alpha\bar{P}_H)u}{\sqrt{T}} =$$

$$= \frac{Y'P_Hu}{\sqrt{T}} - \tau^2\alpha\,\frac{Y'\bar{P}_Hu}{\sqrt{T}} = \frac{(X+uq')'P_Hu}{\sqrt{T}} - \tau^2\alpha\,\frac{Y'(I-P_H)u}{\sqrt{T}} =$$

$$= \frac{(X'+qu')P_Hu}{\sqrt{T}} - \tau^2\alpha\,\frac{Y'u}{\sqrt{T}} + \tau^2\alpha\,\frac{Y'P_Hu}{\sqrt{T}} =$$

$$= \frac{X'P_Hu}{\sqrt{T}} + q\,\frac{u'P_Hu}{\sqrt{T}} - \tau\alpha\,\frac{Y'u}{T} + \omega(\tau^2). \qquad (Z.8)$$

'Ομως,

$$\frac{Y'u}{T} = \frac{(X+uq')'u}{T} = \frac{X'u}{T} + q\,\frac{u'u}{T} = \frac{X'u}{T} + q(\tau g+1) =$$

$$= q + \tau\left[\frac{X'u}{\sqrt{T}} + qg\right] = q + \tau(f+qg). \qquad (Z.9)$$

Αντικαθιστώντας από τις (Z.1) και (Z.9) στην (Z.8) παίρνουμε με βάση το θεώρημα A.2 ότι

$$\frac{F_k'u}{\sqrt{T}} = \frac{F_*'u}{\sqrt{T}} + \tau q u' P_H u - \tau\alpha\left[q+\tau(f+qg)\right]+\omega(\tau^2) =$$

$$= \frac{F_*'u}{\sqrt{T}} + \tau q(u'P_H u-\alpha)+\omega(\tau^2)\,. \qquad (Z.10)$$

Από τις (Z.4), (Z.7) και (Z.10) και χρησιμοποιώντας το θεώρημα A.2 έχουμε ότι το δειγματοληπτικό σφάλμα του εκτιμητή k-τάξης είναι

$$e_k=\sqrt{T}(\hat{\beta}_k-\beta)/\sigma=\left[\frac{F_k'Y}{T}\right]^{-1}\frac{F_k'u}{\sqrt{T}} =$$

$$=\left[G_*-\tau(b_* q' G_* + G_* q b_*')+\omega(\tau^2)\right]\left[\frac{F_*'u}{\sqrt{T}} + \tau q(u'P_H u-\alpha)+\omega(\tau^2)\right]=$$

$$= \frac{G_* F_*'u}{\sqrt{T}} + \tau G_* q(u'P_H u-\alpha) - \tau(b_* q' G_* + G_* q b_*')\frac{F_*'u}{\sqrt{T}} + \omega(\tau^2) =$$

$$= b_* + \tau G_* q\left[(u'P_H u-\alpha) - u'F_*(F_*'F_*)^{-1}F_*'u\right] - \tau b_* q' b_* + \omega(\tau^2) =$$

$$= b_* + \tau G_* q(u'P_H u-\alpha-u'P_{F_*}u) - \tau b_* q' b_* + \omega(\tau^2) =$$

$$= b_* + \tau G_* q\left[u'(P_H-P_{F_*})u-\alpha\right] - \tau b_* q' b_* + \omega(\tau^2) =$$

$$= b_* + \tau\left[G_* q(u'N_* u-\alpha) - b_* q' b_*\right] + \omega(\tau^2) = b_* + \tau b_1 + \tau^2 b_2\,, \qquad (Z.11)$$

όπου

$$b_1 = G_* q(u'N_* u-\alpha) - b_* q' b_* = (u'N_* u-\alpha)G_* q - b_*' q b_* \qquad (Z.12)$$

και το $b_2=\omega(1)$ παραμένει προς το παρόν απροσδιόριστο. Τα κατάλοιπα k-τάξης από την εξίσωση (6.1) είναι

$$\hat{u}_k = y - Y\hat{\beta}_k = Y\beta+\sigma u - Y\hat{\beta}_k = \sigma u - Y(\hat{\beta}_k-\beta) = \sigma u - \tau\sigma Y\sqrt{T}(\hat{\beta}_k-\beta)/\sigma = \sigma u - \tau\sigma Y e_k =$$

$$= \sigma(u-\tau Y e_k)\,. \qquad (Z.13)$$

Άρα, το στατιστικό υπερταυτοποίησης, υπολογισμένο από τα κατάλοιπα k-τάξης, είναι

$$L_k = \frac{\hat{u}_k'P_H\hat{u}_k}{\hat{u}_k'\bar{P}_H\hat{u}_k/T} = \frac{\hat{u}_k'P_H\hat{u}_k/\sigma^2}{\hat{u}_k'\bar{P}_H\hat{u}_k/T\sigma^2} = \frac{A_k}{B_k}\,, \qquad (Z.14)$$

όπου

$$A_k=\hat{u}_k'P_H\hat{u}_k/\sigma^2=\sigma^2(u-\tau Ye_k)'P_H(u-\tau Ye_k)/\sigma^2=$$

$$=u'P_Hu-2e_k'\frac{Y'P_Hu}{\sqrt{T}}+e_k'\frac{Y'P_HY}{T}e_k \qquad (Z.15)$$

και

$$B_k=\hat{u}_k'\bar{P}_H\hat{u}_k/T\sigma^2=\hat{u}_k'(I-P_H)\hat{u}_k/T\sigma^2=\hat{u}_k'\hat{u}_k/T\sigma^2-(\hat{u}_k'P_H\hat{u}_k/\sigma^2)/T=$$

$$=\sigma^2(u-\tau Ye_k)'(u-\tau Ye_k)/T\sigma^2-\tau^2A_k=$$

$$=\frac{u'u}{T}-2\tau e_k'\frac{Y'u}{T}+\tau^2e_k'\frac{Y'Y}{T}e_k-\tau^2A_k. \qquad (Z.16)$$

QED

<u>ΛΗΜΜΑ Ζ.2:</u> Έστω L_k, L_1 το στατιστικό (6.11) υπολογισμένο από τα κατάλοιπα k-τάξης και τα TSLS κατάλοιπα, αντίστοιχα. Τότε

$$L_k=L_1+\tau^2\alpha(\alpha-2L_1)c_1^*+\omega(\tau^3). \qquad (Z.17)$$

Επιπλέον, εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι

$$S(k,j,\mathcal{K})=L_1+\tau^2\left[\alpha(\alpha-2L_1)c_1^*-(\mathcal{K}+jL_1/2)L_1\right]+\omega(\tau^3). \qquad (Z.18)$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ:</u> Αντικαθιστώντας την (Z.11) στις (Z.15) και (Z.16) και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Α.2 και το Λήμμα Α.1 (Ι) βρίσκουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

(i) $$A_k=u'P_Hu-2\left[b_*+\tau b_1+\tau^2b_2\right]'Y'P_Hu/\sqrt{T}+$$

$$+\left[b_*+\tau b_1+\tau^2b_2\right]'Y'P_HY\left[b_*+\tau b_1+\tau^2b_2\right]/T=$$

$$=u'P_Hu-2(b_*'+\tau b_1')Y'P_Hu/\sqrt{T}+(b_*'+\tau b_1')Y'P_HY(b_*+\tau b_1)/T+\omega(\tau^2). \qquad (Z.19)$$

(ii) $$B_k=u'u/T-2\tau\left[b_*+\tau b_1+\tau^2b_2\right]'Y'u/T+$$

$$+\tau^2\left[b_*+\tau b_1+\tau^2b_2\right]'Y'Y\left[b_*+\tau b_1+\tau^2b_2\right]/T-\tau^2A_k=$$

$$=u'u/T+\tau\left[-2(b_*'+\tau b_1')Y'u/T\right]+\omega(\tau^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_k^{-1}=\left[u'u/T+\tau\left[-2(b_*'+\tau b_1')Y'u/T\right]+\omega(\tau^2)\right]^{-1}=$$

$$=(u'u/T)^{-1}-\tau(u'u/T)^{-1}\left[-2(b_*'+\tau b_1')Y'u/T\right](u'u/T)^{-1}+\omega(\tau^2)=$$

$$=(u'u/T)^{-1}+2\tau(u'u/T)^{-1}(b_*'+\tau b_1')Y'u(u'u/T)^{-1}/T+\omega(\tau^2). \qquad (Z.20)$$

Αντικαθιστώντας τις (Z.19) και (Z.20) στην (Z.14) παίρνουμε

$$L_k=A_k/B_k=A_kB_k^{-1}=$$

$$=\left[u'P_H u-2(b_*'+\tau b_1')Y'P_H u/\sqrt{T}+(b_*'+\tau b_1')Y'P_H Y(b_*+\tau b_1)/T+\omega(\tau^2)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[(u'u/T)^{-1}+2\tau(u'u/T)^{-1}(b_*'+\tau b_1')Y'u(u'u/T)^{-1}/T+\omega(\tau^2)\right], \qquad (Z.21)$$

που συνεπάγεται ότι, με ένα σφάλμα τάξης $\omega(\tau^2)$, το στατιστικό L_k δεν εξαρτάται από το b_2 που είναι ο συντελεστής του τρίτου όρου του αναπτύγματος του e_k. Επομένως, στις (Z.15) και (Z.16) μπορούμε να γράψουμε το e_k ως

$$e_k=e_1-\tau d, \quad d=\alpha G_* q, \qquad (Z.22)$$

όπου e_1 είναι το δειγματοληπτικό σφάλμα του TSLS εκτιμητή. Τότε

$$A_k=u'P_H u-2(e_1-\tau d)'\frac{Y'P_H u}{\sqrt{T}}+(e_1-\tau d)'\frac{Y'P_H Y}{T}(e_1-\tau d)=$$

$$=u'P_H u-2e_1'\frac{Y'P_H u}{\sqrt{T}}+e_1'\frac{Y'P_H Y}{T}e_1+2\tau d'\frac{Y'P_H u}{\sqrt{T}}-$$

$$-2\tau d'\frac{Y'P_H Y}{T}e_1+\tau^2 d'\frac{Y'P_H Y}{T}d=$$

$$=A_1+\tau^2 d'\frac{Y'P_H Y}{T}d+2\tau^2 d'Y'P_H(u-Ye_1/\sqrt{T})=$$

$$=A_1+\tau^2(\alpha G_* q)'\frac{Y'P_H Y}{T}(\alpha G_* q)+\omega(\tau^2)=$$

$$=A_1+\tau^2\alpha^2 q'G_*\frac{(X+uq')'P_H(X+uq')}{T}G_* q+\omega(\tau^2)=$$

$$=A_1+\tau^2\alpha^2 q'G_*\frac{X'P_H X}{T}G_* q+\omega(\tau^2)=A_1+\tau^2\alpha^2 q'G_*(F_*'F_*/T)G_* q+\omega(\tau^2)=$$

$$=A_1+\tau^2\alpha^2 q'G_* q+\omega(\tau^2)=A_1+\tau^2\alpha^2 c_1^*+\omega(\tau^2). \qquad (Z.23)$$

Όμοια,

$$B_k=\frac{u'u}{T}-2\tau(e_1-\tau d)'\frac{Y'u}{T}+\tau^2(e_1-\tau d)'\frac{Y'Y}{T}(e_1-\tau d)-\tau^2 A_k=$$

$$=\frac{u'u}{T}-2\tau e_1'\frac{Y'u}{T}+\tau^2 e_1'\frac{Y'Y}{T}e_1-\tau^2 A_1+2\tau^2 d'\frac{Y'u}{T}+\omega(\tau^3)=$$

$$=B_1+2\tau^2(\alpha G_* q)'\frac{Y'u}{T}+\omega(\tau^3)=B_1+2\tau^2\alpha q'G_*\frac{Y'u}{T}+\omega(\tau^3)=$$

$$=B_1+2\tau^2\alpha q'G_*\left[q+\tau(f+qg)\right]+\omega(\tau^3)=B_1+2\tau^2\alpha q'G_* q+\omega(\tau^3)=$$

$$=B_1+2\tau^2\alpha c_1^*+\omega(\tau^3). \qquad (Z.24)$$

Εφόσον $B_1=1+\omega(\tau)$, από την (Ζ.24) παίρνουμε ότι (βλ. Λήμμα Α.1 (Ι))

$$B_k^{-1}=\left[B_1+\tau^2(2\alpha c_1^*)+\omega(\tau^3)\right]^{-1}=B_1^{-1}-\tau^2B_1^{-1}(2\alpha c_1^*)B_1^{-1}+\omega(\tau^3)=$$

$$=B_1^{-1}-2\tau^2\alpha c_1^*B_1^{-2}+\omega(\tau^3)=B_1^{-1}-2\tau^2\alpha c_1^*+\omega(\tau^3). \qquad (Z.25)$$

Αντικαθιστώντας τις (Ζ.23) και (Ζ.25) στην (Ζ.14) βρίσκουμε

$$L_k=A_k/B_k=A_kB_k^{-1}=\left[A_1+\tau^2\alpha^2c_1^*+\omega(\tau^2)\right]\left[B_1^{-1}-2\tau^2\alpha c_1^*+\omega(\tau^3)\right]=$$

$$=A_1B_1^{-1}-2\tau^2\alpha c_1^*A_1+\tau^2\alpha^2c_1^*B_1^{-1}+\omega(\tau^3)=A_1B_1^{-1}-2\tau^2\alpha c_1^*A_1B_1^{-1}+\tau^2\alpha^2c_1^*+\omega(\tau^3)=$$

$$=A_1B_1^{-1}+\tau^2\alpha(\alpha-2A_1B_1^{-1})c_1^*+\omega(\tau^3)=L_1+\tau^2\alpha(\alpha-2L_1)c_1^*+\omega(\tau^3), \qquad (Z.26)$$

όπου $L_1=A_1B_1^{-1}$. Επιπλέον, αντικαθιστώντας την (Ζ.26) στην (6.16) και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Α.2 βρίσκουμε

$$S(k,j,\mathcal{K})=\left[L_1+\tau^2\alpha(\alpha-2L_1)c_1^*+\omega(\tau^3)\right]-$$

$$-\tau^2\left[\left[\mathcal{K}+j\left[L_1+\tau^2\alpha(\alpha-2L_1)c_1^*+\omega(\tau^3)\right]/2\right]\left[L_1+\tau^2\alpha(\alpha-2L_1)c_1^*+\omega(\tau^3)\right]\right]+\omega(\tau^4)=$$

$$=L_1+\tau^2\alpha(\alpha-2L_1)c_1^*-\tau^2(\mathcal{K}+jL_1/2)L_1+\omega(\tau^3)=$$

$$=L_1+\tau^2\left[\alpha(\alpha-2L_1)c_1^*-(\mathcal{K}+jL_1/2)L_1\right]+\omega(\tau^3). \qquad (Z.27)$$

QED

ΛΗΜΜΑ Ζ.3: Ορίζουμε τις ποσότητες

$$d_*=F_*'u/\sqrt{T},\quad g_1=\sqrt{T}(u'\bar{P}_Hu/T-1),\quad f_1=X'\bar{P}_Hu/\sqrt{T},\quad E_1=X'\bar{P}_HX/T. \qquad (Z.28)$$

Κάτω από την μηδενική υπόθεση (6.7), το στατιστικό υπερταυτοποίησης, υπολογισμένο από τα TSLS κατάλοιπα, μπορεί να γραφεί ως

$$L_1=L_{10}+\tau L_{11}+\tau^2L_{12}+\omega(\tau^3), \qquad (Z.29)$$

όπου

$$L_{10}=u'N_*u=u'(P_H-P_F)u=A_{10},$$

$$L_{11}=-g_1A_{10}, \qquad (Z.30)$$

$$L_{12}=c_1^*A_{10}^2+(g_1^2+2b_*'f_1-b_*'E_1b_*)A_{10}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Για τον TSLS εκτιμητή του β έχουμε

$$A_1=u'P_Hu-2e_1'\frac{Y'P_Hu}{\sqrt{T}}+e_1'\frac{Y'P_HY}{T}e_1. \qquad (Z.31)$$

'Ομως,

$$\frac{H'Y}{T} = \frac{H'(X+uq')}{T} = \frac{H'X}{T} + \tau \frac{H'u}{\sqrt{T}} q' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{u'P_H Y}{\sqrt{T}} = \frac{u'H}{\sqrt{T}} \left[\frac{H'H}{T}\right]^{-1} \frac{H'Y}{T} =$$

$$= \frac{u'H}{\sqrt{T}} \left[\frac{H'H}{T}\right]^{-1} \left[\frac{H'X}{T} + \tau \frac{H'u}{\sqrt{T}} q'\right] = \frac{u'P_H X}{\sqrt{T}} + \tau u'P_H uq' =$$

$$= \frac{u'F_*}{\sqrt{T}} + \tau u'P_H uq'. \qquad (Z.32)$$

Από τις (Z.1), (Z.11), (Z.12), (Z.22), (Z.28) και (Z.32) παίρνουμε

$$-2\frac{u'P_H Y}{\sqrt{T}} e_1 = -2\left[\frac{u'F_*}{\sqrt{T}} + \tau u'P_H uq'\right]\left[b_* + \tau b_1^* + \tau^2 b_2\right] =$$

$$= -2 \frac{u'F_*}{\sqrt{T}} \left[\frac{F_*'F_*}{T}\right]^{-1} \frac{F_*'u}{\sqrt{T}} + \tau\left[-2 \frac{u'F_*}{\sqrt{T}} b_1^* - 2u'P_H uq'b_*\right] +$$

$$+\tau^2\left[-2 \frac{u'F_*}{\sqrt{T}} b_2 - 2u'P_H uq'b_1^*\right] + \omega(\tau^3) =$$

$$= -2u'P_{F_*} u + \tau\left[-2d_*'b_1^* - 2u'P_H uq'b_*\right] +$$

$$+\tau^2\left[-2d_*'b_2 - 2u'P_H uq'b_1^*\right] + \omega(\tau^3), \qquad (Z.33)$$

όπου

$$b_1^* = u'N_* uG_* q - b_*'qb_*. \qquad (Z.34)$$

Επίσης,

$$\frac{Y'P_H Y}{T} = \frac{(X+uq')'P_H(X+uq')}{T} =$$

$$= \frac{X'P_H X}{T} + \tau\left[\frac{X'P_H u}{\sqrt{T}} q' + q \frac{u'P_H X}{\sqrt{T}}\right] + \tau^2 u'P_H uqq' =$$

$$= \frac{F_*'F_*}{T} + \tau\left[\frac{F_*'u}{\sqrt{T}} q' + q \frac{u'F_*}{\sqrt{T}}\right] + \tau^2 u'P_H uqq' =$$

$$= G_*^{-1} + \tau(d_* q' + qd_*') + \tau^2 u'P_H uqq'. \qquad (Z.35)$$

Από τις (Z.1), (Z.11), (Z.12), (Z.22), (Z.28) και (Z.35) παίρνουμε

$$e_1'\frac{Y'P_HY}{T}e_1=\left[b_*+\tau b_1^*+\tau^2 b_2\right]'\cdot$$

$$\cdot\left[G_*^{-1}+\tau(d_*q'+qd_*')+\tau^2u'P_Huqq'\right]\left[b_*+\tau b_1^*+\tau^2b_2\right]=$$

$$=b_*'G_*^{-1}b_*+\tau b_*'(d_*q'+qd_*')b_*+\tau^2u'P_Hub_*'qq'b_*+\tau b_1^{*\prime}G_*^{-1}b_*+$$

$$+\tau^2b_1^{*\prime}(d_*q'+qd_*')b_*+\tau^2b_2'G_*^{-1}b_*+\tau b_*'G_*^{-1}b_1^*+\tau^2b_*'(d_*q'+qd_*')b_1^*+$$

$$+\tau^2b_1^{*\prime}G_*^{-1}b_1^*+\tau^2b_*'G_*^{-1}b_2+\omega(\tau^3)=$$

$$=b_*'G_*^{-1}b_*+\tau\left[b_*'(d_*q'+qd_*')b_*+b_1^{*\prime}G_*^{-1}b_*+b_*'G_*^{-1}b_1^*\right]+$$

$$+\tau^2\left[u'P_Hub_*'qq'b_*+b_1^{*\prime}(d_*q'+qd_*')b_*+b_2'G_*^{-1}b_*+b_*'(d_*q'+qd_*')b_1^*+\right.$$

$$\left.+b_1^{*\prime}G_*^{-1}b_1^*+b_*'G_*^{-1}b_2\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=b_*'G_*^{-1}b_*+\tau\left[b_*'d_*q'b_*+b_*'qd_*'b_*+2b_*'G_*^{-1}b_1^*\right]+$$

$$+\tau^2\left[u'P_Hu(b_*'q)^2+b_1^{*\prime}d_*q'b_*+b_1^{*\prime}qd_*'b_*+b_2'G_*^{-1}b_*+b_*'d_*q'b_1^*+b_*'qd_*'b_1^*+\right.$$

$$\left.+b_1^{*\prime}G_*^{-1}b_1^*+b_*'G_*^{-1}b_2\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=b_*'G_*^{-1}b_*+\tau(2b_*'d_*q'b_*+2b_*'G_*^{-1}b_1^*)+\tau^2\left[u'P_Hu(b_*'q)^2+2b_*'d_*q'b_1^*+\right.$$

$$\left.+2b_*'qd_*'b_1^*+2b_*'G_*^{-1}b_2+b_1^{*\prime}G_*^{-1}b_1^*\right]+\omega(\tau^3)\,. \qquad (Z.36)$$

Αντικαθιστώντας τις (Z.33) και (Z.36) στην (Z.31) βρίσκουμε

$$A_1=u'P_Hu-2u'P_{F_*}u+\tau\left[-2d_*'b_1^*-2u'P_Huq'b_*\right]+\tau^2\left[-2d_*'b_2-2u'P_Huq'b_1^*\right]+$$

$$+b_*'G_*^{-1}b_*+\tau(2b_*'d_*q'b_*+2b_*'G_*^{-1}b_1^*)+$$

$$+\tau^2\left[u'P_Hu(b_*'q)^2+2b_*'d_*q'b_1^*+2b_*'qd_*'b_1^*+2b_*'G_*^{-1}b_2+b_1^{*\prime}G_*^{-1}b_1^*\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=u'(P_H-P_{F_*})u-u'F_*(F_*'F_*)^{-1}F_*'u+\frac{u'F_*}{\sqrt{T}}G_*G_*^{-1}\left[\frac{F_*'F_*}{T}\right]^{-1}\frac{F_*'u}{\sqrt{T}}+$$

$$+\tau\left[-2d_*'b_1^*-2u'P_Huq'b_*+2\frac{u'F_*}{\sqrt{T}}\left[\frac{F_*'F_*}{T}\right]^{-1}\frac{F_*'u}{\sqrt{T}}b_*'q+2\frac{u'F_*}{\sqrt{T}}G_*G_*^{-1}b_1^*\right]+$$

$$+\tau^2\left[-2d_*'b_2-2u'P_Huq'b_1^*+u'P_Hu(b_*'q)^2+b_1^{*\prime}G_*^{-1}b_1^*+2b_1^{*\prime}d_*q'b_*+\right.$$

$$\left.+2\frac{u'F_*}{\sqrt{T}}\left[\frac{F_*'F_*}{T}\right]^{-1}\frac{F_*'u}{\sqrt{T}}b_1^{*\prime}q+2\frac{u'F_*}{\sqrt{T}}G_*G_*^{-1}b_2\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=u'N_*u-u'P_{F_*}u+u'P_{F_*}u+\tau(-2d_*'b_1^*-2u'P_Huq'b_*+2u'P_{F_*}ub_*'q+2d_*'b_1^*)+$$

$$+\tau^2\left[-2d_*'b_2-2u'P_Huq'b_1^*+u'P_Hu(b_*'q)^2+b_1^{*\prime}G_*^{-1}b_1^*+2b_1^{*\prime}d_*q'b_*+\right.$$

$$\left.+2u'P_{F_*}uq'b_1^*+2d_*'b_2\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=u'N_*u+\tau\left[-2u'(P_H-P_{F_*})uq'b_*\right]+\tau^2\left[-2u'(P_H-P_{F_*})uq'b_1^*+u'P_Hu(b_*'q)^2+\right.$$

$$\left.+b_1^{*\prime}G_*^{-1}b_1^*+2b_1^{*\prime}d_*q'b_*\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=u'N_*u+\tau(-2u'N_*uq'b_*)+\tau^2\left[-2u'N_*uq'b_1^*+u'P_Hu(b_*'q)^2+\right.$$

$$\left.+b_1^{*\prime}G_*^{-1}b_1^*+2b_1^{*\prime}d_*q'b_*\right]+\omega(\tau^3)=A_{10}+\tau A_{11}+\tau^2A_{12}+\omega(\tau^3),\qquad(Z.37)$$

όπου

$$A_{10}=u'N_*u,\quad A_{11}=-2u'N_*uq'b_*,$$

$$A_{12}=-2u'N_*uq'b_1^*+u'P_Hu(b_*'q)^2+b_1^{*\prime}G_*^{-1}b_1^*+2b_1^{*\prime}d_*q'b_*.\qquad(Z.38)$$

Αλλά, από τις (Z.1) και (Z.34) έχουμε

$$b_1^*=G_*qu'N_*u-b_*q'b_*\Rightarrow$$

$$G_*^{-1}b_1^*=G_*^{-1}G_*qu'N_*u-G_*^{-1}G_*(F_*'u/\sqrt{T})q'b_*=u'N_*uq-d_*q'b_*.\qquad(Z.39)$$

Επιπλέον,

$$q'b_1^*=q'G_*qu'N_*u-q'b_*q'b_*=u'N_*uc_1^*-(q'b_*)^2\qquad(Z.40)$$

και

$$b_1^{*\prime}d_*=d_*'b_1^*=d_*'G_*qu'N_*u-d_*'b_*q'b_*=$$

$$=(u'F_*/\sqrt{T})G_*qu'N_*u-(u'F_*/\sqrt{T})(F_*'F_*/T)^{-1}(F_*'u/\sqrt{T})q'b_*=$$

$$=b_*'qu'N_*u-u'P_{F_*}uq'b_*.\qquad(Z.41)$$

Από τις (Z.38), (Z.39), (Z.40) και (Z.41) παίρνουμε

$$A_{12}= -2u'N_*uq'b_1^*+u'P_Hu(b_*'q)^2+b_1^{*\prime}(u'N_*uq-d_*q'b_*)+2b_1^{*\prime}d_*q'b_*=$$

$$= -2u'N_*uq'b_1^*+u'P_Hu(b_*'q)^2+u'N_*ub_1^{*\prime}q-b_1^{*\prime}d_*q'b_*+2b_1^{*\prime}d_*q'b_*=$$

$$= -u'N_*uq'b_1^*+b_1^{*\prime}d_*q'b_*+u'P_Hu(b_*'q)^2=$$

$$= -u'N_*u[u'N_*uc_1^*-(q'b_*)^2]+[b_*'qu'N_*u-u'P_{F_*}uq'b_*]q'b_*+u'P_Hu(b_*'q)^2=$$

$$= -(u'N_*u)^2c_1^*+2u'N_*u(q'b_*)^2+u'(P_H-P_{F_*})u(q'b_*)^2=$$

$$= -(u'N_*u)^2c_1^*+2u'N_*u(q'b_*)^2+u'N_*u(q'b_*)^2=$$

$$=3u'N_*u(q'b_*)^2-(u'N_*u)^2c_1^*. \qquad (Z.42)$$

Από τις (Z.37), (Z.38) και (Z.42) βρίσκουμε

$$A_1=\hat{u}_1'P_H\hat{u}_1/\sigma^2=A_{10}+\tau A_{11}+\tau^2A_{12}+\omega(\tau^3), \qquad (Z.43)$$

όπου

$$A_{10}=u'N_*u, \quad A_{11}= -2A_{10}q'b_*, \quad A_{12}=3A_{10}(q'b_*)^2-A_{10}^2c_1^* \qquad (Z.44)$$

και $\hat{u}_1$ είναι τα TSLS κατάλοιπα της εξίσωσης (6.1).

Για τον TSLS εκτιμητή του β έχουμε

$$B_1=\hat{u}_1'\bar{P}_H\hat{u}_1/T\sigma^2= \frac{u'u}{T} -2\tau e_1'\frac{Y'u}{T} +\tau^2e_1'\frac{Y'Y}{T}e_1-\tau^2A_1. \qquad (Z.45)$$

Από την (Z.9) προκύπτει ότι

$$\frac{Y'u}{T} =q+\tau(f+qg). \qquad (Z.46)$$

Επίσης,

$$\frac{Y'Y}{T} = \frac{(X+uq')'(X+uq')}{T} = \frac{X'X+X'uq'+qu'X+qu'uq'}{T} =$$

$$= \frac{X'X}{T} \tau\left[\frac{X'u}{\sqrt{T}}q'+q\frac{u'X}{\sqrt{T}}\right]+q\frac{u'u}{T}q'=$$

$$= \frac{X'X}{T} +\tau(fq'+qf')+q(\tau g+1)q'= \frac{X'X}{T} +qq'+\omega(\tau). \qquad (Z.47)$$

Χρησιμοποιώντας τις (Z.1), (Z.11), (Z.12), (Z.22), (Z.34), (Z.40), (Z.43), (Z.44), (Z.45), (Z.46) και (Z.47) βρίσκουμε

$$B_1=\tau g+1-2\tau[b_*+\tau b_1^*+\tau^2b_2]'[q+\tau(f+qg)]+$$

$$+\tau^2[b_*+\tau b_1^*+\tau^2b_2]'\left[\frac{X'X}{T} +qq'+\omega(\tau)\right][b_*+\tau b_1^*+\tau^2b_2]-\tau^2A_1=$$

$$=\tau g+1-2\tau[b_*'+\tau b_1^{*\prime}+\omega(\tau^2)][q+\tau(f+qg)]+$$

$$+\tau^2\left[b_*'+\omega(\tau)\right]\left[\frac{X'X}{T}+qq'+\omega(\tau)\right]\left[b_*+\omega(\tau)\right]-\tau^2\left[A_{10}+\omega(\tau)\right]=$$

$$=\tau g+1-2\tau b_*'q-2\tau^2 b_*'(f+qg)-2\tau^2 b_1^{*\prime}q+\tau^2 b_*'\frac{X'X}{T}\,b_*+\tau^2 b_*'qq'b_*-$$

$$-\tau^2 A_{10}+\omega(\tau^3)=$$

$$=1+\tau(g-2b_*'q)+\tau^2\left[-2b_*'(f+qg)-2b_1^{*\prime}q+b_*'\frac{X'X}{T}\,b_*+(b_*'q)^2-A_{10}\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=1+\tau B_{11}+\tau^2 B_{12}+\omega(\tau^3), \qquad (Z.48)$$

όπου

$$B_{11}=g-2b_*'q, \qquad (Z.49)$$

$$B_{12}=-2b_*'(f+qg)-2b_1^{*\prime}q+b_*'\frac{X'X}{T}\,b_*+(b_*'q)^2-A_{10}=$$

$$=-2b_*'(f+qg)-2\left[u'N_*uc_1^*-(q'b_*)^2\right]+b_*'Eb_*+(b_*'q)^2-A_{10}=$$

$$=-2b_*'(f+qg)-2A_{10}c_1^*+2(q'b_*)^2+b_*'Eb_*+(b_*'q)^2-A_{10}=$$

$$=3(q'b_*)^2-(2c_1^*+1)A_{10}+b_*'Eb_*-2b_*'(f+qg). \qquad (Z.50)$$

Η (Z.48) συνεπάγεται ότι (βλ. Λήμμα A.1 (I))

$$B_1^{-1}=\left[1+\tau(B_{11}+\tau B_{12})+\omega(\tau^3)\right]^{-1}=1-\tau(B_{11}+\tau B_{12})+\tau^2(B_{11}+\tau B_{12})^2+\omega(\tau^3)=$$

$$=1-\tau B_{11}+\tau^2(B_{11}^2-B_{12})+\omega(\tau^3)=1-\tau B_{11}+\tau^2 D_{12}+\omega(\tau^3), \qquad (Z.51)$$

όπου

$$D_{12}=B_{11}^2-B_{12}=(g-2b_*'q)^2-3(q'b_*)^2+(2c_1^*+1)A_{10}-b_*'Eb_*+2b_*'(f+qg)=$$

$$=g^2-4gb_*'q+4(b_*'q)^2-3(q'b_*)^2+(2c_1^*+1)A_{10}-b_*'Eb_*+2b_*'f+2b_*'qg=$$

$$=(b_*'q)^2-2gb_*'q+g^2+(2c_1^*+1)A_{10}-b_*'Eb_*+2b_*'f. \qquad (Z.52)$$

Χρησιμοποιώντας τις (Z.43), (Z.44), (Z.49), (Z.50), (Z.51) και (Z.52) συμπεραίνουμε ότι το στατιστικό (6.11), υπολογισμένο από τα TSLS κατάλοιπα, είναι

$$L_1=\frac{\hat u_1'P_H\hat u_1}{\hat u_1'\bar P_H\hat u_1/T}=\frac{\hat u_1'P_H\hat u_1/\sigma^2}{\hat u_1'\bar P_H\hat u_1/T\sigma^2}=\frac{A_1}{B_1}=A_1B_1^{-1}=$$

$$=\left[A_{10}+\tau A_{11}+\tau^2 A_{12}+\omega(\tau^3)\right]\left[1-\tau B_{11}+\tau^2 D_{12}+\omega(\tau^3)\right]=$$

$$=A_{10}-\tau A_{10}B_{11}+\tau^2 A_{10}D_{12}+\tau A_{11}-\tau^2 A_{11}B_{11}+\tau^2 A_{12}+\omega(\tau^3)=$$

$$=A_{10}+\tau(A_{11}-A_{10}B_{11})+\tau^2(A_{12}+A_{10}D_{12}-A_{11}B_{11})+\omega(\tau^3)=$$

$$=L^*_{10}+\tau L^*_{11}+\tau^2 L^*_{12}+\omega(\tau^3), \qquad (Z.53)$$

όπου

$$L^*_{10}=A_{10}=u'N_*u, \qquad (Z.54)$$

$$L^*_{11}=A_{11}-A_{10}B_{11}=-2A_{10}q'b_*-A_{10}(g-2b_*'q)=-A_{10}g, \qquad (Z.55)$$

$$L^*_{12}=A_{12}+A_{10}D_{12}-A_{11}B_{11}=3A_{10}(q'b_*)^2-A_{10}^2c_1^*+$$

$$+A_{10}\left[(b_*'q)^2-2gb_*'q+g^2+(2c_1^*+1)A_{10}-b_*'Eb_*+2b_*'f\right]-\left[-2A_{10}q'b_*\right]\left[g-2b_*'q\right]=$$

$$=3A_{10}(b_*'q)^2-A_{10}^2c_1^*+A_{10}(b_*'q)^2-2A_{10}gb_*'q+A_{10}g^2+(2c_1^*+1)A_{10}^2-$$

$$-A_{10}b_*'Eb_*+2A_{10}b_*'f+2A_{10}gb_*'q-4A_{10}(b_*'q)^2=$$

$$=(c_1^*+1)A_{10}^2+(g^2+2b_*'f-b_*'Eb_*)A_{10}. \qquad (Z.56)$$

Από τις (Z.1) και (Z.28) έχουμε

(i) $$g=\sqrt{T}(u'u/T-1)=\sqrt{T}\left[u'(P_H+\bar{P}_H)u/T-1\right]=\sqrt{T}(u'\bar{P}_Hu/T-1)+u'P_Hu/\sqrt{T}=$$

$$=g_1+\tau u'P_Hu=g_1+\omega(\tau). \qquad (Z.57)$$

(ii) $$b_*'f=b_*'X'u/\sqrt{T}=b_*'X'(P_H+\bar{P}_H)u/\sqrt{T}=b_*'X'P_Hu/\sqrt{T}+b_*'X'\bar{P}_Hu/\sqrt{T}=$$

$$=(u'F_*/\sqrt{T})(F_*'F_*/T)^{-1}(F_*'u/\sqrt{T})+b_*'f_1=u'P_{F_*}u+b_*'f_1. \qquad (Z.58)$$

(iii) $$b_*'Eb_*=b_*'(X'X/T)b_*=b_*'\left[X'(P_H+\bar{P}_H)X/T\right]b_*=$$

$$=b_*'(X'P_HX/T)b_*+b_*'(X'\bar{P}_HX/T)b_*=$$

$$=(u'F_*/\sqrt{T})(F_*'F_*/T)^{-1}(F_*'F_*/T)(F_*'F_*/T)^{-1}(F_*'u/\sqrt{T})+b_*'E_1b_*=$$

$$=u'P_{F_*}u+b_*'E_1b_*. \qquad (Z.59)$$

Αντικαθιστώντας τις (Z.57), (Z.58) και (Z.59) στην (Z.53) βρίσκουμε

$$L_1=L^*_{10}+\tau\left[-A_{10}(g_1+\tau u'P_Hu)\right]+\tau^2\left[(c_1^*+1)A_{10}^2+((g_1+\omega(\tau))^2+\right.$$

$$\left.+2(u'P_{F_*}u+b_*'f_1)-(u'P_{F_*}u+b_*'E_1b_*))A_{10}\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=L^{*}_{1o}-\tau A_{1o}g_1-\tau^2 A_{1o}u'P_H u+\tau^2(c^{*}_1+1)A^2_{1o}+\tau^2 g^2_1 A_{1o}+\tau^2 u'P_{F_*}uA_{1o}+$$

$$+2\tau^2 b'_* f_1 A_{1o}-\tau^2 b'_* E_1 b_* A_{1o}+\omega(\tau^3)=$$

$$=L^{*}_{1o}+\tau(-g_1 A_{1o})+\tau^2[-u'P_H uA_{1o}+u'N_* uA_{1o}+u'P_{F_*}uA_{1o}]+$$

$$+\tau^2[c^{*}_1 A^2_{1o}+(g^2_1+2b'_* f_1-b'_* E_1 b_*)A_{1o}]+\omega(\tau^3)=$$

$$=L^{*}_{1o}+\tau(-g_1 A_{1o})+\tau^2[u'(P_H-P_{F_*})uA_{1o}-u'(P_H-P_{F_*})uA_{1o}]+$$

$$+\tau^2[c^{*}_1 A^2_{1o}+(g^2_1+2b'_* f_1-b'_* E_1 b_*)A_{1o}]+\omega(\tau^3)=$$

$$=L^{*}_{1o}+\tau(-g_1 A_{1o})+\tau^2[c^{*}_1 A^2_{1o}+(g^2_1+2b'_* f_1-b'_* E_1 b_*)A_{1o}]+\omega(\tau^3)=$$

$$=L_{1o}+\tau L_{11}+\tau^2 L_{12}+\omega(\tau^3), \qquad (Z.60)$$

όπου

$$L_{1o}=L^{*}_{1o}=A_{1o}=u'N_* u,$$

$$L_{11}=-g_1 A_{1o}, \qquad (Z.61)$$

$$L_{12}=c^{*}_1 A^2_{1o}+(g^2_1+2b'_* f_1-b'_* E_1 b_*)A_{1o}.$$

QED

Z.2 ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΑ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΤΗΝ H_1

ΛΗΜΜΑ Z.4: Εφόσον, στο όριο, η μήτρα Z έχει πλήρη στηλοβαθμό, μπορούμε να βρούμε ένα T×1 διάνυσμα ξ, τέτοιο ώστε

$$Z'\xi/\sqrt{T}=\delta. \qquad (Z.62)$$

Ορίζουμε τις ποσότητες

$$u_o=u+\xi, \quad u_1=u_o+\tau g\xi, \quad F_Z=P_Z X, \quad d_Z=F'_Z\xi/\sqrt{T}, \quad \Gamma=(Z'Z/T)^{-1},$$

$$f_Z=\frac{X'\bar{P}_Z u}{\sqrt{T}}=\frac{X'(I-P_Z)u}{\sqrt{T}}=\frac{X'u}{\sqrt{T}}-\frac{X'P_Z u}{\sqrt{T}}=f-F'_Z u/\sqrt{T}, \qquad (Z.63)$$

$$G=(F'_Z F_Z/T)^{-1}, \quad b_o=GF'_Z u_o/\sqrt{T}, \quad N=P_Z-P_{F_Z}, \quad c_1=q'Gq, \quad \gamma=\xi'N\xi.$$

Τότε, το στατιστικό (6.15) μπορεί να γραφεί ως

$$S(k,j,\mathcal{K})=S_o+\tau S_1+\tau^2(S_2-S^{*}_3)+\omega(\tau^3), \qquad (Z.64)$$

όπου

$S_o=u_o'Nu_o$, $S_*=\xi'Nu_o$, $S_1=g(2S_*-S_o)$,

$$S_2=g^2(\gamma-2S_*+S_o)+2(S_o-S_*)f'b_o+(S_o-S_*)^2+c_1S_o^2-b_o'Eb_oS_o, \qquad (Z.65)$$

$S_3^*=\alpha(2S_o-\alpha)c_1+(\varkappa+jS_o/2)S_o$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Από την (6.3) και την εναλλακτική υπόθεση (6.8) προκύπτει ότι

$$H=Z+\tau u\delta'. \qquad (Z.66)$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας τις (Z.1), (Z.62) και (Z.63) βρίσκουμε

$$\frac{H'u}{\sqrt{T}}=\frac{(Z+\tau u\delta')'u}{\sqrt{T}}=\frac{Z'u}{\sqrt{T}}+\tau\delta\,\frac{u'u}{\sqrt{T}}=\frac{Z'u}{\sqrt{T}}+\tau\delta(g+\sqrt{T})=$$

$$=\frac{Z'u}{\sqrt{T}}+\tau\delta g+\delta=\frac{Z'u}{\sqrt{T}}+\tau\,\frac{Z'\xi}{\sqrt{T}}g+\frac{Z'\xi}{\sqrt{T}}=\frac{Z'}{\sqrt{T}}(u+\xi+\tau g\xi)=$$

$$=\frac{Z'}{\sqrt{T}}(u_o+\tau g\xi)=\frac{Z'u_1}{\sqrt{T}}. \qquad (Z.67)$$

Επιλέον,

$$\frac{Z'u_o}{\sqrt{T}}=\frac{Z'(u+\xi)}{\sqrt{T}}=\frac{Z'u}{\sqrt{T}}+\frac{Z'\xi}{\sqrt{T}}=\frac{Z'u}{\sqrt{T}}+\delta. \qquad (Z.68)$$

Από την (Z.67) προκύπτει ότι $H'u/\sqrt{T}=O_p(1)$. Επιπλέον, οι μήτρες $H'H/T$, $H'X/T$ είναι $O_p(1)$, έτσι ώστε το ανάπτυγμα (Z.53) ισχύει και κάτω από την εναλλακτική υπόθεση (6.8). Αυτό που απομένει είναι να βρούμε έναν περισσότερο βολικό τρόπο για να πάρουμε τα αναπτύγματα. Για την μήτρα $H'H/T$ ισχύει ότι

$$\frac{H'H}{T}=\frac{(Z+\tau u\delta')'(Z+\tau u\delta')}{T}=\frac{Z'Z+\tau Z'u\delta'+\tau\delta u'Z+\tau^2\delta u'u\delta'}{T}=$$

$$=\frac{Z'Z}{T}+\tau^2\left[\frac{Z'u}{\sqrt{T}}\delta'+\delta\,\frac{u'Z}{\sqrt{T}}+\delta(1+\tau g)\delta'\right]=$$

$$=\frac{Z'Z}{T}+\tau^2\left[\frac{Z'u}{\sqrt{T}}\delta'+\delta\,\frac{u'Z}{\sqrt{T}}+\delta\delta'\right]+\omega(\tau^3). \qquad (Z.69)$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας τις (Z.63), (Z.68) και (Z.69) παίρνουμε (βλ. Λήμμα A.1 (I))

$$\left[\frac{H'H}{T}\right]^{-1}=\left[\frac{Z'Z}{T}+\tau^2\left[\frac{Z'u}{\sqrt{T}}\delta'+\delta\,\frac{u'Z}{\sqrt{T}}+\delta\delta'\right]+\omega(\tau^3)\right]^{-1}=$$

$$=\left[\frac{Z'Z}{T}\right]^{-1}-\tau^2\left[\frac{Z'Z}{T}\right]^{-1}\left[\frac{Z'u}{\sqrt{T}}\,\delta'+\delta\,\frac{u'Z}{\sqrt{T}}+\delta\delta'\right]\left[\frac{Z'Z}{T}\right]^{-1}+\omega(\tau^3)=$$

$$=\Gamma-\tau^2\Gamma\left[\frac{Z'u}{\sqrt{T}}\,\delta'+\delta\delta'+\delta\,\frac{u'Z}{\sqrt{T}}+\delta\delta'-\delta\delta'\right]\Gamma+\omega(\tau^3)=$$

$$=\Gamma-\tau^2\Gamma\left[\left(\frac{Z'u}{\sqrt{T}}+\delta\right)\delta'+\delta\left(\frac{u'Z}{\sqrt{T}}+\delta'\right)-\delta\delta'\right]\Gamma+\omega(\tau^3)=$$

$$=\Gamma-\tau^2\Gamma\left[\frac{Z'u_o}{\sqrt{T}}\,\delta'+\delta\,\frac{u_o'Z}{\sqrt{T}}-\delta\delta'\right]\Gamma+\omega(\tau^3)\,. \qquad (Z.70)$$

Χρησιμοποιώντας τις (Z.67) και (Z.70) βρίσκουμε

$$u'P_H u=\frac{u'H}{\sqrt{T}}\left[\frac{H'H}{T}\right]^{-1}\frac{H'u}{\sqrt{T}}=$$

$$=\frac{u_1'Z}{\sqrt{T}}\left[\Gamma-\tau^2\Gamma\left[\frac{Z'u_o}{\sqrt{T}}\,\delta'+\delta\,\frac{u_o'Z}{\sqrt{T}}-\delta\delta'\right]\Gamma+\omega(\tau^3)\right]\frac{Z'u_1}{\sqrt{T}}=$$

$$=\frac{u_1'Z}{\sqrt{T}}\,\Gamma\,\frac{Z'u_1}{\sqrt{T}}-\tau^2\left[\frac{u_1'Z}{\sqrt{T}}\,\Gamma\,\frac{Z'u_o}{\sqrt{T}}\,\delta'\Gamma\,\frac{Z'u_1}{\sqrt{T}}+\right.$$

$$\left.+\frac{u_1'Z}{\sqrt{T}}\,\Gamma\delta\,\frac{u_o'Z}{\sqrt{T}}\,\Gamma\,\frac{Z'u_1}{\sqrt{T}}-\frac{u_1'Z}{\sqrt{T}}\,\Gamma\delta\delta'\Gamma\,\frac{Z'u_1}{\sqrt{T}}\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=\frac{u_1'Z}{\sqrt{T}}\left[\frac{Z'Z}{T}\right]^{-1}\frac{Z'u_1}{\sqrt{T}}-$$

$$-\tau^2\left[\frac{u_1'Z}{\sqrt{T}}\left[\frac{Z'Z}{T}\right]^{-1}\frac{Z'u_o}{\sqrt{T}}\,\frac{\xi'Z}{\sqrt{T}}\left[\frac{Z'Z}{T}\right]^{-1}\frac{Z'u_1}{\sqrt{T}}+\right.$$

$$+\frac{u_1'Z}{\sqrt{T}}\left[\frac{Z'Z}{T}\right]^{-1}\frac{Z'\xi}{\sqrt{T}}\,\frac{u_o'Z}{\sqrt{T}}\left[\frac{Z'Z}{T}\right]^{-1}\frac{Z'u_1}{\sqrt{T}}-$$

$$\left.-\frac{u_1'Z}{\sqrt{T}}\left[\frac{Z'Z}{T}\right]^{-1}\frac{Z'\xi}{\sqrt{T}}\,\frac{\xi'Z}{\sqrt{T}}\left[\frac{Z'Z}{T}\right]^{-1}\frac{Z'u_1}{\sqrt{T}}\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=u_1'P_Z u_1-\tau^2\left[u_1'P_Z u_o\xi'P_Z u_1+u_1'P_Z\xi u_o'P_Z u_1-u_1'P_Z\xi\xi'P_Z u_1\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=u_1'P_Z u_1-\tau^2\left[2u_1'P_Z u_o\xi'P_Z u_1-(u_1'P_Z\xi)^2\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=u_1'P_Z u_1+\tau^2\left[-2u_o'P_Z u_o\,\xi'P_Z u_o+(u_o'P_Z\xi)^2\right]+\omega(\tau^3)\,, \qquad (Z.71)$$

διότι

$$u_1'P_Z u_o=(u_o+\tau g\xi)'P_Z u_o=u_o'P_Z u_o+\omega(\tau) \qquad (Z.72)$$

και όμοια

$$\xi'P_Z u_1=\xi'P_Z(u_o+\tau g\xi)=\xi'P_Z u_o+\omega(\tau)\,. \qquad (Z.73)$$

Επίσης,

$$\frac{X'H}{T}=\frac{X'(Z+\tau u\delta')}{T}=\frac{X'Z+\tau X'u\delta'}{T}=\frac{X'Z}{T}+\tau^2\frac{X'u}{\sqrt{T}}\,\delta'=$$

$$=\frac{X'Z}{T}+\tau^2 f\delta'\,. \qquad (Z.74)$$

Έτσι, από τις (Z.1), (Z.63), (Z.72), (Z.73) και (Z.74) έχουμε

$$\frac{F_*'u}{\sqrt{T}}=\frac{X'P_H u}{\sqrt{T}}=\frac{X'H}{T}\left[\frac{H'H}{T}\right]^{-1}\frac{H'u}{\sqrt{T}}=$$

$$=\left[\frac{X'Z}{T}+\tau^2 f\delta'\right]\left[\Gamma-\tau^2\Gamma\left[\frac{Z'u_o}{\sqrt{T}}\,\delta'+\delta\,\frac{u_o'Z}{\sqrt{T}}-\delta\delta'\right]\Gamma+\omega(\tau^3)\right]\frac{Z'u_1}{\sqrt{T}}=$$

$$=\frac{X'Z}{T}\,\Gamma\,\frac{Z'u_1}{\sqrt{T}}-\tau^2\left[\frac{X'Z}{T}\,\Gamma\,\frac{Z'u_o}{\sqrt{T}}\,\delta'\Gamma\,\frac{Z'u_1}{\sqrt{T}}+\right.$$

$$+\frac{X'Z}{T}\,\Gamma\delta\,\frac{u_o'Z}{\sqrt{T}}\,\Gamma\,\frac{Z'u_1}{\sqrt{T}}-\frac{X'Z}{T}\,\Gamma\delta\delta'\Gamma\,\frac{Z'u_1}{\sqrt{T}}-f\delta'\Gamma\,\frac{Z'u_1}{\sqrt{T}}\Bigg]+\omega(\tau^3)=$$

$$=\frac{X'Z}{T}\left[\frac{Z'Z}{T}\right]^{-1}\frac{Z'u_1}{\sqrt{T}}-$$

$$-\tau^2\left[\frac{X'Z}{T}\left[\frac{Z'Z}{T}\right]^{-1}\frac{Z'u_o}{\sqrt{T}}\,\frac{\xi'Z}{\sqrt{T}}\left[\frac{Z'Z}{T}\right]^{-1}\frac{Z'u_1}{\sqrt{T}}+\right.$$

$$+\frac{X'Z}{T}\left[\frac{Z'Z}{T}\right]^{-1}\frac{Z'\xi}{\sqrt{T}}\,\frac{u_o'Z}{\sqrt{T}}\left[\frac{Z'Z}{T}\right]^{-1}\frac{Z'u_1}{\sqrt{T}}-$$

$$-\frac{X'Z}{T}\left[\frac{Z'Z}{T}\right]^{-1}\frac{Z'\xi}{\sqrt{T}}\,\frac{\xi'Z}{\sqrt{T}}\left[\frac{Z'Z}{T}\right]^{-1}\frac{Z'u_1}{\sqrt{T}}-$$

$$\left.-f\,\frac{\xi'Z}{\sqrt{T}}\left[\frac{Z'Z}{T}\right]^{-1}\frac{Z'u_1}{\sqrt{T}}\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$= \frac{X'P_Z u_1}{\sqrt{T}} - \tau^2\left[\frac{X'P_Z u_o}{\sqrt{T}}\,\xi'P_Z u_1 + \frac{X'P_Z \xi}{\sqrt{T}}\,u_o'P_Z u_1 - \frac{X'P_Z \xi}{\sqrt{T}}\,\xi'P_Z u_1 - f\xi'P_Z u_1\right] + \omega(\tau^3) =$$

$$= \frac{F_Z'u_1}{\sqrt{T}} + \tau^2\left[-\frac{F_Z'u_o}{\sqrt{T}}\,\xi'P_Z u_o - \frac{F_Z'\xi}{\sqrt{T}}\,u_o'P_Z u_o + \frac{F_Z'\xi}{\sqrt{T}}\,\xi'P_Z u_o + f\xi'P_Z u_o + \omega(\tau)\right] + \omega(\tau^3) =$$

$$= \frac{F_Z'u_1}{\sqrt{T}} + \tau^2\left[f\xi'P_Z u_o - \frac{F_Z'(u_o-\xi)}{\sqrt{T}}\,\xi'P_Z u_o - d_Z u_o'P_Z u_o\right] + \omega(\tau^3) =$$

$$= \frac{F_Z'u_1}{\sqrt{T}} + \tau^2\left[(f - \frac{F_Z'u}{\sqrt{T}})\,\xi'P_Z u_o - d_Z u_o'P_Z u_o\right] + \omega(\tau^3) =$$

$$= \frac{F_Z'u_1}{\sqrt{T}} + \tau^2\left[f_Z\xi'P_Z u_o - d_Z u_o'P_Z u_o\right] + \omega(\tau^3)\,. \qquad (Z.75)$$

Επίσης, από τις (Z.1), (Z.70) και (Z.74) έχουμε

$$\frac{F_*'F_*}{T} = \frac{X'P_H X}{T} = \frac{X'H}{T}\left[\frac{H'H}{T}\right]^{-1}\frac{H'X}{T} =$$

$$= \left[\frac{X'Z}{T} + \tau^2 f\delta'\right]\left[\Gamma - \tau^2\Gamma\left[\frac{Z'u}{\sqrt{T}}\,\delta' + \delta\,\frac{u'Z}{\sqrt{T}} + \delta\delta'\right]\Gamma + \omega(\tau^3)\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{Z'X}{T} + \tau^2\delta f'\right] =$$

$$= \frac{X'Z}{T}\,\Gamma\,\frac{Z'X}{T} + \tau^2\left[\frac{X'Z}{T}\,\Gamma\delta f' - \frac{X'Z}{T}\,\Gamma\,\frac{Z'u}{\sqrt{T}}\,\delta'\Gamma\,\frac{Z'X}{T} - \frac{X'Z}{T}\,\Gamma\delta\,\frac{u'Z}{\sqrt{T}}\,\Gamma\,\frac{Z'X}{T} - \frac{X'Z}{T}\,\Gamma\delta\delta'\Gamma\,\frac{Z'X}{T} + f\delta'\Gamma\,\frac{Z'X}{T}\right] + \omega(\tau^3) =$$

$$= \frac{X'Z}{T}\left[\frac{Z'Z}{T}\right]^{-1}\frac{Z'X}{T} + \tau^2\left[\frac{X'Z}{T}\left[\frac{Z'Z}{T}\right]^{-1}\frac{Z'\xi}{\sqrt{T}}\,f' - \right.$$

$$- \frac{X'Z}{T}\left[\frac{Z'Z}{T}\right]^{-1}\frac{Z'u}{\sqrt{T}}\,\frac{\xi'Z}{\sqrt{T}}\left[\frac{Z'Z}{T}\right]^{-1}\frac{Z'X}{T} -$$

$$- \frac{X'Z}{T}\left[\frac{Z'Z}{T}\right]^{-1}\frac{Z'\xi}{\sqrt{T}}\,\frac{u'Z}{\sqrt{T}}\left[\frac{Z'Z}{T}\right]^{-1}\frac{Z'X}{T} -$$

$$\left. - \frac{X'Z}{T}\left[\frac{Z'Z}{T}\right]^{-1}\frac{Z'\xi}{\sqrt{T}}\,\frac{\xi'Z}{\sqrt{T}}\left[\frac{Z'Z}{T}\right]^{-1}\frac{Z'X}{T} + \right.$$

$$+f\ \frac{\xi'Z}{\sqrt{T}}\left[\frac{Z'Z}{T}\right]^{-1}\frac{Z'X}{T}\Bigg]+\omega(\tau^3)=$$

$$=\frac{X'P_zX}{T}+\tau^2\Bigg[\frac{X'P_z\xi}{\sqrt{T}}\ f'-\frac{X'P_zu}{\sqrt{T}}\ \frac{\xi'P_zX}{\sqrt{T}}-\frac{X'P_z\xi}{\sqrt{T}}\ \frac{u'P_zX}{\sqrt{T}}-$$

$$-\frac{X'P_z\xi}{\sqrt{T}}\ \frac{\xi'P_zX}{\sqrt{T}}+f\ \frac{\xi'P_zX}{\sqrt{T}}\Bigg]+\omega(\tau^3)=$$

$$=\frac{F_z'F_z}{T}+\tau^2\Bigg[\frac{F_z'\xi}{\sqrt{T}}\ f'-\frac{F_z'u}{\sqrt{T}}\ \frac{\xi'F_z}{\sqrt{T}}-\frac{F_z'\xi}{\sqrt{T}}\ \frac{u'F_z}{\sqrt{T}}-\frac{F_z'\xi}{\sqrt{T}}\ \frac{\xi'F_z}{\sqrt{T}}+$$

$$+f\ \frac{\xi'F_z}{\sqrt{T}}\Bigg]+\omega(\tau^3)=$$

$$=\frac{F_z'F_z}{T}+\tau^2\left[d_zf'+fd_z'-\frac{F_z'u}{\sqrt{T}}\ d_z'-d_z\ \frac{u'F_z}{\sqrt{T}}-d_zd_z'\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=\frac{F_z'F_z}{T}+\tau^2\left[d_z(f'-\frac{u'F_z}{\sqrt{T}})+(f-\frac{F_z'u}{\sqrt{T}})d_z'-d_zd_z'\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=\frac{F_z'F_z}{T}+\tau^2\left[d_zf_z'+f_zd_z'-d_zd_z'\right]+\omega(\tau^3)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\frac{F_*'F_*}{T}\right]^{-1}=\left[\frac{F_z'F_z}{T}+\tau^2\left[d_zf_z'+f_zd_z'-d_zd_z'\right]+\omega(\tau^3)\right]^{-1}=$$

$$=\left[\frac{F_z'F_z}{T}\right]^{-1}-\tau^2\left[\frac{F_z'F_z}{T}\right]^{-1}\left[d_zf_z'+f_zd_z'-d_zd_z'\right]\left[\frac{F_z'F_z}{T}\right]^{-1}+\omega(\tau^3)=$$

$$=G-\tau^2G\left[d_zf_z'+f_zd_z'-d_zd_z'\right]G+\omega(\tau^3)\ .\qquad(Z.76)$$

Από τις (Z.72), (Z.73), (Z.75) και (Z.76) έχουμε

$$u'P_{F_*}u=(u'F_*/\sqrt{T})\,(F_*'F_*/T)^{-1}(F_*'u/\sqrt{T})=$$

$$=\left[\frac{F_z'u_1}{\sqrt{T}}+\tau^2\left[f_z\xi'P_zu_o-d_zu_o'P_zu_o\right]+\omega(\tau^3)\right]'\left[G-\tau^2G\left[d_zf_z'+f_zd_z'-d_zd_z'\right]G+\right.$$

$$\left.+\omega(\tau^3)\right]\left[\frac{F_z'u_1}{\sqrt{T}}+\tau^2\left[f_z\xi'P_zu_o-d_zu_o'P_zu_o\right]+\omega(\tau^3)\right]=$$

$$=\frac{u_1'F_z}{\sqrt{T}}\ G\ \frac{F_z'u_1}{\sqrt{T}}+\tau^2\Bigg[-\frac{u_1'F_z}{\sqrt{T}}\ G\left[d_zf_z'+f_zd_z'-d_zd_z'\right]G\ \frac{F_z'u_1}{\sqrt{T}}+$$

$$+\left[f_z'\xi'P_zu_o-d_z'u_o'P_zu_o\right]G\ \frac{F_z'u_1}{\sqrt{T}}+\frac{u_1'F_z}{\sqrt{T}}\ G\left[f_z\xi'P_zu_o-d_zu_o'P_zu_o\right]\Bigg]+\omega(\tau^3)=$$

$$= \frac{u_1'F_Z}{\sqrt{T}}\left[\frac{F_Z'F_Z}{T}\right]^{-1}\frac{F_Z'u_1}{\sqrt{T}} +\tau^2\left[-\frac{u_o'F_Z}{\sqrt{T}}G\left[d_Zf_Z'+f_Zd_Z'-d_Zd_Z'\right]G\frac{F_Z'u_o}{\sqrt{T}}+\right.$$

$$\left.+2\left[f_Z'\xi'P_Zu_o-d_Z'u_o'P_Zu_o\right]G\frac{F_Z'u_o}{\sqrt{T}}\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=u_1'P_{F_Z}u_1+\tau^2\left[-b_o'(d_Zf_Z'+f_Zd_Z'-d_Zd_Z')b_o+2(f_Z'\xi'P_Zu_o-d_Z'u_o'P_Zu_o)b_o\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=u_1'P_{F_Z}u_1+\tau^2\left[-2b_o'd_Zf_Z'b_o+2(\xi'P_Zu_of_Z'b_o-u_o'P_Zu_od_Z'b_o)+(b_o'd_Z)^2\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=u_1'P_{F_Z}u_1+$$

$$+2\tau^2\left[\xi'P_Zu_of_Z'b_o-u_o'P_Zu_od_Z'b_o-b_o'd_Zf_Z'b_o+(b_o'd_Z)^2/2\right]+\omega(\tau^3). \qquad (Z.77)$$

'Ομως,

$$d_Z'b_o=(\xi'F_Z/\sqrt{T})(F_Z'F_Z/T)^{-1}(F_Z'u_o/\sqrt{T})=\xi'P_{F_Z}u_o \qquad (Z.78)$$

και αντικαθιστώντας την (Z.78) στην (Z.77) βρίσκουμε

$$u'P_{F_*}u=u_1'P_{F_Z}u_1+$$

$$+2\tau^2\left[\xi'P_Zu_of_Z'b_o-u_o'P_Zu_o\xi'P_{F_Z}u_o-\xi'P_{F_Z}u_of_Z'b_o+(\xi'P_{F_Z}u_o)^2/2\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=u_1'P_{F_Z}u_1+2\tau^2\left[\xi'(P_Z-P_{F_Z})u_of_Z'b_o-u_o'P_Zu_o\xi'P_{F_Z}u_o+(\xi'P_{F_Z}u_o)^2/2\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=u_1'P_{F_Z}u_1+2\tau^2\left[\xi'Nu_of_Z'b_o-u_o'P_Zu_o\xi'P_{F_Z}u_o+(\xi'P_{F_Z}u_o)^2/2\right]+\omega(\tau^3). \qquad (Z.79)$$

Από τις (Z.1), (Z.71) και (Z.79) έχουμε

$$u'N_*u=u'(P_H-P_{F_*})u=u'P_Hu-u'P_{F_*}u=$$

$$=u_1'P_Zu_1+\tau^2\left[-2u_o'P_Zu_o\xi'P_Zu_o+(u_o'P_Z\xi)^2\right]-u_1'P_{F_Z}u_1-$$

$$-2\tau^2\left[\xi'Nu_of_Z'b_o-u_o'P_Zu_o\xi'P_{F_Z}u_o+(\xi'P_{F_Z}u_o)^2/2\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=u_1'(P_Z-P_{F_Z})u_1+\tau^2\left[(u_o'P_Z\xi)^2-(\xi'P_{F_Z}u_o)^2-2u_o'P_Zu_o\xi'(P_Z-P_{F_Z})u_o-\right.$$

$$\left.-2\xi'Nu_of_Z'b_o\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=u_1'Nu_1+\tau^2\left[(u_o'P_Z\xi)^2-(\xi'P_{F_Z}u_o)^2-2u_o'P_Zu_o\xi'Nu_o-\right.$$

$$\left.-2\xi'Nu_of_Z'b_o\right]+\omega(\tau^3). \qquad (Z.80)$$

Αλλά από την (Z.63) έχουμε

$$f_Z'b_o=(f-F_Z'u/\sqrt{T})'b_o=f'b_o-(u'F_Z/\sqrt{T})(F_Z'F_Z/T)^{-1}(F_Z'u_o/\sqrt{T})=$$

$$=f'b_o-u'P_{F_Z}u_o=f'b_o-(u_o-\xi)'P_{F_Z}u_o=f'b_o-u_o'P_{F_Z}u_o+\xi'P_{F_Z}u_o. \qquad (Z.81)$$

'Ετσι,

$$-2u_o'P_Zu_o\xi'Nu_o-2\xi'Nu_of'b_o=$$

$$=-2u_o'P_Zu_o\xi'Nu_o-2\xi'Nu_o(f'b_o-u_o'P_{F_Z}u_o+\xi'P_{F_Z}u_o)=$$

$$=-2u_o'P_Zu_o\xi'Nu_o-2\xi'Nu_of'b_o+2\xi'Nu_ou_o'P_{F_Z}u_o-2\xi'Nu_o\xi'P_{F_Z}u_o=$$

$$=-2\left[u_o'(P_Z-P_{F_Z})u_o+\xi'P_{F_Z}u_o\right]\xi'Nu_o-2\xi'Nu_of'b_o=$$

$$=-2(u_o'Nu_o+\xi'P_{F_Z}u_o)\xi'Nu_o-2\xi'Nu_of'b_o=$$

$$=-2u_o'Nu_o\xi'Nu_o-2\xi'P_{F_Z}u_o\xi'(P_Z-P_{F_Z})u_o-2\xi'Nu_of'b_o=$$

$$=-2\xi'Nu_o(f'b_o+u_o'Nu_o)-2\xi'P_{F_Z}u_o\xi'P_Zu_o+2(\xi'P_{F_Z}u_o)^2 \qquad (Z.82)$$

και ο συντελεστής του τ^2 στην (Z.80) μπορεί να γραφεί ως

$$(u_o'P_Z\xi)^2-(\xi'P_{F_Z}u_o)^2-2\xi'Nu_o(f'b_o+u_o'Nu_o)-2\xi'P_{F_Z}u_o\xi'P_Zu_o+2(\xi'P_{F_Z}u_o)^2=$$

$$=-2\xi'Nu_o(f'b_o+u_o'Nu_o)+(u_o'P_Z\xi-u_o'P_{F_Z}\xi)^2=$$

$$=-2\xi'Nu_o(f'b_o+u_o'Nu_o)+\left[u_o'(P_Z-P_{F_Z})\xi\right]^2=$$

$$=-2\xi'Nu_o(f'b_o+u_o'Nu_o)+(u_o'N\xi)^2. \qquad (Z.83)$$

Από την (Z.63) έχουμε

$$u_1'Nu_1=(u_o+\tau g\xi)'N(u_o+\tau g\xi)=u_o'Nu_o+2\tau gu_o'N\xi+\tau^2g^2\xi'N\xi. \qquad (Z.84)$$

Αντικαθιστώντας τις (Z.83) και (Z.84) στην (Z.80) βρίσκουμε

$$u'N_*u=u_o'Nu_o+2\tau gu_o'N\xi+\tau^2g^2\xi'N\xi+$$

$$+\tau^2\left[-2\xi'Nu_o(f'b_o+u_o'Nu_o)+(u_o'N\xi)^2\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=u_o'Nu_o+2\tau gu_o'N\xi+\tau^2\left[g^2\xi'N\xi-2\xi'Nu_o(f'b_o+u_o'Nu_o)+(u_o'N\xi)^2\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=S_o+2\tau gS_*+\tau^2\left[g^2\gamma-2S_*(f'b_o+S_o)+S_*^2\right]+\omega(\tau^3), \qquad (Z.85)$$

όπου

$$S_o=u_o'Nu_o, \quad S_*=\xi'Nu_o. \qquad (Z.86)$$

Από τις (Z.1), (Z.63), (Z.75) και (Z.76) παίρνουμε

$$c_1^*=q'G_*q=q'\left[G+\omega(\tau^2)\right]q=q'Gq+\omega(\tau^2)=c_1+\omega(\tau^2)\,, \tag{Z.87}$$

$$b_*=G_*F_*'u/\sqrt{T}=\left[G+\omega(\tau^2)\right]\left[F_Z'u_1/\sqrt{T}+\omega(\tau^2)\right]=GF_Z'(u_o+\omega(\tau))/\sqrt{T}+\omega(\tau^2)=$$

$$=GF_Z'u_o/\sqrt{T}+\omega(\tau)=b_o+\omega(\tau^2)\,. \tag{Z.88}$$

Αντικαθιστώντας από τις (Z.87) και (Z.88) στην (Z.53) βρίσκουμε

$$L_1=A_{1o}-\tau gA_{1o}+\tau^2\left[(c_1+1+\omega(\tau^2))A_{1o}^2+\left[g^2+2(b_o+\omega(\tau^2))'f-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(b_o+\omega(\tau^2))'E(b_o+\omega(\tau^2))\right]A_{1o}\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=A_{1o}-\tau gA_{1o}+\tau^2\left[(c_1+1)A_{1o}^2+(g^2+2b_o'f-b_o'Eb_o)A_{1o}\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=S_o+2\tau gS_*+\tau^2\left[g^2\gamma-2S_*(f'b_o+S_o)+S_*^2\right]+\omega(\tau^3)-$$

$$-\tau g\left[S_o+2\tau gS_*+\tau^2\left[g^2\gamma-2S_*(f'b_o+S_o)+S_*^2\right]+\omega(\tau^3)\right]+$$

$$+\tau^2\left[(c_1+1)\left[S_o+2\tau gS_*+\tau^2\left[g^2\gamma-2S_*(f'b_o+S_o)+S_*^2\right]+\omega(\tau^3)\right]^2+\right.$$

$$\left.+(g^2+2b_o'f-b_o'Eb_o)\left[S_o+2\tau gS_*+\tau^2\left[g^2\gamma-2S_*(f'b_o+S_o)+S_*^2\right]+\omega(\tau^3)\right]\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=S_o+\tau(2gS_*-gS_o)+\tau^2\left[g^2\gamma-2S_*(f'b_o+S_o)+S_*^2-2g^2S_*+(c_1+1)S_o^2+\right.$$

$$\left.+(g^2+2b_o'f-b_o'Eb_o)S_o\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=S_o+\tau(2gS_*-gS_o)+\tau^2\left[g^2\gamma-2S_*f'b_o-2S_*S_o+S_*^2-2g^2S_*+c_1S_o^2+S_o^2+\right.$$

$$\left.+g^2S_o+2b_o'fS_o-b_o'Eb_oS_o\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=S_o+\tau g(2S_*-S_o)+\tau^2\left[g^2(\gamma-2S_*+S_o)+2(S_o-S_*)f'b_o+(S_o-S_*)^2+c_1S_o^2-\right.$$

$$\left.-b_o'Eb_oS_o\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=S_o+\tau S_1+\tau^2S_2+\omega(\tau^3)\,, \tag{Z.89}$$

όπου

$$S_o=u_o'Nu_o\,,\quad S_*=\xi'Nu_o\,,\quad S_1=g(2S_*-S_o)\,,$$

$$S_2=g^2(\gamma-2S_*+S_o)+2(S_o-S_*)f'b_o+(S_o-S_*)^2+c_1S_o^2-b_o'Eb_oS_o\,. \tag{Z.90}$$

Αντικαθιστώντας τις (Ζ.87) και (Ζ.89) στην (6.17) βρίσκουμε

$$S(k,j,\mathcal{K})=S_0+\tau S_1+\tau^2 S_2+\omega(\tau^3)+\tau^2\Big[\alpha\big[\alpha-2(S_0+\tau S_1+\tau^2 S_2+\omega(\tau^3))\big]\cdot$$

$$\cdot(c_1+\omega(\tau^2))-\big[\mathcal{K}+j(S_0+\tau S_1+\tau^2 S_2+\omega(\tau^3))/2\big](S_0+\tau S_1+\tau^2 S_2+\omega(\tau^3))\Big]+\omega(\tau^3)=$$

$$=S_0+\tau S_1+\tau^2 S_2+\tau^2\big[\alpha(\alpha-2S_0)c_1-(\mathcal{K}+jS_0/2)S_0\big]+\omega(\tau^3)=$$

$$=S_0+\tau S_1+\tau^2\big[S_2-\alpha(2S_0-\alpha)c_1-(\mathcal{K}+jS_0/2)S_0\big]+\omega(\tau^3)=$$

$$=S_0+\tau S_1+\tau^2(S_2-S_3^*)+\omega(\tau^3), \qquad (Z.91)$$

όπου

$$S_3^*=\alpha(2S_0-\alpha)c_1+(\mathcal{K}+jS_0/2)S_0 \qquad (Z.92)$$

και τα S_0, S_*, S_1 και S_2 έχουν οριστεί στην (Ζ.90). Σημειώνουμε, επίσης, ότι η τάξη μεγέθους του λάθους σε όλες τις σχέσεις προκύπτει από άμεση εφαρμογή του θεωρήματος Α.2.

QED

ΛΗΜΜΑ Ζ.5: Μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$S(k,j,\mathcal{K})=S_0+\tau S_1+\tau^2(S_2-S_3)+\omega(\tau^3), \qquad (Z.93)$$

όπου

$$S_0=u_0'Nu_0, \quad S_*=\xi'Nu_0, \quad S_1=g(2S_*-S_0),$$

$$S_2=g^2(\gamma-2S_*+S_0)+2(S_0-S_*)f'b_0+(S_0-S_*)^2+c_1S_0^2-b_0'Eb_0S_0, \qquad (Z.94)$$

$$S_3=(\mathcal{K}+jS_0/2)S_0-\big[(\alpha_0-2)\alpha_0S_0^2+2(\alpha_0-1)\alpha_1S_0+\alpha_1^2\big]c_1=$$

$$=-\big[(\alpha_0-2)\alpha_0c_1-j/2\big]S_0^2-\big[2(\alpha_0-1)\alpha_1c_1-\mathcal{K}\big]S_0-\alpha_1^2c_1.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Από τις (Ζ.92) και (6.22) έχουμε

$$S_3^*=(\alpha_0S_0+\alpha_1+\omega(\tau))\big[2S_0-(\alpha_0S_0+\alpha_1+\omega(\tau))\big]c_1+(\mathcal{K}+jS_0/2)S_0=$$

$$=(2\alpha_0S_0^2-\alpha_0^2S_0^2-\alpha_1\alpha_0S_0+2\alpha_1S_0-\alpha_1\alpha_0S_0-\alpha_1^2)c_1+(\mathcal{K}+jS_0/2)S_0+\omega(\tau)=$$

$$=(\mathcal{K}+jS_0/2)S_0-\big[(\alpha_0-2)\alpha_0S_0^2+2(\alpha_0-1)\alpha_1S_0+\alpha_1^2\big]c_1+\omega(\tau)=S_3+\omega(\tau), \qquad (Z.95)$$

όπου

$$S_3=(\mathcal{K}+jS_0/2)S_0-\big[(\alpha_0-2)\alpha_0S_0^2+2(\alpha_0-1)\alpha_1S_0+\alpha_1^2\big]c_1=$$

$$=-\big[(\alpha_0-2)\alpha_0c_1-j/2\big]S_0^2-\big[2(\alpha_0-1)\alpha_1c_1-\mathcal{K}\big]S_0-\alpha_1^2c_1. \qquad (Z.96)$$

Από την (Ζ.95) και το Λήμμα Ζ.4 βρίσκουμε

$$S(k,j,\mathcal{K}) = S_0 + \tau S_1 + \tau^2 \left[S_2 - (S_3 + \omega(\tau)) \right] + \omega(\tau^3) =$$

$$= S_0 + \tau S_1 + \tau^2 (S_2 - S_3) + \omega(\tau^3) . \qquad (Z.97)$$

όπου τα S_0, S_*, S_1 και S_2 έχουν ορισθεί στο Λήμμα Z.4 και το S_3 έχει ορισθεί στην (Z.96).

QED

<u>ΛΗΜΜΑ Z.6:</u> Αν u_0 είναι ένα $N(\xi, I)$ διάνυσμα, N είναι μια ταυτοτική μήτρα βαθμού l, s είναι ένας μιγαδικός αριθμός και f, f^* είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε

$$E\left[e^{s u_0' N u_0} f(u_0) \right] = \varphi_{l,\gamma}(s) E\left[f(\upsilon + \mu) \right], \qquad (Z.98)$$

όπου

$$\varphi_{l,\gamma}(s) = t^{l/2} e^{st\gamma}, \quad t = (1-2s)^{-1}, \quad \gamma = \xi' N \xi, \quad \upsilon \sim N(0, \Sigma_*),$$
$$\Sigma_* = I + (t-1)N, \quad \mu = (t-1)N\xi + \xi. \qquad (Z.99)$$

Επιπλέον, ισχύουν οι σχέσεις:

$$N\Sigma_* = tN, \quad N\mu = tN\xi. \qquad (Z.100)$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ:</u> Από το Λήμμα A.4, για $G=I$, $Q=N$, $r=1$, $\delta=\xi$, $x=u$, $z=\upsilon+\mu_*$, και χρησιμοποιώντας την (Z.63) έχουμε

$$E\left[e^{s(u+\xi)' N(u+\xi)} f^*(u) \right] = \varphi_{l,\gamma}(s) E\left[f^*(\upsilon + \mu_*) \right], \qquad (Z.101)$$

όπου

$$\mu_* = (t-1)N\xi. \qquad (Z.102)$$

Αντικαθιστώντας $f^*(u) = f(u+\xi)$ στην (Z.101) βρίσκουμε

$$E\left[e^{s(u+\xi)' N(u+\xi)} f(u+\xi) \right] = \varphi_{l,\gamma}(s) E\left[f(\upsilon + \mu_* + \xi) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E\left[e^{s u_0' N u_0} f(u_0) \right] = \varphi_{l,\gamma}(s) E\left[f(\upsilon + \mu) \right], \qquad (Z.103)$$

όπου

$$\mu = \mu_* + \xi = (t-1)N\xi + \xi. \qquad (Z.104)$$

Επιπλέον,

$$N\Sigma_* = N\left[I+(t-1)N\right] = N+(t-1)N^2 = N+(t-1)N = tN \qquad (Z.105)$$

και

$$N\mu = N\left[(t-1)N\xi+\xi\right] = (t-1)N^2\xi+N\xi = (t-1)N\xi+N\xi = tN\xi . \qquad (Z.106)$$

QED

ΛΗΜΜΑ Ζ.7: Ορίζουμε τις υπό συνθήκην αναμενόμενες τιμές

$$E_1(f) = E(f\,|\,X,Z,Nu), \quad E_2(f) = E\left[e^{sS_o} f \,\middle|\, X,Z\right] \Big/ \varphi_{l,\gamma}(s), \qquad (Z.107)$$

και γράφουμε

$$x \overset{i}{=} y \text{ αν } E_i(x) = y \quad (i=1,2). \qquad (Z.108)$$

Τότε

$$E_1(u'\bar{N}u) = T-1, \quad E_1\left[(u'\bar{N}u)^2\right] = (T-1+2)(T-1),$$

$$g \overset{1}{=} \tau(S_o-2S_*-\gamma-1), \; g^2 \overset{1}{=} 2+\omega(\tau^2), \; b_o'f \overset{1}{=} n, \; b_o'Eb_o \overset{1}{=} c_2+\gamma_3,$$

$$S_1 \overset{1}{=} \tau\left[-(2S_*-S_o)^2-(\gamma+1)(2S_*-S_o)\right], \; S_o \overset{2}{=} tl+t^2\gamma, \; S_* \overset{2}{=} t\gamma, \qquad (Z.109)$$

$$S_*S_o \overset{2}{=} t^2\gamma(2+l)+t^3\gamma^2, \; S_o^2 \overset{2}{=} l(l+2)t^2+t^4\gamma^2+2(l+2)t^3\gamma,$$

$$S_*^2 \overset{2}{=} t\gamma+t^2\gamma^2, \quad A^*+sB^* \overset{2}{=} d_o+d_1t+d_2t^2+d_3t^3+d_4t^4+O(\tau^2),$$

όπου

$$\gamma_3 = \xi'\Delta_*\xi, \; c_2 = tr(F_Z'F_Z)^{-1}X'X, \; \Delta_* = F_Z(F_Z'F_Z)^{-1}X'X(F_Z'F_Z)^{-1}F_Z',$$

$$A^* = S_1/\tau+S_2-S_3, \; B^* = S_1^2/2, \; t = (1-2s)^{-1}, \; F_Z = P_ZX, \; d_o = h_o,$$

$$d_1 = lh_1-p_1, \; d_2 = l(l+2)h_2+\gamma h_1-p_2, \; d_3 = 2(l+2)\gamma h_2-p_3, \; d_4 = \gamma^2h_2, \qquad (Z.110)$$

$$p_1 = l\gamma_3+(1+4\gamma+2n-l)\gamma, \; p_2 = (l/2+1+\gamma_3-2\gamma)\gamma, \; p_3 = \gamma^2/2, \; h_o = \alpha_1^2c_1,$$

$$h_1 = l/2+2n+1-c_2-\mathcal{K}+2(\alpha_o-1)\alpha_1c_1, \; h_2 = (\alpha_o-2)\alpha_oc_1+c_1+(1-j)/2$$

και s είναι ένας μιγαδικός αριθμός.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Για τους προβολικούς τελεστές P_Z και P_{F_Z} έχουμε

$$rank(P_Z) = trP_Z = trZ(Z'Z)^{-1}Z' = tr(Z'Z)^{-1}Z'Z = trI_m = m,$$

$$rank(P_{F_Z}) = trP_{F_Z} = trF_Z(F_Z'F_Z)^{-1}F_Z' = tr(F_Z'F_Z)^{-1}F_Z'F_Z = trI_n = n, \qquad (Z.111)$$

$$P_ZP_{F_Z} = P_ZF_Z(F_Z'F_Z)^{-1}F_Z' = P_ZP_ZX(F_Z'F_Z)^{-1}F_Z' = F_Z(F_Z'F_Z)^{-1}F_Z' = P_{F_Z}.$$

Επομένως (βλ. Pollock (1979)), η μήτρα $N=P_Z-P_{F_Z}$ είναι ένας προβολικός τελεστής βαθμού $l=m-n$ (l είναι ο βαθμός υπερ-ταυτοποίησης). Επιπλέον, η μήτρα $\bar{N}=I_T-N$ είναι ένας προβολικός τελεστής βαθμού $tr\bar{N}=T-l$. Εφόσον από το Λήμμα Α.8 έπεται ότι

$$E_1(u'\bar{N}u)=tr\bar{N}E(uu')=tr\bar{N}I_T=tr\bar{N}=T-l, \qquad (Z.112)$$

από την (Z.1) παίρνουμε

$$g=\sqrt{T}(u'u/T-1)=\sqrt{T}(u'u-T)/T=\tau\left[u'(N+\bar{N})u-T\right] \overset{1}{=} \tau E_1(u'Nu+u'\bar{N}u-T)=$$

$$=\tau\left[u'Nu+E_1(u'\bar{N}u)-T\right]=\tau(u'Nu+T-l-T)=\tau(u'Nu-l). \qquad (Z.113)$$

Επιπλέον, από τις (Z.63) και (Z.65) έχουμε

$$S_o=u_o'Nu_o=(u+\xi)'N(u+\xi)=u'Nu+2u'N\xi+\xi'N\xi=u'Nu+2S_*+\gamma. \qquad (Z.114)$$

Από τις (Z.113) και (Z.114) βρίσκουμε

$$g \overset{1}{=} \tau(S_o-2S_*-\gamma-l). \qquad (Z.115)$$

Επίσης, εφόσον από το Λήμμα Α.8 έπεται ότι

$$E_1\left[(u'\bar{N}u)^2\right]=E_1\left[(u'\bar{N}u)(u'\bar{N}u)\right]=$$

$$=\left[tr\bar{N}E(uu')\right]\left[tr\bar{N}E(uu')\right]+2\left[tr\bar{N}E(uu')\bar{N}E(uu')\right]=$$

$$=(tr\bar{N}I_T)(tr\bar{N}I_T)+2(tr\bar{N}I_T\bar{N}I_T)=(tr\bar{N})^2+2(tr\bar{N})=(T-l)^2+2(T-l)=$$

$$=(T-l+2)(T-l), \qquad (Z.116)$$

από τις (Z.112) και (Z.113) βρίσκουμε

$$g^2=\tau^2(u'Nu+u'\bar{N}u-T)^2 \overset{1}{=}$$

$$\overset{1}{=} \tau^2E_1\left[(u'Nu)^2+(u'\bar{N}u)^2+T^2+2u'Nuu'\bar{N}u-2Tu'Nu-2Tu'\bar{N}u\right]=$$

$$=\tau^2\left[(u'Nu)^2+E_1\left[(u'\bar{N}u)^2\right]+T^2+2u'NuE_1(u'\bar{N}u)-2Tu'Nu-2TE_1(u'\bar{N}u)\right]=$$

$$=\tau^2\left[(u'Nu)^2+(T-l+2)(T-l)+T^2+2(T-l)u'Nu-2Tu'Nu-2T(T-l)\right]=$$

$$=\tau^2\left[(u'Nu)^2-2lu'Nu+T^2-Tl-lT+l^2+2T-2l+T^2-2T^2+2Tl\right]=$$

$$=\tau^2\left[(u'Nu)^2-2lu'Nu+l^2-2l\right]+2=2+\omega(\tau^2). \qquad (Z.117)$$

Επιπλέον, εφόσον

$$NX=(P_Z-P_{F_Z})X=P_ZX-P_{F_Z}X=F_Z-F_Z(F_Z'F_Z)^{-1}F_Z'X=F_Z-F_Z(X'P_ZX)^{-1}X'P_ZX=0$$

και (Z.118)

$$NF_Z=(P_Z-P_{F_Z})F_Z=P_ZF_Z-P_{F_Z}F_Z=P_ZP_ZX-F_Z=P_ZX-F_Z=F_Z-F_Z=0,$$

εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι τα $f=X'u/\sqrt{T}$ και $b_o=GF_Z'u_o/\sqrt{T}$ είναι υπό συνθήκην ανεξάρτητα από το Nu και συνεπώς είναι υπό συνθήκην ανεξάρτητα από τα S_o και S_*. Επίσης, χρησιμοποιώντας το Λήμμα A.8 βρίσκουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\text{(i)}\quad b_o'f=(u_o'F_Z/\sqrt{T})(F_Z'F_Z/T)^{-1}(X'u/\sqrt{T})=(u+\xi)'F_Z(F_Z'F_Z)^{-1}X'u \overset{1}{=}$$

$$\overset{1}{=}E_1[u'F_Z(F_Z'F_Z)^{-1}X'u+\xi'F_Z(F_Z'F_Z)^{-1}X'u]=trF_Z(F_Z'F_Z)^{-1}X'E(uu')=$$

$$=trF_Z(F_Z'F_Z)^{-1}X'I_T=tr(X'P_ZX)^{-1}X'P_ZX=trI_n=n. \qquad (Z.119)$$

$$\text{(ii)}\quad b_o'Eb_o=(u_o'F_Z/\sqrt{T})(F_Z'F_Z/T)^{-1}(X'X/T)(F_Z'F_Z/T)^{-1}(F_Z'u_o/\sqrt{T})=$$

$$=u_o'F_Z(F_Z'F_Z)^{-1}X'X(F_Z'F_Z)^{-1}F_Z'u_o=(u+\xi)'\Delta_*(u+\xi) \overset{1}{=}$$

$$\overset{1}{=}E_1[u'\Delta_*u+2u'\Delta_*\xi+\xi'\Delta_*\xi]=E_1(u'\Delta_*u)+2E_1(u'\Delta_*\xi)+\xi'\Delta_*\xi=$$

$$=tr\Delta_*E(uu')+\xi'\Delta_*\xi=trF_Z(F_Z'F_Z)^{-1}X'X(F_Z'F_Z)^{-1}F_Z'I_T+\xi'\Delta_*\xi=$$

$$=tr(F_Z'F_Z)^{-1}X'X(F_Z'F_Z)^{-1}F_Z'F_Z+\xi'\Delta_*\xi=$$

$$=tr(F_Z'F_Z)^{-1}X'X+\xi'\Delta_*\xi=c_2+\gamma_3, \qquad (Z.120)$$

όπου

$$\Delta_*=F_Z(F_Z'F_Z)^{-1}X'X(F_Z'F_Z)^{-1}F_Z', \quad c_2=tr(F_Z'F_Z)^{-1}X'X, \quad \gamma_3=\xi'\Delta_*\xi. \qquad (Z.121)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (Z.94) και (Z.115) βρίσκουμε

$$S_1\overset{1}{=}\tau(S_o-2S_*-\gamma-1)(2S_*-S_o)=\tau[-(2S_*-S_o)^2-(\gamma+1)(2S_*-S_o)]. \qquad (Z.122)$$

Από τις (Z.94), (Z.115), (Z.117), (Z.119), (Z.120) και (Z.122) παίρνουμε

$$A^*=S_1/\tau+S_2-S_3\overset{1}{=}-(2S_*-S_o)^2-(\gamma+1)(2S_*-S_o)+$$

$$+(2+\omega(\tau^2))[\gamma-(2S_*-S_o)]+2(S_o-S_*)n+(S_o-S_*)^2+c_1S_o^2-(c_2+\gamma_3)S_o+$$

$$+[(\alpha_o-2)\alpha_oc_1-j/2]S_o^2+[2(\alpha_o-1)\alpha_1c_1-\varkappa]S_o+\alpha_1^2c_1=$$

$$=-4S_*^2-S_o^2+4S_*S_o-2(\gamma+1)S_*+(\gamma+1)S_o+2\gamma-4S_*+2S_o+2S_on-2S_*n+S_o^2+S_*^2-$$

$$-2S_oS_*+c_1S_o^2-(c_2+\gamma_3)S_o+[(\alpha_o-2)\alpha_oc_1-j/2]S_o^2+$$

$$+\left[2(\alpha_o-1)\alpha_1 c_1-\mathcal{K}\right]S_o+\alpha_1^2 c_1+\omega(\tau^2)=$$

$$=\left[(\alpha_o-2)\alpha_o c_1+c_1-j/2\right]S_o^2+2S_oS_*-3S_*^2+\left[\gamma+1+2+2n-c_2-\gamma_3-\mathcal{K}+\right.$$

$$\left.+2(\alpha_o-1)\alpha_1 c_1\right]S_o+(-2\gamma-2l-4-2n)S_*+2\gamma+\alpha_1^2 c_1+\omega(\tau^2)=$$

$$=\left[(\alpha_o-2)\alpha_o c_1+c_1-j/2\right]S_o^2+2S_oS_*-3S_*^2+\left[\gamma+m+n+2-c_2-\gamma_3-\mathcal{K}+\right.$$

$$\left.+2(\alpha_o-1)\alpha_1 c_1\right]S_o-2(\gamma+m+2)S_*+2\gamma+\alpha_1^2 c_1+\omega(\tau^2). \qquad (Z.123)$$

και

$$B^*=S_1^2/2=g^2(2S_*-S_o)^2/2 \overset{1}{=} (2+\omega(\tau^2))(2S_*-S_o)^2/2=(2S_*-S_o)^2+\omega(\tau^2)=$$

$$=4S_*^2-4S_*S_o+S_o^2+\omega(\tau^2). \qquad (Z.124)$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Z.6 και το Λήμμα A.8 βρίσκουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

(i) $S_*=\xi'Nu_o \overset{2}{=} E_2(\xi'Nu_o)=E\left[\xi'N(\upsilon+\mu)\right]=\xi'NE(\upsilon+\mu)=\xi'N\mu=t\xi'N\xi=$

$$=t\gamma. \qquad (Z.125)$$

(ii) $S_o=u_o'Nu_o \overset{2}{=} E_2(u_o'Nu_o)=E\left[(\upsilon+\mu)'N(\upsilon+\mu)\right]=E\left[\upsilon'N\upsilon+2\upsilon'N\mu+\mu'N\mu\right]=$

$$=E(\upsilon'N\upsilon)+(N\mu)'N\mu=trN\Sigma_*+(tN\xi)'tN\xi=t(trN)+t^2\xi'N\xi=tl+t^2\gamma. \qquad (Z.126)$$

(iii) $S_*S_o=\xi'Nu_ou_o'Nu_o \overset{2}{=} E_2(\xi'Nu_ou_o'Nu_o)=E\left[\xi'N(\upsilon+\mu)(\upsilon+\mu)'N(\upsilon+\mu)\right]=$

$$=E\left[(\xi'N\upsilon+\xi'N\mu)(\upsilon'N\upsilon+2\upsilon'N\mu+\mu'N\mu)\right]=$$

$$=E\left[\xi'N\upsilon\upsilon'N\upsilon+2\xi'N\upsilon\upsilon'N\mu+\xi'N\upsilon\mu'N\mu+\xi'N\mu\upsilon'N\upsilon+2\xi'N\mu\upsilon'N\mu+\xi'N\mu\mu'N\mu\right]=$$

$$=2\xi'NE(\upsilon\upsilon')N\mu+\xi'N\mu E(\upsilon'N\upsilon)+\xi'N\mu(N\mu)'N\mu=$$

$$=2\xi'N\Sigma_*tN\xi+\xi'tN\xi(trN\Sigma_*)+\xi'tN\xi(tN\xi)'tN\xi=$$

$$=2\xi'tNtN\xi+\xi'tN\xi t(trN)+\xi'tN\xi(tN\xi)'tN\xi=$$

$$=2t^2\xi'N\xi+t^2\xi'N\xi l+t^3(\xi'N\xi)^2=$$

$$=2t^2\gamma+t^2\gamma l+t^3\gamma^2=t^2\gamma(2+l)+t^3\gamma^2. \qquad (Z.127)$$

(iv) $S_*^2=(\xi'Nu_o)^2 \overset{2}{=} E_2\left[(\xi'Nu_o)^2\right]=E\left[(\xi'N(\upsilon+\mu))^2\right]=E\left[(\xi'N\upsilon+\xi'N\mu)^2\right]=$

$$=E\left[(\xi'N\upsilon)^2+2\xi'N\upsilon\xi'N\mu+(\xi'N\mu)^2\right]=E(\xi'N\upsilon\upsilon'N\xi)+(\xi'N\mu)^2=$$

$$=\xi'NE(\upsilon\upsilon')N\xi+(\xi'N\mu)^2=\xi'N\Sigma_*N\xi+(\xi'N\mu)^2=\xi'tNN\xi+(\xi'tN\xi)^2=$$

$$=t\xi'N\xi+t^2(\xi'N\xi)^2=t\gamma+t^2\gamma^2. \qquad (Z.128)$$

(v) $S_o^2=(u_o'Nu_o)^2 \overset{2}{=} E_2\left[(u_o'Nu_o)^2\right]=E\left[((\upsilon+\mu)'N(\upsilon+\mu))^2\right]=$

$$=E\left[(\upsilon'N\upsilon+2\upsilon'N\mu+\mu'N\mu)^2\right]=E\left[(\upsilon'N\upsilon)^2+4\mu'N\upsilon\upsilon'N\mu+(\mu'N\mu)^2+4\upsilon'N\upsilon\upsilon'N\mu+\right.$$

$$\left.+2\upsilon'N\upsilon\mu'N\mu+4\upsilon'N\mu\mu'N\mu\right]=$$

$$=E\left[(\upsilon'N\upsilon)^2\right]+4\mu'NE(\upsilon\upsilon')N\mu+(\mu'N\mu)^2+2E(\upsilon'N\upsilon)\mu'N\mu=$$

$$=(trN\Sigma_*)^2+2(trN\Sigma_*N\Sigma_*)+4\mu'N\Sigma_*N\mu+(\mu'N\mu)^2+2(trN\Sigma_*)\mu'N\mu=$$

$$=(trtN)^2+2(trtNtN)+4\mu'tNtN\xi+\left[(N\mu)'N\mu\right]^2+2(trtN)(N\mu)'N\mu=$$

$$=t^2(trN)^2+2t^2(trN)+4t^2(tN\xi)'N\xi+\left[(tN\xi)'tN\xi\right]^2+2t(trN)(tN\xi)'tN\xi=$$

$$=t^2(trN)^2+2t^2(trN)+4t^3\xi'N\xi+t^4(\xi'N\xi)^2+2t^3(trN)\xi'N\xi=$$

$$=t^2l^2+2t^2l+4t^3\gamma+t^4\gamma^2+2t^3l\gamma=\gamma^2t^4+2(2+l)\gamma t^3+l(l+2)t^2. \qquad (Z.129)$$

Αντικαθιστώντας από τις (Z.125), (Z.126), (Z.127), (Z.128) και (Z.129) στις (Z.123) και (Z.124) βρίσκουμε τα κατωτέρω αποτελέσματα:

(a) $$A^{*2}=\left[(\alpha_o-2)\alpha_oc_1+c_1-j/2\right]\left[\gamma^2t^4+2(2+l)\gamma t^3+l(l+2)t^2\right]+$$

$$+2\left[t^2\gamma(2+l)+t^3\gamma^2\right]-3(t\gamma+t^2\gamma^2)+\left[\gamma+m+n+2-c_2-\gamma_3-\varkappa+\right.$$

$$\left.+2(\alpha_o-1)\alpha_1c_1\right](tl+t^2\gamma)-2(\gamma+m+2)t\gamma+2\gamma+\alpha_1^2c_1+O(\tau^2)=$$

$$=\left[(\alpha_o-2)\alpha_oc_1+c_1-j/2\right]\gamma^2t^4+\left[(\alpha_o-2)\alpha_oc_1+c_1-j/2\right]2(2+l)\gamma t^3+$$

$$+\left[(\alpha_o-2)\alpha_oc_1+c_1-j/2\right]l(l+2)t^2+2(2+l)\gamma t^2+2\gamma^2t^3-3\gamma t-3\gamma^2t^2+$$

$$+\left[\gamma+m+n+2-c_2-\gamma_3-\varkappa+2(\alpha_o-1)\alpha_1c_1\right]lt+\left[\gamma+m+n+2-c_2-\gamma_3-\varkappa+\right.$$

$$\left.+2(\alpha_o-1)\alpha_1c_1\right]\gamma t^2-2(\gamma+m+2)t\gamma+2\gamma+\alpha_1^2c_1+O(\tau^2)=$$

$$=\left[(\alpha_o-2)\alpha_oc_1+c_1-j/2\right]\gamma^2t^4+2\left[\left[(\alpha_o-2)\alpha_oc_1+c_1-j/2\right](2+l)\gamma+\gamma^2\right]t^3+$$

$$+\left[\left[(\alpha_o-2)\alpha_oc_1+c_1-j/2\right]l(l+2)+2(2+l)\gamma-3\gamma^2+\left[\gamma+m+n+2-c_2-\gamma_3-\varkappa+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2(\alpha_o-1)\alpha_1c_1\right]\gamma\right]t^2+\left[\left[\gamma+m+n+2-c_2-\gamma_3-\varkappa+2(\alpha_o-1)\alpha_1c_1\right]l-3\gamma-\right.$$

$$\left.-2(\gamma+m+2)\gamma\right]t+2\gamma+\alpha_1^2c_1+O(\tau^2). \qquad (Z.130)$$

(b) $$B^{*2}=4(t\gamma+t^2\gamma^2)-4\left[t^2\gamma(2+l)+t^3\gamma^2\right]+\gamma^2t^4+2(2+l)\gamma t^3+$$

$$+l(l+2)t^2+O(\tau^2)=$$

$$=4t\gamma+4t^2\gamma^2-4t^2\gamma(2+1)-4t^3\gamma^2+\gamma^2t^4+2(2+1)\gamma t^3+1(1+2)t^2+O(\tau^2)=$$

$$=\gamma^2t^4+\left[2(2+1)\gamma-4\gamma^2\right]t^3+\left[4\gamma^2-4\gamma(2+1)+1(1+2)\right]t^2+4\gamma t+O(\tau^2). \quad (Z.131)$$

'Εστω s ένας μιγαδικός αριθμός και έστω $t=(1-2s)^{-1}$. Τότε

$t=1/(1-2s) \Rightarrow t-2ts=1 \Rightarrow s=(t-1)/2t=1/2-1/2t.$ (Z.132)

Από τις (Z.130), (Z.131) και (Z.132) έπεται ότι

$$A^*+sB^*=A^*+(1/2-1/2t)B^* \overset{2}{=}$$

$$\overset{2}{=}\left[(\alpha_o-2)\alpha_oc_1+c_1-j/2\right]\gamma^2t^4+2\left[\left[(\alpha_o-2)\alpha_oc_1+c_1-j/2\right](2+1)\gamma+\gamma^2\right]t^3+$$

$$+\left[\left[(\alpha_o-2)\alpha_oc_1+c_1-j/2\right]1(1+2)+2(2+1)\gamma-3\gamma^2+\left[\gamma+m+n+2-c_2-\gamma_3-\mathcal{K}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2(\alpha_o-1)\alpha_1c_1\right]\gamma\right]t^2+\left[\left[\gamma+m+n+2-c_2-\gamma_3-\mathcal{K}+2(\alpha_o-1)\alpha_1c_1\right]1-3\gamma-\right.$$

$$\left.-2(\gamma+m+2)\gamma\right]t+2\gamma+\alpha_1^2c_1+$$

$$+(1/2)\left[\gamma^2t^4+\left[2(2+1)\gamma-4\gamma^2\right]t^3+\left[4\gamma^2-4\gamma(2+1)+1(1+2)\right]t^2+4\gamma t\right]-$$

$$-(1/2)\left[\gamma^2t^3+\left[2(2+1)\gamma-4\gamma^2\right]t^2+\left[4\gamma^2-4\gamma(2+1)+1(1+2)\right]t+4\gamma\right]+O(\tau^2)=$$

$$=\left[(\alpha_o-2)\alpha_oc_1+c_1-j/2+1/2\right]\gamma^2t^4+$$

$$+\left[2\left[(\alpha_o-2)\alpha_oc_1+c_1-j/2\right](2+1)\gamma+2\gamma^2+(2+1)\gamma-2\gamma^2-\gamma^2/2\right]t^3+$$

$$+\left[\left[(\alpha_o-2)\alpha_oc_1+c_1-j/2\right]1(1+2)+2(2+1)\gamma-3\gamma^2+\left[\gamma+m+n+2-c_2-\gamma_3-\mathcal{K}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2(\alpha_o-1)\alpha_1c_1\right]\gamma+2\gamma^2-2\gamma(2+1)+1(1+2)/2-(2+1)\gamma+2\gamma^2\right]t^2+$$

$$+\left[\left[\gamma+m+n+2-c_2-\gamma_3-\mathcal{K}+2(\alpha_o-1)\alpha_1c_1\right]1-3\gamma-2(\gamma+m+2)\gamma+2\gamma-2\gamma^2+\right.$$

$$\left.+2\gamma(2+1)-1(1+2)/2\right]t+2\gamma+\alpha_1^2c_1-2\gamma+O(\tau^2)=$$

$$=\left[(\alpha_o-2)\alpha_oc_1+c_1+(1-j)/2\right]\gamma^2t^4+\left[2\left[(\alpha_o-2)\alpha_oc_1+c_1+(1-j)/2\right](2+1)\gamma-\right.$$

$$\left.-\gamma^2/2\right]t^3+\left[\left[(\alpha_o-2)\alpha_oc_1+c_1+(1-j)/2\right]1(1+2)+\left[\gamma+\gamma+m+n+2-c_2-\gamma_3-\mathcal{K}+\right.\right.$$

$$+2(\alpha_o-1)\alpha_1 c_1-1-2]\gamma\Big]t^2+\Big[[\gamma+m+n+2-c_2-\gamma_3-\mathcal{K}+2(\alpha_o-1)\alpha_1 c_1-1/2-1]1+$$

$$+21\gamma-\gamma-4\gamma^2-2m\gamma\Big]t+\alpha_1^2 c_1+O(\tau^2)=$$

$$=[(\alpha_o-2)\alpha_o c_1+c_1+(1-j)/2]\gamma^2 t^4+\Big[2[(\alpha_o-2)\alpha_o c_1+c_1+(1-j)/2](2+1)\gamma-$$

$$-\gamma^2/2\Big]t^3+\Big[[(\alpha_o-2)\alpha_o c_1+c_1+(1-j)/2]1(1+2)+[\gamma+\gamma+1+n+n-c_2-\gamma_3-\mathcal{K}+$$

$$+2(\alpha_o-1)\alpha_1 c_1-1]\gamma\Big]t^2+\Big[[\gamma+1+n+n+1-c_2-\gamma_3-\mathcal{K}+2(\alpha_o-1)\alpha_1 c_1-1/2]1+$$

$$+21\gamma-\gamma-4\gamma^2-21\gamma-2n\gamma\Big]t+\alpha_1^2 c_1+O(\tau^2)=$$

$$=[(\alpha_o-2)\alpha_o c_1+c_1+(1-j)/2]\gamma^2 t^4+\Big[2[(\alpha_o-2)\alpha_o c_1+c_1+(1-j)/2](2+1)\gamma-$$

$$-\gamma^2/2\Big]t^3+\Big[[(\alpha_o-2)\alpha_o c_1+c_1+(1-j)/2]1(1+2)+[1/2+2n+1-c_2-\mathcal{K}+$$

$$+2(\alpha_o-1)\alpha_1 c_1]\gamma+2\gamma^2-\gamma_3\gamma-\gamma-1\gamma/2\Big]t^2+$$

$$+\Big[[1/2+2n+1-c_2-\mathcal{K}+2(\alpha_o-1)\alpha_1 c_1]1+\gamma 1-\gamma_3 1-\gamma-4\gamma^2-2n\gamma\Big]t+\alpha_1^2 c_1+O(\tau^2)=$$

$$=h_2\gamma^2 t^4+\Big[2h_2(2+1)\gamma-\gamma^2/2\Big]t^3+\Big[h_2 1(1+2)+h_1\gamma-(1/2+1+\gamma_3-2\gamma)\gamma\Big]t^2+$$

$$+\Big[h_1 1-[1\gamma_3+(1+4\gamma+2n-1)\gamma]\Big]t+h_o+O(\tau^2)=$$

$$=d_o+d_1 t+d_2 t^2+d_3 t^3+d_4 t^4+O(\tau^2), \qquad (Z.133)$$

όπου

$$d_o=h_o,\ d_1=1h_1-p_1,\ d_2=1(1+2)h_2+\gamma h_1-p_2,\ d_3=2(1+2)\gamma h_2-p_3,\ d_4=\gamma^2 h_2,$$

$$p_1=1\gamma_3+(1+4\gamma+2n-1)\gamma,\ p_2=(1/2+1+\gamma_3-2\gamma)\gamma,\ p_3=\gamma^2/2,\ h_o=\alpha_1^2 c_1, \qquad (Z.134)$$

$$h_1=1/2+2n+1-c_2-\mathcal{K}+2(\alpha_o-1)\alpha_1 c_1,\ h_2=(\alpha_o-2)\alpha_o c_1+c_1+(1-j)/2.$$

QED

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΛΗΜΜΑΤΟΣ 6.1: Έστω s ένας φανταστικός αριθμός, $t=(1-2s)^{-1}$ και $\varphi_{l,\gamma}(s)$ η χαρακτηριστική συνάρτηση του $S_o=u_o'Nu_o$, το οποίο είναι μια μη κεντρική χ^2 μεταβλητή με l βαθμούς ελευθερίας και μη κεντρική παράμετρο γ. Χρησιμοποιώντας τα Λήμματα Z.5 και Z.7 η υπό συνθήκη (ως προς τις μήτρες X, Z)

χαρακτηριστική συνάτρηση του στατιστικού (6.15) είναι

$$\varphi_S(s) = E\left[e^{sS(k,j,K)}\middle|X,Z\right] = E\left[e^{s[S_0+\tau S_1+\tau^2(S_2-S_3)+\omega(\tau^3)]}\middle|X,Z\right] =$$

$$= E\left[e^{sS_0}e^{s\tau[S_1+\tau(S_2-S_3)]}\middle|X,Z\right]+O(\tau^3) =$$

$$= E\left[e^{sS_0}\left[1+\tau sS_1+\tau^2 s(S_2-S_3+sS_1^2/2)\right]\middle|X,Z\right]+O(\tau^3) =$$

$$= E\left[e^{sS_0}\left[1+\tau^2 s\left[(S_1/\tau+S_2-S_3)+sS_1^2/2\right]\right]\middle|X,Z\right]+O(\tau^3) =$$

$$= E\left[e^{sS_0}\left[1+\tau^2 s(A^*+sB^*)\right]\middle|X,Z\right]+O(\tau^3), \qquad (Z.135)$$

όπου

$$A^*=S_1/\tau+S_2-S_3, \quad B^*=S_1^2/2. \qquad (Z.136)$$

Από το Λήμμα Z.7 έχουμε ότι

$$A^*+sB^* \overset{2}{=} d_0+d_1t+d_2t^2+d_3t^3+d_4t^4+O(\tau^2) = \sum_{i=0}^{4} d_it^i+O(\tau^2), \qquad (Z.137)$$

όπου

$$d_0 = h_0,\ d_1 = lh_1-p_1,\ d_2 = l(l+2)h_2+\gamma h_1-p_2,$$

$$d_3 = 2(l+2)\gamma h_2-p_3,\ d_4 = \gamma^2 h_2,$$

$$h_0 = \alpha_1^2 c_1,\ h_1 = l/2+2n+1-c_2-\varkappa+2(\alpha_0-1)\alpha_1 c_1, \qquad (Z.138)$$

$$h_2 = (\alpha_0-2)\alpha_0 c_1+c_1+(1-j)/2 = (1-j)/2+(\alpha_0-1)^2 c_1,$$

$$p_1 = l\gamma_3+(1+4\gamma+2n-l)\gamma,\ p_2 = (l/2+1+\gamma_3-2\gamma)\gamma,\ p_3 = \gamma^2/2.$$

Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό $x \overset{2}{=} y$ αν και μόνον αν

$$y = E_2(x) = E\left[e^{sS_0}x\middle|X,Z\right]/\varphi_{l,\gamma}(s), \qquad (Z.139)$$

βρίσκουμε

$$\varphi_S(s) = \varphi_{l,\gamma}(s)\left[1+\tau^2 s\left[\sum_{i=0}^{4} d_it^i+O(\tau^2)\right]\right]+O(\tau^3) =$$

$$= \varphi_{l,\gamma}(s)+\tau^2 s\left[\sum_{i=0}^{4} d_it^i\right]\varphi_{l,\gamma}(s)+O(\tau^3). \qquad (Z.140)$$

Εφόσον

$$\varphi_{l,\gamma}(s) = (1-2s)^{-l/2}e^{s\gamma/(1-2s)}, \qquad (Z.141)$$

βρίσκουμε ότι

$$t^i\varphi_{l,\gamma}(s)=(1-2s)^{-i}(1-2s)^{-l/2}e^{s\gamma/(1-2s)}=(1-2s)^{-(l+2i)/2}e^{s\gamma/(1-2s)}=$$

$$=\varphi_{l+2i,\gamma}(s) \quad (i=1,2,\ldots). \qquad (Z.142)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (Z.140) και (Z.142) βρίσκουμε

$$\varphi_S(s) = \varphi_{l,\gamma}(s)+\tau^2 s\sum_{i=0}^{4} d_i t^i\varphi_{l,\gamma}(s)+O(\tau^3) =$$

$$= \varphi_{l,\gamma}(s)+\tau^2 s\sum_{i=0}^{4} d_i\varphi_{l+2i,\gamma}(s)+O(\tau^3). \qquad (Z.143)$$

Διαιρώντας την (Z.143) δια $-s$ και αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό Fourier (βλ. Λήμμα A.2) παίρνουμε

$$-\varphi_S(s)/s = -\varphi_{l,\gamma}(s)/s-\tau^2\sum_{i=0}^{4} d_i\varphi_{l+2i,\gamma}(s)+O(\tau^3) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_S(x|X,Z) = F_{l,\gamma}(x)-\tau^2\sum_{i=0}^{4} d_i f_{l+2i,\gamma}(x)+O(\tau^3). \qquad (Z.144)$$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι το στατιστικό

$$S^{\sim} = S_0+\tau S_1+\tau^2(S_2-S_3)$$

ικανοποιεί (υπό συνθήκην ως προς τις μήτρες X και Z) τις υποθέσεις του θεωρήματος A.5. Συνεπώς,

$$Pr(S^{\sim} \le x|X,Z) = F_S(x|X,Z)+o(\tau^2).$$

Επιπλέον, η $F_S(\cdot)$ είναι μια ομαλή (smooth) συνάρτηση (βλ. Μαγδαληνός (1991), Lemma 3) και επομένως, το θεώρημα A.3 συνεπάγεται ότι

$$Pr\left\{S(k,j,\mathcal{K}) \le x\middle|X,Z\right\} = Pr(S^{\sim} \le x|X,Z)+o(\tau^2) =$$

$$= F_S(x|X,Z)+o(\tau^2) \quad (j= 0,\ 1,\ 2). \qquad (Z.145)$$

Στην πράξη μπορούμε να κρατήσουμε μιαν ακόμα τάξη μεγέθους στο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα του στατιστικού (6.15) (βλ. σχέση (Z.93)), οπότε το σφάλμα στην (Z.145) γίνεται $O(\tau^3)$, δηλαδή

$$Pr\left\{S(k,j,\mathcal{K}) \le x\middle|X,Z\right\} = F_{l,\gamma}(x)-\tau^2\sum_{i=0}^{4} d_i f_{l+2i,\gamma}(x)+O(\tau^3), \qquad (Z.146)$$

για $j = 0, 1, 2$.

QED

Ζ.3 ΝΕΑ ΕΛΕΓΧΟΜΕΝΗ ΥΠΟΘΕΣΗ

ΛΗΜΜΑ Ζ.8: Αν $\text{rank}(Z)=m$ (με πιθανότητα 1), τότε η μήτρα

$$\Lambda=\Delta+B_+A^{-1}B_+' \tag{Ζ.147}$$

είναι θετικά ορισμένη αν και μόνον αν οι μήτρες A και G_+ είναι μη ιδιάζουσες. Οι μήτρες A, B_+, G_+, Δ και Λ έχουν ορισθεί στις σχέσεις (6.43) και (6.44).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αν $\text{rank}(Z)=m$, οι στήλες της Z είναι γραμμικά ανεξάρτητες και επομένως,

$$Z\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=0, \tag{Ζ.148}$$

όπου $\alpha \in R^m$ και 0 είναι το $m\times 1$ μηδενικό διάνυσμα. Θεωρούμε ένα αυθαίρετο διάνυσμα $\vartheta \in R^l$. Τότε

$$\bar{P}_{Z_1}Z_2\vartheta=(I-P_{Z_1})Z_2\vartheta=Z_2\vartheta-Z_1(Z_1'Z_1)^{-1}Z_1'Z_2\vartheta=Z_1\vartheta_*+Z_2\vartheta=$$

$$=(Z_1:Z_2)\begin{bmatrix}\vartheta_*\\ \vartheta\end{bmatrix}=Z\begin{bmatrix}\vartheta_*\\ \vartheta\end{bmatrix}, \tag{Ζ.149}$$

όπου $\vartheta_*=-(Z_1'Z_1)^{-1}Z_1'Z_2\vartheta$. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την (Ζ.149) βρίσκουμε ότι

$$\bar{P}_{Z_1}Z_2\vartheta=0 \Rightarrow Z\begin{bmatrix}\vartheta_*\\ \vartheta\end{bmatrix}=0 \Leftrightarrow \vartheta=0, \text{ όπου } \vartheta \in R^l, \tag{Ζ.150}$$

που σημαίνει ότι $\text{rank}(\bar{P}_{Z_1}Z_2)=\text{rank}(Z_2'\bar{P}_{Z_1})=l$ και επομένως,

$$\text{rank}(\Delta)=\text{rank}(Z_2'\bar{P}_{Z_1}Z_2/T)=\text{rank}\left[(Z_2'\bar{P}_{Z_1})'(Z_2'\bar{P}_{Z_1})/T\right]=$$

$$=\text{rank}(Z_2'\bar{P}_{Z_1})=l. \tag{Ζ.151}$$

Δηλαδή η $l\times l$ μήτρα Δ έχει πλήρη βαθμό και συνεπώς είναι μη ιδιάζουσα (βλ. Rao (1973), σελ. 30). Εφόσον οι μήτρες A, G_+, και Δ είναι μη ιδιάζουσες, έχουμε (βλ. Rao (1973), σελ. 30)

$$\begin{vmatrix}-A & B_+'\\ B_+ & \Delta\end{vmatrix}=|-A||\Delta-B_+(-A)^{-1}B_+'|=|-A||\Delta+B_+A^{-1}B_+'|=$$

$$=|\Delta||-A-B_+'\Delta^{-1}B_+|, \qquad (Z.152)$$

όπου με $|\Omega|$ συμβολίζουμε την ορίζουσα της μήτρας Ω. Η (Z.152) σε συνδυασμό με την (6.47) συνεπάγεται ότι, αν οι μήτρες A και G_+ είναι μη ιδιάζουσες, ισχύει η σχέση

$$|\Delta+B_+A^{-1}B_+'|=|\Delta||-A-B_+'\Delta^{-1}B_+|/|-A|=|\Delta||A+B_+'\Delta^{-1}B_+|/|A|=$$

$$=|\Delta||G_+|/|A|\neq 0 \qquad (Z.153)$$

και κατά συνέπεια η θετικά ημιορισμένη μήτρα

$$\Lambda=\Delta+B_+A^{-1}B_+' \qquad (Z.154)$$

είναι μη ιδιάζουσα και άρα θετικά ορισμένη.

QED

ΛΗΜΜΑ Ζ.9: Μπορεί να δειχθεί ότι

$$\gamma=\delta_2'\Lambda^{-1}\delta_2 > 0 \quad \forall\ \delta_2, \qquad (Z.155)$$

όπου το διάνυσμα δ_2 και η μήτρα Λ έχουν οριστεί στις (6.40) και (6.43), αντίστοιχα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Από τον Rao ((1973), σελ. 33) έχουμε

$$Z'Z=(Z_1:Z_2)'(Z_1:Z_2)=\begin{bmatrix}Z_1'\\ Z_2'\end{bmatrix}(Z_1:Z_2)=\begin{bmatrix}Z_1'Z_1 & Z_1'Z_2\\ Z_2'Z_1 & Z_2'Z_2\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (Z'Z)^{-1}=\begin{bmatrix}Z_1'Z_1 & Z_1'Z_2\\ Z_2'Z_1 & Z_2'Z_2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\Theta & \Phi\\ \Psi & D\end{bmatrix}, \qquad (Z.156)$$

όπου

$$\Theta=\left[Z_1'Z_1-Z_1'Z_2(Z_2'Z_2)^{-1}Z_2'Z_1\right]^{-1}=\left[Z_1'Z_1-Z_1'P_{Z_2}Z_1\right]^{-1}=\left[Z_1'(I-P_{Z_2})Z_1\right]^{-1}=$$

$$=(Z_1'\bar{P}_{Z_2}Z_1)^{-1},$$

$$\Psi=-(Z_2'Z_2)^{-1}Z_2'Z_1(Z_1'\bar{P}_{Z_2}Z_1)^{-1}=-(Z_2'Z_2)^{-1}Z_2'Z_1\Theta, \qquad (Z.157)$$

$$D=\left[Z_2'Z_2-Z_2'Z_1(Z_1'Z_1)^{-1}Z_1'Z_2\right]^{-1}=\left[Z_2'Z_2-Z_2'P_{Z_1}Z_2\right]^{-1}=\left[Z_2'(I-P_{Z_1})Z_2\right]^{-1}=$$

$$=(Z_2'\bar{P}_{Z_1}Z_2)^{-1},$$

$$\Phi=-(Z_1'Z_1)^{-1}Z_1'Z_2(Z_2'\bar{P}_{Z_1}Z_2)^{-1}=-(Z_1'Z_1)^{-1}Z_1'Z_2D.$$

Χρησιμοποιώντας τις (6.40), (6.43), (Z.62), (Z.63), (Z.156) και (Z.157) βρίσκουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

(i) $P_Z\xi=Z(Z'Z)^{-1}Z'\xi=\sqrt{T}\,Z(Z'Z)^{-1}(Z'\xi/\sqrt{T})=\sqrt{T}Z(Z'Z)^{-1}\delta=$

$$=\sqrt{T}(Z_1:Z_2)\begin{bmatrix}\Theta & \Phi\\ \Psi & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \delta_2\end{bmatrix}=\sqrt{T}(Z_1\Phi\delta_2+Z_2D\delta_2)=$$

$$=\sqrt{T}\left[-Z_1(Z_1'Z_1)^{-1}Z_1'Z_2D\delta_2+Z_2D\delta_2\right]=\sqrt{T}(-P_{Z_1}Z_2D\delta_2+Z_2D\delta_2)=$$

$$=\sqrt{T}(I-P_{Z_1})Z_2D\delta_2=\sqrt{T}\,\bar{P}_{Z_1}Z_2(Z_2'\bar{P}_{Z_1}Z_2)^{-1}\delta_2. \qquad (Z.158)$$

Έτσι,

$$\xi'P_Z\xi=(P_Z\xi)'P_Z\xi=\left[\sqrt{T}\,\bar{P}_{Z_1}Z_2(Z_2'\bar{P}_{Z_1}Z_2)^{-1}\delta_2\right]'\sqrt{T}\,\bar{P}_{Z_1}Z_2(Z_2'\bar{P}_{Z_1}Z_2)^{-1}\delta_2=$$

$$=T\delta_2'(Z_2'\bar{P}_{Z_1}Z_2)^{-1}Z_2'\bar{P}_{Z_1}Z_2(Z_2'\bar{P}_{Z_1}Z_2)^{-1}\delta_2=\delta_2'(Z_2'\bar{P}_{Z_1}Z_2/T)^{-1}\delta_2=$$

$$=\delta_2'\Delta^{-1}\delta_2. \qquad (Z.159)$$

(ii) Επίσης,

$$F_Z'\xi=X'P_Z\xi=\sqrt{T}\,X'\bar{P}_{Z_1}Z_2(Z_2'\bar{P}_{Z_1}Z_2)^{-1}\delta_2 \qquad (Z.160)$$

και συνεπώς,

$$\xi'P_{F_Z}\xi=\xi'F_Z(F_Z'F_Z)^{-1}F_Z'\xi=$$

$$=\left[\sqrt{T}\,X'\bar{P}_{Z_1}Z_2(Z_2'\bar{P}_{Z_1}Z_2)^{-1}\delta_2\right]'(X'P_ZX)^{-1}\sqrt{T}\,X'\bar{P}_{Z_1}Z_2(Z_2'\bar{P}_{Z_1}Z_2)^{-1}\delta_2=$$

$$=T\delta_2'(Z_2'\bar{P}_{Z_1}Z_2)^{-1}Z_2'\bar{P}_{Z_1}X(X'P_ZX)^{-1}X'\bar{P}_{Z_1}Z_2(Z_2'\bar{P}_{Z_1}Z_2)^{-1}\delta_2=$$

$$=\delta_2'(Z_2'\bar{P}_{Z_1}Z_2/T)^{-1}(Z_2'\bar{P}_{Z_1}X/T)(X'P_ZX/T)^{-1}(X'\bar{P}_{Z_1}Z_2/T)(Z_2'\bar{P}_{Z_1}Z_2)^{-1}\delta_2=$$

$$=\delta_2'\Delta^{-1}B_+G_+^{-1}B_+'\Delta^{-1}\delta_2. \qquad (Z.161)$$

Από τις (6.43), (6.47), (Z.63), (Z.159) και (Z.161) και το Λήμμα Z.8 έχουμε

$$\gamma=\xi'N\xi=\xi'(P_Z-P_{F_Z})\xi=\delta_2'\left[\Delta^{-1}-\Delta^{-1}B_+G_+^{-1}B_+'\Delta^{-1}\right]\delta_2=$$

$$=\delta_2'\left[\Delta^{-1}-\Delta^{-1}B_+(A+B_+'\Delta^{-1}B_+)^{-1}B_+'\Delta^{-1}\right]\delta_2=$$

$$=\delta_2'\left[\Delta^{-1}-\Delta^{-1}B_+\left[(A^{-1})^{-1}+B_+'\Delta^{-1}B_+\right]^{-1}B_+'\Delta^{-1}\right]\delta_2=$$

$$=\delta_2'(\Delta+B_+A^{-1}B_+')^{-1}\delta_2=\delta_2'\Lambda^{-1}\delta_2. \qquad (Z.162)$$

Εφόσον η μήτρα Λ είναι θετικά ορισμένη, το ίδιο ισχύει και για την μήτρα Λ^{-1}. Συνεπώς, από την προηγούμενη ανάλυση προκύπτει ότι

$$\gamma=\delta_2'\Lambda^{-1}\delta_2 > 0 \quad \forall\ \delta_2, \tag{Z.163}$$

δηλαδή, ο προτεινόμενος έλεγχος της εξωγένειας των υπερ-ταυτοποιητικών βοηθητικών μεταβλητών είναι συνεπής για την νέα ελεγχόμενη υπόθεση.

QED

ΛΗΜΜΑ Ζ.10: Για κάθε τετραγωνική μήτρα Α εισάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$<A>=A+A'. \tag{Z.164}$$

Ορίζουμε τις ποσότητες

$$F_o=P_{Z_1}X_o,\ A_o=F_o'F_o/T,\ A_1=<F_o'V/\sqrt{T}>,\ A_2=V'P_{Z_1}V,$$

$$G_o=A_o^{-1}=(F_o'F_o/T)^{-1},\ X_*=\bar{P}_{Z_1}X_o,\ Z_*=\bar{P}_{Z_1}Z_o,$$

$$B_o^+=R_2+Z_*'X_*/T,\ B_1^+=(Z_*'V+W'X_*)/\sqrt{T}+\sqrt{T}(W'V/T-R_2),$$

$$B_2^+=W'P_{Z_1}V,\ \Delta_o=Q_2+Z_*'Z_*/T,\ \Delta_1=<Z_*'W/\sqrt{T}>+\sqrt{T}(W'W/T-Q_2), \tag{Z.165}$$

$$\Delta_2=W'P_{Z_1}W,\ K=B_o^+G_o,\ \Lambda_o=\Delta_o+B_oA_o^{-1}B_o^{+\prime},\ \Lambda_1=\Delta_1+KB_1^{+\prime}+B_1^+K'-KA_1K',$$

$$\Lambda_2=\Delta_2+KB_2^{+\prime}+B_2^+K'+KA_2K'-B_1^+G_oB_1^{+\prime}+KA_1G_oB_1^{+\prime}+B_1^+G_oA_1K'-KA_1G_oA_1K',$$

$$\delta_*=\Lambda_o^{-1}\delta_2.$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\gamma=\gamma_o-\tau\gamma_1+\tau^2\gamma_2+\omega(\tau^3), \tag{Z.166}$$

όπου

$$\gamma_o=\delta_2'(\Delta_o+B_oA_o^{-1}B_o^{+\prime})^{-1}\delta_2,\ \gamma_1=\delta_*'\Lambda_1\delta_*,\ \gamma_2=\delta_*'(\Lambda_1\Lambda_o^{-1}\Lambda_1+\Lambda_2)\delta_*. \tag{Z.167}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Από τις (6.40), (6.43) και (Ζ.165) έχουμε

$$A=X'P_{Z_1}X/T=(X_o+V)'P_{Z_1}(X_o+V)/T=(X_o'P_{Z_1}X_o+X_o'P_{Z_1}V+V'P_{Z_1}X_o+V'P_{Z_1}V)/T=$$

$$=F_o'F_o/T+\tau<F_o'V/\sqrt{T}>+\tau^2V'P_{Z_1}V=A_o+\tau A_1+\tau^2A_2, \tag{Z.168}$$

έτσι ώστε (βλ. Λήμμα Α.1 (Ι))

$$A^{-1}=[A_o+\tau(A_1+\tau A_2)]^{-1}=$$

$$=A_o^{-1}-\tau A_o^{-1}(A_1+\tau A_2)A_o^{-1}+\tau^2 A_o^{-1}(A_1+\tau A_2)A_o^{-1}(A_1+\tau A_2)A_o^{-1}+\omega(\tau^3)=$$

$$=A_o^{-1}-\tau A_o^{-1}A_1A_o^{-1}-\tau^2 A_o^{-1}A_2A_o^{-1}+\tau^2 A_o^{-1}A_1A_o^{-1}A_1A_o^{-1}+\omega(\tau^3)=$$

$$=A_o^{-1}-\tau A_o^{-1}A_1A_o^{-1}+\tau^2(A_o^{-1}A_1A_o^{-1}A_1A_o^{-1}-A_o^{-1}A_2A_o^{-1})+\omega(\tau^3)=$$

$$=G_o-\tau G_oA_1G_o+\tau^2 G_o(A_1G_oA_1-A_2)G_o+\omega(\tau^3)\,. \qquad (Z.169)$$

Επίσης,

$$B_+=Z_2'\bar{P}_{Z_1}X/T=(Z_o+W)'\bar{P}_{Z_1}(X_o+V)/T=(Z_o'\bar{P}_{Z_1}X_o+Z_o'\bar{P}_{Z_1}V+W'\bar{P}_{Z_1}X_o+W'\bar{P}_{Z_1}V)/T=$$

$$=Z_*'X_*/T+\tau(Z_*'V+W'X_*)/\sqrt{T}+W'\bar{P}_{Z_1}V/T. \qquad (Z.170)$$

Εφόσον

$$W'\bar{P}_{Z_1}V/T=W'(I-P_{Z_1})V/T=W'V/T-W'P_{Z_1}V/T=$$

$$=R_2+\tau\sqrt{T}(W'V/T)-\tau\sqrt{T}\,R_2-\tau^2W'P_{Z_1}V=R_2+\tau\sqrt{T}(W'V/T-R_2)-\tau^2W'P_{Z_1}V, \qquad (Z.171)$$

βρίσκουμε

$$B_+=Z_*'X_*/T+\tau(Z_*'V+W'X_*)/\sqrt{T}+R_2+\tau\sqrt{T}(W'V/T-R_2)-\tau^2W'P_{Z_1}V=$$

$$=R_2+Z_*'X_*/T+\tau\left[(Z_*'V+W'X_*)/\sqrt{T}+\sqrt{T}(W'V/T-R_2)\right]-\tau^2W'P_{Z_1}V=$$

$$=B_o^+\tau B_1^+-\tau^2B_2^+. \qquad (Z.172)$$

Όμοια,

$$\Delta=Z_2'\bar{P}_{Z_1}Z_2/T=(Z_o+W)'\bar{P}_{Z_1}(Z_o+W)/T=(Z_o'\bar{P}_{Z_1}Z_o+Z_o'\bar{P}_{Z_1}W+W'\bar{P}_{Z_1}Z_o+W'\bar{P}_{Z_1}W)/T=$$

$$=Z_*'Z_*/T+\tau(Z_*'W+W'Z_*)/\sqrt{T}+W'\bar{P}_{Z_1}W/T. \qquad (Z.173)$$

Επιπλέον, εφόσον

$$W'\bar{P}_{Z_1}W/T=W'(I-P_{Z_1})W/T=W'W/T-W'P_{Z_1}W/T=$$

$$=Q_2+\tau\sqrt{T}(W'W/T)-\tau\sqrt{T}\,Q_2-\tau^2W'P_{Z_1}W=Q_2+\tau\sqrt{T}(W'W/T-Q_2)-\tau^2W'P_{Z_1}W, \qquad (Z.174)$$

βρίσκουμε

$$\Delta=Z_*'Z_*/T+\tau\langle Z_*'W/\sqrt{T}\rangle+Q_2+\tau\sqrt{T}(W'W/T-Q_2)-\tau^2W'P_{Z_1}W=$$

$$=Q_2+Z_*'Z_*/T+\tau\left[\langle Z_*'W/\sqrt{T}\rangle+\sqrt{T}(W'W/T-Q_2)\right]-\tau^2W'P_{Z_1}W=$$

$$=\Delta_o+\tau\Delta_1-\tau^2\Delta_2. \qquad (Z.175)$$

Αντικαθιστώντας τις (Z.169), (Z.172) και (Z.175) στην (6.43) βρίσκουμε

$$\Lambda=\Delta+B_+A^{-1}B_+'=\Delta_o+\tau\Delta_1-\tau^2\Delta_2+(B_o^++\tau B_1^+-\tau^2B_2^+)\cdot$$

$$\cdot\left[G_o-\tau G_oA_1G_o+\tau^2G_o(A_1G_oA_1-A_2)G_o+\omega(\tau^3)\right](B_o^++\tau B_1^+-\tau^2B_2^+)'=$$

$$=\Delta_o+\tau\Delta_1-\tau^2\Delta_2+B_o^+G_oB_o^+{}'+\tau B_o^+G_oB_1^+{}'-\tau^2B_o^+G_oB_2^+{}'-\tau B_o^+G_oA_1G_oB_o^+{}'-$$

$$-\tau^2B_o^+G_oA_1G_oB_1^+{}'+\tau^2B_o^+G_o(A_1G_oA_1-A_2)G_oB_o^+{}'+\tau B_1^+G_oB_o^+{}'+\tau^2B_1^+G_oB_1^+{}'-$$

$$-\tau^2B_1^+G_oA_1G_oB_o^+{}'-\tau^2B_2^+G_oB_o^+{}'+\omega(\tau^3)=$$

$$=\Delta_o+KB_o^+{}'+\tau(\Delta_1+KB_1^+{}'+B_1^+K'-KA_1K')-\tau^2(\Delta_2+KB_2^+{}'+B_2^+K'+KA_2K'-$$

$$-KA_1G_oA_1K'+KA_1G_oB_1^+{}'-B_1^+G_oB_1^+{}'+B_1^+G_oA_1K')+\omega(\tau^3)=$$

$$=\Lambda_o+\tau\Lambda_1-\tau^2\Lambda_2+\omega(\tau^3), \qquad (Z.176)$$

όπου

$$\Lambda_o=\Delta_o+KB_o^+{}'=\Delta_o+B_o^+G_oB_o^+{}', \quad \Lambda_1=\Delta_1+KB_1^+{}'+B_1^+K'-KA_1K',$$

$$\Lambda_2=\Delta_2+KB_2^+{}'+B_2^+K'+KA_2K'-B_1^+G_oB_1^+{}'+KA_1G_oB_1^+{}'+B_1^+G_oA_1K'-KA_1G_oA_1K'. \qquad (Z.177)$$

Από την (Z.176) παίρνουμε (βλ. Λήμμα A.1 (I))

$$\Lambda^{-1}=\left[\Lambda_o+\tau(\Lambda_1-\tau\Lambda_2)+\omega(\tau^3)\right]^{-1}=$$

$$=\Lambda_o^{-1}-\tau\Lambda_o^{-1}(\Lambda_1-\tau\Lambda_2)\Lambda_o^{-1}+\tau^2\Lambda_o^{-1}(\Lambda_1-\tau\Lambda_2)\Lambda_o^{-1}(\Lambda_1-\tau\Lambda_2)\Lambda_o^{-1}+\omega(\tau^3)=$$

$$=\Lambda_o^{-1}-\tau\Lambda_o^{-1}\Lambda_1\Lambda_o^{-1}+\tau^2\Lambda_o^{-1}\Lambda_2\Lambda_o^{-1}+\tau^2\Lambda_o^{-1}\Lambda_1\Lambda_o^{-1}\Lambda_1\Lambda_o^{-1}+\omega(\tau^3)=$$

$$=\Lambda_o^{-1}-\tau\Lambda_o^{-1}\Lambda_1\Lambda_o^{-1}+\tau^2\Lambda_o^{-1}(\Lambda_1\Lambda_o^{-1}\Lambda_1+\Lambda_2)\Lambda_o^{-1}+\omega(\tau^3). \qquad (Z.178)$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Z.9 και την (Z.178) βρίσκουμε

$$\gamma=\delta_2'\Lambda^{-1}\delta_2=\delta_2'\left[\Lambda_o^{-1}-\tau\Lambda_o^{-1}\Lambda_1\Lambda_o^{-1}+\tau^2\Lambda_o^{-1}(\Lambda_1\Lambda_o^{-1}\Lambda_1+\Lambda_2)\Lambda_o^{-1}+\omega(\tau^3)\right]\delta_2=$$

$$=\delta_2'\Lambda_o^{-1}\delta_2-\tau\delta_2'\Lambda_o^{-1}\Lambda_1\Lambda_o^{-1}\delta_2+\tau^2\delta_2'\Lambda_o^{-1}(\Lambda_1\Lambda_o^{-1}\Lambda_1+\Lambda_2)\Lambda_o^{-1}\delta_2+\omega(\tau^3)=$$

$$=\gamma_o-\tau\gamma_1+\tau^2\gamma_2+\omega(\tau^3), \qquad (Z.179)$$

όπου

$$\gamma_o=\delta_2'\Lambda_o^{-1}\delta_2=\delta_2'(\Lambda_o+B_o^+G_oB_o^{+\prime})^{-1}\delta_2=\delta_2'(\Lambda_o+B_o^+A_o^{-1}B_o^{+\prime})^{-1}\delta_2,$$

$$\gamma_1=\delta_2'\Lambda_o^{-1}\Lambda_1\Lambda_o^{-1}\delta_2=\delta_*'\Lambda_1\delta_*, \qquad (Z.180)$$

$$\gamma_2=\delta_2'\Lambda_o^{-1}(\Lambda_1\Lambda_o^{-1}\Lambda_1+\Lambda_2)\Lambda_o^{-1}\delta_2=\delta_*'(\Lambda_1\Lambda_o^{-1}\Lambda_1+\Lambda_2)\delta_*.$$

QED

ΛΗΜΜΑ Ζ.11: Εισάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό:

$$x \overset{o}{=} y \text{ αν και μόνον αν } E(x)=E(y). \qquad (Z.181)$$

Ορίζουμε την μήτρα

$$V_1=V-WQ_2^{-1}R_2, \qquad (Z.182)$$

όπου οι μήτρες R_2, Q_2, όπως και η C_2 έχουν ορισθεί στην (6.42). Τότε, οι γραμμές της μήτρας V_1 είναι ανεξάρτητα $N(0,C_1)$ διανύσματα και ανεξάρτητα από την μήτρα W, όπου

$$C_1=C_2-R_2'Q_2^{-1}R_2=C_2-C_3, \quad C_3=R_2'Q_2^{-1}R_2. \qquad (Z.183)$$

Σε πιο συμπαγή συμβολισμό γράφουμε

$$V_1=V-WK_2, \quad K_2=Q_2^{-1}R_2, \quad \mathrm{vec}V_1'\sim N(0,I\otimes C_1),$$
$$C_1=C_2-C_3, \quad C_3=R_2'K_2=K_2'R_2=K_2'Q_2K_2. \qquad (Z.184)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Εφόσον οι γραμμές της μήτρας $(V:W)$ είναι ανεξάρτητα $N(0,\Sigma_2)$ διανύσματα, όπου η μήτρα Σ_2 έχει ορισθεί στην (6.42), έχουμε

$$W'V_1=W'(V-WQ_2^{-1}R_2)=W'V-W'WQ_2^{-1}R_2\overset{o}{=}TR_2-TQ_2Q_2^{-1}R_2=TR_2-TR_2=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow E(W'V_1/T)=0 \qquad (Z.185)$$

και

$$V_1'V_1=(V-WQ_2^{-1}R_2)'(V-WQ_2^{-1}R_2)=V'V-V'WQ_2^{-1}R_2-R_2'Q_2^{-1}W'V+R_2'Q_2^{-1}W'WQ_2^{-1}R_2\overset{o}{=}$$
$$\overset{o}{=}TC_2-TR_2'Q_2^{-1}R_2-TR_2'Q_2^{-1}R_2+TR_2'Q_2^{-1}Q_2Q_2^{-1}R_2=T(C_2-R_2'Q_2^{-1}R_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow E(V_1'V_1/T)=C_2-R_2'Q_2^{-1}R_2=C_2-C_3=C_1, \qquad (Z.186)$$

όπου

$$C_1=C_2-C_3, \quad C_3=R_2'Q_2^{-1}R_2. \qquad (Z.187)$$

Από τις (Z.185) και (Z.186) έπεται ότι οι γραμμές της μήτρας V_1 είναι ανεξάρτητα $N(0,C_1)$ διανύσματα και ανεξάρτητα από την μήτρα

W. Επιπλέον,

$$V_1=V-WK_2, \quad K_2=Q_2^{-1}R_2. \tag{Z.188}$$

Έστω v_{1t}' και v_{1s}' οι t- και s-γραμμές, αντίστοιχα, της μήτρας V_1, οπότε v_{1t} και v_{1s} είναι οι t- και s-στήλες, αντίστοιχα, της μήτρας V_1'. Εφόσον οι γραμμές της μήτρας V_1 είναι ανεξάρτητα $N(0,C_1)$ διανύσματα, έχουμε

$$E(v_{1t}v_{1s}')=\delta_{ts}C_1, \tag{Z.189}$$

όπου δ_{ts} είναι το δ του Kronecker. Επίσης,

$$V_1'=[v_{11},\ldots,v_{1T}] \Rightarrow vec(V_1')=\begin{bmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{1T} \end{bmatrix} \tag{Z.190}$$

και συνεπώς

$$E(vec(V_1'))=E\left[\begin{bmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{1T} \end{bmatrix}\right]=\left[\left[E(v_{1t})\right]_{t=1,\ldots,T}\right]=0, \tag{Z.191}$$

όπου 0 είναι το Tn×1 μηδενικό διάνυσμα. Επιπλέον,

$$Var(vec(V_1'))=E\left[vec(V_1')(vec(V_1'))'\right]=$$

$$=E\left[\begin{bmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{1T} \end{bmatrix}[v_{11}',\ldots,v_{1T}']\right]=\begin{bmatrix} E(v_{11}v_{11}')\ldots E(v_{11}v_{1T}') \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ E(v_{1T}v_{11}')\ldots E(v_{1T}v_{1T}') \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} C_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_1 \end{bmatrix}=I\otimes C_1. \tag{Z.192}$$

Οι (Z.191) και (Z.192) συνεπάγονται ότι

$$vecV_1'\sim N(0,I\otimes C_1). \tag{Z.193}$$

Τέλος, από τις (Z.187) και (Z.188) παίρνουμε

$$C_3=R_2'Q_2^{-1}R_2=R_2'K_2=K_2'R_2=R_2'Q_2^{-1}Q_2Q_2^{-1}R_2=K_2'Q_2K_2. \tag{Z.194}$$

QED

ΛΗΜΜΑ Z.12: Ορίζουμε τις μήτρες

$$C_*=\sqrt{T}(V'V/T-C_2), \quad Q_*=\sqrt{T}(W'W/T-Q_2), \quad R_*=\sqrt{T}(W'V/T-R_2), \tag{Z.195}$$

όπου οι μήτρες C_2, R_2 και Q_2 έχουν οριστεί στην (6.42). Τότε, για κάθε μήτρα Ω με τις κατάλληλες διαστάσεις μπορούμε να δείξουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$
\begin{aligned}
&C_*\Omega C_* \overset{o}{=} (\mathrm{tr}C_2\Omega)C_2+C_2\Omega C_2, \quad Q_*\Omega Q_* \overset{o}{=} (\mathrm{tr}Q_2\Omega)Q_2+Q_2\Omega Q_2,\\
&R_*\Omega R_* \overset{o}{=} Q_2\Omega' C_1+(\mathrm{tr}R_2\Omega)R_2+R_2\Omega R_2, \quad R_*'\Omega R_* \overset{o}{=} (\mathrm{tr}Q_2\Omega)C_2+R_2'\Omega R_2,\\
&R_*'\Omega R_*' \overset{o}{=} C_1\Omega' Q_2+(\mathrm{tr}R_2'\Omega)R_2'+R_2'\Omega R_2', \quad R_*\Omega R_*' \overset{o}{=} (\mathrm{tr}\Omega C_2)Q_2+R_2\Omega R_2',\\
&Q_*\Omega R_* \overset{o}{=} (\mathrm{tr}Q_2\Omega)R_2+Q_2\Omega R_2, \quad R_*\Omega Q_* \overset{o}{=} (\mathrm{tr}R_2\Omega)Q_2+R_2\Omega Q_2, \qquad (Z.196)\\
&Q_*\Omega R_*' \overset{o}{=} (\mathrm{tr}R_2'\Omega)Q_2+Q_2\Omega R_2', \quad R_*'\Omega Q_* \overset{o}{=} (\mathrm{tr}Q_2\Omega)R_2'+R_2'\Omega Q_2,\\
&W'\Omega V \overset{o}{=} (\mathrm{tr}\Omega)R_2, \quad W\Omega V' \overset{o}{=} (\mathrm{tr}\Omega R_2')I_T, \quad W\Omega V \overset{o}{=} \Omega' R_2, \quad W'\Omega V' \overset{o}{=} R_2\Omega',\\
&V'\Omega W \overset{o}{=} (\mathrm{tr}\Omega)R_2', \quad V\Omega W' \overset{o}{=} (\mathrm{tr}R_2\Omega)I_T, \quad V\Omega W \overset{o}{=} \Omega' R_2', \quad V'\Omega W' \overset{o}{=} R_2'\Omega',
\end{aligned}
$$

όπου ο συμβολισμός $x \overset{o}{=} y$ σημαίνει ότι $E(x)=E(y)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό

$$x \overset{o}{=} y \text{ αν και μόνον αν } E(x)=E(y), \qquad (Z.197)$$

το Λήμμα Z.11 και το Λήμμα A.9 βρίσκουμε

$$
\begin{aligned}
C_*\Omega C_* &= T(V'V/T-C_2)\Omega(V'V/T-C_2)=\tau^2(V'V-TC_2)\Omega(V'V-TC_2)=\\
&=\tau^2(V'V\Omega V'V-TV'V\Omega C_2-TC_2\Omega V'V+T^2C_2\Omega C_2) \overset{o}{=}\\
&\overset{o}{=} \tau^2\left[T(\mathrm{tr}C_2\Omega)C_2+T(T+1)C_2\Omega C_2-T^2C_2\Omega C_2-T^2C_2\Omega C_2+T^2C_2\Omega C_2\right]=\\
&= \tau^2\left[T(\mathrm{tr}C_2\Omega)C_2+T^2C_2\Omega C_2+TC_2\Omega C_2-T^2C_2\Omega C_2\right]=\\
&=(\mathrm{tr}C_2\Omega)C_2+C_2\Omega C_2. \qquad (Z.198)
\end{aligned}
$$

Όμοια,

$$Q_*\Omega Q_* \overset{o}{=} (\mathrm{tr}Q_2\Omega)Q_2+Q_2\Omega Q_2. \qquad (Z.199)$$

Από το Λήμμα Z.11 έπεται ότι

$$E(V)=E(V_1+WK_2)=E(WK_2) \Rightarrow V \overset{o}{=} WK_2. \qquad (Z.200)$$

Χρησιμοποιώντας την (Z.200) βρίσκουμε

$$W'\Omega V \overset{o}{=} W'\Omega WK_2 \overset{o}{=} (\mathrm{tr}\Omega)Q_2K_2=(\mathrm{tr}\Omega)Q_2Q_2^{-1}R_2=(\mathrm{tr}\Omega)R_2, \qquad (Z.201)$$

$$W\Omega V' \overset{o}{=} W\Omega(WK_2)' = W\Omega K_2' W' \overset{o}{=} (tr\Omega K_2' Q_2) I_T = (tr\Omega R_2' Q_2^{-1} Q_2) I_T =$$

$$= (tr\Omega R_2') I_T, \qquad (Z.202)$$

$$W\Omega V \overset{o}{=} W\Omega W K_2 \overset{o}{=} \Omega' Q_2 K_2 = \Omega' Q_2 Q_2^{-1} R_2 = \Omega' R_2, \qquad (Z.203)$$

$$W'\Omega V' \overset{o}{=} W'\Omega(WK_2)' = W'\Omega K_2' W' = (WK_2\Omega' W)' \overset{o}{=} \left[(K_2\Omega')' Q_2\right]' = Q_2 K_2 \Omega' =$$

$$= Q_2 Q_2^{-1} R_2 \Omega' = R_2 \Omega' \qquad (Z.204)$$

και παίρνοντας τις ανάστροφες των (Z.201), (Z.202), (Z.203) και (Z.204) βρίσκουμε

$$V'\Omega W \overset{o}{=} (tr\Omega) R_2', \quad V\Omega W' \overset{o}{=} (tr R_2\Omega) I_T, \quad V'\Omega W' \overset{o}{=} R_2'\Omega', \quad V\Omega W \overset{o}{=} \Omega' R_2'. \qquad (Z.205)$$

Ακόμα, έχουμε ότι

$$W'W\Omega W'V \overset{o}{=} W'W\Omega W'WK_2 \overset{o}{=} \left[T(tr Q_2\Omega) Q_2 + T(T+1) Q_2\Omega Q_2\right] Q_2^{-1} R_2 =$$

$$= T(tr Q_2\Omega) Q_2 Q_2^{-1} R_2 + T(T+1) Q_2\Omega Q_2 Q_2^{-1} R_2 = T(tr Q_2\Omega) R_2 + T(T+1) Q_2\Omega R_2, \qquad (Z.206)$$

$$W'W\Omega V'W \overset{o}{=} W'W\Omega(WK_2)'W = W'W\Omega K_2' W'W \overset{o}{=} T(tr Q_2\Omega K_2') Q_2 + T(T+1) Q_2\Omega K_2' Q_2 =$$

$$= T(tr Q_2\Omega R_2' Q_2^{-1}) Q_2 + T(T+1) Q_2\Omega R_2' Q_2^{-1} Q_2 = T(tr R_2' Q_2^{-1} Q_2\Omega) Q_2 + T(T+1) Q_2\Omega R_2' =$$

$$= T(tr R_2'\Omega) Q_2 + T(T+1) Q_2\Omega R_2', \qquad (Z.207)$$

$$W'V\Omega W'V = W'(V_1 + WK_2)\Omega W'(V_1 + WK_2) = W'V_1\Omega W'V_1 + W'WK_2\Omega W'V_1 + W'V_1\Omega W'WK_2 +$$

$$+ W'WK_2\Omega W'WK_2 \overset{o}{=} W'V_1\Omega W'V_1 + W'WK_2\Omega W'WK_2 \overset{o}{=}$$

$$\overset{o}{=} Q_2(V_1\Omega)' V_1 + \left[T(tr Q_2 K_2\Omega) Q_2 + T(T+1) Q_2 K_2\Omega Q_2\right] K_2 =$$

$$= Q_2\Omega' V_1' V_1 + T(tr Q_2 Q_2^{-1} R_2\Omega) Q_2 Q_2^{-1} R_2 + T(T+1) Q_2 Q_2^{-1} R_2\Omega Q_2 Q_2^{-1} R_2 \overset{o}{=}$$

$$\overset{o}{=} TQ_2\Omega' C_1 + T(tr R_2\Omega) R_2 + T(T+1) R_2\Omega R_2 =$$

$$= T\left[Q_2\Omega' C_1 + (tr R_2\Omega) R_2 + (T+1) R_2\Omega R_2\right], \qquad (Z.208)$$

$$V'W\Omega V'W = (V_1 + WK_2)'W\Omega(V_1 + WK_2)'W = V_1'W\Omega V_1'W + V_1'W\Omega K_2' W'W + K_2' W'W\Omega V_1'W +$$

$$+ K_2' W'W\Omega K_2' W'W \overset{o}{=} V_1'W\Omega V_1'W + K_2' W'W\Omega K_2' W'W \overset{o}{=}$$

$$\overset{o}{=} C_1(W\Omega)'W+K_2'\left[T(trQ_2\Omega K_2')Q_2+T(T+1)Q_2\Omega K_2'Q_2\right]=$$

$$=C_1\Omega'W'W+T(trQ_2\Omega R_2'Q_2^{-1})R_2'Q_2^{-1}Q_2+T(T+1)R_2'Q_2^{-1}Q_2\Omega R_2'Q_2^{-1}Q_2\overset{o}{=}$$

$$\overset{o}{=} TC_1\Omega'Q_2+T(trR_2'Q_2^{-1}Q_2\Omega)R_2'+T(T+1)R_2'\Omega R_2'=$$

$$=T\left[C_1\Omega'Q_2+(trR_2'\Omega)R_2'+(T+1)R_2'\Omega R_2'\right], \qquad (Z.209)$$

$$W'V\Omega V'W=W'(V_1+WK_2)\Omega(V_1+WK_2)'W=W'V_1\Omega V_1'W+W'WK_2\Omega V_1'W+W'V_1\Omega K_2'W'W+$$

$$+W'WK_2\Omega K_2'W'W\overset{o}{=}W'V_1\Omega V_1'W+W'WK_2\Omega K_2'W'W\overset{o}{=}$$

$$\overset{o}{=} W'(trC_1\Omega)I_TW+T(trQ_2K_2\Omega K_2')Q_2+T(T+1)Q_2K_2\Omega K_2'Q_2=$$

$$=(tr\Omega C_1)W'W+T(trQ_2Q_2^{-1}R_2\Omega R_2'Q_2^{-1})Q_2+T(T+1)Q_2Q_2^{-1}R_2\Omega R_2'Q_2^{-1}Q_2=$$

$$=T(tr\Omega C_1)Q_2+T(tr\Omega R_2'Q_2^{-1}R_2)Q_2+T(T+1)R_2\Omega R_2'=$$

$$=T(tr\Omega(C_2-C_3))Q_2+T(tr\Omega C_3)Q_2+T(T+1)R_2\Omega R_2'=$$

$$=T(tr\Omega C_2)Q_2+T(T+1)R_2\Omega R_2', \qquad (Z.210)$$

$$V'W\Omega W'V=(V_1+WK_2)'W\Omega W'(V_1+WK_2)=V_1'W\Omega W'V_1+V_1'W\Omega W'WK_2+K_2'W'W\Omega W'V_1+$$

$$+K_2'W'W\Omega W'WK_2\overset{o}{=}V_1'W\Omega W'V_1+K_2'W'W\Omega W'WK_2\overset{o}{=}$$

$$\overset{o}{=} V_1'(trQ_2\Omega)I_TV_1+K_2'\left[T(trQ_2\Omega)Q_2+T(T+1)Q_2\Omega Q_2\right]K_2=$$

$$=(trQ_2\Omega)V_1'V_1+T(trQ_2\Omega)R_2'Q_2^{-1}Q_2Q_2^{-1}R_2+T(T+1)R_2'Q_2^{-1}Q_2\Omega Q_2Q_2^{-1}R_2\overset{o}{=}$$

$$\overset{o}{=} T(trQ_2\Omega)C_1+T(trQ_2\Omega)C_3+T(T+1)R_2'\Omega R_2=$$

$$=T(trQ_2\Omega)(C_1+C_3)+T(T+1)R_2'\Omega R_2=T(trQ_2\Omega)C_2+T(T+1)R_2'\Omega R_2. \qquad (Z.211)$$

Χρησιμοποιώντας τις (Z.206), (Z.207), (Z.208), (Z.209), (Z.210) και (Z.211) έχουμε

$$Q_*\Omega R_*=T(W'W/T-Q_2)\Omega(W'V/T-R_2)=\tau^2(W'W-TQ_2)\Omega(W'V-TR_2)=$$

$$=\tau^2(W'W\Omega W'V-TW'W\Omega R_2-TQ_2\Omega W'V+T^2Q_2\Omega R_2)\overset{o}{=}$$

$$\overset{o}{=} \tau^2\left[T(trQ_2\Omega)R_2+T(T+1)Q_2\Omega R_2-T^2Q_2\Omega R_2-T^2Q_2\Omega R_2+T^2Q_2\Omega R_2\right]=$$

$$=\tau^2\left[T(tr\Omega Q_2)R_2+T^2\Omega Q_2R_2+T\Omega Q_2R_2-T^2\Omega Q_2R_2\right]=(tr\Omega Q_2)R_2+\Omega Q_2R_2, \qquad (Z.212)$$

$$Q_*\Omega R_*'=T(W'W/T-Q_2)\Omega(W'V/T-R_2)'=\tau^2(W'W-TQ_2)\Omega(V'W-TR_2')=$$

$$=\tau^2(W'W\Omega V'W-TW'W\Omega R_2'-TQ_2\Omega V'W+T^2Q_2\Omega R_2')=$$

$$\overset{o}{=}\tau^2\left[T(tr\Omega R_2')Q_2+T(T+1)Q_2\Omega R_2'-T^2Q_2\Omega R_2'-T^2Q_2\Omega R_2'+T^2Q_2\Omega R_2'\right]=$$

$$=\tau^2\left[T(tr\Omega R_2')Q_2+T^2Q_2\Omega R_2'+TQ_2\Omega R_2'-T^2Q_2\Omega R_2'\right]=(tr\Omega R_2')Q_2+\Omega Q_2R_2'. \qquad (Z.213)$$

Εργαζόμενοι όπως στις (Z.212) και (Z.213) μπορούμε να δείξουμε ότι

$$R_*\Omega Q_*\overset{o}{=}(tr\Omega R_2)Q_2+\Omega R_2Q_2, \qquad R_*'\Omega Q_*\overset{o}{=}(tr\Omega Q_2)R_2'+\Omega R_2'Q_2. \qquad (Z.214)$$

Ακόμα,

$$R_*\Omega R_*=T(W'V/T-R_2)\Omega(W'V/T-R_2)=\tau^2(W'V-TR_2)\Omega(W'V-TR_2)=$$

$$=\tau^2(W'V\Omega W'V-TW'V\Omega R_2-TR_2\Omega W'V+T^2R_2\Omega R_2)\overset{o}{=}$$

$$\overset{o}{=}\tau^2\left[TQ_2\Omega'C_1+T(tr\Omega R_2)R_2+T(T+1)R_2\Omega R_2-T^2R_2\Omega R_2-T^2R_2\Omega R_2+T^2R_2\Omega R_2\right]=$$

$$=\tau^2\left[TQ_2\Omega'C_1+T(tr\Omega R_2)R_2+T^2R_2\Omega R_2+TR_2\Omega R_2-T^2R_2\Omega R_2\right]=$$

$$=Q_2\Omega'C_1+(tr\Omega R_2)R_2+\Omega R_2R_2, \qquad (Z.215)$$

$$R_*'\Omega R_*'=T(W'V/T-R_2)'\Omega(W'V/T-R_2)'=\tau^2(V'W-TR_2')\Omega(V'W-TR_2')=$$

$$=\tau^2(V'W\Omega V'W-TV'W\Omega R_2'-TR_2'\Omega V'W+T^2R_2'\Omega R_2')\overset{o}{=}$$

$$\overset{o}{=}\tau^2\left[TC_1\Omega'Q_2+T(tr\Omega R_2')R_2'+T(T+1)R_2'\Omega R_2'-T^2R_2'\Omega R_2'-T^2R_2'\Omega R_2'+T^2R_2'\Omega R_2'\right]=$$

$$=\tau^2\left[TC_1\Omega'Q_2+T(tr\Omega R_2')R_2'+T^2R_2'\Omega R_2'+TR_2'\Omega R_2'-T^2R_2'\Omega R_2'\right]=$$

$$=C_1\Omega'Q_2+(tr\Omega R_2')R_2'+\Omega R_2'R_2', \qquad (Z.216)$$

$$R_*\Omega R_*'=T(W'V/T-R_2)\Omega(W'V/T-R_2)'=\tau^2(W'V-TR_2)\Omega(V'W-TR_2')=$$

$$=\tau^2(W'V\Omega V'W-TW'V\Omega R_2'-TR_2\Omega V'W+T^2R_2\Omega R_2')\overset{o}{=}$$

$$\overset{o}{=}\tau^2\left[T(tr\Omega C_2)Q_2+T(T+1)R_2\Omega R_2'-T^2R_2\Omega R_2'-T^2R_2\Omega R_2'+T^2R_2\Omega R_2'\right]=$$

$$=\tau^2\left[T(tr\Omega C_2)Q_2+T^2R_2\Omega R_2'+TR_2\Omega R_2'-T^2R_2\Omega R_2'\right]=$$

$$=(\mathrm{tr}\Omega C_2)Q_2+R_2\Omega R_2', \qquad (Z.217)$$

$$R_*'\Omega R_* = T(W'V/T-R_2)'\Omega(W'V/T-R_2) = \tau^2(V'W-TR_2')\Omega(W'V-TR_2) =$$

$$=\tau^2(V'W\Omega W'V-TV'W\Omega R_2-TR_2'\Omega W'V+T^2R_2'\Omega R_2) =$$

$$\overset{o}{=} \tau^2\left[T(\mathrm{tr}Q_2\Omega)C_2+T(T+1)R_2'\Omega R_2-T^2R_2'\Omega R_2-T^2R_2'\Omega R_2+T^2R_2'\Omega R_2\right] =$$

$$=\tau^2\left[T(\mathrm{tr}Q_2\Omega)C_2+T^2R_2'\Omega R_2+TR_2'\Omega R_2-T^2R_2'\Omega R_2\right] =$$

$$=(\mathrm{tr}Q_2\Omega)C_2+R_2'\Omega R_2. \qquad (Z.218)$$

QED

ΛΗΜΜΑ Ζ.13: Χρησιμοποιώντας τις (Z.165) και (Z.177) μπορούμε να αποδείξουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\Lambda_1=\Lambda_3+\Lambda_4, \qquad \Lambda_2=\Lambda_5+\Lambda_6+\Lambda_7, \qquad (Z.219)$$

όπου

$$\Lambda_3=<Z_*'W+Z_*'VK'+KX_*'W-KF_o'VK'>/\sqrt{T}=<Z_1^+{}'W+Z_2^+{}'VK'>/\sqrt{T},$$

$$\Lambda_4=Q_*+R_*K'+KR_*', \qquad \Lambda_5=\Delta_2+<KB_2^+{}'>+KA_2K', \qquad (Z.220)$$

$$\Lambda_6=<KA_1G_oB_*'>-B_*G_oB_*'-KA_1G_oA_1K', \qquad \Lambda_7=R_*G_oR_*'-<R_*G_oB_1^+{}'>+<KA_1G_oR_*'>$$

και

$$Z_1^+{}'=Z_*'+KX_*', \qquad Z_2^+{}'=Z_*'-KF_o', \qquad B_*=B_1^+-R_*=\tau(Z_*'V+W'X_*). \qquad (Z.221)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

(i) $$\Lambda_1=\Delta_1+<KB_1^+{}'>-KA_1K'=<Z_*'W/\sqrt{T}>+\sqrt{T}(W'W/T-Q_2)+<K\left[(Z_*'V+W'X_*)'/\sqrt{T}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{T}(W'V/T-R_2)'\right]>-K<F_o'V/\sqrt{T}>K'=$$

$$=<Z_*'W+KV'Z_*+KX_*'W-KF_o'VK'>/\sqrt{T}+\sqrt{T}(W'W/T-Q_2)+<K\sqrt{T}(W'V/T-R_2)'>=$$

$$=<(Z_*'+KX_*')W+(Z_*'-KF_o')VK'>/\sqrt{T}+Q_*+<KR_*'>=$$

$$=<Z_1^+{}'W+Z_2^+{}'VK'>/\sqrt{T}+Q_*+KR_*'+R_*K'=\Lambda_3+\Lambda_4, \qquad (Z.222)$$

όπου

$$\Lambda_3=<Z_*'W+KV'Z_*+KX_*'W-KF_o'VK'>/\sqrt{T}=<Z_1^+{}'W+Z_2^+{}'VK'>/\sqrt{T},$$

$$\Lambda_4=Q_*+KR_*'+R_*K', \qquad Z_1^+{}'=Z_*'+KX_*', \qquad Z_2^+{}'=Z_*'-KF_o'. \qquad (Z.223)$$

(ii) $$\Lambda_2=\Delta_2+<KB_2^+{}'>+KA_2K'-B_1^+G_oB_1^+{}'+<KA_1G_oB_1^+{}'>-KA_1G_oA_1K'=$$

$$=\Delta_2+\langle KB_2^+{}'\rangle+KA_2K'+\langle KA_1G_oB_1^+{}'-KA_1G_oR_*'+KA_1G_oR_*'\rangle-B_1^+G_oB_1^+{}'-R_*G_oR_*'+$$

$$+R_*G_oR_*'+\langle R_*G_oB_1^+{}'-R_*G_oB_1^+{}'\rangle-KA_1G_oA_1K'=$$

$$=\Delta_2+\langle KB_2^+{}'\rangle+KA_2K'+\langle KA_1G_o(B_1^+{}'-R_*')\rangle-(B_1^+-R_*)G_o(B_1^+{}'-R_*')-KA_1G_oA_1K'+$$

$$+R_*G_oR_*'-\langle R_*G_oB_1^+{}'\rangle+\langle KA_1G_oR_*'\rangle=$$

$$=\Delta_2+\langle KB_2^+{}'\rangle+KA_2K'+\langle KA_1G_oB_*'\rangle-B_*G_oB_*'-KA_1G_oA_1K'+$$

$$+R_*G_oR_*'-\langle R_*G_oB_1^+{}'\rangle+\langle KA_1G_oR_*'\rangle=\Lambda_5+\Lambda_6+\Lambda_7, \qquad (Z.224)$$

όπου

$$\Lambda_5=\Delta_2+\langle KB_2^+{}'\rangle+KA_2K', \quad \Lambda_6=\langle KA_1G_oB_*'\rangle-B_*G_oB_*'-KA_1G_oA_1K',$$

$$\Lambda_7=R_*G_oR_*'-\langle R_*G_oB_1^+{}'\rangle+\langle KA_1G_oR_*'\rangle, \qquad (Z.225)$$

$$B_*=B_1^+-R_*=(Z_*'V+W'X_*)/\sqrt{T}+\sqrt{T}(W'V/T-R_2)-\sqrt{T}(W'V/T-R_2)=\tau(Z_*'V+W'X_*).$$

QED

ΛΗΜΜΑ Ζ.14: Έστω Φ μια αυθαίρετη συμμετρική μήτρα. Επίσης, γράφουμε $x \overset{o}{=} y$ αν και μόνον αν $E(x)=E(y)$. Επιπλέον, ορίζουμε τις μήτρες

$$Q_3=Q_2+R_2K'+KR_2' \qquad Q_4=Q_3+KC_2K'. \qquad (Z.226)$$

Τότε αποδεικνύεται ότι

$$\Lambda_1\Phi\Lambda_1 \overset{o}{=} \langle\Lambda_o\Phi Q_4\rangle+(tr\Phi Q_4)\Lambda_o+(tr\Phi\Lambda_o)Q_4-(tr\Phi Q_3)Q_3-Q_3\Phi Q_3+$$

$$+\langle KE_oK'\Phi Q_2\rangle+(tr\Phi Q_2)KE_oK'+(tr\Phi KE_oK')Q_2+\langle 2KR_2'\Phi KR_2'\rangle+$$

$$+\langle(tr\Phi R_2K')R_2K'\rangle-\langle Q_2\Phi KR_2'Q_2^{-1}R_2K'\rangle,$$

$$\Lambda_1 \overset{o}{=} 0, \qquad (Z.227)$$

$$\Lambda_2 \overset{o}{=} nQ_4+nQ_2+2(trG_oC_2)Q_2-(trG_oE_o)Q_2+3R_2G_oR_2'-(n+2)KC_2K'-$$

$$-KR_2'-R_2K'-(trG_oC_2)\Lambda_o.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Χρησιμοποιώντας την (Ζ.165) και τα Λήμματα Α.9, Ζ.12 και Ζ.13 έχουμε:

(i) (a) $T\Lambda_3\Phi\Lambda_3=\langle Z_1^+{}'W+Z_2^+{}'VK'\rangle\Phi\langle Z_1^+{}'W+Z_2^+{}'VK'\rangle=$

$$=\left[(Z_1^+{}'W+Z_2^+{}'VK')+(W'Z_1^+{}+KV'Z_2^+{}')\right]\Phi\left[(Z_1^+{}'W+Z_2^+{}'VK')+(W'Z_1^+{}+KV'Z_2^+{}')\right]=$$

$$=Z_1^+{}'W\Phi Z_1^+{}'W+Z_1^+{}'W\Phi Z_2^+{}'VK'+Z_1^+{}'W\Phi W'Z_1^+{}+Z_1^+{}'W\Phi KV'Z_2^+{}+$$

$$+Z_2^+{}'VK'\Phi Z_1^+{}'W+Z_2^+{}'VK'\Phi Z_2^+{}'VK'+Z_2^+{}'VK'\Phi W'Z_1^+{}+Z_2^+{}'VK'\Phi KV'Z_2^+{}+$$

$$+W'Z_1^+\Phi Z_1^+'W+W'Z_1^+\Phi Z_2^+'VK'+W'Z_1^+\Phi W'Z_1^++W'Z_1^+\Phi KV'Z_2^+$$

$$+KV'Z_2^+\Phi Z_1^+'W+KV'Z_2^+\Phi Z_2^+'VK'+KV'Z_2^+\Phi W'Z_1^++KV'Z_2^+\Phi KV'Z_2^+=$$

$$=<Z_1^+'W\Phi Z_1^+'W+Z_1^+'W\Phi Z_2^+'VK'+Z_2^+'VK'\Phi Z_1^+'W+Z_2^+'VK'\Phi Z_2^+'VK'>+$$

$$+Z_1^+'W\Phi W'Z_1^++Z_1^+'W\Phi KV'Z_2^++Z_2^+'VK'\Phi W'Z_1^++Z_2^+'VK'\Phi KV'Z_2^+$$

$$+W'Z_1^+\Phi Z_1^+'W+W'Z_1^+\Phi Z_2^+'VK'+KV'Z_2^+\Phi Z_1^+'W+KV'Z_2^+\Phi Z_2^+'VK' \Rightarrow \qquad (Z.228)$$

$$\Rightarrow T\Lambda_3\Phi\overset{o}{\Lambda}_3=<Z_1^+'Z_1^+\Phi Q_2+Z_1^+'Z_2^+\Phi R_2K'+Z_2^+'Z_1^+\Phi KR_2'+Z_2^+'Z_2^+\Phi KC_2K'>+$$

$$+Z_1^+'(trQ_2\Phi)I_TZ_1^++Z_1^+'(tr\Phi KR_2')I_TZ_2^++Z_2^+'(trR_2K'\Phi)I_TZ_1^+$$

$$+Z_2^+'(trC_2K'\Phi K)I_TZ_2^++(trZ_1^+\Phi Z_1^+')Q_2+(trZ_1^+\Phi Z_2^+')R_2K'+K(trZ_2^+\Phi Z_1^+')R_2'+$$

$$+K(trZ_2^+\Phi Z_2^+')C_2K'=$$

$$=<Z_1^+'Z_1^+\Phi Q_2+Z_1^+'Z_2^+\Phi R_2K'+Z_2^+'Z_1^+\Phi KR_2'+Z_2^+'Z_2^+\Phi KC_2K'>+(trQ_2\Phi)Z_1^+'Z_1^+$$

$$+(tr\Phi KR_2')Z_1^+'Z_2^++(trR_2K'\Phi)Z_2^+'Z_1^++(trC_2K'\Phi K)Z_2^+'Z_2^++(tr\Phi Z_1^+'Z_1^+)Q_2+$$

$$+(tr\Phi Z_2^+'Z_1^+)R_2K'+(tr\Phi Z_1^+'Z_2^+)KR_2'+(tr\Phi Z_2^+'Z_2^+)KC_2K'. \qquad (Z.229)$$

'Ομως,

$$Z_1^+'Z_1^+=(Z_*'+KX_*')(Z_*+X_*K')=Z_*'Z_*+Z_*'X_*K'+KX_*'Z_*+KX_*'X_*K'=$$

$$=T(\Delta_o-Q_2)+T(B_o^+-R_2)K'+TK(B_o^+-R_2)'+KX_o'\bar{P}_{Z_1}X_oK'=$$

$$=T[\Delta_o-Q_2+(B_o^+-R_2)K'+K(B_o^+-R_2)']+KX_o'(I-P_{Z_1})X_oK'=$$

$$=T[\Delta_o-Q_2+(B_o^+-R_2)K'+K(B_o^+-R_2)']+TK(X_o'X_o/T)K'-TK(X_o'P_{Z_1}X_o/T)K'=$$

$$=T[\Delta_o-Q_2+(B_o^+-R_2)K'+K(B_o^+-R_2)'+KE_oK'-K(F_o'F_o/T)K']=$$

$$=T(\Delta_o-Q_2+B_o^+G_oB_o^+'-R_2K'+B_o^+G_oB_o^+'-KR_2'+KE_oK'-B_o^+G_oG_o^{-1}G_oB_o^+')=$$

$$=T(\Delta_o+B_o^+A_o^{-1}B_o^+'-Q_2-R_2K'-KR_2'+KE_oK')=$$

$$=T(\Lambda_o-Q_2-R_2K'-KR_2'+KE_oK'). \qquad (Z.230)$$

όπου

$$E_o=X_o'X_o/T. \qquad (Z.231)$$

Ακόμα,

$$Z_2^+'Z_2^+=(Z_*'-KF_o')(Z_*-F_oK')=Z_*'Z_*-Z_*'F_oK'-KF_o'Z_*+KF_o'F_oK'=$$

$$=T(\Delta_o-Q_2)-Z_o'\bar{P}_{z_1}P_{z_1}X_oK'-KX_o'P_{z_1}\bar{P}_{z_1}Z_o+TB_o^+G_o(F_o'F_o/T)G_oB_o^+'=$$

$$=T(\Delta_o-Q_2+B_o^+G_oG_o^{-1}G_oB_o^+')=T(\Delta_o+B_o^+A_o^{-1}B_o^+'-Q_2)=T(\Lambda_o-Q_2) \qquad (Z.232)$$

και

$$Z_1^+'Z_2^+=(Z_*'+KX_*')(Z_*-F_oK')=Z_*'Z_*-Z_*'F_oK'+KX_*'Z_*-KX_*'F_oK'=$$

$$=T(\Delta_o-Q_2)-Z_o'\bar{P}_{z_1}P_{z_1}X_oK'+TK(B_o^+-R_2)'-KX_o'\bar{P}_{z_1}P_{z_1}X_oK'=$$

$$=T(\Delta_o-Q_2+B_o^+G_oB_o^+'-KR_2')=T(\Delta_o+B_o^+A_o^{-1}B_o^+'-Q_2-KR_2')=$$

$$=T(\Lambda_o-Q_2-KR_2'). \qquad (Z.233)$$

(b) $\Lambda_4\Phi\Lambda_4=(Q_*+R_*K'+KR_*')\Phi(Q_*+R_*K'+KR_*')=$

$$=Q_*\Phi Q_*+Q_*\Phi R_*K'+Q_*\Phi KR_*'+R_*K'\Phi Q_*+R_*K'\Phi R_*K'+R_*K'\Phi KR_*'+KR_*'\Phi Q_*+$$

$$+KR_*'\Phi R_*K'+KR_*'\Phi KR_*'=$$

$$=Q_*\Phi Q_*+R_*K'\Phi KR_*'+KR_*'\Phi R_*K'+<Q_*\Phi R_*K'+Q_*\Phi KR_*'+R_*K'\Phi R_*K'> \Rightarrow \qquad (Z.234)$$

$$\Rightarrow \overset{o}{\Lambda_4\Phi\Lambda_4}=(trQ_2\Phi)Q_2+Q_2\Phi Q_2+(trK'\Phi KC_2)Q_2+R_2K'\Phi KR_2'+$$

$$+K\left[(trQ_2\Phi)C_2+R_2'\Phi R_2\right]K'+<\left[(trQ_2\Phi)R_2+Q_2\Phi R_2\right]K'+(trR_2'\Phi K)Q_2+Q_2\Phi KR_2'+$$

$$+\left[Q_2\Phi KC_1+(trR_2K'\Phi)R_2+R_2K'\Phi R_2\right]K'>=$$

$$=(trQ_2\Phi)Q_2+Q_2\Phi Q_2+(trK'\Phi KC_2)Q_2+R_2K'\Phi KR_2'+(trQ_2\Phi)KC_2K'+KR_2'\Phi R_2K'+$$

$$+<(trQ_2\Phi)R_2K'+Q_2\Phi R_2K'+(trR_2'\Phi K)Q_2+Q_2\Phi KR_2'+Q_2\Phi KC_1K'+(trR_2K'\Phi)R_2K'+$$

$$+R_2K'\Phi R_2K'>. \qquad (Z.235)$$

Εφόσον η αναμενόμενη τιμή ενός γινομένου περιττού πλήθους (odd product) κανονικών (normal) μεταβλητών με μέσο μηδέν είναι μηδέν, από την (Z.219) έχουμε

$$\Lambda_1\Phi\Lambda_1=(\Lambda_3+\Lambda_4)\Phi(\Lambda_3+\Lambda_4)=\Lambda_3\Phi\Lambda_3+\Lambda_3\Phi\Lambda_4+\Lambda_4\Phi\Lambda_3+\Lambda_4\Phi\Lambda_4 \overset{o}{=}$$

$$\overset{o}{=}\Lambda_3\Phi\Lambda_3+\Lambda_4\Phi\Lambda_4. \qquad (Z.236)$$

Αντικαθιστώντας τις (Z.229), (Z.230), (Z.232), (Z.233) και (Z.235) στην (Z.236) βρίσκουμε ότι για κάθε συμμετρική μήτρα Φ ισχύει

$$\overset{o}{\Lambda_1\Phi\Lambda_1}=\Big[<T(\Lambda_o-Q_2-R_2K'-KR_2'+KE_oK')\Phi Q_2+T(\Lambda_o-Q_2-KR_2')\Phi R_2K'+$$

$$+T(\Lambda_o-Q_2-KR_2')'\Phi KR_2'+T(\Lambda_o-Q_2)\Phi KC_2K'>+(trQ_2\Phi)T(\Lambda_o-Q_2-R_2K'-KR_2'+KE_oK')+$$
$$+(tr\Phi KR_2')T(\Lambda_o-Q_2-KR_2')+(trR_2K'\Phi)T(\Lambda_o-Q_2-KR_2')'+(trC_2K'\Phi K)T(\Lambda_o-Q_2)+$$
$$+\left[trT\Phi(\Lambda_o-Q_2-R_2K'-KR_2'+KE_oK')\right]Q_2+\left[trT\Phi(\Lambda_o-Q_2-KR_2')'\right]R_2K'+$$
$$+\left[trT\Phi(\Lambda_o-Q_2-KR_2')\right]KR_2'+\left[trT\Phi(\Lambda_o-Q_2)\right]KC_2K'\Big]\Big/T+(trQ_2\Phi)Q_2+Q_2\Phi Q_2+$$
$$+(trK'\Phi KC_2)Q_2+R_2K'\Phi KR_2'+(trQ_2\Phi)KC_2K'+KR_2'\Phi R_2K'+<(trQ_2\Phi)R_2K'+Q_2\Phi R_2K'+$$
$$+(trR_2'\Phi K)Q_2+Q_2\Phi KR_2'+Q_2\Phi KC_1K'+(trR_2K'\Phi)R_2K'+R_2K'\Phi R_2K'>=$$
$$=<\Lambda_o\Phi Q_2-Q_2\Phi Q_2-R_2K'\Phi Q_2-KR_2'\Phi Q_2+KE_oK'\Phi Q_2+\Lambda_o\Phi R_2K'-Q_2\Phi R_2K'-KR_2'\Phi R_2K'+$$
$$+\Lambda_o\Phi KR_2'-Q_2\Phi KR_2'-R_2K'\Phi KR_2'+\Lambda_o\Phi KC_2K'-Q_2\Phi KC_2K'>+(trQ_2\Phi)\Lambda_o-(trQ_2\Phi)Q_2-$$
$$-(trQ_2\Phi)R_2K'-(trQ_2\Phi)KR_2'+(trQ_2\Phi)KE_oK'+(tr\Phi KR_2')\Lambda_o-(tr\Phi KR_2')Q_2-$$
$$-(tr\Phi KR_2')KR_2'+(trR_2K'\Phi)\Lambda_o-(trR_2K'\Phi)Q_2-(trR_2K'\Phi)R_2K'+(trC_2K'\Phi K)\Lambda_o-$$
$$-(trC_2K'\Phi K)Q_2+(tr\Phi\Lambda_o)Q_2-(tr\Phi Q_2)Q_2-(tr\Phi R_2K')Q_2-(tr\Phi KR_2')Q_2+$$
$$+(tr\Phi KE_oK')Q_2+(tr\Phi\Lambda_o)R_2K'-(tr\Phi Q_2)R_2K'-(tr\Phi R_2K')R_2K'+(tr\Phi\Lambda_o)KR_2'-$$
$$-(tr\Phi Q_2)KR_2'-(tr\Phi KR_2')KR_2'+(tr\Phi\Lambda_o)KC_2K'-(tr\Phi Q_2)KC_2K'+(trQ_2\Phi)Q_2+$$
$$+Q_2\Phi Q_2+(trK'\Phi KC_2)Q_2+R_2K'\Phi KR_2'+(trQ_2\Phi)KC_2K'+KR_2'\Phi R_2K'+<(trQ_2\Phi)R_2K'+$$
$$+Q_2\Phi R_2K'+(trR_2'\Phi K)Q_2+Q_2\Phi KR_2'+Q_2\Phi KC_1K'+(trR_2K'\Phi)R_2K'+R_2K'\Phi R_2K'>=$$
$$=<\Lambda_o\Phi(Q_2+R_2K'+KR_2')+\Lambda_o\Phi KC_2K'>-2Q_2\Phi Q_2-R_2K'\Phi Q_2-Q_2\Phi KR_2'-KR_2'\Phi Q_2-$$
$$-Q_2\Phi R_2K'+<KE_oK'\Phi Q_2>-Q_2\Phi R_2K'-KR_2'\Phi Q_2-2KR_2'\Phi R_2K'-Q_2\Phi KR_2'-R_2K'\Phi Q_2-$$
$$-2R_2K'\Phi KR_2'-<Q_2\Phi KC_2K'>+(tr\Phi Q_2)\Lambda_o+(tr\Phi KR_2')\Lambda_o+(trR_2K'\Phi)\Lambda_o+$$
$$+(trC_2K'\Phi K)\Lambda_o-(tr\Phi Q_2)Q_2-(tr\Phi KR_2')Q_2-(tr\Phi R_2K')Q_2-(tr\Phi Q_2)KR_2'-$$
$$-(tr\Phi KR_2')KR_2'-(trR_2K'\Phi)KR_2'-(tr\Phi Q_2)R_2K'-(tr\Phi KR_2')R_2K'-(tr\Phi R_2K')R_2K'+$$
$$+(tr\Phi\Lambda_o)Q_2+(tr\Phi\Lambda_o)R_2K'+(tr\Phi\Lambda_o)KR_2'+(tr\Phi\Lambda_o)KC_2K'+(trQ_2\Phi)KE_oK'+$$
$$+(tr\Phi KE_oK')Q_2-(tr\Phi KR_2')Q_2+Q_2\Phi Q_2-(trR_2'\Phi K)Q_2-(tr\Phi Q_2)R_2K'-(tr\Phi Q_2)KR_2'+$$
$$+R_2K'\Phi KR_2'+KR_2'\Phi R_2K'+(tr\Phi Q_2)R_2K'+(tr\Phi Q_2)KR_2'+Q_2\Phi R_2K'+KR_2'\Phi Q_2+$$
$$+(tr\Phi KR_2')Q_2+(trK'\Phi R_2)Q_2+Q_2\Phi KR_2'+R_2K'\Phi Q_2+<Q_2\Phi KC_1K'>+$$
$$+<(trK'\Phi R_2)R_2K'>+R_2K'\Phi R_2K'+KR_2'\Phi KR_2'=$$
$$=<\Lambda_o\Phi Q_3+\Lambda_o\Phi KC_2K'>+\left[tr\Phi(Q_2+KR_2'+R_2K')\right]\Lambda_o+(tr\Phi KC_2K')\Lambda_o-$$
$$-\left[tr\Phi(Q_2+KR_2'+R_2K')\right]Q_2-\left[tr\Phi(Q_2+KR_2'+R_2K')\right]KR_2'-$$

$$-\left[tr\Phi(Q_2+KR_2'+R_2K')\right]R_2K'+(tr\Phi\Lambda_o)\left[(Q_2+R_2K'+KR_2')+KC_2K'\right]+$$

$$+(trQ_2\Phi)KE_oK'+(tr\Phi KE_oK')Q_2+<Q_2\Phi K(C_1-C_2)K'>+<KE_oK'\Phi Q_2>-Q_2\Phi Q_2-$$

$$-Q_2\Phi R_2K'-Q_2\Phi KR_2'-R_2K'\Phi Q_2-R_2K'\Phi R_2K'+R_2K'\Phi R_2K'-R_2K'\Phi KR_2'-KR_2'\Phi Q_2-$$

$$-KR_2'\Phi R_2K'-KR_2'\Phi KR_2'+KR_2'\Phi KR_2'+R_2K'\Phi R_2K'+KR_2'\Phi KR_2'+<(tr\Phi R_2K')R_2K'>=$$

$$=<\Lambda_o\Phi(Q_3+KC_2K')>+\left[(tr\Phi Q_3)+(tr\Phi KC_2K')\right]\Lambda_o-\left[(tr\Phi Q_3)Q_2+(tr\Phi Q_3)KR_2'+\right.$$

$$\left.+(tr\Phi Q_3)R_2K'\right]+(tr\Phi\Lambda_o)(Q_3+KC_2K')+(trQ_2\Phi)KE_oK'+(tr\Phi KE_oK')Q_2-$$

$$-<Q_2\Phi KC_3K'>+<KE_oK'\Phi Q_2>-Q_2\Phi(Q_2+R_2K'+KR_2')-R_2K'\Phi(Q_2+R_2K'+KR_2')-$$

$$-KR_2'\Phi(Q_2+R_2K'+KR_2')+2R_2K'\Phi R_2K'+2KR_2'\Phi KR_2'+<(tr\Phi R_2K')R_2K'>=$$

$$=<\Lambda_o\Phi Q_4>+(tr\Phi Q_4)\Lambda_o+(tr\Phi\Lambda_o)Q_4-(tr\Phi Q_3)Q_3-Q_3\Phi Q_3+<KE_oK'\Phi Q_2>+$$

$$+(trQ_2\Phi)KE_oK'+(tr\Phi KE_oK')Q_2+<2KR_2'\Phi KR_2'>+<(tr\Phi R_2K')R_2K'>-$$

$$-<Q_2\Phi KR_2'Q_2^{-1}R_2K'>. \qquad (Z.237)$$

(ii) $$\Lambda_3=<Z_*'W+Z_*'VK'+KX_*'W-KF_o'VK'>/\sqrt{T}\overset{o}{=}0 \qquad (Z.238)$$

και

$$\Lambda_4=Q_*+R_*K'+KR_*'=Q_*+<R_*K'>=\sqrt{T}(W'W/T-Q_2)+<\sqrt{T}(W'V/T-R_2)K'>\overset{o}{=}$$

$$\overset{o}{=}\sqrt{T}(Q_2-Q_2)+<\sqrt{T}(R_2-R_2)K'>=0, \qquad (Z.239)$$

έτσι ώστε

$$\Lambda_1=\Lambda_3+\Lambda_4\overset{o}{=}0, \qquad (Z.240)$$

διότι οι γραμμές της μήτρας (V:W) είναι ανεξάρτητα $N(0,\Sigma_2)$ διανύσματα, όπου η μήτρα Σ_2 έχει οριοθεί στην (6.42).

(iii) Εφόσον $trP_{Z_1}=n$, έχουμε

(a) $$\Lambda_5=W'P_{Z_1}W+<KV'P_{Z_1}W>+KV'P_{Z_1}VK'\overset{o}{=}$$

$$\overset{o}{=}(trP_{Z_1})Q_2+<K(trP_{Z_1})R_2'>+K(trP_{Z_1})C_2K'=nQ_2+<nKR_2'>+nKC_2K'=$$

$$=n(Q_2+KR_2'+R_2K'+KC_2K')=n(Q_3+KC_2K')=nQ_4. \qquad (Z.241)$$

(b) $$T\Lambda_5=T<K(F_o'V/\sqrt{T}+V'F_o/\sqrt{T})G_o(Z_*'V+W'X_*)'/\sqrt{T}>-T\left[(Z_*'V+W'X_*)/\sqrt{T}\right]G_o\cdot$$

$$\cdot\left[(Z_*'V+W'X_*)'/\sqrt{T}\right]-TK(F_o'V/\sqrt{T}+V'F_o/\sqrt{T})G_o(F_o'V/\sqrt{T}+V'F_o/\sqrt{T})K'=$$

$$=<KF_o'VG_oV'Z_*+KF_o'VG_oX_*'W+KV'F_oG_oV'Z_*+KV'F_oG_oX_*'W>-$$

$$-Z_*'VG_oV'Z_*-Z_*'VG_oX_*'W-W'X_*G_oV'Z_*-W'X_*G_oX_*'W-$$

$$-KF_o'VG_oF_o'VK'-KF_o'VG_oV'F_oK'-KV'F_oG_oF_o'VK'-KV'F_oG_oV'F_oK' \overset{o}{=}$$

$$\overset{o}{=} <KF_o'(trC_2G_o)I_TZ_*+KF_o'X_*G_oR_2'+KC_2G_oF_o'Z_*+K(trF_oG_oX_*')R_2'>-$$

$$-Z_*'(trC_2G_o)I_TZ_*-Z_*'X_*G_oR_2'-R_2G_oX_*'Z_*-(trX_*G_oX_*')Q_2-$$

$$-KF_o'F_oG_oC_2K'-KF_o'(trC_2G_o)I_TF_oK'-K(trF_oG_oF_o')C_2K'-KC_2G_oF_o'F_oK'=$$

$$=<(trC_2G_o)KX_o'P_{Z_1}\bar{P}_{Z_1}Z_o+KX_o'P_{Z_1}\bar{P}_{Z_1}X_oG_oR_2'+KC_2G_oX_o'P_{Z_1}\bar{P}_{Z_1}Z_o+$$

$$+(trG_oX_o'\bar{P}_{Z_1}P_{Z_1}X_o)KR_2'>-(trC_2G_o)Z_*'Z_*-Z_*'X_*G_oR_2'-R_2G_oX_*'Z_*-$$

$$-T(trG_o(X_*'X_*/T))Q_2-TK(F_o'F_o/T)G_oC_2K'-T(trC_2G_o)K(F_o'F_o/T)K'-$$

$$-T(trG_o(F_o'F_o/T))KC_2K'-TKC_2G_o(F_o'F_o/T)K' \Rightarrow \qquad (Z.242)$$

$$\Rightarrow \overset{o}{\Lambda_\sigma} = -(trC_2G_o)(Z_*'Z_*/T)-(Z_*'X_*/T)G_oR_2'-R_2G_o(X_*'Z_*/T)-$$

$$-(trG_o(X_*'X_*/T))Q_2-KG_o^{-1}G_oC_2K'-(trC_2G_o)KG_o^{-1}K'-(trG_oG_o^{-1})KC_2K'-$$

$$-KC_2G_oG_o^{-1}K'=$$

$$=-(trC_2G_o)(\Delta_o-Q_2)-(B_o^+-R_2)G_oR_2'-R_2G_o(B_o^+-R_2)'-(trG_o(X_o'\bar{P}_{Z_1}X_o/T))Q_2-$$

$$-KC_2K'-(trC_2G_o)B_o^+G_oG_o^{-1}G_oB_o^+'-(trI_n)KC_2K'-KC_2K'=$$

$$=-(trC_2G_o)(\Delta_o+B_o^+A_o^{-1}B_o^+')+(trC_2G_o)Q_2-(n+2)KC_2K'-$$

$$-(trG_o(X_o'(I-P_{Z_1})X_o/T))Q_2-B_o^+G_oR_2'+R_2G_oR_2'-R_2G_oB_o^+'+R_2G_oR_2'=$$

$$=-(trC_2G_o)\Lambda_o+(trC_2G_o)Q_2-(n+2)KC_2K'-(trG_o(X_o'X_o/T))Q_2+$$

$$+(trG_o(X_o'P_{Z_1}X_o/T))Q_2-KR_2'-R_2K'+2R_2G_oR_2'=$$

$$=-(trC_2G_o)\Lambda_o+(trC_2G_o)Q_2-(n+2)KC_2K'-(trG_oE_o)Q_2+$$

$$+(trG_o(F_o'F_o/T))Q_2-KR_2'-R_2K'+2R_2G_oR_2'=$$

$$=-(trC_2G_o)\Lambda_o+(trC_2G_o)Q_2-(n+2)KC_2K'-(trG_oE_o)Q_2+$$

$$+(trG_oG_o^{-1})Q_2-KR_2'-R_2K'+2R_2G_oR_2'=$$

$$= -(\mathrm{tr}C_2G_o)\Lambda_o+(\mathrm{tr}G_o(C_2-E_o))Q_2-(n+2)KC_2K'+(\mathrm{tr}I_n)Q_2-$$

$$-KR_2'-R_2K'+2R_2G_oR_2'=$$

$$=nQ_2+(\mathrm{tr}G_o(C_2-E_o))Q_2+2R_2G_oR_2'-(n+2)KC_2K'-KR_2'-R_2K'-$$

$$-(\mathrm{tr}C_2G_o)\Lambda_o. \qquad (Z.243)$$

(c) $\Lambda_7=T(W'V/T-R_2)G_o(W'V/T-R_2)'-<\sqrt{T}(W'V/T-R_2)G_o(Z_*'V+W'X_*)'/\sqrt{T}>+$

$$+<K(F_o'V/\sqrt{T}+V'F_o/\sqrt{T})G_o\sqrt{T}(W'V/T-R_2)'>\overset{o}{=}$$

$$\overset{o}{=}T(W'V/T-R_2)G_o(V'W/T-R_2')=W'VG_oV'W/T-W'VG_oR_2'-R_2G_oV'W+TR_2G_oR_2'\overset{o}{=}$$

$$\overset{o}{=}\left[T(\mathrm{tr}G_oC_2)Q_2+T(T+1)R_2G_oR_2'\right]/T-TR_2G_oR_2'-TR_2G_oR_2'+TR_2G_oR_2'=$$

$$=(\mathrm{tr}G_oC_2)Q_2+(T+1)R_2G_oR_2'-TR_2G_oR_2'=(\mathrm{tr}G_oC_2)Q_2+R_2G_oR_2', \qquad (Z.244)$$

διότι η αναμενόμενη τιμή ενός γινομένου περιττού πλήθους (odd product) κανονικών (normal) μεταβλητών με μέσο μηδέν είναι μηδέν. Έτσι, αντικαθιστώντας τις (Z.241), (Z.243) και (Z.244) στην (Z.219) βρίσκουμε

$$\overset{o}{\Lambda_2}= nQ_4+nQ_2+(\mathrm{tr}G_oC_2)Q_2-(\mathrm{tr}G_oE_o)Q_2+2R_2G_oR_2'-(n+2)KC_2K'-KR_2'-R_2K'-$$

$$-(\mathrm{tr}G_oC_2)\Lambda_o+(\mathrm{tr}G_oC_2)Q_2+R_2G_oR_2'=$$

$$=nQ_4+nQ_2+2(\mathrm{tr}G_oC_2)Q_2-(\mathrm{tr}G_oE_o)Q_2+3R_2G_oR_2'-(n+2)KC_2K'-KR_2'-R_2K'-$$

$$-(\mathrm{tr}G_oC_2)\Lambda_o. \qquad (Z.245)$$

QED

<u>ΛΗΜΜΑ Z.15:</u> Για κάθε μιγαδικό αριθμό s ορίζουμε την ποσότητα

$$t=(1-2s)^{-1}. \qquad (Z.246)$$

Η υπό συνθήκη (ως προς τις μήτρες X, Z) χ^2 συνάρτηση πυκνότητας είναι

$$\varphi_{l,\gamma}(s)=t^{l/2}e^{st\gamma}. \qquad (Z.247)$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\varphi_{l,\gamma}(s)=t^{l/2}e^{st\gamma}\circ\left[1+\tau st\left[-\gamma_1+\tau(\gamma_2+(t-1)\gamma_1^2/4)\right]\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=t^{l/2}e^{st\gamma}\circ\left[1+\tau^2st\alpha\right]+\omega(\tau^3), \qquad (Z.248)$$

όπου

$$\overset{o}{\alpha} = \gamma_1^* + (t-1)\gamma_2^*,$$

$$\begin{aligned}
\gamma_i^* &= (m+2)\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_4\Lambda_o^{-1}\delta_2 + \left[(tr\Lambda_o^{-1}Q_4) - (trG_oC_2)\right]\delta_2'\Lambda_o^{-1}\delta_2 + \\
&+ \left[n+2(trG_oC_2) - (trG_oE_o) + (tr\Lambda_o^{-1}KE_oK')\right]\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_2\Lambda_o^{-1}\delta_2 - \\
&- (tr\Lambda_o^{-1}Q_3)\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_3\Lambda_o^{-1}\delta_2 + 2(tr\Lambda_o^{-1}R_2K')\delta_2'\Lambda_o^{-1}R_2K'\Lambda_o^{-1}\delta_2 + \\
&+ (tr\Lambda_o^{-1}Q_2)\delta_2'\Lambda_o^{-1}KE_oK'\Lambda_o^{-1}\delta_2 - \delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_3\Lambda_o^{-1}Q_3\Lambda_o^{-1}\delta_2 + \\
&+ 2\delta_2'\Lambda_o^{-1}KE_oK'\Lambda_o^{-1}Q_2\Lambda_o^{-1}\delta_2 + 4\delta_2'\Lambda_o^{-1}KR_2'\Lambda_o^{-1}KR_2'\Lambda_o^{-1}\delta_2 - \\
&- 2\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_2\Lambda_o^{-1}KR_2'Q_2^{-1}R_2K'\Lambda_o^{-1}\delta_2 + 3\delta_2'\Lambda_o^{-1}R_2G_oR_2'\Lambda_o^{-1}\delta_2 - \\
&- 2\delta_2'\Lambda_o^{-1}KR_2'\Lambda_o^{-1}\delta_2 - (n+2)\delta_2'\Lambda_o^{-1}KC_2K'\Lambda_o^{-1}\delta_2,
\end{aligned} \tag{Z.249}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_2^* &= \delta_2'\Lambda_o^{-1}\delta_2\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_4\Lambda_o^{-1}\delta_2 - (1/2)(\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_3\Lambda_o^{-1}\delta_2)^2 + \\
&+ \delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_2\Lambda_o^{-1}\delta_2\delta_2'\Lambda_o^{-1}KE_oK'\Lambda_o^{-1}\delta_2 + (3/2)(\delta_2'\Lambda_o^{-1}KR_2'\Lambda_o^{-1}\delta_2)^2 - \\
&- (1/2)\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_2\Lambda_o^{-1}\delta_2\delta_2'\Lambda_o^{-1}KR_2'Q_2^{-1}R_2K'\Lambda_o^{-1}\delta_2.
\end{aligned}$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ:</u> Από την (Z.246) έχουμε

$$t=1/(1-2s) \Rightarrow t-2ts=1 \Rightarrow t-1=2ts \Rightarrow s=(t-1)/2t, \tag{Z.250}$$

έτσι ώστε χρησιμοποιώντας το Λήμμα Z.10 βρίσκουμε ότι η υπό συνθήκη (ως προς τις μήτρες X, Z) χ^2 συνάρτηση πυκνότητας είναι

$$\varphi_{l,\gamma}(s) = t^{l/2}e^{st\gamma} = t^{l/2}e^{st\left[\gamma_o - \tau\gamma_1 + \tau^2\gamma_2 + \omega(\tau^3)\right]} =$$

$$= t^{l/2}e^{st\gamma_o}e^{st\left[-\tau\gamma_1 + \tau^2\gamma_2 + \omega(\tau^3)\right]} =$$

$$= t^{l/2}e^{st\gamma_o}\left[1 + st\left[-\tau\gamma_1 + \tau^2\gamma_2 + \omega(\tau^3)\right] + s^2t^2\left[-\tau\gamma_1 + \tau^2\gamma_2 + \omega(\tau^3)\right]^2/2 + \ldots\right] =$$

$$= t^{l/2}e^{st\gamma_o}\left[1 + st\left[-\tau\gamma_1 + \tau^2\gamma_2\right] + s^2t^2\tau^2\gamma_1^2/2 + \omega(\tau^3)\right] =$$

$$= t^{l/2}e^{st\gamma_o}\left[1 + \tau st\left[-\gamma_1 + \tau(\gamma_2 + st\gamma_1^2/2)\right]\right] + \omega(\tau^3) =$$

$$= t^{l/2}e^{st\gamma_o}\left[1 + \tau st\left[-\gamma_1 + \tau(\gamma_2 + (t-1)\gamma_1^2/4)\right]\right] + \omega(\tau^3) =$$

$$= t^{l/2}e^{st\gamma_o}\left[1 + \tau^2 st\left[-\gamma_1/\tau + \gamma_2 + (t-1)\gamma_1^2/4\right]\right] + \omega(\tau^3) =$$

$$=t^{l/2}e^{st\gamma_o}\left[1+\tau^2 st\alpha\right]+\omega(\tau^3), \qquad (Z.251)$$

όπου

$$\alpha= -\gamma_1/\tau+\gamma_2+(t-1)\gamma_1^2/4. \qquad (Z.252)$$

Από τα Λήμματα Z.10 και Z.14 έχουμε

$$\overset{o}{\Lambda}_1= 0 \Rightarrow \gamma_1=\delta_*'\overset{o}{\Lambda}_1\delta_*= 0, \qquad (Z.253)$$

όπου το δ_* έχει ορισθεί στο Λήμμα Z.10. Έτσι, χρησιμοποιώντας το Λήμμα Z.10 βρίσκουμε

$$\overset{o}{\alpha} = \gamma_2+(t-1)\gamma_1^2/4=\delta_*'(\Lambda_1\overset{s}{\Lambda}_o^{-1}\Lambda_1+\Lambda_2)\delta_*+(t-1)\delta_*'\Lambda_1\delta_*\delta_*'\Lambda_1\delta_*/4=$$

$$=\delta_*'\left[\Lambda_1\Lambda_o^{-1}\Lambda_1+\Lambda_2+(t-1)\Lambda_1\delta_*\delta_*'\Lambda_1/4\right]\delta_*=\delta_*'\Lambda_*\delta_*, \qquad (Z.254)$$

όπου

$$\Lambda_*=\Lambda_1\Lambda_o^{-1}\Lambda_1+\Lambda_2+(t-1)\Lambda_1\delta_*\delta_*'\Lambda_1/4. \qquad (Z.255)$$

Από το Λήμμα Z.14 έπεται

$$\begin{aligned}
\overset{o}{\Lambda}_* &= <\Lambda_o\Lambda_o^{-1}Q_4>+(tr\Lambda_o^{-1}Q_4)\Lambda_o+(tr\Lambda_o^{-1}\Lambda_o)Q_4-(tr\Lambda_o^{-1}Q_3)Q_3-Q_3\Lambda_o^{-1}Q_3+\\
&+<KE_oK'\Lambda_o^{-1}Q_2>+(tr\Lambda_o^{-1}Q_2)KE_oK'+(tr\Lambda_o^{-1}KE_oK')Q_2+<2KR_2'\Lambda_o^{-1}KR_2'>+\\
&+<(tr\Lambda_o^{-1}R_2K')R_2K'>-<Q_2\Lambda_o^{-1}KR_2'Q_2^{-1}R_2K'>+nQ_4+nQ_2+2(trG_oC_2)Q_2-\\
&-(trG_oE_o)Q_2+3R_2G_oR_2'-(n+2)KC_2K'-KR_2'-R_2K'-(trG_oC_2)\Lambda_o+\\
&+((t-1)/4)\left[<\Lambda_o\delta_*\delta_*'Q_4>+(tr\delta_*\delta_*'Q_4)\Lambda_o+(tr\delta_*\delta_*'\Lambda_o)Q_4-(tr\delta_*\delta_*'Q_3)Q_3-\right.\\
&-Q_3\delta_*\delta_*'Q_3+<KE_oK'\delta_*\delta_*'Q_2>+(tr\delta_*\delta_*'Q_2)KE_oK'+(tr\delta_*\delta_*'KE_oK')Q_2+\\
&\left.+<2KR_2'\delta_*\delta_*'KR_2'>+<(tr\delta_*\delta_*'R_2K')R_2K'>-<Q_2\delta_*\delta_*'KR_2'Q_2^{-1}R_2K'>\right]=\\
&=<Q_4>+(trI_l)Q_4+nQ_4+\left[(tr\Lambda_o^{-1}Q_4)-(trG_oC_2)\right]\Lambda_o+\left[n+2(trG_oC_2)-(trG_oE_o)+\right.\\
&\left.+(tr\Lambda_o^{-1}KE_oK')\right]Q_2-(tr\Lambda_o^{-1}Q_3)Q_3+<(tr\Lambda_o^{-1}R_2K')R_2K'>+(tr\Lambda_o^{-1}Q_2)KE_oK'-\\
&-Q_3\Lambda_o^{-1}Q_3+<KE_oK'\Lambda_o^{-1}Q_2>+<2KR_2'\Lambda_o^{-1}KR_2'>-<Q_2\Lambda_o^{-1}KR_2'Q_2^{-1}R_2K'>+3R_2G_oR_2'-\\
&-KR_2'-R_2K'-(n+2)KC_2K'+\\
&+((t-1)/4)\left[<\delta_2\delta_*'Q_4>+(tr\delta_*'Q_4\delta_*)\Lambda_o+(tr\delta_*'\Lambda_o\delta_*)Q_4-(tr\delta_*'Q_3\delta_*)Q_3-\right.\\
&-Q_3\delta_*\delta_*'Q_3+<KE_oK'\delta_*\delta_*'Q_2>+(tr\delta_*'Q_2\delta_*)KE_oK'+(tr\delta_*'KE_oK'\delta_*)Q_2+\\
&\left.+<2KR_2'\delta_*\delta_*'KR_2'>+<(tr\delta_*'R_2K'\delta_*)R_2K'>-<Q_2\delta_*\delta_*'KR_2'Q_2^{-1}R_2K'>\right]=
\end{aligned}$$

$$=<Q_4>+(n+1)Q_4+\left[(tr\Lambda_o^{-1}Q_4)-(trG_oC_2)\right]\Lambda_o+\left[n+2(trG_oC_2)-(trG_oE_o)+\right.$$
$$\left.+(tr\Lambda_o^{-1}KE_oK')\right]Q_2-(tr\Lambda_o^{-1}Q_3)Q_3+<(tr\Lambda_o^{-1}R_2K')R_2K'>+(tr\Lambda_o^{-1}Q_2)KE_oK'-$$
$$-Q_3\Lambda_o^{-1}Q_3+<KE_oK'\Lambda_o^{-1}Q_2>+<2KR_2'\Lambda_o^{-1}KR_2'>-<Q_2\Lambda_o^{-1}KR_2'Q_2^{-1}R_2K'>+3R_2G_oR_2'-$$
$$-KR_2'-R_2K'-(n+2)KC_2K'+$$
$$+((t-1)/4)\left[<\delta_2\delta_*'Q_4>+\delta_*'Q_4\delta_*\Lambda_o+\delta_2'\delta_*Q_4-\delta_*'Q_3\delta_*Q_3-\right.$$
$$-Q_3\delta_*\delta_*'Q_3+<KE_oK'\delta_*\delta_*'Q_2>+\delta_*'Q_2\delta_*KE_oK'+\delta_*'KE_oK'\delta_*Q_2+$$
$$\left.+<2KR_2'\delta_*\delta_*'KR_2'>+<R_2K'\delta_*'R_2K'\delta_*>-<Q_2\delta_*\delta_*'KR_2'Q_2^{-1}R_2K'>\right]. \qquad (Z.256)$$

Επιπλέον, για κάθε T×T μήτρα Φ και για κάθε μη τετριμμένο T×1 διάνυσμα k έχουμε

$$k'<\Phi>k=k'(\Phi+\Phi')k=k'\Phi k+k'\Phi'k=2k'\Phi k. \qquad (Z.257)$$

Έτσι,

$$\overset{o}{\alpha}=\delta_*'\Lambda_*\delta_*=\overset{o}{\delta_*'<Q_4>\delta_*}+(n+1)\delta_*'Q_4\delta_*+\left[(tr\Lambda_o^{-1}Q_4)-(trG_oC_2)\right]\delta_*'\Lambda_o\delta_*+$$
$$+\left[n+2(trG_oC_2)-(trG_oE_o)+(tr\Lambda_o^{-1}KE_oK')\right]\delta_*'Q_2\delta_*-(tr\Lambda_o^{-1}Q_3)\delta_*'Q_3\delta_*+$$
$$+\delta_*'<(tr\Lambda_o^{-1}R_2K')R_2K'>\delta_*+(tr\Lambda_o^{-1}Q_2)\delta_*'KE_oK'\delta_*-\delta_*'Q_3\Lambda_o^{-1}Q_3\delta_*+$$
$$+\delta_*'<KE_oK'\Lambda_o^{-1}Q_2>\delta_*+\delta_*'<2KR_2'\Lambda_o^{-1}KR_2'>\delta_*-\delta_*'<Q_2\Lambda_o^{-1}KR_2'Q_2^{-1}R_2K'>\delta_*+$$
$$+3\delta_*'R_2G_oR_2'\delta_*-\delta_*'KR_2'\delta_*-\delta_*'R_2K'\delta_*-(n+2)\delta_*'KC_2K'\delta_*+$$
$$+((t-1)/4)\left[\delta_*'<\delta_2\delta_*'Q_4>\delta_*+\delta_*'Q_4\delta_*\delta_*'\Lambda_o\delta_*+\delta_2'\delta_*\delta_*'Q_4\delta_*-\delta_*'Q_3\delta_*\delta_*'Q_3\delta_*-\right.$$
$$-\delta_*'Q_3\delta_*\delta_*'Q_3\delta_*+\delta_*'<KE_oK'\delta_*\delta_*'Q_2>\delta_*+\delta_*'Q_2\delta_*\delta_*'KE_oK'\delta_*+\delta_*'KE_oK'\delta_*\delta_*'Q_2\delta_*+$$
$$\left.+\delta_*'<2KR_2'\delta_*\delta_*'KR_2'>\delta_*+\delta_*'<\delta_*'KR_2'\delta_*KR_2'>\delta_*-\delta_*'<Q_2\delta_*\delta_*'KR_2'Q_2^{-1}R_2K'>\delta_*\right]=$$
$$=(m+2)\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_4\Lambda_o^{-1}\delta_2+\left[(tr\Lambda_o^{-1}Q_4)-(trG_oC_2)\right]\delta_2'\Lambda_o^{-1}\delta_2+$$
$$+\left[n+2(trG_oC_2)-(trG_oE_o)+(tr\Lambda_o^{-1}KE_oK')\right]\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_2\Lambda_o^{-1}\delta_2-$$
$$-(tr\Lambda_o^{-1}Q_3)\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_3\Lambda_o^{-1}\delta_2+2(tr\Lambda_o^{-1}R_2K')\delta_2'\Lambda_o^{-1}R_2K'\Lambda_o^{-1}\delta_2+$$
$$+(tr\Lambda_o^{-1}Q_2)\delta_2'\Lambda_o^{-1}KE_oK'\Lambda_o^{-1}\delta_2-\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_3\Lambda_o^{-1}Q_3\Lambda_o^{-1}\delta_2+$$
$$+2\delta_2'\Lambda_o^{-1}KE_oK'\Lambda_o^{-1}Q_2\Lambda_o^{-1}\delta_2+4\delta_2'\Lambda_o^{-1}KR_2'\Lambda_o^{-1}KR_2'\Lambda_o^{-1}\delta_2-$$
$$-2\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_2\Lambda_o^{-1}KR_2'Q_2^{-1}R_2K'\Lambda_o^{-1}\delta_2+3\delta_2'\Lambda_o^{-1}R_2G_oR_2'\Lambda_o^{-1}\delta_2-$$
$$-2\delta_2'\Lambda_o^{-1}KR_2'\Lambda_o^{-1}\delta_2-(n+2)\delta_2'\Lambda_o^{-1}KC_2K'\Lambda_o^{-1}\delta_2+$$
$$+(t-1)\left[\delta_2'\Lambda_o^{-1}\delta_2\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_4\Lambda_o^{-1}\delta_2-(1/2)(\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_3\Lambda_o^{-1}\delta_2)^2+\right.$$

$$+\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_2\Lambda_o^{-1}\delta_2\delta_2'\Lambda_o^{-1}KE_oK'\Lambda_o^{-1}\delta_2+(3/2)(\delta_2'\Lambda_o^{-1}KR_2'\Lambda_o^{-1}\delta_2)^2-$$
$$-(1/2)\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_2\Lambda_o^{-1}\delta_2\delta_2'\Lambda_o^{-1}KR_2'Q_2^{-1}R_2K'\Lambda_o^{-1}\delta_2]=$$
$$=\gamma_1^*+(t-1)\gamma_2^*, \qquad (Z.258)$$

όπου

$$\gamma_1^*=(m+2)\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_4\Lambda_o^{-1}\delta_2+[(tr\Lambda_o^{-1}Q_4)-(trG_oC_2)]\delta_2'\Lambda_o^{-1}\delta_2+$$
$$+[n+2(trG_oC_2)-(trG_oE_o)+(tr\Lambda_o^{-1}KE_oK')]\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_2\Lambda_o^{-1}\delta_2-$$
$$-(tr\Lambda_o^{-1}Q_3)\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_3\Lambda_o^{-1}\delta_2+2(tr\Lambda_o^{-1}R_2K')\delta_2'\Lambda_o^{-1}R_2K'\Lambda_o^{-1}\delta_2+$$
$$+(tr\Lambda_o^{-1}Q_2)\delta_2'\Lambda_o^{-1}KE_oK'\Lambda_o^{-1}\delta_2-\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_3\Lambda_o^{-1}Q_3\Lambda_o^{-1}\delta_2+$$
$$+2\delta_2'\Lambda_o^{-1}KE_oK'\Lambda_o^{-1}Q_2\Lambda_o^{-1}\delta_2+4\delta_2'\Lambda_o^{-1}KR_2'\Lambda_o^{-1}KR_2'\Lambda_o^{-1}\delta_2-$$
$$-2\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_2\Lambda_o^{-1}KR_2'Q_2^{-1}R_2K'\Lambda_o^{-1}\delta_2+3\delta_2'\Lambda_o^{-1}R_2G_oR_2'\Lambda_o^{-1}\delta_2-$$
$$-2\delta_2'\Lambda_o^{-1}KR_2'\Lambda_o^{-1}\delta_2-(n+2)\delta_2'\Lambda_o^{-1}KC_2K'\Lambda_o^{-1}\delta_2,$$

και (Z.259)

$$\gamma_2^*=\delta_2'\Lambda_o^{-1}\delta_2\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_4\Lambda_o^{-1}\delta_2-(1/2)(\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_3\Lambda_o^{-1}\delta_2)^2+$$
$$+\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_2\Lambda_o^{-1}\delta_2\delta_2'\Lambda_o^{-1}KE_oK'\Lambda_o^{-1}\delta_2+(3/2)(\delta_2'\Lambda_o^{-1}KR_2'\Lambda_o^{-1}\delta_2)^2-$$
$$-(1/2)\delta_2'\Lambda_o^{-1}Q_2\Lambda_o^{-1}\delta_2\delta_2'\Lambda_o^{-1}KR_2'Q_2^{-1}R_2K'\Lambda_o^{-1}\delta_2.$$

QED .

<u>ΛΗΜΜΑ Ζ.16:</u> Μπορεί να δειχθεί ότι οι μήτρες E, E_o, C_2, G, G_o, K και Λ_o^{-1}, που ορίστηκαν προηγουμένως, ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις:

$$E = E_o+C_2+\omega(\tau), \quad G = G_o-K'\Lambda_o^{-1}K+\omega(\tau). \qquad (Z.260)$$

Επιπλέον, ορίζουμε τις ποσότητες:

$$\bar{q}_1 = q'G_oq, \quad \bar{q}_2 = q'K'\Lambda_o^{-1}Kq, \quad \bar{\upsilon}_1 = trG_oE_o, \quad \bar{\upsilon}_2 = trG_oC_2,$$
$$\bar{\upsilon}_3 = trK'\Lambda_o^{-1}KE_o, \quad \bar{\upsilon}_4 = trK'\Lambda_o^{-1}KC_2, \quad \delta_+ = \Delta_o^{-1}\delta_2,$$
$$\bar{g}_1 = \delta_+'KE_oK'\delta_+, \quad \bar{g}_2 = \delta_+'KC_2K'\delta_+, \qquad (Z.261)$$
$$\bar{g}_3 = \delta_+'B_o^+K'\Lambda_o^{-1}KE_oK'\Lambda_o^{-1}KB_o^{+\prime}\delta_+, \quad \bar{g}_4 = \delta_+'B_o^+K'\Lambda_o^{-1}KC_2K'\Lambda_o^{-1}KB_o^{+\prime}\delta_+,$$
$$\bar{g}_5 = \delta_+'KE_oK'\Lambda_o^{-1}KB_o^{+\prime}\delta_+, \quad \bar{g}_6 = \delta_+'KC_2K'\Lambda_o^{-1}KB_o^{+\prime}\delta_+,$$
$$\bar{c}_1 = \bar{q}_1-\bar{q}_2, \quad \bar{c}_2 = \bar{\upsilon}_1+\bar{\upsilon}_2-\bar{\upsilon}_3-\bar{\upsilon}_4, \quad \bar{\gamma}_3 = \bar{g}_1+\bar{g}_2+\bar{g}_3+\bar{g}_4-2\bar{g}_5-2\bar{g}_6,$$

όπου οι μήτρες B_o^+, A, A_o, Δ, Δ_o έχουν ήδει οριστεί πιό πριν. Τότε,

είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι

$$c_1 = \bar{c}_1+\omega(\tau), \quad c_2 = \bar{c}_2+\omega(\tau), \quad \gamma_2 = \bar{\gamma}_2+\omega(\tau). \tag{Z.262}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς (6.40), (6.41), (6.42), (Z.1), (Z.63) και (Z.231) βρίσκουμε

$$E = X'X/T = \frac{(X_o+V)'(X_o+V)}{T} = \frac{X_o'X_o+X_o'V+V'X_o+V'V}{T} =$$

$$= X_o'X_o/T+\tau\left[X_o'V/\sqrt{T}+V'X_o/\sqrt{T} \right]+V'V/T = E_o+C_2+\omega(\tau), \tag{Z.263}$$

διότι

$$C_2 = E(V'V/T) \Leftrightarrow C_2 = V'V/T+\omega(\tau). \tag{Z.264}$$

Επίσης, από τις (6.44), (Z.165), (Z.168), (Z.169), (Z.172) και (Z.175), χρησιμοποιώντας ένα πολύ γνωστό θεώρημα, παίρνουμε

$$G=(F_Z'F_Z/T)^{-1}=G_+^{-1}=(A+B_+'\Delta^{-1}B_+)^{-1}=\left[A_o+B_o^+'\Delta_o^{-1}B_o^++\omega(\tau)\right]^{-1}=$$

$$=A_o^{-1}-A_o^{-1}B_o^+'(\Delta_o+B_o^+A_o^{-1}B_o^+')^{-1}B_o^+A_o^{-1}+\omega(\tau)=$$

$$=G_o-G_oB_o^+'\Lambda_o^{-1}B_o^+G_o+\omega(\tau)=G_o-K'\Lambda_o^{-1}K+\omega(\tau). \tag{Z.265}$$

Κάνοντας χρήση των (6.43), (Z.63), (Z.110), (Z.168), (Z.172), (Z.175), (Z.263) και (Z.265) βρίσκουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

(i) $$c_1=q'Gq=q'(G_o-K'\Lambda_o^{-1}K+\omega(\tau))q=q'G_oq-q'K'\Lambda_o^{-1}Kq+\omega(\tau)=$$

$$=\bar{q}_1-\bar{q}_2+\omega(\tau)=\bar{c}_1+\omega(\tau), \tag{Z.266}$$

όπου

$$\bar{q}_1=q'G_oq, \quad \bar{q}_2=q'K'\Lambda_o^{-1}Kq. \tag{Z.267}$$

(ii) $$c_2=tr(F_Z'F_Z)^{-1}X'X=tr(F_Z'F_Z/T)^{-1}X'X/T=trGE=$$

$$=tr(G_o-K'\Lambda_o^{-1}K+\omega(\tau))(E_o+C_2+\omega(\tau))=$$

$$=trG_oE_o+trG_oC_2-trK'\Lambda_o^{-1}KE_o-trK'\Lambda_o^{-1}KC_2+\omega(\tau)=$$

$$=\bar{\upsilon}_1+\bar{\upsilon}_2-\bar{\upsilon}_3-\bar{\upsilon}_4+\omega(\tau)=\bar{c}_2+\omega(\tau), \tag{Z.268}$$

όπου

$$\bar{\upsilon}_1=trG_oE_o, \quad \bar{\upsilon}_2=trG_oC_2, \quad \bar{\upsilon}_3=trK'\Lambda_o^{-1}KE_o, \quad \bar{\upsilon}_4=trK'\Lambda_o^{-1}KC_2. \tag{Z.269}$$

(iii) $$GEG=(G_o-K'\Lambda_o^{-1}K+\omega(\tau))(E_o+C_2+\omega(\tau))(G_o-K'\Lambda_o^{-1}K+\omega(\tau))=$$

$$=G_oE_oG_o-G_oE_oK'\Lambda_o^{-1}K+G_oC_2G_o-G_oC_2K'\Lambda_o^{-1}K-K'\Lambda_o^{-1}KE_oG_o+$$

$$+K'\Lambda_o^{-1}KE_oK'\Lambda_o^{-1}K-K'\Lambda_o^{-1}KC_2G_o+K'\Lambda_o^{-1}KC_2K'\Lambda_o^{-1}K+\omega(\tau). \tag{Z.270}$$

Έτσι, από τις (6.43), (Z.110), (Z.160), (Z.165), (Z.172),

(Z.175), (Z.261) και (Z.270) παίρνουμε

$$\gamma_3=\xi' F_z (F_z' F_z)^{-1} X' X (F_z' F_z)^{-1} F_z' \xi =$$

$$=(\xi' F_z/\sqrt{T})(F_z' F_z/T)^{-1}(X' X/T)(F_z' F_z/T)^{-1}(F_z' \xi\sqrt{T})=$$

$$=\delta_2'(Z_2'\bar{P}_{z_1} Z_2)^{-1} Z_2'\bar{P}_{z_1} XGEGX'\bar{P}_{z_1} Z_2 (Z_2'\bar{P}_{z_1} Z_2)^{-1}\delta_2=$$

$$=\delta_2'(Z_2'\bar{P}_{z_1} Z_2/T)^{-1}(Z_2'\bar{P}_{z_1} X/T) GEG (X'\bar{P}_{z_1} Z_2/T)(Z_2'\bar{P}_{z_1} Z_2/T)^{-1}\delta_2=$$

$$=\delta_2'\Delta^{-1} B_+ GEGB_+'\Delta^{-1}\delta_2=\delta_2'\Delta_o^{-1} B_o^+ GEGB_o^+'\Delta_o^{-1}\delta_2+\omega(\tau)=$$

$$=\delta_+' B_o^+ (G_o E_o G_o - G_o E_o K'\Lambda_o^{-1} K + G_o C_2 G_o - G_o C_2 K'\Lambda_o^{-1} K - K'\Lambda_o^{-1} K E_o G_o +$$

$$+K'\Lambda_o^{-1} K E_o K'\Lambda_o^{-1} K - K'\Lambda_o^{-1} K C_2 G_o + K'\Lambda_o^{-1} K C_2 K'\Lambda_o^{-1} K + \omega(\tau)) B_o^+'\delta_+ + \omega(\tau) =$$

$$=\delta_+' B_o^+ G_o E_o G_o B_o^+'\delta_+ - \delta_+' B_o^+ G_o E_o K'\Lambda_o^{-1} K B_o^+'\delta_+ + \delta_+' B_o^+ G_o C_2 G_o B_o^+'\delta_+ -$$

$$-\delta_+' B_o^+ G_o C_2 K'\Lambda_o^{-1} K B_o^+'\delta_+ - \delta_+' B_o^+ K'\Lambda_o^{-1} K E_o G_o B_o^+'\delta_+ +$$

$$+\delta_+' B_o^+ K'\Lambda_o^{-1} K E_o K'\Lambda_o^{-1} K B_o^+'\delta_+ - \delta_+' B_o^+ K'\Lambda_o^{-1} K C_2 G_o B_o^+'\delta_+ +$$

$$+\delta_+' B_o^+ K'\Lambda_o^{-1} K C_2 K'\Lambda_o^{-1} K B_o^+'\delta_+ + \omega(\tau) =$$

$$=\delta_+' K E_o K'\delta_+ - \delta_+' K E_o K'\Lambda_o^{-1} K B_o^+'\delta_+ + \delta_+' K C_2 K'\delta_+ - \delta_+' K C_2 K'\Lambda_o^{-1} K B_o^+'\delta_+ -$$

$$-\delta_+' B_o^+ K'\Lambda_o^{-1} K E_o K'\delta_+ + \delta_+' B_o^+ K'\Lambda_o^{-1} K E_o K'\Lambda_o^{-1} K B_o^+'\delta_+ -$$

$$-\delta_+' B_o^+ K'\Lambda_o^{-1} K C_2 K'\delta_+ + \delta_+' B_o^+ K'\Lambda_o^{-1} K C_2 K'\Lambda_o^{-1} K B_o^+'\delta_+ + \omega(\tau) =$$

$$=\delta_+' K E_o K'\delta_+ + \delta_+' K C_2 K'\delta_+ + \delta_+' B_o^+ K'\Lambda_o^{-1} K E_o K'\Lambda_o^{-1} K B_o^+'\delta_+ +$$

$$+\delta_+' B_o^+ K'\Lambda_o^{-1} K C_2 K'\Lambda_o^{-1} K B_o^+'\delta_+ - 2\delta_+' B_o^+ K'\Lambda_o^{-1} K E_o K'\delta_+ -$$

$$-2\delta_+' K C_2 K'\Lambda_o^{-1} K B_o^+'\delta_+ + \omega(\tau) = \bar{g}_1 + \bar{g}_2 + \bar{g}_3 + \bar{g}_4 - 2\bar{g}_5 - 2\bar{g}_6 + \omega(\tau) =$$

$$= \bar{\gamma}_3 + \omega(\tau), \qquad \text{(Z.271)}$$

όπου

$$\delta_+ = \Delta_o^{-1}\delta_2, \quad \bar{g}_1 = \delta_+' K E_o K'\delta_+, \quad \bar{g}_2 = \delta_+' K C_2 K'\delta_+,$$

$$\bar{g}_3 = \delta_+' B_o^+ K'\Lambda_o^{-1} K E_o K'\Lambda_o^{-1} K B_o^+'\delta_+, \quad \bar{g}_4 = \delta_+' B_o^+ K'\Lambda_o^{-1} K C_2 K'\Lambda_o^{-1} K B_o^+'\delta_+, \qquad \text{(Z.272)}$$

$$\bar{g}_5 = \delta_+' K E_o K'\Lambda_o^{-1} K B_o^+'\delta_+, \quad \bar{g}_6 = \delta_+' K C_2 K'\Lambda_o^{-1} K B_o^+'\delta_+.$$

QED

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΛΗΜΜΑΤΟΣ 6.2: Έστω s ένας φανταστικός αριθμός, $t = (1-2s)^{-1}$ και $\varphi_{l,\gamma_o}(s)$ η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας μη κεντρικής χ^2 μεταβλητής με l βαθμούς ελευθερίας και μη κεντρική παράμετρο γ_o. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Ζ.15 βρίσκουμε ότι η υπό συνθήκη (ως προς την μη κεντρική παράμετρο γ_o) χαρακτηριστική συνάρτηση της χ^2 κατανομής είναι

$$\varphi_{l,\gamma}(s) = t^{l/2} e^{st\gamma_o}\left[1+\tau^2 st\alpha\right]+\omega(\tau^3), \qquad (Z.273)$$

όπου

$$\alpha \overset{o}{=} \gamma_1^*+(t-1)\gamma_2^*, \qquad (Z.274)$$

και γ_1^*, γ_2^* είναι οι μη στοχαστικές ποσότητες που ορίστηκαν στο Λήμμα Ζ.15 και ο συμβολισμός $x \overset{o}{=} y$ σημαίνει ότι $E(x)=E(y)$. Παίρνοντας αναμενόμενες τιμές στην (Ζ.273) έχουμε

$$E\left[\varphi_{l,\gamma}(s)\right]=E\left[t^{l/2}e^{st\gamma_o}\left[1+\tau^2 st\alpha\right]+\omega(\tau^3)\right]=$$

$$=t^{l/2}e^{st\gamma_o}\left[1+\tau^2 stE(\alpha)\right]+O(\tau^3)=\varphi_{l,\gamma_o}(s)\left[1+\tau^2 stE\left[\gamma_1^*+(t-1)\gamma_2^*\right]\right]+O(\tau^3)=$$

$$=\varphi_{l,\gamma_o}(s)\left[1+\tau^2 st\left[\gamma_1^*+(t-1)\gamma_2^*\right]\right]+O(\tau^3). \qquad (Z.275)$$

Επιπλέον, εφόσον

$$\varphi_{l,\gamma_o}(s)=(1-2s)^{-l/2}e^{s\gamma_o/(1-2s)}, \qquad (Z.276)$$

εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη της (Ζ.142), μπορούμε να δείξουμε ότι

$$t^i\varphi_{l,\gamma_o}(s)=\varphi_{l+2i,\gamma_o}(s) \quad (i=1,2,\ldots). \qquad (Z.277)$$

Το Λήμμα 6.1 ισχύει και στην περίπτωση που η ελεγχόμενη υπόθεση είναι η (6.39), με την διαφορά ότι τα γ και γ_3, που ορίζονται στην (6.26), υπολογίζονται διαφορετικά, διότι κάτω από την νέα εναλλακτική υπόθεση (6.40) το T×1 διάνυσμα ξ ορίζεται έτσι ώστε να ικανοποιεί την (6.48). Επιπλέον, παρατηρούμε ότι το ανάπτυγμα (Ζ.140) εξαρτάται από τις μήτρες συνθήκης (conditioning matrices) X και Z μόνον μέσω των παραμέτρων c_1, c_2, γ_3 και γ.

Αντικαθιστώντας στην (Ζ.140) τις στοχαστικές παραμέτρους c_1, c_2, γ_3 και γ με τα όρια πιθανότητάς τους, που δίνονται στα Λήμματα Ζ.10 και Ζ.16, και την συνάρτηση $\varphi_{l,\gamma}(s)$ με το ανάπτυγμα της αναμενόμενης τιμής της (βλ. σχέση (Ζ.275)), βρίσκουμε το ανάπτυγμα της μη δεσμευμένης χαρακτηριστικής συνάρτησης του στατιστικού (6.15). Αυτή η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι

$$\bar{\varphi}_S(s)=\varphi_{l,\gamma_0}(s)\left[1+\tau^2 st\left[\gamma_1^*+(t-1)\gamma_2^*\right]\right]+O(\tau^3)+$$

$$+\left[\tau^2 s\sum_{i=0}^{4} d_i t^i\right]\left[\varphi_{l,\gamma_0}(s)\left[1+\tau^2 st\left[\gamma_1^*+(t-1)\gamma_2^*\right]\right]+O(\tau^3)\right]+O(\tau^3)=$$

$$=\varphi_{l,\gamma_0}(s)+\tau^2 s\left[t(\gamma_1^*-\gamma_2^*)+t^2\gamma_2^*+\sum_{i=0}^{4} d_i t^i\right]\varphi_{l,\gamma_0}(s)+O(\tau^3)=$$

$$=\varphi_{l,\gamma_0}(s)+\tau^2 s\sum_{i=0}^{4}\bar{d}_i t^i\varphi_{l,\gamma_0}(s)+O(\tau^3)=$$

$$=\varphi_{l,\gamma_0}(s)+\tau^2 s\sum_{i=0}^{4}\bar{d}_i\varphi_{l+2i,\gamma_0}(s)+O(\tau^3), \qquad (Z.278)$$

όπου

$$\bar{d}_0=plimd_0=\bar{h}_0,\quad \bar{d}_1=plimd_1+\gamma_1^*-\gamma_2^*=l\bar{h}_1+\bar{p}_1,$$

$$\bar{d}_2=plimd_2+\gamma_2^*=l(l+2)\bar{h}_2+\gamma_0\bar{h}_1+\bar{p}_2,\quad \bar{d}_3=plimd_3=2(l+2)\gamma_0\bar{h}_2+\bar{p}_3,$$

$$\bar{d}_4=plimd_4=\gamma_0^2\bar{h}_2,\quad \bar{h}_0=plimh_0=\alpha_1^2\bar{c}_1,$$

$$\bar{h}_1=plimh_1=1/2+2n+1-\bar{c}_2-\varkappa+2(\alpha_0-1)\alpha_1\bar{c}_1, \qquad (Z.279)$$

$$\bar{h}_2=plimh_2=(1-j)/2+(\alpha_0-1)^2\bar{c}_1,$$

$$\bar{p}_1=-plimp_1+\gamma_1^*-\gamma_2^*=-l\bar{\gamma}_3-(1+4\gamma_0+2n-1)\gamma_0+\gamma_1^*-\gamma_2^*,$$

$$\bar{p}_2=-plimp_2+\gamma_2^*=-(1/2+1+\bar{\gamma}_3-2\gamma_0)\gamma_0+\gamma_2^*,\quad \bar{p}_3=-plimp_3=-\gamma_0^2/2.$$

Διαιρώντας την (Ζ.278) δια $-s$ και αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό Fourier (βλ. Λήμμα Α.2) βρίσκουμε την μη δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής του στατιστικού (6.15):

$$-\bar{\varphi}_S(s)/s=-\varphi_{l,\gamma_0}(s)/s-\tau^2\sum_{i=0}^{4}\bar{d}_i\varphi_{l+2i,\gamma_0}(s)+O(\tau^3)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pr\left\{S(k,j,\mathcal{K}) \le x\right\} = F_{l,\gamma_o}(x) - \tau^2 \sum_{i=0}^{4} \bar{d}_i f_{l+2i,\gamma_o}(x) + O(\tau^3), \qquad (Z.280)$$

όπου $F_{l,\gamma_o}(\cdot)$, $f_{l,\gamma_o}(\cdot)$ είναι οι συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας, αντίστοιχα, μιας μη κεντρικής χ^2 μεταβλητής με μη κεντρική παράμετρο γ_o και l βαθμούς ελευθερίας.

Η γενική απόδειξη της εγκυρότητας της μεθόδου που χρησιμοποιήσαμε είναι πολύ δύσκολη και ξεφεύγει από τα όρια αυτής της διατριβής. Ωστόσο, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι, αν η αρχική ασυμπτωτική ανάπτυξη του στατιστικού (6.15) ήταν όχι υπό συνθήκη, τότε οι μέθοδοι που ακολουθήσαμε μέχρι τώρα θα αρκούσαν για την απόδειξη της εγκυρότητας της προσέγγισης (Z.280). Όμως, η μέθοδος αυτή οδηγεί (μέσω σημαντικά πιο πολύπλοκων υπολογισμών) ακριβώς στους ίδιους τύπους με αυτούς που πήραμε από την υπό συνθήκην ασυμπτωτική ανάπτυξη. Συνεπώς, δεν υπάρχει λόγος να αμφιβάλλουμε για την εγκυρότητα της προσέγγισης (Z.280).

QED

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΠΟΡΙΣΜΑΤΟΣ 6.1: Έστω $F_l(\cdot)$, $f_l(\cdot)$ οι συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας, αντίστοιχα, μιας κεντρικής χ^2 μεταβλητής με l βαθμούς ελευθερίας. Κάτω από την μηδενική υπόθεση, το m×1 διάνυσμα δ=0 και συνεπώς το l×1 διάνυσμα δ_2=0 και το T×1 διάνυσμα ξ=0. Έτσι,

$$\gamma_1^*=0,\ \gamma_2^*=0,\ \gamma_3=0,\ \bar{\gamma}_3=0,\ \gamma=0,\ \gamma_o=0. \qquad (Z.281)$$

Χρησιμοποιώντας τις πολύ γνωστές ταυτότητες

$$x f_l(x) = l f_{l+2}(x), \quad x^2 f_l(x) = l(l+2) f_{l+4}(x), \qquad (Z.282)$$

αντικαθιστώντας την (Z.281) στην (6.49) και παίρνοντας Taylor αναπτύγματα των $F_l(\chi_\alpha^{2*})$ και $f_l(\chi_\alpha^{2*})$ περί το χ_α^2 βρίσκουμε

$$\Pr\left\{S(k,j,\mathcal{K}) \le \chi_\alpha^{2*}\right\} =$$

$$= F_l(\chi_\alpha^{2*}) - \tau^2\left[\bar{h}_o f_l(\chi_\alpha^{2*}) + \bar{h}_1 l f_{l+2}(\chi_\alpha^{2*}) + \bar{h}_2 l(l+2) f_{l+4}(\chi_\alpha^{2*})\right] + O(\tau^3) =$$

$$= F_l(\chi_\alpha^{2*}) - \tau^2\left[\bar{h}_o + \bar{h}_1 \chi_\alpha^{2*} + \bar{h}_2 (\chi_\alpha^{2*})^2\right] f_l(\chi_\alpha^{2*}) + O(\tau^3) =$$

$$= F_l(\chi_\alpha^{2*}) - \tau^2 \sum_{i=0}^{2} \bar{h}_i (\chi_\alpha^{2*})^i f_l(\chi_\alpha^{2*}) + O(\tau^3) =$$

$$=F_l(\chi^2_\alpha)+\tau^2\sum_{i=0}^{2}\bar{h}_i(\chi^2_\alpha)^i f_l(\chi^2_\alpha)-\tau^2\sum_{i=0}^{2}\bar{h}_i\left[\chi^2_\alpha+\tau^2\sum_{i=0}^{2}\bar{h}_i(\chi^2_\alpha)^i\right]^i\cdot$$

$$\cdot\left[f_l(\chi^2_\alpha)+\tau^2\sum_{i=0}^{2}\bar{h}_i(\chi^2_\alpha)^i f_l'(\chi^2_\alpha)\right]+O(\tau^3)=$$

$$=F_l(\chi^2_\alpha)+\tau^2\sum_{i=0}^{2}\bar{h}_i(\chi^2_\alpha)^i f_l(\chi^2_\alpha)-\tau^2\sum_{i=0}^{2}\bar{h}_i(\chi^2_\alpha)^i f_l(\chi^2_\alpha)+O(\tau^3)=$$

$$=F_l(\chi^2_\alpha)+O(\tau^3)=1-\alpha+O(\tau^3)\,. \qquad (Z.283)$$

QED

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΛΗΜΜΑΤΟΣ 6.3: Έστω $F_{l,\gamma_o}(\cdot)$, $f_{l,\gamma_o}(\cdot)$ οι συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας, αντίστοιχα, μιας μη κεντρικής χ^2 μεταβλητής με μη κεντρική παράμετρο γ_o και l βαθμούς ελευθερίας. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (6.49), (6.50), (6.54) και (6.55), την γνωστή ταυτότητα

$$xf_{l,\gamma_o}(x) = lf_{l+2,\gamma_o}(x)+\gamma_o f_{l+4,\gamma_o}(x) \qquad (Z.284)$$

και αναπτύσσοντας κατά Taylor τις $F_{l,\gamma_o}(\chi^{2*}_\alpha)$, $f_{l+2i,\gamma_o}(\chi^{2*}_\alpha)$ περί το χ^2_α, βρίσκουμε ότι, κάτω από την ακολουθία των τοπικών εναλλακτικών υποθέσεων ($\delta\neq 0$, $\delta_2\neq 0$), για j=0, 1, 2, ισχύει η σχέση

$$\Pr\left\{S(k,j,\mathcal{K}) > \chi^{2*}_\alpha\right\} = 1-\Pr\left\{S(k,j,\mathcal{K}) \le \chi^{2*}_\alpha\right\} =$$

$$=1-F_{l,\gamma_o}(\chi^{2*}_\alpha)+\tau^2\sum_{i=0}^{4}\bar{d}_i f_{l+2i,\gamma_o}(\chi^{2*}_\alpha)+O(\tau^3)=$$

$$=1-\left[F_{l,\gamma_o}(\chi^2_\alpha)+\tau^2\sum_{i=0}^{2}\bar{h}_i(\chi^2_\alpha)^i f_{l,\gamma_o}(\chi^2_\alpha)\right]+$$

$$+\tau^2\sum_{i=0}^{4}\bar{d}_i\left[f_{l+2i,\gamma_o}(\chi^2_\alpha)+\tau^2\sum_{i=0}^{2}\bar{h}_i(\chi^2_\alpha)^i f'_{l+2i,\gamma_o}(\chi^2_\alpha)\right]+O(\tau^3)=$$

$$=1-F_{l,\gamma_o}(\chi^2_\alpha)-\tau^2\left[\bar{h}_o f_{l,\gamma_o}(\chi^2_\alpha)+\bar{h}_1\chi^2_\alpha f_{l,\gamma_o}(\chi^2_\alpha)+\bar{h}_2(\chi^2_\alpha)^2 f_{l,\gamma_o}(\chi^2_\alpha)\right]+$$

$$+\tau^2\left[\bar{d}_o f_{l,\gamma_o}(\chi^2_\alpha)+\bar{d}_1 f_{l+2,\gamma_o}(\chi^2_\alpha)+\bar{d}_2 f_{l+4,\gamma_o}(\chi^2_\alpha)+\bar{d}_3 f_{l+6,\gamma_o}(\chi^2_\alpha)+\right.$$

$$\left.+\bar{d}_4 f_{l+8,\gamma_o}(\chi^2_\alpha)\right]+O(\tau^3)=$$

$$=1-F_{l,\gamma_o}(\chi^2_\alpha)-\tau^2\left[\bar{h}_o f_{l,\gamma_o}(\chi^2_\alpha)+\bar{h}_1\left[lf_{l+2,\gamma_o}(\chi^2_\alpha)+\gamma_o f_{l+4,\gamma_o}(\chi^2_\alpha)\right]+\right.$$

$$+\bar{h}_2\left[l(l+2)f_{l+4,\gamma_0}(\chi^2_\alpha)+2\gamma_0(l+2)f_{l+6,\gamma_0}(\chi^2_\alpha)+\gamma_0^2 f_{l+8,\gamma_0}(\chi^2_\alpha)\right]\Big]+$$

$$+\tau^2\Big[\ \bar{h}_0 f_{l,\gamma_0}(\chi^2_\alpha)+(l\bar{h}_1+\bar{p}_1)f_{l+2,\gamma_0}(\chi^2_\alpha)+$$

$$+\left[l(l+2)\bar{h}_2+\gamma_0\bar{h}_1+\bar{p}_2\right]f_{l+4,\gamma_0}(\chi^2_\alpha)+\left[2(l+2)\gamma_0\bar{h}_2+\bar{p}_3\right]f_{l+6,\gamma_0}(\chi^2_\alpha)+$$

$$+\gamma_0^2\bar{h}_2 f_{l+8,\gamma_0}(\chi^2_\alpha)\Big]+O(\tau^3)=$$

$$=1-F_{l,\gamma_0}(\chi^2_\alpha)+\tau^2\left[\bar{p}_1 f_{l+2,\gamma_0}(\chi^2_\alpha)+\bar{p}_2 f_{l+4,\gamma_0}(\chi^2_\alpha)+\bar{p}_3 f_{l+6,\gamma_0}(\chi^2_\alpha)\right]+O(\tau^3)=$$

$$=\pi_0(\chi^2_\alpha)+\tau^2\sum_{i=0}^{3}\bar{p}_i f_{l+2i,\gamma_0}(\chi^2_\alpha)+O(\tau^3)=\pi_2(\chi^2_\alpha)+O(\tau^3)\,, \qquad (Z.285)$$

όπου

$$\pi_2(x)=\pi_0(x)+\tau^2\sum_{i=0}^{3}\bar{p}_i f_{l+2i,\gamma_0}(x)\,, \qquad \pi_0(x)=1-F_{l,\gamma_0}(x) \qquad (Z.286)$$

είναι οι δεύτερης και πρώτης τάξης συναρτήσεις τοπικής ισχύος, αντίστοιχα, και εφόσον από την (Z.284) έχουμε

$$x^2 f_{l,\gamma_0}(x)=x\left[x f_{l,\gamma_0}(x)\right]=x\left[l f_{l+2,\gamma_0}(x)+\gamma_0 f_{l+4,\gamma_0}(x)\right]=$$

$$=l\left[x f_{l+2,\gamma_0}(x)\right]+\gamma_0\left[x f_{l+4,\gamma_0}(x)\right]=$$

$$=l\left[(l+2)f_{l+4,\gamma_0}(x)+\gamma_0 f_{l+6,\gamma_0}(x)\right]+\gamma_0\left[(l+4)f_{l+6,\gamma_0}(x)+\gamma_0 f_{l+8,\gamma_0}(x)\right]=$$

$$=l(l+2)f_{l+4,\gamma_0}(x)+l\gamma_0 f_{l+6,\gamma_0}(x)+\gamma_0(l+4)f_{l+6,\gamma_0}(x)+\gamma_0^2 f_{l+8,\gamma_0}(x)=$$

$$=l(l+2)f_{l+4,\gamma_0}(x)+2\gamma_0(l+2)f_{l+6,\gamma_0}(x)+\gamma_0^2 f_{l+8,\gamma_0}(x)\,.$$

Από το Λήμμα 6.2 και την (6.55) έχουμε ότι, το δεύτερης τάξης μέγεθος και η δεύτερης τάξης τοπική ισχύς των ελέγχων των Anderson, Rubin και Sargan είναι

$$\Pr\left\{S(k,j,\mathcal{K}) > \chi^2_\alpha \,|\, H_0\right\} + O(\tau^2) = 1-F_{l,0}(\chi^2_\alpha) = 1-F_l(\chi^2_\alpha) = \alpha, \qquad (Z.287)$$

$$\Pr\left\{S(k,j,\mathcal{K}) > \chi^2_\alpha \,|\, H_1\right\} + O(\tau^2) = 1-F_{l,\gamma_0}(\chi^2_\alpha) = \pi_0(\chi^2_\alpha) \geq \alpha,$$

αντίστοιχα. Συνεπώς, οι έλεγχοι των Anderson, Rubin και Sargan

είναι, με δεύτερης τάξης ακρίβεια, αμερόληπτοι έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης των αναληθών περιορισμών ορθοχωνιότητας, με την έννοια ότι, η δεύτερης τάξης τοπική ισχύς τους δεν είναι ποτέ μικρότερη από το δεύτερης τάξης μέγεθός τους.

QED

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 6.1: Εφόσον το στατιστικό (6.15) δέχεται το στοχαστικό ανάπτυγμα (βλ. την σχέση (Z.93))

$$S(k,j,\mathcal{K})=S_0+\tau S_1+\tau^2(S_2-S_3)+\omega(\tau^3),$$

όπου $S_0=u_0'Nu_0$, το στατιστικό (6.56) δέχεται ένα στοχαστικό ανάπτυγμα της μορφής

$$\hat{S}(k,j,\mathcal{K})=S_0+\tau S_1+\tau^2(S_2-S_3)+\omega(\tau^3)-\tau^2\sum_{i=0}^{2}\bar{h}_i\left[S_0+\tau S_1+\tau^2(S_2-S_3)+\omega(\tau^3)\right]^i=$$

$$=S_0+\tau S_1+\tau^2(S_2-S_3)-\tau^2\left[\bar{h}_0+\bar{h}_1\left[S_0+\tau S_1+\tau^2(S_2-S_3)\right]+\right.$$

$$\left.+\bar{h}_2\left[S_0+\tau S_1+\tau^2(S_2-S_3)\right]^2\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=S_0+\tau S_1+\tau^2(S_2-S_3)-\tau^2\left[\bar{h}_0+\bar{h}_1S_0+\bar{h}_2S_0^2\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=S_0+\tau S_1+\tau^2\left[S_2-S_3-\bar{h}_0-\bar{h}_1S_0-\bar{h}_2S_0^2\right]+\omega(\tau^3)=$$

$$=S_0+\tau S_1+\tau^2S_4+\omega(\tau^3), \qquad (Z.288)$$

όπου

$$S_4=S_2-S_3-\bar{h}_0-\bar{h}_1S_0-\bar{h}_2S_0^2=S_2-S_3-\sum_{i=0}^{2}\bar{h}_iS_0^i. \qquad (Z.289)$$

Έστω s ένας φανταστικός αριθμός, $t=(1-2s)^{-1}$ και $\varphi_{l,\gamma_0}(s)$ η χαρακτηριστική συνάρτηση της μη κεντρικής χ^2 μεταβλητής $S_0=u_0'Nu_0$, με l βαθμούς ελευθερίας και μη κεντρική παράμετρο γ_0. Επιπλέον, υπενθυμίζουμε ότι $\bar{\varphi}_S(s)$ είναι η μη δεσμευμένη χαρακτηριστική συνάρτηση του στατιστικού (6.15). Χρησιμοποιώντας το Λήμμα Z.6, τις (Z.126), (Z.129) και (Z.277) και αντικαθιστώντας την παράμετρο γ με το όριο πιθανότητάς της, γ_0, βρίσκουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\text{(i)}\quad E\left[e^{sS_0}S_0\right]=E\left[e^{su_0'Nu_0}u_0'Nu_0\right]=\varphi_{l,\gamma_0}(s)E\left[(\upsilon+\mu)'N(\upsilon+\mu)\right]=$$

$$=\varphi_{l,\gamma_0}(s)(lt+\gamma_0t^2)=lt\varphi_{l,\gamma_0}(s)+\gamma_0t^2\varphi_{l,\gamma_0}(s)=$$

$$=l\varphi_{l+2,\gamma_o}(s)+\gamma_o\varphi_{l+4,\gamma_o}(s), \qquad (Z.290)$$

$$(ii)\ E\left[e^{sS_o}S_o^2\right]=E\left[e^{su_o'Nu_o}(u_o'Nu_o)^2\right]=\varphi_{l,\gamma_o}(s)E\left[\left[(\upsilon+\mu)'N(\upsilon+\mu)\right]^2\right]=$$

$$=\varphi_{l,\gamma_o}(s)\left[\gamma_o^2t^4+2(l+2)\gamma_o t^3+l(l+2)t^2\right]=$$

$$=\gamma_o^2t^4\varphi_{l,\gamma_o}(s)+2(l+2)\gamma_o t^3\varphi_{l,\gamma_o}(s)+l(l+2)t^2\varphi_{l,\gamma_o}(s)=$$

$$=\gamma_o^2\varphi_{l+8,\gamma_o}(s)+2(l+2)\gamma_o\varphi_{l+6,\gamma_o}(s)+l(l+2)\varphi_{l+4,\gamma_o}(s). \qquad (Z.291)$$

Χρησιμοποιώντας τα Λήμματα 6.1 και 6.2 και τις σχέσεις (Z.288), (Z.289), (Z.290) και (Z.291) βρίσκουμε ότι η μη δεσμευμένη χαρακτηριστική συνάρτηση του στατιστικού (6.56) είναι

$$\varphi_{\hat{S}}(s)=E\left[e^{s\hat{S}(k,j,K)}\right]=E\left[e^{s[S_o+\tau S_1+\tau^2S_4+\omega(\tau^3)]}\right]=$$

$$=E\left[e^{sS_o}e^{s[\tau S_1+\tau^2S_4]}\right]+O(\tau^3)=$$

$$=E\left[e^{sS_o}\left[1+s(\tau S_1+\tau^2S_4)+s^2(\tau S_1+\tau^2S_4)^2/2)\right]\right]+O(\tau^3)=$$

$$=E\left[e^{sS_o}\left[1+s\tau S_1+s\tau^2(S_4+sS_1^2/2)\right]\right]+O(\tau^3)=$$

$$=E\left[e^{sS_o}\left[1+s\tau S_1+s\tau^2\left[(S_2-S_3-\sum_{i=0}^{2}\bar{h}_iS_o^i)+sS_1^2/2\right]\right]\right]+O(\tau^3)=$$

$$=E\left[e^{sS_o}\left[1+s\tau S_1+s\tau^2(S_2-S_3+sS_1^2/2)\right]\right]-E\left[e^{sS_o}s\tau^2\sum_{i=0}^{2}\bar{h}_iS_o^i\right]+O(\tau^3)=$$

$$=\bar{\varphi}_S(s)-s\tau^2\sum_{i=0}^{2}\bar{h}_iE\left[e^{sS_o}S_o^i\right]+O(\tau^3)=$$

$$=\bar{\varphi}_S(s)-s\tau^2\left[\bar{h}_oE\left[e^{sS_o}\right]+\bar{h}_1E\left[e^{sS_o}S_o\right]+\bar{h}_2E\left[e^{sS_o}S_o^2\right]\right]+O(\tau^3)=$$

$$=\bar{\varphi}_S(s)-s\tau^2\left[\bar{h}_o\varphi_{l,\gamma_o}(s)+\bar{h}_1\left[l\varphi_{l+2,\gamma_o}(s)+\gamma_o\varphi_{l+4,\gamma_o}(s)\right]+\right.$$

$$\left.+\bar{h}_2\left[\gamma_o^2\varphi_{l+8,\gamma_o}(s)+2(l+2)\gamma_o\varphi_{l+6,\gamma_o}(s)+l(l+2)\varphi_{l+4,\gamma_o}(s)\right]\right]+$$

$$+O(\tau^3). \qquad (Z.292)$$

Διαιρώντας την (Z.292) δια $-s$, αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό

Fourier (βλ. Λήμμα Α.2) και χρησιμοποιώντας τις (Ζ.279) και (Ζ.280), βρίσκουμε την μη δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής του στατιστικού (6.56):

$$-\varphi_{\hat{S}}(s)/s = -\bar{\varphi}_{S}(s)/s+\tau^2\left[\bar{h}_o\varphi_{l,\gamma_o}(s)+\bar{h}_1 l\varphi_{l+2,\gamma_o}(s)+\bar{h}_1\gamma_o\varphi_{l+4,\gamma_o}(s)+\right.$$

$$\left.+\bar{h}_2\gamma_o^2\varphi_{l+8,\gamma_o}(s)+\bar{h}_2 2(l+2)\gamma_o\varphi_{l+6,\gamma_o}(s)+\bar{h}_2 l(l+2)\varphi_{l+4,\gamma_o}(s)\right]+O(\tau^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pr\left\{\hat{S}(k,j,\mathcal{K}) \le x\right\} = \Pr\left\{S(k,j,\mathcal{K}) \le x\right\} +$$

$$+\tau^2\left[\bar{h}_o f_{l,\gamma_o}(x)+\bar{h}_1 l f_{l+2,\gamma_o}(x)+\bar{h}_1\gamma_o f_{l+4,\gamma_o}(x)+\right.$$

$$\left.+\bar{h}_2\gamma_o^2 f_{l+8,\gamma_o}(x)+\bar{h}_2 2(l+2)\gamma_o f_{l+6,\gamma_o}(x)+\bar{h}_2 l(l+2) f_{l+4,\gamma_o}(x)\right]+O(\tau^3)=$$

$$=F_{l,\gamma_o}(x)-\tau^2\sum_{i=0}^{4}\bar{d}_i f_{l+2i,\gamma_o}(x)+$$

$$+\tau^2\left[\bar{h}_o f_{l,\gamma_o}(x)+\bar{h}_1 l f_{l+2,\gamma_o}(x)+\bar{h}_1\gamma_o f_{l+4,\gamma_o}(x)+\right.$$

$$\left.+\bar{h}_2\gamma_o^2 f_{l+8,\gamma_o}(x)+\bar{h}_2 2(l+2)\gamma_o f_{l+6,\gamma_o}(x)+\bar{h}_2 l(l+2) f_{l+4,\gamma_o}(x)\right]+O(\tau^3)=$$

$$=F_{l,\gamma_o}(x)-\tau^2\left[\bar{h}_o f_{l,\gamma_o}(x)+(l\bar{h}_1+\bar{p}_1) f_{l+2,\gamma_o}(x)+\right.$$

$$+\left[l(l+2)\bar{h}_2+\gamma_o\bar{h}_1+\bar{p}_2\right] f_{l+4,\gamma_o}(x)+\left[2(l+2)\gamma_o\bar{h}_2+\bar{p}_3\right] f_{l+6,\gamma_o}(x)+$$

$$\left.+\gamma_o^2\bar{h}_2 f_{l+8,\gamma_o}(x)\right]+\tau^2\left[\bar{h}_o f_{l,\gamma_o}(x)+\bar{h}_1 l f_{l+2,\gamma_o}(x)+\bar{h}_1\gamma_o f_{l+4,\gamma_o}(x)+\right.$$

$$\left.+\bar{h}_2\gamma_o^2 f_{l+8,\gamma_o}(x)+\bar{h}_2 2(l+2)\gamma_o f_{l+6,\gamma_o}(x)+\bar{h}_2 l(l+2) f_{l+4,\gamma_o}(x)\right]+O(\tau^3)=$$

$$=F_{l,\gamma_o}(x)-\tau^2\left[\bar{p}_1 f_{l+2,\gamma_o}(x)+\bar{p}_2 f_{l+4,\gamma_o}(x)+\bar{p}_3 f_{l+6,\gamma_o}(x)\right]+O(\tau^3)=$$

$$=F_{l,\gamma_o}(x)-\tau^2\sum_{i=1}^{3}\bar{p}_i f_{l+2i,\gamma_o}(x)+O(\tau^3)\,. \qquad (Ζ.293)$$

Η εγκυρότητα της ασυμπτωτικής προσέγγισης (Ζ.293) μπορεί να αποδειχθεί αν ακολουθήσουμε ακριβώς εκείνη την διαδικασία, από την οποία προκύπτει η εγκυρότητα της ασυμπτωτικής προσέγγισης (Ζ.280) (βλ. την απόδειξη του Λήμματος 6.2).

Κάτω από την μηδενική υπόθεση ($\delta=0$, $\delta_2=0$, $\gamma_1^*=0$, $\dot{\gamma}_2^*=0$, $\gamma_3=0$, $\bar{\gamma}_3=0$, $\gamma=0$, $\gamma_o=0$,) η μη δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής του κατά Cornish-Fisher διορθωμένου στατιστικού (6.56) είναι

$$\Pr\left\{\hat{S}(k,j,\mathcal{K}) \le x\right\} = F_l(x)+O(\tau^3). \qquad (Z.294)$$

Επιπλέον, έστω χ^2_α η άνω α κριτική τιμή μιας κεντρικής χ^2 μεταβλητής με l βαθμούς ελευθερίας. Τότε, από τις σχέσεις (6.54) και (6.55) έπεται ότι, κάτω από την εναλλακτική υπόθεση (6.40), η τοπική ισχύς του στατιστικού (6.56) είναι

$$\Pr\left\{\hat{S}(k,j,\mathcal{K}) > \chi^2_\alpha\right\} = 1-\Pr\left\{\hat{S}(k,j,\mathcal{K}) \le \chi^2_\alpha\right\} =$$

$$=1-F_{l,\gamma_o}(\chi^2_\alpha)+\tau^2\sum_{i=1}^{3}\bar{p}_i f_{l+2i,\gamma_o}(\chi^2_\alpha)+O(\tau^3)=$$

$$=\pi_o(\chi^2_\alpha)+\tau^2\sum_{i=1}^{3}\bar{p}_i f_{l+2i,\gamma_o}(\chi^2_\alpha)+O(\tau^3)=\pi_2(\chi^2_\alpha)+O(\tau^3), \qquad (Z.295)$$

για $j=0, 1, 2$.

QED

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΛΗΜΜΑΤΟΣ 6.4: Μπορούμε να δείξουμε (βλ. Λήμμα Β.5) ότι, σε όρους των συναρτήσεων κατανομής και πυκνότητας της κεντρικής χ^2 κατανομής, οι συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας της κεντρικής F κατανομής δέχονται τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα

$$F^l_{T-m}(x)=F_l(lx)+(\tau^2/2)(l-2-lx)lxf_l(lx)+O(\tau^4),$$

$$f^l_{T-m}(x)=lf_l(lx)+O(\tau^2). \qquad (Z.296)$$

Ορίζουμε το στατιστικό

$$\upsilon^* = T\frac{\hat{u}'P_Z\hat{u}}{\hat{u}'\bar{P}_Z\hat{u}} = \frac{S}{1-S/T} = \frac{S}{(1-\tau^2 S)} = S(1-\tau^2 S)^{-1}=S\left[1+\tau^2 S+\omega(\tau^4)\right]=$$

$$=S+\tau^2S^2+\omega(\tau^4). \qquad (Z.297)$$

Έστω s ένας φανταστικός αριθμός, $t=(1-2s)^{-1}$ και $\bar{\varphi}_S(s)$ η μη δεσμευμένη χαρακτηριστική συνάρτηση του στατιστικού (6.15). Τότε, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6.2, τις (Β.155), (Ζ.281) και (Ζ.297) έχουμε ότι, κάτω από την μηδενική υπόθεση, η χαρακτηριστική συνάρτηση του στατιστικού υ^* είναι

$$\varphi_{\upsilon^*}(s)=E\left[e^{s\upsilon^*}\right]=E\left[e^{s[S+\tau^2 S^2+\omega(\tau^4)]}\right]=E\left[e^{sS}e^{s\tau^2S^2}\right]+O(\tau^4)=$$

$$=E\left[e^{sS}\left[1+s\tau^2S^2\right]\right]+O(\tau^4)=E\left[e^{sS}\right]+s\tau^2E\left[e^{sS}S^2\right]+O(\tau^4)=$$

$$=\bar{\varphi}_S(s)+s\tau^2 l(l+2)\varphi_{l+4}(s)+O(\tau^4)\,. \qquad (Z.298)$$

Διαιρώντας την (Z.298) δια $-s$ και αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό Fourier (βλ. Λήμμα A.2) βρίσκουμε ότι η μη δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής του στατιστικού (Z.297) είναι

$$-\varphi_{\upsilon^*}(s)/s = -\bar{\varphi}_S(s)/s-\tau^2 l(l+2)\varphi_{l+4}(s)+O(\tau^4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pr\left\{\upsilon^* \le x\right\} = \Pr\left\{S(k,j,\mathcal{K}) \le x\right\} -\tau^2 l(l+2)f_{l+4}(x)+O(\tau^3)\,. \qquad (Z.299)$$

Η εγκυρότητα της ασυμπτωτικής προσέγγισης (Z.299) προκύπτει αν χρησιμοποιήσουμε επιχειρήματα ανάλογα με αυτά του Λήμματος 6.2 για την εγκυρότητα της ασυμπτωτικής προσέγγισης (Z.280).

Έστω

$$y=\left[(T-m)/lT\right]^{-1}x=\left[(1-m/T)/l\right]^{-1}x=(1-\tau^2m)^{-1}lx=\left[1+\tau^2m+O(\tau^4)\right]lx=$$

$$=lx+\tau^2mlx+O(\tau^4)\,. \qquad (Z.300)$$

Τότε, αναπτύσσοντας κατά Taylor τα $F_l(y)$ και $f_l(y)$ περί το lx και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (Z.282) και (Z.296) βρίσκουμε ότι κάτω από την μηδενική υπόθεση ισχύουν οι σχέσεις:

$$F_l(y)=F_l\left[lx+\tau^2mlx+O(\tau^4)\right]=F_l(lx)+\tau^2mlxf_l(lx)+O(\tau^4)=$$

$$=F^l_{T-m}(x)+(\tau^2/2)(lx-l+2)lxf_l(lx)+(\tau^2/2)2mlxf_l(lx)+O(\tau^4)=$$

$$=F^l_{T-m}(x)+(\tau^2/2)\left[(2m-l+2)lxf_l(lx)+(lx)^2f_l(lx)\right]+O(\tau^4)=$$

$$=F^l_{T-m}(x)+(\tau^2/2)\left[(2m-l+2)lf_{l+2}(lx)+l(l+2)f_{l+4}(lx)\right]+O(\tau^4) \qquad (Z.301)$$

και

$$f_l(y)=f_l\left[lx+\tau^2mlx+O(\tau^4)\right]=f_l(lx)+\tau^2mlxf_l'(lx)+O(\tau^4)=$$

$$=f_l(lx)+O(\tau^2)\,. \qquad (Z.302)$$

Από τις σχέσεις (6.59) και (Z.297) έπεται ότι

$$B=\left[(T-m)/lT\right]\upsilon^*\,. \qquad (Z.303)$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημάνουμε τα εξής: Επειδή στην

(Z.297) το στατιστικό υ^* γράφτηκε ως συνάρτηση του στατιστικού (6.12) του Sargan, από την (Z.303) έπεται ότι το στατιστικό B του Basmann πρέπει να θεωρηθεί (για τις ανάγκες της απόδειξης αυτού του λήμματος) συνάρτηση του στατιστικού του Sargan. Συνεπώς, η ασυμπτωτική προσέγγιση της συνάρτησης κατανομής του στατιστικού του Basmann πρέπει να προκύψει από την ασυμπτωτική προσέγγιση της συνάρτησης κατανομής του στατιστικού του Sargan, δηλαδή, να θεωρήσουμε το $j = 2$ και σε ό,τι ακολουθεί να αντικαταστήσουμε το $\bar{h}_2$ με το $\bar{h}_2^S$, που δίνεται στην (Z.305), κατωτέρω.

Από το Λήμμα 6.2 και τις σχέσεις (Z.282), (Z.296), (Z.299), (Z.300), (Z.301), (Z.302) και (Z.303) έπεται ότι κάτω από την μηδενική υπόθεση

$$\Pr\{B \le x\} = \Pr\{\upsilon^* \le y\} =$$

$$= \Pr\{S(k,2,\aleph) \le y\} - \tau^2 l(l+2) f_{l+4}(y) + O(\tau^3) =$$

$$= F_l(y) - \tau^2 [\, \bar{h}_0 f_l(y) + \bar{h}_1 l f_{l+2}(y) + \bar{h}_2^S l(l+2) f_{l+4}(y)\,] -$$

$$- \tau^2 l(l+2) f_{l+4}(y) + O(\tau^3) =$$

$$= F^l_{T-m}(x) + (\tau^2/2)\,[(2m-l+2)\, l f_{l+2}(lx) + l(l+2) f_{l+4}(lx)] -$$

$$- \tau^2 [\, \bar{h}_0 f_l(lx) + \bar{h}_1 l f_{l+2}(lx) + \bar{h}_2^S l(l+2) f_{l+4}(lx)\,] -$$

$$- \tau^2 l(l+2) f_{l+4}(lx) + O(\tau^3) =$$

$$= F^l_{T-m}(x) - \tau^2 \Big[\bar{h}_0 f_l(lx) + \bar{h}_1 l f_{l+2}(lx) + \bar{h}_2^S l(l+2) f_{l+4}(lx) + l(l+2) f_{l+4}(lx) -$$

$$- [(2m-l+2)\, l/2] f_{l+2}(lx) - [l(l+2)/2] f_{l+4}(lx) \Big] + O(\tau^3) =$$

$$= F^l_{T-m}(x) - \tau^2 \Big[\bar{h}_0 f_l(lx) + [\, \bar{h}_1 l - (2m-l+2)\, l/2] f_{l+2}(lx) +$$

$$+ [\, \bar{h}_2^S l(l+2) + l(l+2)/2] f_{l+4}(lx) \Big] + O(\tau^3) =$$

$$= F^l_{T-m}(x) - \tau^2 [\, \bar{h}_0 f_l(lx) + (\bar{h}_1 - m + l/2 - 1)\, l f_{l+2}(lx) +$$

$$+ (\bar{h}_2^S + 1/2)\, l(l+2) f_{l+4}(lx)\,] + O(\tau^3) =$$

$$=F^{l}_{T-m}(x)-\tau^2\left[(\bar{h}_o/l)\,lf_l(lx)+(\bar{h}_1-m+l/2-1)\,lxf_l(lx)+\right.$$

$$\left.+(\bar{h}^{S}_2+1/2)\,(lx)^2 f_l(lx)\right]+O(\tau^3)=$$

$$=F^{l}_{T-m}(x)-\tau^2\left[(\bar{h}_o/l)+(\bar{h}_1-m+l/2-1)x+(\bar{h}^{S}_2+1/2)\,lx^2\right]f^{l}_{T-m}(x)+O(\tau^3)=$$

$$=F^{l}_{T-m}(x)\;-\;\tau^2\sum_{i=0}^{2}\zeta_i x^i f^{l}_{T-m}(x)+O(\tau^3)\,, \qquad (Z.304)$$

όπου

$$\zeta_o=\bar{h}_o/l,\quad \zeta_1=\bar{h}_1-m+l/2-1,\quad \zeta_2=(\bar{h}^{S}_2+1/2)\,l,\quad \bar{h}_o=\alpha_1^2\bar{c}_1,$$

$$\bar{h}_1=1/2+2n+1-\bar{c}_2-\mathcal{K}+2(\alpha_o-1)\alpha_1\bar{c}_1,\quad \bar{h}^{S}_2=-1/2+(\alpha_o-1)^2\bar{c}_1. \qquad (Z.305)$$

Η εγκυρότητα της ασυμπτωτικής προσέγγισης (Z.304) προκύπτει άμεσα από την εγκυρότητα της ασυμπτωτικής προσέγγισης (Z.299).

Κάτω από την υπόθεση (6.58), από τις σχέσεις (6.3), (6.4) και (6.5) έπεται ότι

$P_Z X=X$ και οι μήτρες X, Z είναι μη στοχαστικές. (Z.306)

Από τις (6.2), (6.3), (6.20), (6.26), (6.51) και (Z.306) προκύπτουν οι σχέσεις:

$$q=0,\quad F_Z=P_Z X=X,\quad c_1=q'Gq=0,\quad \bar{c}_1=\operatorname{plim} c_1=0,$$

$$c_2=\operatorname{tr}\left[(F_Z'F_Z)^{-1}X'X\right]=\operatorname{tr}\left[(X'X)^{-1}X'X\right]=\operatorname{tr}I_n=n,\quad \bar{c}_2=\operatorname{plim} c_2=n. \qquad (Z.307)$$

Τότε, από τις (Z.305) και (Z.307) συνεπάγονται οι σχέσεις:

$$\bar{h}_o=0,\quad \bar{h}_1=1/2+n+1-\mathcal{K},\quad \bar{h}^{S}_2=-1/2. \qquad (Z.308)$$

Αντικαθιστώντας από την (Z.308) στην (Z.305) και εφόσον $l=m-n$ παίρνουμε

$$\zeta_o=\bar{h}_o/l=0,$$

$$\zeta_1=\bar{h}_1-m+l/2-1=1/2+n+1-\mathcal{K}-m+1/2-1=1-(m-n)-\mathcal{K}=-\mathcal{K}, \qquad (Z.309)$$

$$\zeta_2=(\bar{h}^{S}_2+1/2)\,l=(-1/2+1/2)\,l=0.$$

Από την (Z.309) έπεται ότι, κάτω από την υπόθεση (6.58) και θέτοντας την αυθαίρετη σταθερά $\mathcal{K}=0$, οι παράμετροι ζ_i $(i=0, 1, 2)$ ισούνται με το μηδέν και επομένως η ασυμπτωτική προσέγγιση (Z.304)

είναι τοπικά ακριβής (locally exact). Δηλαδή, κάτω από την υπόθεση (6.58) και για $\varkappa = 0$, η συνάρτηση κατανομής του στατιστικού του Basmann ισούται με την συνάρτηση κατανομής μιας F μεταβλητής με 1 και T−m βαθμούς ελευθερίας.

QED

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΠΟΡΙΣΜΑΤΟΣ 6.2: Έστω $F^{l}_{T-m}(\cdot)$, $f^{l}_{T-m}(\cdot)$ οι συναρτήσεις κατανομής και πυκνότητας ,αντίστοιχα, μιας F μεταβλητής με 1 και T−m βαθμούς ελευθερίας. Κάτω από την μηδενική υπόθεση, χρησιμοποιώντας την (6.60) και αναπτύσσοντας κατά Taylor τα $F^{l}_{T-m}(F^{*}_{\alpha})$ και $f^{l}_{T-m}(F^{*}_{\alpha})$ περί το F_{α} παίρνουμε

$$\Pr\left\{B \le F^{*}_{\alpha}\right\} = F^{l}_{T-m}(F^{*}_{\alpha}) - \tau^{2}\sum_{i=0}^{2}\zeta_{i}(F^{*}_{\alpha})^{i} f^{l}_{T-m}(F^{*}_{\alpha}) + O(\tau^{3}) =$$

$$= F^{l}_{T-m}(F_{\alpha}) + \tau^{2}\sum_{i=0}^{2}\zeta_{i}F^{i}_{\alpha} f^{l}_{T-m}(F_{\alpha}) - \tau^{2}\sum_{i=0}^{2}\zeta_{i}\left[F_{\alpha} + \tau^{2}\sum_{i=0}^{2}\zeta_{i}F^{i}_{\alpha}\right]^{i} \cdot$$

$$\cdot \left[f^{l}_{T-m}(F_{\alpha}) + \tau^{2}\sum_{i=0}^{2}\zeta_{i}F^{i}_{\alpha} f^{l}_{T-m}{}'(F_{\alpha})\right] + O(\tau^{3}) =$$

$$= F^{l}_{T-m}(F_{\alpha}) + \tau^{2}\sum_{i=0}^{2}\zeta_{i}F^{i}_{\alpha} f^{l}_{T-m}(F_{\alpha}) - \tau^{2}\sum_{i=0}^{2}\zeta_{i}F^{i}_{\alpha} f^{l}_{T-m}(F_{\alpha}) + O(\tau^{3}) =$$

$$= F^{l}_{T-m}(F_{\alpha}) + O(\tau^{3}) = 1-\alpha+O(\tau^{3}) . \qquad (Z.310)$$

Στην απόδειξη του Λήμματος 6.4 δείξαμε ότι, κάτω από την υπόθεση (6.58) και θέτοντας την αυθαίρετη σταθερά $\varkappa = 0$, οι παράμετροι ζ_{i} (i=0, 1, 2) ισούνται με το μηδέν και συνεπώς η τύπου Edgeworth διορθωμένη κριτική τιμή του στατιστικού του Basmann, F^{*}_{α}, ισούται με την κριτική τιμή F_{α} μιας F μεταβλητής με 1 και T−m βαθμούς ελευθερίας.

QED

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 6.2: Χρησιμοποιώντας το Taylor ανάπτυγμα της ποσότητας $x-\tau^{2}\sum_{i=0}^{2}\zeta_{i}x^{i}$ περί το x, μπορούμε να γράψουμε την προσέγγιση (6.60) ως

$$\Pr\left\{B \le x\right\} = F^{l}_{T-m}\left[x-\tau^{2}\sum_{i=0}^{2}\zeta_{i}x^{i}\right] + O(\tau^{3}) . \qquad (Z.311)$$

Από την προσέγγιση (Z.311) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι, υπάρχει μια κεντρική F μεταβλητή με 1 και T−m βαθμούς ελευθερίας τέτοια ώστε

$$F=B-\tau^2\sum_{i=0}^{2}\zeta_i B^i+\omega(\tau^3)=\hat{B}+\omega(\tau^3), \qquad (Z.312)$$

όπου

$$\hat{B}=B-\tau^2\sum_{i=0}^{2}\zeta_i B^i. \qquad (Z.313)$$

Επειδή, λόγω της (Z.312), οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις των τυχαίων μεταβλητών F και $\hat{B}$ διαφέρουν κατά έναν όρο τάξης $O(\tau^3)$, αποδεικνύεται ότι η $\hat{B}$ κατανέμεται, με ένα λάθος τάξης $O(\tau^3)$, ως μια κεντρική F μεταβλητή με 1 και T−m βαθμούς ελευθερίας.

Η εγκυρότητα της ασυμπτωτικής προσέγγισης της συνάρτησης κατανομής του στατιστικού (Z.313) προκύπτει από την εγκυρότητα της ασυμπτωτικής προσέγγισης (6.60) (βλ. την σχέση (Z.304)).

Στην απόδειξη του Λήμματος 6.4 δείξαμε ότι, κάτω από την υπόθεση (6.58) και θέτοντας την αυθαίρετη σταθερά $\varkappa = 0$, οι παράμετροι ζ_i (i=0, 1, 2) ισούνται με το μηδέν. Επομένως, κάτω από την υπόθεση (6.58) και για $\varkappa = 0$, η ασυμπτωτική προσέγγιση είναι τοπικά ακριβής (locally exact), δηλαδή, το κατά Cornish-Fisher διορθωμένο στατιστικό (Z.313) ισούται με το στατιστικό (6.59), το οποίο κατανέμεται ακριβώς ως μια F μεταβλητή με 1 και T−m βαθμούς ελευθερίας.

QED

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Η
ΤΥΧΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Η.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην διατριβή αυτή αναπτύξαμε κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher διορθώσεις του μεγέθους των ελέγχων t και F για την περίπτωση κατά την οποία το γενικευμένο γραμμικό υπόδειγμα με άγνωστη μήτρα συνδιακυμάνσεων των διαταρακτικών όρων εκτιμάται από ένα μικρό δείγμα. Επιπλέον, αναπτύξαμε ελέγχους της εξωγένειας των βοηθητικών μεταβλητών ενός οικονομετρικού συστήματος καθώς και κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher διορθώσεις του μεγέθους αυτών των ελέγχων. Επίσης, διεξήγαμε Monte Carlo πειράματα για να αξιολογήσουμε την απόδοση των ελέγχων και των κατά Edgeworth και κατά Cornish-Fisher διορθώσεων που αναπτύξαμε.

Είναι γνωστό ότι, για να κάνει κανείς μια Monte Carlo μελέτη, πρέπει, κατ' αρχήν, να δημιουργήσει "τυχαίους αριθμούς" από μιαν κατανομή κατάλληλη για το φαινόμενο που μελετά. Για την πειραματική διερεύνηση των t και F ελέγχων στις ειδικές περιπτώσεις του γενικευμένου γραμμικού υποδείγματος (αυτοσυσχέτιση πρώτου βαθμού ή ετεροσκεδαστικότητα των διαταρακτικών όρων) χρησιμοποιήσαμε τις υπορουτίνες GGUBS και GGNPM της IMSL (International Mathematical and Statistical Library) για να δημιουργήσουμε τυχαίους αριθμούς από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (0,1), U(0,1), και την τυπική κανονική κατανομή, N(0,1), αντίστοιχα. Πρέπει να σημειωθεί ότι, για την διεξαγωγή αυτών των Monte Carlo πειραμάτων χρησιμοποιήθησαν μόνο N(0,1) τυχαίοι αριθμοί. Τους U(0,1) τυχαίους αριθμούς τους δημιουργήσαμε διότι αποτελούν την πρώτη ύλη για την κατασκευή των N(0,1) τυχαίων αριθμών. Επιπλέον, για τα τυχαία πειράματα με τα οποία αξιολογήθησαν οι διάφοροι έλεγχοι της εξωγένειας των βοηθητικών μεταβλητών ενός οικονομετρικού συστήματος, χρησιμοποιήσαμε την υπορουτίνα G05DAF της NAG (Numerical Algorithms Group) για να δημιουργήσουμε τυχαίους αριθμούς από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (-10,10), U(-10,10). Ακόμα, χρησιμοποιώντας τις υπορουτίνες G05EAF και G05EZF της NAG δημιουργήσαμε τυχαία διανύσματα από την (πολυμεταβλητή) N(0,Σ) κατανομή, όπου το μηδενικό διάνυσμα είναι ο μέσος και η μήτρα Σ είναι η μήτρα

συνδιακυμάνσεων των διανυσμάτων αυτών.

Η δημιουργία τυχαίων αριθμών συνδέεται με πολλά προβλήματα, με τα οποία δεν θα ασχοληθούμε λεπτομερώς. Σε ό,τι ακολουθεί θα περιγράψουμε περιληπτικά μερικά από τα προβλήματα που σχετίζονται με την δημιουργία και την εξακρίβωση της ποιότητας των τυχαίων αριθμών. Επιπλέον, θα αναφερθούμε στις μεθόδους που χρησιμοποιήσαμε για την δημιουργία και τον έλεγχο της ποιότητας των τυχαίων αριθμών για τα Monte Carlo πειράματά μας. Για λόγους συντομίας θα παρουσιάσουμε αναλυτικά μόνον τις μεθόδους κατασκευής και ελέγχου των U(0,1) και N(0,1) τυχαίων αριθμών, οι οποίοι δημιουργήθησαν με χρήση της IMSL.

Οι ερευνητές που ασχολούνται με την δημιουργία τυχαίων αριθμών έχουν κατά καιρούς χρησιμοποιήσει προς τον σκοπόν αυτόν περιστρεφόμενους δίσκους (1938), εκλεκτικές λίστες υπηρεσιών (selective service lists) (1942), τα λιγότερο σημαντικά ψηφία λογαρίθμων (1947), ειδικούς φυσικούς μηχανισμούς (1951), μηχανισμούς κλήρωσης λαχείων (1952) και, πιό πρόσφατα, ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Οι προηγούμενες μέθοδοι δημιουργίας τυχαίων αριθμών βασίζονται όλες, εκτός από την τελευταία, σε κάποιο είδος τυχαίας συμπεριφοράς της φύσης ή σε τυχαία πειράματα.

Αντίθετα, η χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών για την κατασκευή ακολουθιών τυχαίων αριθμών συνεπάγεται την χρησιμοποίηση αλγορίθμων με την μορφή προγραμμάτων (software) που δημιουργούν τυχαίους αριθμούς. Όμως, όταν χρησιμοποιούμε έναν αλγόριθμο για να δημιουργήσουμε μιαν ακολουθία τυχαίων αριθμών, είναι εύκολα κατανοητό ότι ο αλγόριθμος αυτός πρέπει να είναι επαναληπτικός. Αυτό με την σειρά του σημαίνει ότι, οποτεδήποτε ο πρώτος αριθμός της ακολουθίας είναι γνωστός, ολόκληρη η ακολουθία είναι γνωστή, δηλαδή, κάθε όρος της ακολουθίας μπορεί να προβλεφθεί με ακρίβεια, με χρήση μόνον εκείνων των πληροφοριών που προέρχονται από τους προηγούμενους όρους της ακολουθίας και τον αλγόριθμο.

Από όσα είπαμε μέχρι τώρα συμπεραίνουμε ότι, η χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή για την κατασκευή τυχαίων αριθμών συνιστά μιαν τελείως ντετερμινιστική διαδικασία και επομένως τίθεται το ερώτημα κατά πόσον είναι "τυχαίοι" οι αριθμοί αυτοί. Γίνεται, λοιπόν, πλήρως κατανοητό γιατί, στην περίπτωση αυτή, μιλούμε για

"ψευτοτυχαίους", αντί για τυχαίους, αριθμούς.

Αλλά, ποιά είναι τα χαρακτηριστικά μιας "ψευτοτυχαίας ακολουθίας" και πώς δικαιολογείται η χρήση μιας ακολουθίας ψευτοτυχαίων αριθμών στην θέση μιας πραγματικά "τυχαίας ακολουθίας";

Ο Lehmer όρισε μιαν ακολουθία ψευτοτυχαίων αριθμών ως "μιαν ασαφή αντίληψη (a vague notion) που ενσωματώνει την ιδέα μιας ακολουθίας στην οποία κάθε όρος είναι απρόβλεπτος για τον αμύητο και της οποίας τα ψηφία ικανοποιούν έναν ορισμένο αριθμό ελέγχων... που εξαρτώνται κάπως από τις χρήσεις στις οποίες η ακολουθία πρόκειται να χρησιμοποιηθεί" (βλ. Meyer (1956)).

Η αποδοχή αυτού του ορισμού μας βοηθά να αποφύγουμε όλα τα φιλοσοφικά προβλήματα τα σχετικά με την "πραγματική τυχαιότητα" και μας αναγκάζει να χαρακτηρίζουμε ως "τυχαία" κάθε ακολουθία αριθμών που ικανοποιεί κάποιους συγκεκριμένους ελέγχους τυχαιότητας· ή, για να το πούμε με άλλες λέξεις, η τυχαιότητα μιας ακολουθίας αριθμών είναι, σε τελική ανάλυση, "σχετική με ιδιαίτερους ελέγχους που ικανοποιούνται" (βλ. T.G. Lewis (1975)).

Η προηγούμενη συζήτηση καθιστά σαφές ότι, το να θεωρήσουμε μιαν ακολουθία ως τυχαία βασίζεται σε ελέγχους τυχαιότητας, είτε αναλυτικούς, είτε εμπειρικούς. Πριν προχωρήσουμε σε μια σύντομη παρουσίαση των ελέγχων τυχαιότητας και των ιδιοτήτων τους, θα δώσουμε τώρα τα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά των συχνότερα χρησιμοποιουμένων γεννητριών τυχαίων αριθμών (Random Number Generators, εφεξής RNG's), δηλαδή των αλγορίθμων που δημιουργούν τυχαίους αριθμούς. Αυτοί οι αλγόριθμοι είναι πολύ βολικοί στη χρήση, δημιουργούν τυχαίους αριθμούς με σταθερό μέσο και σταθερή διακύμανση και μας παρέχουν την δυνατότητα να κατασκευάσουμε και να χρησιμοποιήσουμε μια συγκεκριμένη ψευτοτυχαία ακολουθία όσες φορές θέλουμε. Όμως, τα προγράμματα δημιουργίας τυχαίων αριθμών (software RNG's) έχουν το μειονέκτημα της χαμηλής αναλογίας ταχύτητας/κόστους σε σύγκριση με τις μηχανικές γεννήτριες τυχαίων αριθμών (hardware RNG's) (βλ. Murray (1970)).

Στρεφόμαστε τώρα στους ελέγχους που χρησιμοποιούνται για να ελεγχθεί αν μια ορισμένη ακολουθία είναι τυχαία ή όχι.

Το γεγονός ότι όλοι οι software RNG's είναι ντετερμινιστικής

φύσης μας αναγκάζει να σκεφθούμε και να αναπτύξουμε ιδιαίτερα κριτήρια, ικανά να απορρίψουν ως ακατάλληλο τον υπό συζήτηση RNG. Οι Hull και Dobell (1962) εκφράζουν τις ακόλουθες σκέψεις σχετικά με τους ελέγχους τυχαιότητας: "... καμία πεπερασμένη κλάση ελέγχων δεν μπορεί να εγγυηθεί την γενική καταλληλότητα μιας πεπερασμένης ακολουθίας αριθμών. Με δεδομένο ένα σύνολο ελέγχων, θα υπάρχει πάντα μια ακολουθία αριθμών η οποία ικανοποιεί αυτούς τους ελέγχους, αλλά η οποία είναι πλήρως απαράδεκτη για μια συγκεκριμένη εφαρμογή". Με άλλες λέξεις, θα υπάρχει πάντα ένας επιπλέον έλεγχος, που δεν ανήκει στο δεδομένο σύνολο ελέγχων, τον οποίον δεν θα τον ικανοποιεί η ακολουθία που μας ενδιαφέρει. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει ένας άριστος RNG, δηλαδή ένας RNG ο οποίος να ικανοποιεί κάθε έλεγχο τυχαιότητας που μπορούμε να επινοήσουμε. Από την βιβλιογραφία πάνω στο θέμα γίνεται, επίσης, φανερό ότι, "ο σκοπός όταν σχεδιάζουμε έναν RNG είναι να προσομοιώσουμε, με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια, την στατιστική συμπεριφορά μιας τυχαίας μεταβλητής με ομοιόμορφη κατανομή" (βλ. T.G. Lewis (1975)).

Υπάρχουν δύο είδη ελέγχων για να ελεγχθεί αν μια ακολουθία αριθμών είναι τυχαία ή όχι: οι αναλυτικοί και οι εμπειρικοί έλεγχοι. Είναι αλήθεια πως μια ακολουθία πλήρους περιόδου (full period sequence) σπάνια χρησιμοποιείται στην πράξη. Έτσι, τα αποτελέσματα των αναλυτικών ελέγχων, οι οποίοι διενεργούνται για ολόκληρη την περίοδο των περιοδικών ακολουθιών, είναι επιθυμητά, οποτεδήποτε είναι εφικτά, και αναγκαία, αλλά όχι ικανά να αποδείξουν την τυχαιότητα μιας ακολουθίας αριθμών. Οι εμπειρικοί έλεγχοι, οι οποίοι διεξάγονται για τμήματα της περιόδου της ακολουθίας, είναι περισσότερο πειστικοί.

Έλεγχοι, είτε αναλυτικοί, είτε εμπειρικοί, χρησιμοποιούνται για να διερευνηθεί η ποιότητα της απόδοσης των RNG's σε χώρους με λίγες ή πολλές διαστάσεις και κατ' αναλογίαν έχουμε ελέγχους λίγων ή πολλών διαστάσεων (low-dimensional ή high-dimensional tests, αντίστοιχα).

Η κλάση των ελέγχων λίγων διαστάσεων περιλαμβάνει τα frequency test, serial test, gap test, Yule's test, D^2 test και το conditional bit test. Η κλάση των ελέγχων πολλών διαστάσεων

περιλαμβάνει τα runs test, sum-of-n test, maximum/minimum-of-n test, frequency analysis test και το Kolmogorov-Smirnov test. Μια καλή περιγραφή αυτών των ελέγχων δίνει ο T.G. Lewis (1975).

Στο υπόλοιπο αυτού του παραρτήματος θα εκθέσουμε ενδεικτικά τις μεθόδους που χρησιμοποιήσαμε για να δημιουργήσουμε U(0,1) και N(0,1) ψευτοτυχαίους αριθμούς, καθώς επίσης και τους ελέγχους που πραγματοποιήσαμε για να ελέγξουμε την ποιότητα αυτών των ψευτοτυχαίων αριθμών και την καταλληλότητά τους για τα Monte Carlo πειράματα στα οποία τους χρησιμοποιήσαμε. Οι μέθοδοι με τις οποίες κατασκευάσαμε U(-10,10) ψευτοτυχαίους αριθμούς και N(0,Σ) ψευτοτυχαία διανύσματα και ελέγξαμε την ποιότητά τους ήσαν ανάλογες και δεν παρουσιάζονται για λόγους συντομίας.

Κατ' αρχήν, πρέπει να σημειώσουμε ότι, η μελέτη μας πάνω στο θέμα μας έπεισε για το γεγονός πως δεν υπάρχει άριστος RNG, με την έννοια πως δεν υπάρχει ένας RNG που να ικανοποιεί κάθε κριτήριο τυχαιότητας που μπορούμε να επινοήσουμε. Έχοντας υπόψη την ανωτέρω διαπίστωση, αποφασίσαμε να μην επιδιώξουμε την κατασκευή μιας νέας γεννήτριας τυχαίων αριθμών, αλλά να υιοθετήσουμε μιαν από τις υπάρχουσες. Αποφασίσαμε, λοιπόν, να χρησιμοποιήσουμε κάποιους από τους RNG's που προτείνονται από την IMSL (International Mathematical and Statistical Library) και την NAG (Numerical Algorithms Group).

Η.2 Η ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΤΩΝ U(0,1) ΤΥΧΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Για να κατασκευάσουμε ομοιόμορφους, U(0,1), ψευτοτυχαίους αριθμούς χρησιμοποιήσαμε την υπορουτίνα GGUBS της IMSL. Ο αλγόριθμος που δημιουργεί τους ψευτοτυχαίους αριθμούς είναι ο ακόλουθος:

Έστω S_o ο σπόρος (seed) της ψευτοτυχαίας ακολουθίας. Τότε, οι ψευτοτυχαίοι αριθμοί R_i $(i = 1,\ldots,N)$ δημιουργούνται από τους κατωτέρω τύπους:

$$S_o = \text{seed},$$
$$S_i = 7^5 S_{i-1} (\text{mod} 2^{31}-1), \qquad (H.1)$$
$$R_i = 2^{-31} S_i.$$

Αυτόν τον RNG παρουσιάζουν λεπτομερώς οι Learmonth και

P.A.W. Lewis (June, 1973), Learmonth και P.A.W. Lewis (November, 1973) και P.A.W. Lewis, Goodman και Muller (1969).

Αν θέλουμε να δημιουργήσουμε ομοιόμορφους ψευτοτυχαίους αριθμούς στο διάστημα (a,b), δηλαδή U(a,b) ψευτοτυχαίους αριθμούς, έστω Y_i, μπορούμε να το κάνουμε με την βοήθεια του μετασχηματισμού

$$Y_i = R_i b + (1-R_i)a \quad (i = 1,\ldots,N), \tag{H.2}$$

όπου R_i $(i = 1,\ldots,N)$ είναι U(0,1) ψευτοτυχαίοι αριθμοί.

H.3 ΕΛΕΓΧΟΙ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΙΑΣ (TESTS OF UNIFORMITY)

Για να ελέγξουμε κατά πόσον N αριθμοί, τους οποίους κατασκευάσαμε με την υπορουτίνα GGUBS, ακολουθούν την ομοιόμορφη, U(0,1), κατανομή, πραγματοποιήσαμε τους ακόλουθους ελέγχους:

(a) D^2TEST: Αυτός είναι ένας έλεγχος λίγων διαστάσεων, που συγκρίνει την θεωρητική κατανομή μιας τυχαίας γραμμής στον δυδιάστατο χώρο με την εμπειρική κατανομή των αριθμών που παίρνουμε από τον RNG που ελέγχουμε. Για να πραγματοποιήσουμε αυτόν τον έλεγχο, υπολογίζουμε τα τετράγωνα των αποστάσεων μεταξύ διαδοχικών ζευγών U(0,1) ψευτοτυχαίων αριθμών και κατανέμουμε αυτές τις τετραγωνισμένες αποστάσεις σε k ισοπίθανα κελλιά. Έστω W_i η εμπειρική συχνότητα των τετραγωνισμένων αποστάσεων στο i-κελλί. Έστω E_{D^2} ο αναμενόμενος αριθμός τετραγωνισμένων αποστάσεων σε καθένα από τα k κελλιά, με δεδομένο ότι η μηδενική υπόθεση της ομοιομορφίας είναι αληθής, δηλαδή

$$E_{D^2} = \sum_{i=1}^{k} W_i/k = N/k. \tag{H.3}$$

Για να ελέγξουμε την μηδενική υπόθεση της ομοιομορφίας χρησιμοποιούμε το χ^2 στατιστικό

$$\chi^2_{D^2} = \sum_{i=1}^{k} (W_i - E_{D^2})^2 / E_{D^2}, \tag{H.4}$$

το οποίο έχει k-1 βαθμούς ελευθερίας. Ο έλεγχος είναι έγκυρος για $E_{D^2} > 5$.

Το D^2 test χρησιμοποιείται για να ελεγχθεί η καταλληλότητα ενός RNG για τον Monte Carlo υπολογισμό ολοκληρωμάτων (βλ. Gruenberger and Mark (1951)) και πραγματοποιήθηκε με χρήση των υπορουτινών GTDDU και GTD2T της IMSL.

(b) SERIAL TEST: Και αυτός είναι ένας έλεγχος λίγων διαστάσεων, που χρησιμοποιείται για να ελεγχθεί εμπειρικά η σειριακή συσχέτηση (serial association) μεταξύ των ψηφίων των διαδοχικών αριθμών μιας ακολουθίας που παράγεται από τον υπό έλεγχο RNG. Αυτός ο έλεγχος είναι μια επέκταση του frequency test για τον δυδιάστατο χώρο και εφαρμόζεται σε ζεύγη ψηφίων. Για να πραγματοποιήσουμε αυτόν τον έλεγχο, υποδιαιρούμε το μοναδιαίο τετράγωνο (unit square) σε k^2 κελλιά. Έστω W_{ij} η εμπειρική συχνότητα των ζευγών των ψηφίων στο (i,j)-κελλί. Έστω E_{ser} ο αναμενόμενος αριθμός ζευγών ψηφίων σε καθένα από τα k^2 κελλιά, αν η μηδενική υπόθεση της ομοιομορφίας είναι αληθής, δηλαδή

$$E_{ser} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} W_{ij}/k^2 = N/k^2. \qquad (H.5)$$

Για να ελέγξουμε την μηδενική υπόθεση της ομοιομορφίας χρησιμοποιούμε το χ^2 στατιστικό

$$\chi^2_{ser} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} (W_{ij}-E_{ser})^2/E_{ser}, \qquad (H.6)$$

το οποίο έχει k^2-1 βαθμούς ελευθερίας. Ο έλεγχος είναι έγκυρος για $E_{ser} > 5$.

Το serial test πραγματοποιήθηκε με χρήση των υπορουτινών GTPR και GTPST της IMSL.

(c) TRIPLETS TEST: Αυτός ο έλεγχος είναι μια επέκταση του frequency test για τον τρισδιάστατο χώρο και εφαρμόζεται σε τριάδες ψηφίων. Για να πραγματοποιήσουμε τον έλεγχο αυτό, υποδιαιρούμε τον μοναδιαίο κύβο (unit cubik) σε k^3 κελλιά. Έστω W_{ijl} η εμπειρική συχνότητα των τριάδων των ψηφίων στο (i,j,l)-κελλί. Έστω E_{tr} ο αναμενόμενος αριθμός τριάδων ψηφίων σε καθένα από τα k^3 κελλιά, υπό την προϋπόθεση ότι η μηδενική υπόθεση της ομοιομορφίας είναι αληθής, δηλαδή

$$E_{tr} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} W_{ijl}/k^3 = N/k^3. \qquad (H.7)$$

Για να ελέγξουμε την μηδενική υπόθεση της ομοιομορφίας χρησιμοποιούμε το χ^2 στατιστικό

$$\chi^2_{tr} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} (W_{ijl}-E_{tr})^2/E_{tr}, \qquad (H.8)$$

το οποίο έχει k^3-1 βαθμούς ελευθερίας. Ο έλεγχος είναι έγκυρος αν $E_{tr} > 5$ και το N διαιρείται ακριβώς δια 3.

Το triplets test πραγματοποιήθηκε με χρήση των υπορουτινών GTTRT και GTTT της IMSL.

(d) RUNS TEST: Ο έλεγχος αυτός είναι έλεγχος πολλών διαστάσεων. Για να εφαρμόσουμε το runs test σε μιαν ακολουθία N αριθμών, υπολογίζουμε τα μήκη των προς τα άνω και προς τα κάτω διαδρομών (runs-up και runs-down, αντίστοιχα) και επίσης μετρούμε το πλήθος των διαδρομών (runs) που παρουσιάζονται στην ακολουθία των αριθμών, για τους οποίους ελέγχουμε αν κατανέμονται ομοιόμορφα. Το μήκος μιας διαδρομής είναι το πλήθος των εξακολουθητικών συν (+) ή πλην (−) που παίρνουμε αν αντικαταστήσουμε την ακολουθία $R_1, R_2, \ldots, R_N$ με τα πρόσημα των διαφορών $(R_{i+1}-R_i)$ για $i = 1,\ldots,N-1$.

Το runs test πραγματοποιήθηκε με χρήση των υπορουτινών GTRTN και GTRN της IMSL. Έστω E_i το αναμενόμενο πλήθος διαδρομών μήκους i $(i = 1,2,\ldots,7)$ και έστω E_8 το αναμενόμενο πλήθος διαδρομών με μήκος μεγαλύτερο από 7, αν η μηδενική υπόθεση της ομοιομορφίας είναι αληθής. Τότε, για να πραγματοποιήσουν τον έλεγχον αυτόν, οι υπορουτίνες της IMSL κάνουν τους ακόλουθους υπολογισμούς:

$$E_i = 2(N-i-2)(i^2+3i+1)/(i+3)! \quad (i = 1,2,\ldots,7),$$

$$E_8 = (2N-7)/3 - \sum_{i=1}^{7} E_i, \qquad \text{(H.9)}$$

$$X_i = E_i \sum_{j=1}^{8} \mathrm{RUNS}_j/((2N-7)/3) \quad (i = 1,2,\ldots,8).$$

Η μηδενική υπόθεση της ομοιομορφίας ελέγχεται με το χ^2 στατιστικό

$$\chi^2_{runs} = \sum_{i=1}^{8} (\mathrm{RUNS}_i - X_i)^2/X_i, \qquad \text{(H.10)}$$

το οποίο έχει 6 ή 7 βαθμούς ελευθερίας (βλ. IMSL Library Manual (June, 1982)).

Η κατανομή του στατιστικού (H.10) μόνον ασυμπτωτικά είναι η χ^2 κατανομή. Στην πράξη, ακόμα και για μεγάλο N η κατανομή του στατιστικού (H.10) μπορεί να είναι πολύ ασύμμετρη εξ' αιτίας των άνισων συχνοτήτων στα κελλιά. Μια λεπτομερής συζήτηση του θέματος αυτού γίνεται από τους Learmonth και P.A.W. Lewis (1973), οι

οποίοι δίνουν τα αποτελέσματα μιας προσομοίωσης της κατανομής του στατιστικού (H.10). Αν N = 65536 τα 0.95 και 0.99 εκατοστιαία σημεία υπολογίσθησαν ως 15.82 και 22.05, αντίστοιχα. Τα αντίστοιχα εκατοστιαία σημεία για την χ^2 κατανομή με 7 βαθμούς ελευθερίας είναι 14.1 και 18.5. Επομένως, οι ανωτέρω εκτιμήσεις δείχνουν ότι η κατανομή του στατιστικού (H.10), ακόμα και όταν το N είναι πολύ μεγάλο, μοιάζει περισσότερο με μια χ^2 κατανομή με 9, παρά με 7, βαθμούς ελευθερίας.

H.4 Η ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΤΩΝ N(0,1) ΤΥΧΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Για να κατασκευάσουμε N(0,1) ψευτοτυχαίους αριθμούς χρησιμοποιήσαμε την μέθοδο των πολικών συντεταγμένων. Ο αλγόριθμος αυτός προτάθηκε από τους Box, Muller και Marsaglia (βλ. Knuth (1969)). Σύμφωνα με τον αλγόριθμο αυτό δημιουργούμε ζεύγη ψευτοτυχαίων αριθμών, U_1 και U_2, από την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (-1,1) (βλ. σχέση (H.2)). Τέτοια ζεύγη αριθμών, U_1 και U_2, δημιουργούνται και απορρίπτονται εξακολουθητικά μέχρις ότου το άθροισμα των τετραγώνων τους, έστω S, γίνει μικρότερο της μονάδας. Τότε παίρνουμε δύο ανεξάρτητους N(0,1) ψευτοτυχαίους αριθμούς, R_1 και R_2, ως γινόμενο του καθενός ομοιόμορφου (uniform) αριθμού επί την τετραγωνική ρίζα της ποσότητας $(-2\ln S)/S$, δηλαδή

$$R_1 = U_1\sqrt{(-2\ln S)/S}\ ,$$
$$R_2 = U_2\sqrt{(-2\ln S)/S}\ , \qquad \text{(H.11)}$$
$$S = U_1^2 + U_2^2$$

(βλ. IMSL Library Manual (June, 1982)).

Για να δημιουργήσουμε N(0,1) ψευτοτυχαίους αριθμούς χρησιμοποιήσαμε την υπορουτίνα GGNPM της IMSL.

Χρησιμοποιώντας N N(0,1) ψευτοτυχαίους αριθμούς R_i μπορούμε να κατασκευάσουμε N $N(\mu,\sigma^2)$ ψευτοτυχαίους αριθμούς Y_i, σύμφωνα με τον μετασχηματισμό

$$Y_i = R_i\sigma + \mu \quad (i = 1,\ldots,N). \qquad \text{(H.12)}$$

H.5 ΕΛΕΓΧΟΣ ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΑΣ (TEST OF NORMALITY)

Αφού δημιουργήσαμε N ψευτοτυχαίους N(0,1) αριθμούς, έπρεπε να ελέγξουμε κατά πόσον αυτοί προσομοίωναν με ικανοποιητική ακρίβεια

την συμπεριφορά της N(0,1) κατανομής. Προς τον σκοπόν αυτόν πραγματοποιήσαμε έναν χ^2 έλεγχο καλής προσαρμογής, κάνοντας χρήση της υπορουτίνας GTNOR της IMSL. Για να κάνουμε αυτόν τον έλεγχο, κατανέμουμε τους N αριθμούς που θέλουμε να ελέγξουμε σε k ισοπίθανα κελλιά και μετρούμε την εμπειρική συχνότητα, W_i, στο i-κελλί, όπου i = 1,2,...,k. Έστω E_{nor} το αναμενόμενο πλήθος αριθμών σε καθένα από τα k κελλιά, υπό την μηδενική υπόθεση της κανονικότητας, δηλαδή

$$E_{nor} = \sum_{i=1}^{k} W_i/k = N/k. \qquad (H.13)$$

Για να ελέγξουμε την μηδενική υπόθεση της κανονικότητας χρησιμοποιούμε το χ^2 στατιστικό

$$\chi^2_{nor} = \sum_{i=1}^{k} (W_i - E_{nor})^2/E_{nor}, \qquad (H.14)$$

το οποίο έχει k-1 βαθμούς ελευθερίας. Ο έλεγχος είναι έγκυρος για $E_{nor} > 5$.

Η.6 ΟΠΤΙΚΟΙ ΕΛΕΓΧΟΙ

Εκτός από τους μαθηματικούς ελέγχους που περιγράψαμε προηγουμένως, χρησιμοποιήσαμε και οπτικούς ελέγχους, για να αποκτήσουμε πληροφορίες σχετικά με την ποιότητα των ψευτοτυχαίων αριθμών που κατασκευάσαμε κάνοντας χρήση των υπορουτινών GGUBS και GGNPM της IMSL. Προς τον σκοπόν αυτόν κατασκευάσαμε δύο είδη διαγραμμάτων. Στο πρώτο παρουσιάσαμε την εμπειρική κατανομή των αριθμών που δημιουργήσαμε με την GGUBS σε σύγκριση με την U(0,1) συνάρτηση πυκνότητας, ενώ στο δεύτερο παρουσιάσαμε την εμπειρική κατανομή των αριθμών που κατασκευάσαμε με την GGNPM σε σύγκριση με την N(0,1) συνάρτηση πυκνότητας. Στην συνέχεια, χρησιμοποιήσαμε τα διαγράμματα αυτά για να ελέγξουμε οπτικά κατά πόσον οι ψευτοτυχαίοι αριθμοί μας προσομοιώνουν με ικανοποιητική ακρίβεια την στατιστική συμπεριφορά των θεωρητικών κατανομών, των οποίων επιχειρήσαμε την προσέγγιση. Οι οπτικοί έλεγχοι, παρά το γεγονός ότι δεν είναι μαθηματικοί, μπορούν, ωστόσο, να είναι εξ' ίσου χρήσιμοι και αποκαλυπτικοί. Έχουν, μάλιστα, το πλεονέκτημα ότι δίνουν μιαν εποπτική εικόνα της ποιότητας των ψευτοτυχαίων αριθμών που παράγονται από τον υπό έλεγχο RNG.

Η.7 ΣΥΓΚΡΙΣΕΙΣ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΩΝ ΣΠΟΡΩΝ (SEEDS)

Η επαναληπτική φύση όλων των αλγορίθμων που κατασκευάζουν ψευτοτυχαίους αριθμούς καθιστά σαφές ότι, ολόκληρη η ακολουθία των ψευτοτυχαίων αριθμών, πού παράγεται από τον υπό συζήτηση αλγόριθμο, εξαρτάται από τον σπόρο της (seed). Γίνεται, λοιπόν, κατανοητό ότι η ποιότητα αυτής της ψευτοτυχαίας ακολουθίας εξαρτάται από την συγκεκριμένη τιμή που δίνουμε στο σπόρο. Δεν είναι δύσκολο να καταλάβουμε πως υπάρχουν τιμές του σπόρου που είναι περισσότερο κατάλληλες από άλλες, δηλαδή, ότι υπάρχουν τιμές του σπόρου, οι οποίες συμβάλλουν στην δημιουργία καλύτερων ψευτοτυχαίων ακολουθιών, με την έννοια ότι οι ακολουθίες αυτές προσαρμόζονται καλύτερα στην θεωρητική κατανομή που μας ενδιαφέρει.

Για τον σκοπό της εργασίας μας έπρεπε να δημιουργήσουμε U(0,1) και N(0,1) ψευτοτυχαίους αριθμούς υψηλής ποιότητας. Η ανάγκη αυτή μας ώθησε να ψάξουμε για μερικές καλές τιμές του σπόρου. Για να διαπιστώσουμε την καταλληλότητα των τιμών του σπόρου, χρησιμοποιήσαμε τους ελέγχους ομοιομορφίας D^2 test (D2), Serial test (SERIAL), Triplets test (TRIPLETS), Runs test (RUNS) και τον έλεγχο κανονικότητας (NORMALITY), που παρουσιάσαμε αναλυτικά στα Τμήματα Η.3 και Η.5, ανωτέρω. Στον Πίνακα Η.1 παρουσιάζουμε μερικούς σπόρους, που έδωσαν καλές ακολουθίες ψευτοτυχαίων αριθμών, παραθέτοντας τις τιμές των χ^2 στατιστικών για όλους τους ανωτέρω ελέγχους. Επίσης, στον Πίνακα Η.2 παραθέτουμε τους βαθμούς ελευθερίας αυτών των χ^2 ελέγχων και τις κριτικές τιμές τους, που αντιστοιχούν σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας 5%. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα αυτών των ελέγχων καθώς και οπτικούς ελέγχους, επιλέξαμε ως καλύτερες τιμές του σπόρου τους αριθμούς 314159, 271828 και 24121962. Για αυτούς τους τρείς σπόρους παρουσιάζουμε και τα Διαγράμματα Η.1, Η.2, Η.3 και Η.4, Η.5, Η.6, που εικονογραφούν την σύγκριση μεταξύ των ψευτοτυχαίων ακολουθιών που κατασκευάσαμε και των θεωρητικών συναρτήσεων πυκνότητας των U(0,1) και N(0,1) κατανομών, αντίστοιχα. Όλοι οι έλεγχοι πραγματοποιήθηκαν για δείγματα 10000 ψευτοτυχαίων αριθμών. Πρέπει, ακόμα, να σημειώσουμε ότι χρησιμοποιήσαμε την υπορουτίνα GTCN της IMSL για να υπολογίσουμε

το άριστο πλήθος διαστημάτων, στα οποία διαιρέσαμε κάθε δείγμα των 10000 ψευτοτυχαίων αριθμών, προκειμένου να πραγματοποιήσουμε τους χ^2 ελέγχους. Αυτός ο υπολογισμός εξαρτάται από το επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας του ελέγχου της μηδενικής υπόθεσης. Όλους τους ελέγχους τους κάναμε σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας 5%. Από το υπολογιζόμενο πλήθος των διαστημάτων (class intervals) βρήκαμε τους βαθμούς ελευθερίας για τους αντίστοιχους χ^2 ελέγχους.

ΠΙΝΑΚΑΣ Η.1

	Τιμές των chi-square στατιστικών ελέγχου				
	T	E	S	T	S
S E E D S	D2	SERIAL	TRIPLETS	RUNS	NORMALITY
314146	158.5	706.7	103.8	5.7	130.0
271828	150.2	851.1	135.5	2.4	155.1
24121962	158.2	784.4	97.3	8.8	120.7
2000	145.2	573.5	92.5	6.8	144.0
10	137.8	687.3	104.6	4.1	141.4
325017	122.9	779.9	127.3	2.1	147.5
68	144.6	571.4	135.0	14.5	110.8
325	134.4	711.9	121.8	11.3	134.5
7	143.7	717.0	120.3	1.9	159.8
2	146.0	779.8	118.7	7.2	140.5
234567	135.3	641.4	92.3	13.4	165.5
3799	158.3	706.2	134.6	2.3	152.0

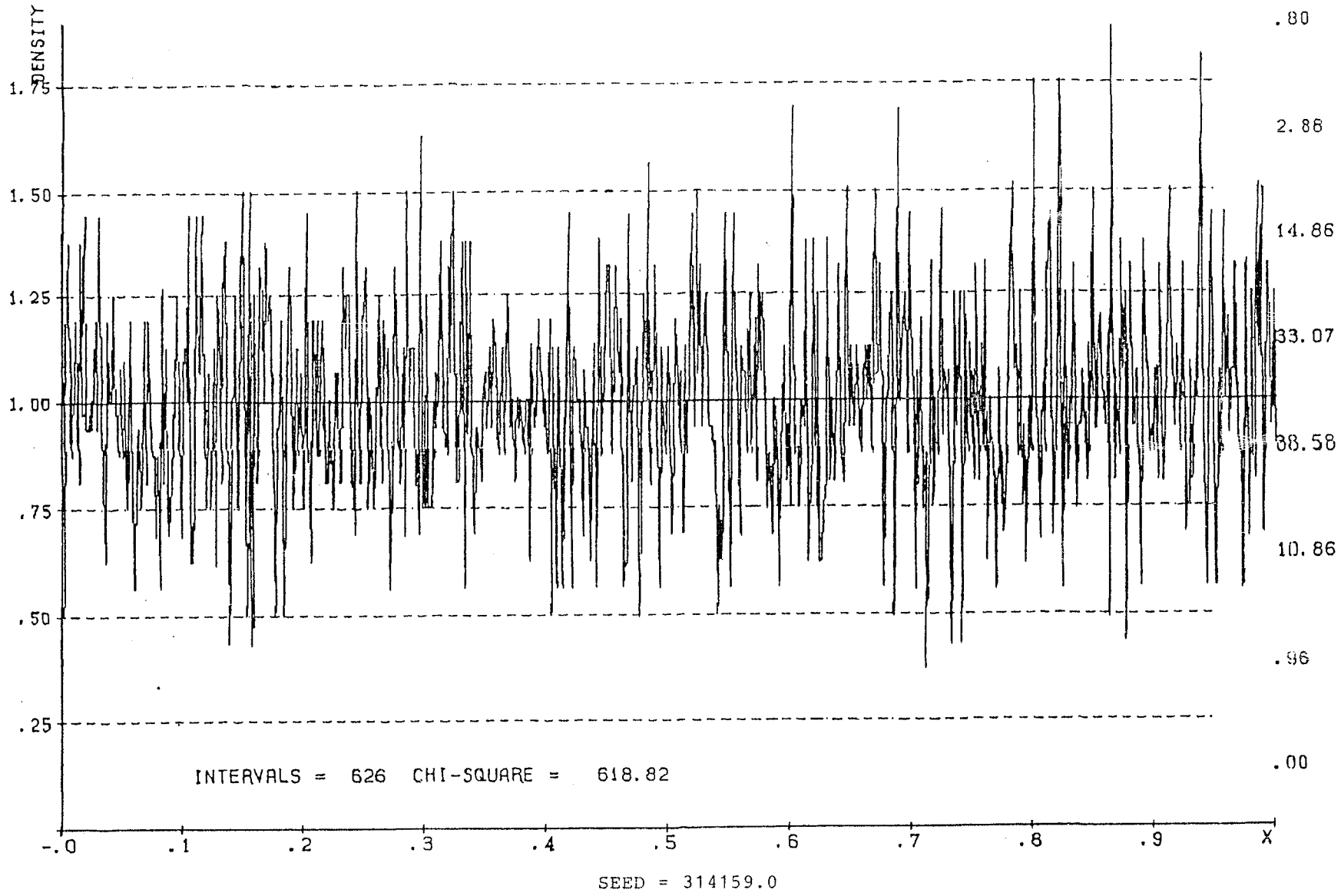
ΠΙΝΑΚΑΣ Η.2

	T	E	S	T	S
	D2	SERIAL	TRIPLETS	RUNS	NORMALITY
ΚΡΙΤ. ΤΙΜΕΣ	177.390	170.809	150.989	14.067	177.390
ΒΑΘΜ. ΕΛΕΥΘ.	148	142	124	7 (*)	148
ΕΠ. ΣΗΜΑΝΤ.	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05

(*) Βλέπε το σχόλιο για τους βαθμούς ελευθερίας της κατανομής του στατιστικού (Η.10).

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ Η.1

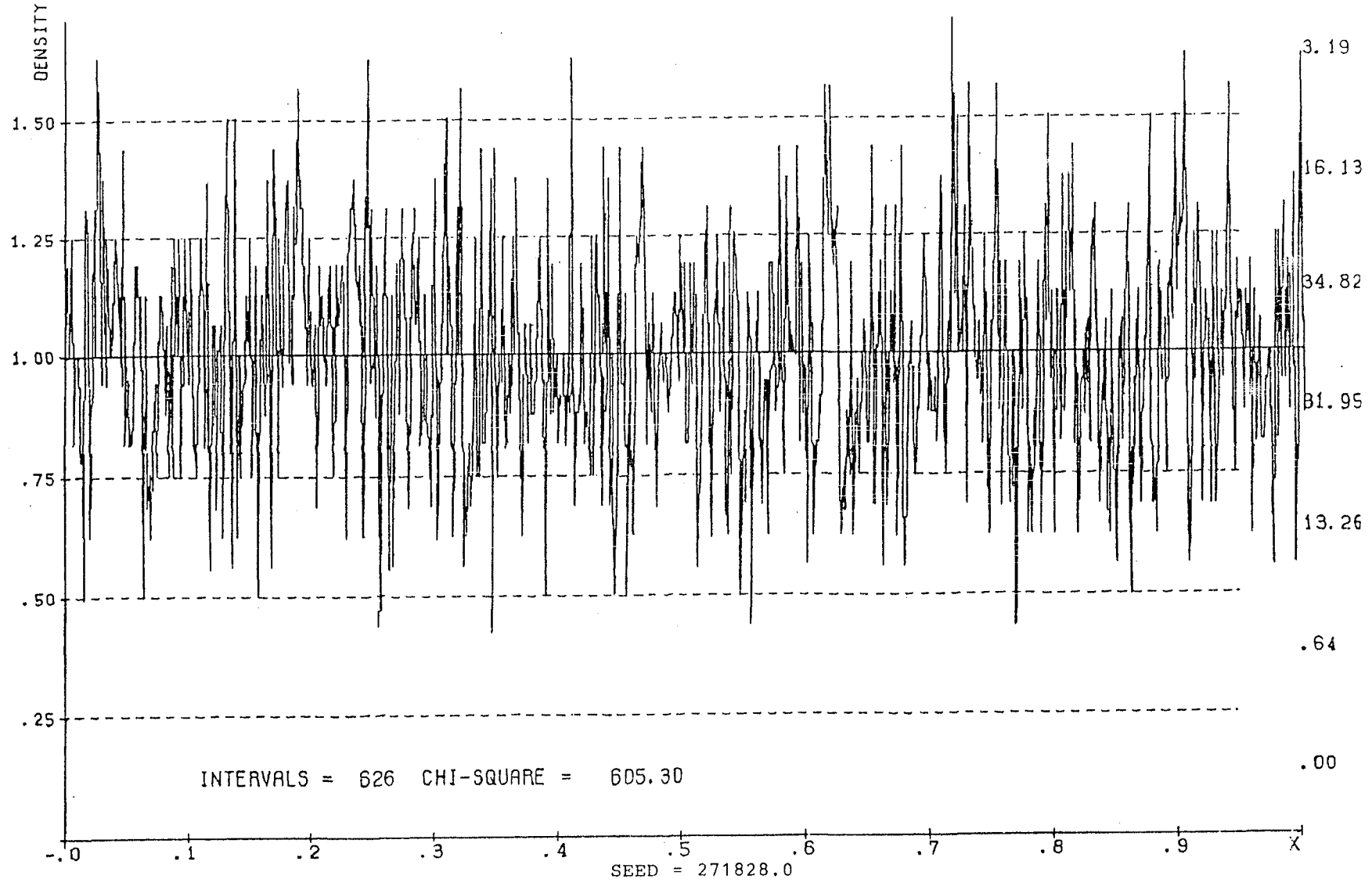
(ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ (0,1))



SEED = 314159.0

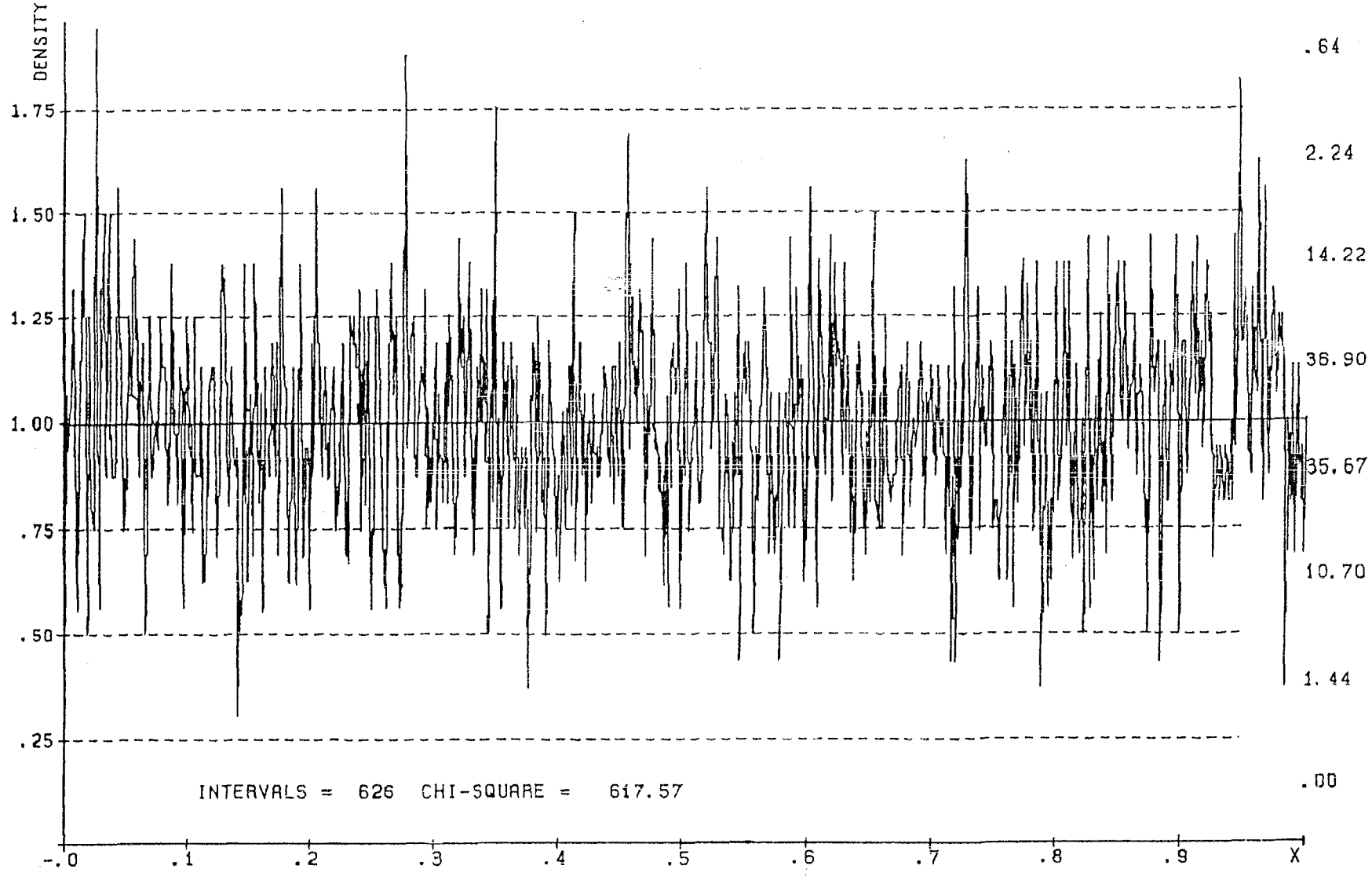
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ Η.2

(ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ (0,1))



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ Η.3

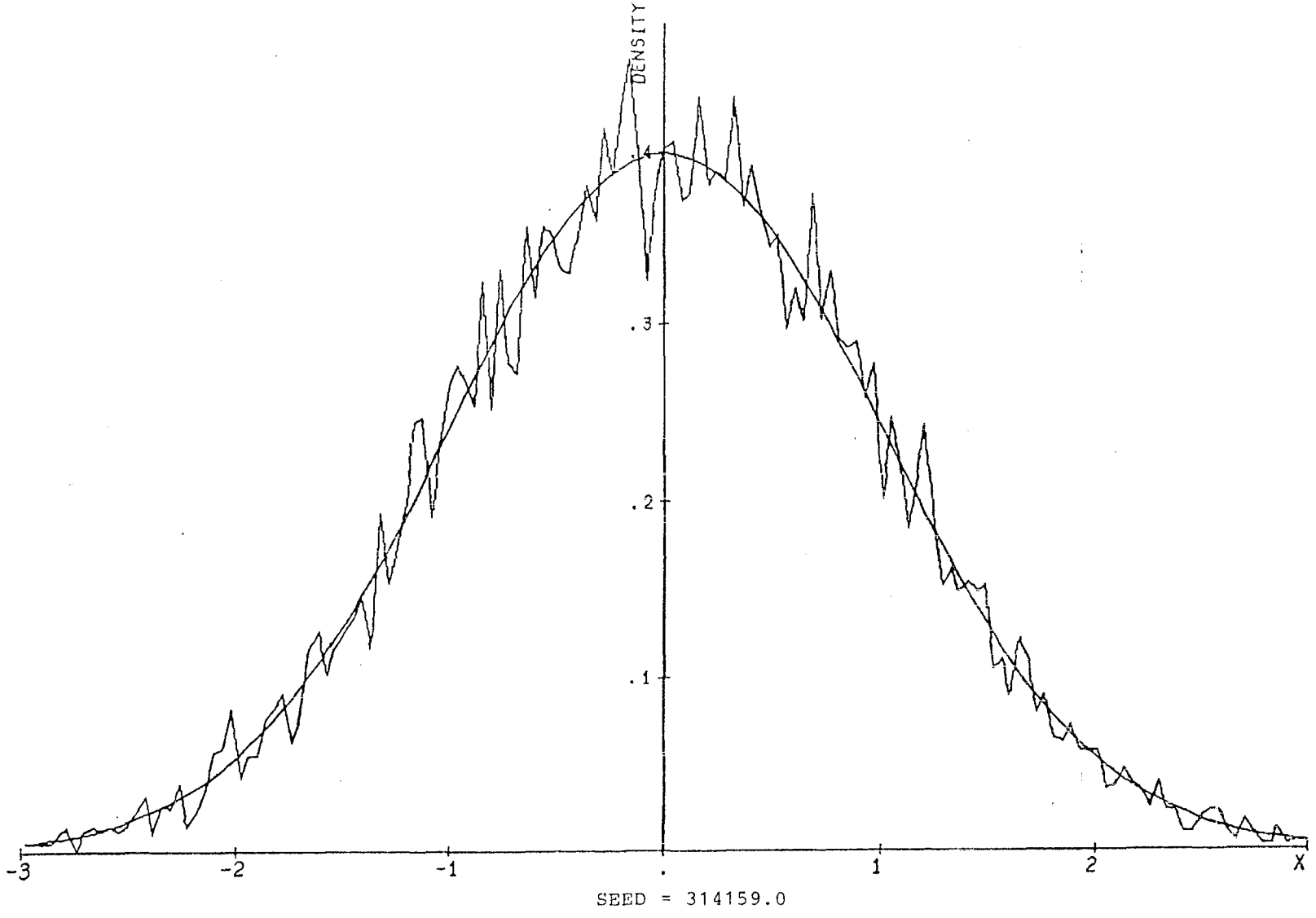
(ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ (0,1))



SEED = 24121962.0

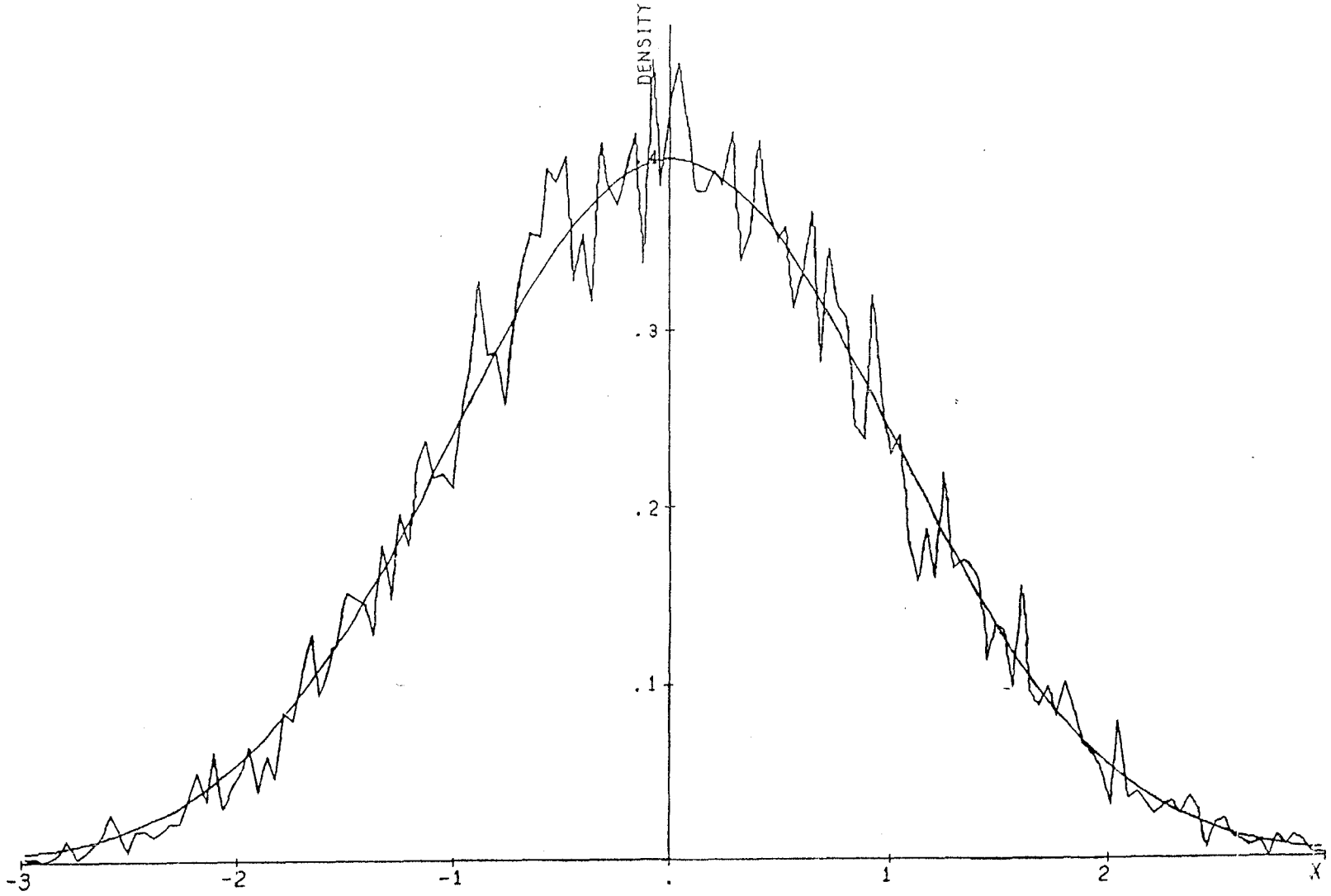
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ Η.4

(ΤΥΠΙΚΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ)



ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ Η.5

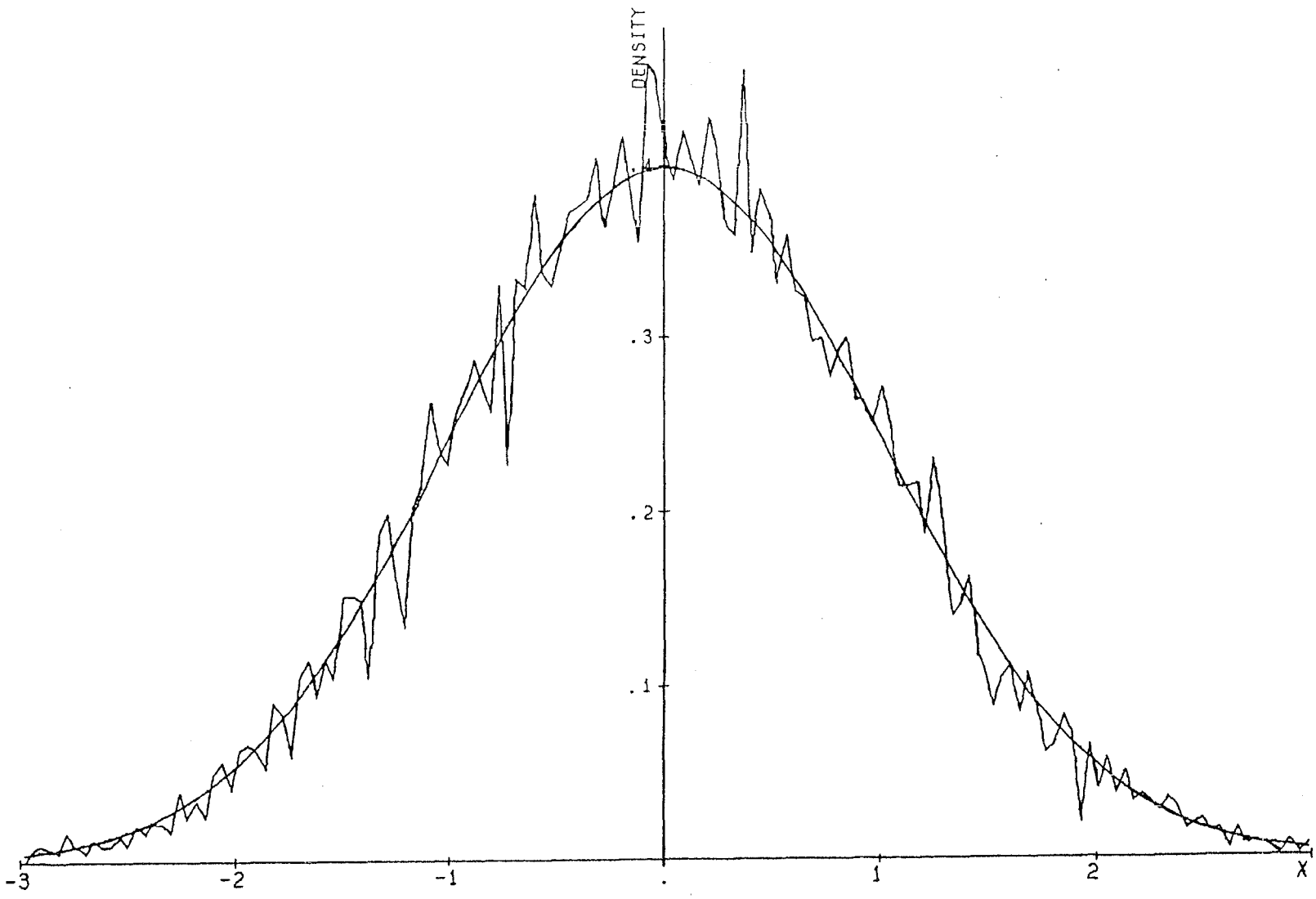
(ΤΥΠΙΚΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ)



SEED = 271828.0

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ Η.6

(ΤΥΠΙΚΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ)



SEED = 24121962.0

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

AMEMIYA, T. (1966): "On the use of Principal Components of Independent Variables in Two-stage Least-squares Estimation," *International Economic Review, 7,* 283-303.

AMEMIYA, T. (1977): "A Note on a Heteroscedastic Model," *Journal of Econometrics, 6,* 365-370; and "Corrigenta," *Journal of Econometrics, 8,* 275.

ANDERSON, T.W. (1974): "An Asymptotic Expansion of the Distribution of the LIML Estimate of a Coefficient in a Simultaneous Equation System," *Journal of the American Statistical Association, 69,* 565-573.

ANDERSON, T.W. (1977): "Asymptotic Expansions of the Distributions of Estimates of Simultaneous Equations for Alternative Parameter Sequences," *Econometrica, 45,* 509-518.

ANDERSON, T.W., and H. RUBIN (1949): "Estimation of the Parameters of a Single Equation in a Complete System of Stochastic Equations," *Annals of Mathematical Statistics, 20,* 46-63.

ANDERSON, T.W., and T. SAWA (1973): "Distribution of Estimates of Coefficients of a Single Equation in a Simultaneous System and their Asymptotic Expansions," *Econometrica, 41,* 683-714.

BASMANN R.L. (1960): "On Finite Sample Distributions of Generalized Classical Linear Identifiability Test Statistics," *Journal of the American Statistical Association, 55,* 650-659.

BASMANN R.L. (1961): "A Note on the Exact Finite Frequency Function of the Generalized Classical Linear Estimators in two Leading Overidentified Cases," *Journal of the American Statistical Association, 56,* 619-636.

BASMANN R.L. (1963): "Remarks Concerning the Application of Exact Sample Distribution Functions of GLS Estimators in Econometric Statistical Inference," *Journal of the American Statistical Association, 58,* 943-976.

BASMANN R.L. (1974): "Exact Finite Sample Distributions for some Econometric Estimators and Test Statistics: A Survey and Appraisal," Chapter 4 in Intriligator, M.D., and D.A. Kendrick (eds), *Frontiers of Quantitative Economics, vol. II*, Amsterdam: North Holland.

BEACH, C.A., and J.G. MACKINNON (1978): "A Maximym Likelihood Procedure for Regression with Autocorrelated Errors," *Econometrica, 46*, 51-58.

BHATTACHARYA, R.N., and J.K. GHOSH (1978): "On the Validity of the Formal Edgeworth Expansion," *Annals of Statistics, 6*, 434-451.

BILLINGSLEY, P. (1968): *Convergence of Probability Measures*, New York: J. Wiley.

BLEISTEIN, N., and R.A. HANDELSMAN (1986): *Asymptotic Expansions of Integrals*, New York: Dover Publications.

BOX, G.E.P. (1949): "A General Distribution Theory for a Class of Likelyhood Criteria," *Biometrica, 36*, 317-346.

BOX, G.E.P., and G.M. Jenkins (1976): *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, San Francisko: Holden Day.

BREUSCH, T.S. (1980): "Useful Invariance Results for Generalized Regression Models," *Journal of Econometrics, 13*, 327-340.

BROWN, G.F., J.B. KADANE and J.G. RAMAGE (1974): "The Asymptotic Bias and Mean Square Error of Double k-class Estimators when the Disturbances are Small," *International Economic Review, 15*, 667-679.

CHAMBERS J.M. (1967): "On Methods of Asymptotic Approximations for Multivariate Distributions," *Biometrica, 54*, 367-383.

CHANDRA T.K. and J.K. GHOSH (1979): "Valid Asymptotic Expansions for the Likelyhood Ratio Statistic and other Perturbed Chi-Square Variables," *Sankhya, A41*, 22-47.

CHIBISOV D.M. (1972b): "An Asymptotic Expansion for the Distribution of a Statistic Admitting an Asymptotic Expansion," *Theory of Probability and its Applications, 17,* 620-630.

CHIBISOV D.M. (1973): "An Asymptotic Expansion for a Class of Estimators Containing Maximum Likelyhood Estimators," *Theory of Probability and its Applications, 18,* 295-303.

CORNISH, E.A., and R.A. FISHER (1937): "Moments and Cumulants in the Specification of Distributions," *Revue de l' Institute International de Statistic, 4,* 1-14.

CRAGG, J.G. (1967): "On the Relative Small-Sample Properties of Several Structural-Equation Estimators," *Econometrica, 35,* 89-110.

DE BRUIJN, N.G. (1981): *Asymptotic Methods in Analysis,* New York: Dover Publications.

DHRYMES, P.J. (1969): "Alternative Asymptotic Tests of Significance and Related Aspects of 2SLS and 3SLS Estimated Parameters," *The Review of Economic Studies, 36,* 213-226.

DHRYMES, P.J. (1970): *Econometrics: Statistical Foundations and Applications,* New York: Harper and Row.

DHRYMES, P.J. (1971): "Equivalence of Iterative Aitken and Maximum Likelihood Estimators for a System of Regression Equations," *Australian Economic Papers, 10,* 20-24.

DHRYMES, P.J. (1978): *Introductory Econometrics,* New York: Springer-Verlag.

DREZE, J.H. (1976): "Bayesian Limited Information Analysis of the Simultaneous Equation Model," *Econometrica, 44,* 1045-1075.

ΔΡΕΤΤΑΚΗΣ Μ. (1975): *Γραμμική Άλγεβρα.*

DURBIN, J. (1973): "Distribution Theory for Tests Based on the Sample Distribution Function," *Society for Industrial and Applied*

Mathematics, Philadelphia, Pa, Section 2.4.

DURBIN, J. (1974): "Errors in Variables," *Review of International Statistical Institute, 22,* 23-32.

EDGEWORTH F.Y. (1903): "The Law of the Error," *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 20,* 36-141.

ENGLE, R.F. (1982): "A General Approach to Lagrange Multiplier Model Diagnostics," *Journal of Econometrics, 20,* 83-104.

ERDÉLYI, A (1956): *Asymptotic Expansions,* New York: Dover Publications.

FISHER, R.A. (1925): "Expansion of Student's Integral in Powers of n^{-1}," *Metron, 5,* 109-112.

FISHER, R.A., and E.A. CORNISH (1960): "The Percentile of Distributions Having Known Cumulants," *Technometrics, 2,* 209-225.

FUJIKOSHI, Y., K. MORIMUNE, N. KUNITOMO, M. TANIGUCHI (1982): "Asymptotic Expasions of the Distribution of the Estimates of Coefficients in a Simultaneous Equation System," *Journal of Econometrics, 18,* 192-205.

FULLER, W.A. (1977): "Some Properties of a Modification of the Limited Information Estimator," *Econometrica, 45,* 939-953.

GOLDFELD, S.M., and R.E. QUANDT (1972): *Nonlinear Methods in Econometrics,* Amsterdam: North Holland.

GRUENBERGER, F., and A.M. MARK (1951): "The D^2 Test of Random Digits," *Math. Tables Other Aids Comp., 5.*

HAAVELMO, T. (1943): "The Statistical Implications of a System of Simultaneous Equations," *Econometrica, 11,* 1-12.

HANSEN, P.L. (1982): "Large Sample Properties of Generalized Methods of Moments Estimators," *Econometrica, 50,* 1029-1054.

HAUSMAN, J.A. (1978): "Specification Tests in Econometrics,"

Econometrica, *46*, 1251-1271.

HAUSMAN, J.A. and W.E. TAYLOR (1981): "A Generalised Specification Test," *Economic Letters*, *8*, 239-245.

HILDRETH, C., and J.P. HOUCK (1968): "Some Estimators for a Linear Model with Random Coefficients," *Journal of the American Statistical Association*, *63*, 584-595.

HILL, G.W., and A.W. DAVIS (1968): "Generalized Asymptotic Expansions of the Cornish-Fisher Type," *Annals of Mathematical Statistics*, *39*, 1264-1273.

HULL, T.E., and A.R. DOBELL (1962): "Random Number Generators," *SIAM Review*, *4*, 230-254.

HOLLY, A. (1982a): "A Remark on Hausman's Specification Test," *Econometrica*, *50*, 749-759.

HOLLY, A. (1982b): "A Simple Procedure for Testing whether a Subset of Endogenous Variable is Independent of the Disturbance Term in a Structural Equation," *Cashiers de Recherches Economiques*, *No. 8209*, Universite de Lausanne.

HWANG, H.S. (1980): "Tests of Independence between a Subset of Stochastic Regressors and Disturbance," *International Economic Review*, *21*, 749-760.

IMSL Library Manual (June, 1982), *vol. 2*.

KADANE J.B. (1970): "Testing Overidentifying Restrictions when the Disturbances are Small," *Journal of the American Statistical Association*, *65*, 182-185.

KADANE J.B. (1971): "Comparison of k-class Estimators when the Disturbances are Small," *Econometrica*, *39*, 723-737.

KADANE J.B. (1974): "Testing a Subset of Overidentifying Restrictions," *Econometrica*, *42*, 853-867.

KADIYALA, K.R. (1968): "A Transformation Used to Circumvent the Problem of Autocorrelation," *Econometrica, 36,* 93-96.

KEBOPK, K.H. (1981): Στατιστική, Πίνακες δια Στατιστικάς Ερεύνας.

KLEIN, R.W. (1973): "K-class Estimators: The Optimum Normalization for Finite Samples," *Journal of the American Statistical Association, 68,* 46-61.

KLEIN, R.W. (1979): "Optimal Intruments when the Disturbances are Small," *Journal of Econometrics, 9,* 367-377.

KLOEK, T., and L. MENNES (1960): "Simultaneous Equation Estimation based on Principal Components of Predetermined Variables," *Econometrica, 28,* 45-61.

KMENDA, J. (1974): "Comments on R.L. Basmann" in Intrilligator, M.D., and D.A. Kentrick (eds), *Frontiers of Quantitative Economics, vol. II,* Amsterdam: North Holland.

KNUTH, D.E. (1969): *The Art of Computer Programming, vol. 2,* Reading, Mass.: Addison-Wesley.

KOOPMANS, T.C., and W.C. HOOK (1953): "The Estimation of Simultaneous Linear Economic Relationships," Chapter 6 in Hook, W.C., and T.C. Koopmans (eds), *Studies in Econometric Method,* New York: J. Wiley.

KUNITOMO, N., K. MORIMUNE, and Y. TSUKUDA (1983): "Asymptotic Expansions of the Distribution of the Test Statistic for Overidentifying Restrictions in a System of Simultaneous Equations," *International Economic Review, 24,* 199-215.

LAPLACE, P.S. (1820): *Théorie Analytique des Probabilités, vol. 1,* Paris.

LEAMER, E.E. (1978): *Specification Searches: Ad Hoc Inference with Non-experimental Data,* New York: J. Wiley.

LEARMONTH, G.P., and P.A.W. LEWIS (June, 1973): "Naval Postgra-

duate School Random Number Generator Package LLRANDOM, NPS55LW73061A," Naval Postgraduate School, Monteray, California.

LEARMONTH, G.P., and P.A.W. LEWIS (November, 1973): "Statistical Tests of Some Widely Used and Recently Proposed Uniform Random Number Generators, NPS55LW73111A," Naval Postgraduate School, Monteray, California.

LEARMONTH, G.P., and P.A.W. LEWIS (1973): "Statistical Tests of Some Widely Used and Recently Proposed Uniform Random Number Generators," *Proceedings of Computer Science and Statistics: 7th Annual Symposium on the Interface*, 163-171, Iowa State University, Ames.

LECAM, L. (1956): "On the Asymptotic Theory of Estimation and Testing Hypotheses," *Proceedings of the Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 3rd, 1*, 129-156.

LEE, B.M.S., and P.K. TRIVEDI (1979): "Intrumental Variables Estimation of Structural Equations in Undersized Samples," *Discussion Paper*.

LEHMANN. E.L. (1959): *Testing Statistical Hypotheses*, New York: J. Wiley.

LEHMER, D.H. (1951): "Mathematical Methods in Large Scale Computing Units," *Annals Comp. Lab. Harvard Univ., 26*, 141-146.

LEWIS, P.A.W., A.S. GOODMAN, and J.M. MULLER (1969): "A pseudo-random Number Generator for the System/360," *IBM Systems Journal, 8(2)*, 136-146.

LEWIS, T.G. (1975): *Distribution Sampling for Computer Simulation*, Lexington Mass.: Lexington Books.

LOMNICKI, Z.A., and S.K. ZAREMBKA (1957): "On the Estimation of Autocorrelation in Time Series," *Annals of Mathematical Statistics, 28*, 140-158.

MAGDALINOS, M.A. (1983): "Applications of the Refined Asymptotic

Theory in Econometrics," *Ph.D. Thesis*, University of Southampton.

MAGDALINOS, M.A. (1985): "Improving some Instrumental Variables Test Procedures," *Econometric Theory*, *1*, 240-261.

MAGDALINOS, M.A. (1988): "The Local Power Function of the Tests of Overidentifying Restrictions," *International Economic Review*, *29*, 509-523.

MAGDALINOS, M.A. (1990): "The Classical Principles of Testing using Instrumental Variables Estimators," *Journal of Econometrics*, *43*, 1-39.

MAGDALINOS, M.A. (1991): "Stochastic Expansions and Asymptotic Approximations," *Discussion Paper*, Athens University of Economics and Business Science.

MAGEE, L. (1985): "Efficiency of Iterative Estimators in the Regression Model with AR(1) Disturbances," *Journal of Econometrics*, *29*, 275-287.

MAGEE, L. (1989): "An Edgeworth Test Size Correction for the Linear Model with AR(1) Errors," *Econometrica*, *57*, 661-674.

MAGNUS, J.R., and H. NEUDECKER (1979): "The Commutation Matrix: Some Properties and Applications," *The Annals of Statistics*, *7*, 381-394.

MARDIA, K.V., J.T. KENT, and J.M. BIBBY (1979): *Multivariate Analysis*, London: Academic Press.

MARIANO, R.S. (1973): "Approximations to the Distribution Functions of the Ordinary Least Squares and Two Stage Estimators in the case of Two Included Endogenous Variables," *Econometrica*, *41*, 67-77.

MARIANO, R.S. (1975): "Some Large Concentration Parameter Asymptotics for k-class Estimator," *Journal of Econometrics*, *3*, 171-177.

MARIANO, R.S. (1977): "Finite Sample Properties of Intrumental Variables Estimators of Structural Coefficients," *Econometrica, 45*, 487-495.

McDONALD, J.B. (1972): "The Exact Finite Sample Distribution Function of the LIML Identifiability Test Statistic," *Econometrica, 40*, 1109-1119.

McDONALD, G.C., and D.I. GALARNEAU (1975): "A Monte Carlo Evaluation of some Ridge-Type Estimators," *Journal of the American Statistical Association, 70*, 407-416.

MEYER, H.A. (1956): *Symposium on Monte Carlo Methods, 16*, New York: J. Wiley.

MICHEL, R. (1979): "Asymptotic Expansions for Conditional Distributions," *Journal of Multivariate Analysis, 9*, 393-400.

MIKHAIL, W.M. (1972): "Simulating the Small-Sample Properties of Econometric Estimators," *Journal of the American Statistical Association, 67*, 620-624.

MIKHAIL, W.M. (1975): "A Comparative Monte Carlo Study of the Properties of Econometric Estimators," *Journal of the American Statistical Association, 70*, 94-104.

MITROFANOVA, N.M. (1967): "An Asymptotic Expansion for the Maximum Likelihood Estimate of a Vector Parameter," *Theory of Probability and its Applications, 12*, 364-372.

MIZON, G.E., and D.F. HENDRY (1980): "An Empirical Application and Monte Carlo Analysis of Tests of Dynamic Specification," *The Review of Economic Studies, 67*, 21-45.

MORIMUNE, K. (1978): "Improving the LIML Estimator when the Disturbances are Small," *Journal of the American Statistical Association, 73*, 867-871.

MORIMUNE, K., and Y. TSUKUDA (1984): "Testing a Subset of Coefficients in a Structural Equation," *Econometrica, 52*, 427-448.

MUIRHEAD, R.J. (1982): *Aspects of Multivariate Statistical Theory*, New York: J. Wiley.

MURRAY, H.F. (December, 1970): "A General Approach for Generating Natural Random Variables," *IEEE Trans. on Computers, C-19(12)*, 1210-1213.

NAG Fortran Library Manual Mark 13 (July, 1988), *vol. 6*.

NAGAR, A.L. (1959): "The Bias and Moment Matrix of the General k-class Estimator of the Prarameters in Structural Equations," *Econometrica, 27*, 575-595.

NAGAR, A.L. (1961): "A Note on the Residual Variance Estimation in Simultaneous Equations," *Econometrica, 29*, 238-243.

NAGAR, A.L., and Y.P. GUPTA (1968): "The Bias of Liviatan's Consistent Estimator in a Distributed Lag Model," *Econometrica, 36*, 337-342.

NAGAR, A.L., and Y.P. GUPTA (1970): "The Moment Matrix of the 2SLS Estimator of Coefficients in Different Equations of a Complete System of Simultaneous Equations," *Econometrica, 38*, 39-49.

NAGAR, A.L., and A. ULLAH (1973): "Note on the Approximate Sqewness and Kurtosis of the 2SLS Estimator," *Indian Economic Review, 8*, 69-80.

NANKERVIS, J.C., and N.E. SAVIN (1988): "The Student's t Approximation in a Stationary First Order Autoregressive Model," *Econometrica, 56*, 119-145.

NEWEY, W.K. (1985): "Generalized Method of Moments Specification Testing," *Journal of Econometrics, 29*, 229-256.

PFANZAGL, J. (1960): "Über die Existenz Überall Trennscharfer Tests," *Metrika, 3*, 169-176; and "Addendum," *Metrika, 4*, 105-106.

PFANZAGL, J. (1962): " Überall Trennscharfer Tests und Monotone

Dichtequotienten," *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete, 1,* 109–115.

PFANZAGL, J. (1968): "A Characterization of the One Parameter Exponential Family by Existence of Uniformly Most Powerful Tests," *Sankhya, A30,* 147–156.

PFANZAGL, J. (1970): "Median Unbiased Estimates for M.L.R.–families," *Metrika, 15,* 30–39.

PFANZAGL, J. (1972b): "Further Results on Asymptotic Normality I," *Metrika, 18,* 174–198.

PFANZAGL, J. (1979b): "On Optimal Median Unbiased Estimates in the Presence of Nuisance Parameters," *Annals of Statistics,* 7, 187–193.

PFANZAGL, J. (1980): "Asymptotic Expansions in Parametric Statistical Theory," Chapter 1 in Krishnaiah, P.R. (ed), *Developments in Statistics, vol. 3,* New York: Academic Press.

PHILLIPS, G.D.A., and C. HALE (1977): "The Bias of Instrumental Variables Estimator of Simultaneous Equation Systems," *International Economic Review, 18,* 219–228.

PHILLIPS, P.C.B. (1977a): "Approximations to some Finite Sample Distributions Associated with a First Order Stochastic Difference Equation," *Econometrica, 45,* 463–486.

PHILLIPS, P.C.B. (1977b): "A General Theorem in the Theory of Asymptotic Expansions as Approximations to the Finite Sample Distributions of Econometric Estimators," *Econometrica, 45,* 1517–1534.

PHILLIPS, P.C.B. (1978): "Edgeworth and Saddlepoint Approximation in the First Order Non Circular Autoregression," *Biometrica, 65,* 91–98.

PHILLIPS, P.C.B. (1980): "The Exact Distribution of Instrumental Variable Estimators in an Equation Containing n+1 Endogenous Variables," *Econometrica, 48,* 861–878.

PHILLIPS, P.C.B. (1980a): "Finite Sample Theory and the Distributions of Alternative Estimators of the Marginal Propensity to Consume," *The Review of Economic Studies, XLVII*, 183-224.

PHILLIPS, P.C.B. (1983): "Exact Small Sample Theory in the Simultaneous Equations Model," Chapter 8 in Griliches, Z., and M.D. Intriligator (eds), *Handbook of Econometrics, vol. I*, Amsterdam: North Holland.

POLLOCK, D.S.G. (1979): *The Algebra of Econometrics*, Chichester: J Wiley.

PRAIS, S.J., and C.B. WINSTEN (1954): "Trend Estimators and Serial Correlation," *Cowles Commition Discussion Paper*, Chicago, IL.

RAMAGE, J.G. (1971): "A Perturbation Study of the k-class Estimators in the Presence of Specification Error," *Ph.D. Dissertation*, Yale University.

RAO, C.R. (1973): *Linear Statistical Inference and Its Applications*, New York: J. Wiley.

REVANKAR, N.S. (1978): "Asymptotic Relative Efficiency Analysis of Certain Tests of Independence in Structural Systems," *International Economic Review, 19*, 165-179.

REVANKAR, N.S., and M.J. Hartley (1973):"An Independence Test and Conditional Unbiased Predictions in the Context of Simultaneous Equations Systems," *International Economic Review, 14*, 625-631.

RICHARD, J.F. (1980): "Models with Several Regimes and Changes in Exogeneity," *Review of Economic Studies, 47*, 1-20.

RICHARDSON, D.H. (1968): "The Exact Distribution of a Structural Coefficient Estimator," *Journal of the American Statistical Association, 63*, 1214-1226.

RICHARDSON, D.H., and R.J. RORH (1971): "On The Distribution of a Structural t-statistic," *Journal of the American Statistical*

Association, 66, 375-382.

ROTHENBERG, T.J. (1981): "Hypothesis Testing in Linear Models, when the Error Variance Matrix is Nonscalar," *Unpublished Paper*, Berkeley.

ROTHENBERG, T.J. (1982): "Comparing Alternative Asymptotically Equivalent Tests," in Hildenbrand, W. (ed), *Advances in Econometrics*, Cambridge: Cambridge University Press.

ROTHENBERG, T.J. (1984a): "Approximate Normality of Generalized Least Squares Estimates," *Econometrica, 52*, 811-825.

ROTHENBERG, T.J. (1984b): "Hypothesis Testing in Linear Models when the Error Covariance Matrix is Nonscalar," *Econometrica, 52*, 827-842.

ROTHENBERG, T.J. (1988): "Approximate Power Functions for some Robust Tests of Regression Coefficients," *Econometrica, 56*, 997-1019.

SARGAN, J.D. (1958): "The Estimation of Economic Relationships using Instrumental Variables," *Econometrica, 26*, 393-415.

SARGAN, J.D. (1959): "The Estimation of Relationships with Autocorrelated Residuals by the use of Instrumental Variables," *Journal of the Royal Statistical Society, (Series B), 21*, 91-105.

SARGAN, J.D. (1975): "Gram-Charlier Approximations Applied to t Ratios of k-class Estimators," *Econometrica, 43*, 327-346.

SARGAN, J.D. (1976): "Econometric Estimators and the Edgeworth Approximation," *Econometrica, 44*, 421-448.

SARGAN, L.D. (1980): "Some Approximations to the Distribution of Econometric Criteria which are Asymptotically Distributed as Chi-squared," *Econometrica, 48*, 1108-1138.

SARGAN, J.D., and W.M. MIKHAIL (1971): "A General Approximation of the Distribution of Instrumental Variable Estimates," *Econo-*

metrica, 39, 131–169.

SARGAN, J.D., and Y.K. TSE (1979): "Edgeworth Approximations to the Distributions of Various Test Statistics," *Discussion Paper A22,* London School of Economics.

SAWA, T. (1969): "The Exact Finite Sample Distribution of OLS and 2SLS Estimator," *Journal of the American Statistical Association, 64,* 923–936.

SAWA, T. (1972): "Finite Sample Properties of the k-class Estimators," *Econometrica, 40,* 653–680.

SAWA, T. (1973): "Almost Unbiased Estimators in Simultaneous Equation Systems," *International Economic Review, 14,* 97–106.

SAWA, T. (1978): "The Exact Moments of the Least Squares Estimator for the Autoregressive Model," *Journal of Econometrics, 8,* 159–172.

SEBER, G.A.F. (1980): *The Linear Hypothesis: A General Theory,* London: Charles Griffin.

SERFLING, R.J. (1980): *Approximation Theorems of Mathematical Statistics,* New York: J. Wiley.

SMITH, R.J. (1983): "On the Classical Nature of the Wu-Hausman Stochastic Regressors and Disturbance," *Economic Letters, 11,* 357–364.

SOWEY, E.R. (1973): "A Classified Bibliography of Monte Carlo Studies in Econometrics," *Journal of Econometrics, 1,* 377–395.

SRINIVASAN, T.N. (1970): "Approximations to Finite Sample Moments of Estimators whose Exact Sampling Moments are Unknown," *Econometrica, 38,* 533–541.

SRIVASTAVA, V.K. (1972): "Disturbance-variance Estimation in Simultaneous Equations when the Disturbances are Small," *Journal of the American Statistical Association, 67,* 164–168.

TAKEUCHI, K. (1970): "Exact Sapling Moments of the OLS, IV, and 2SLS Estimators," *International Economic Review, 11*, 1-12.

TSE, Y.K. (1982): "Edgeworth Approximations in First-order Difference Equations with Exogenous Variables," *Journal of Econometrics, 20*, 175-195.

TURKINGTON, D.A. (1985): "A Note on Two-Stage Least Squares, Three-Stage Least Squares and Maximum Likelihood Estimation in an Expectations Model," *International Economic Review, 26*, 507-510.

WELCH, B.L. (1947): "The Generalization of "Student's" Problem when Several Populations are Involved," *Biometrika, 34*, 28-35.

WU, D.M. (1973): "Alternative Tests of Independence between Stochastic Regressors and Disturbance," *Econometrica, 41*, 733-750.

WU, D.M. (1974): "Alternative Tests of Independence between Stochastic Regressors and Disturbance: Finite Sample Results," *Econometrica, 42*, 529-546.

ZELLNER, A. (1962): "An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests of Aggregation Bias," *Journal of the American Statistical Association, 57*, 348-368.

ZELLNER, A. (1971): *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*, New York: J. Wiley.

ZELLNER, A. (1978): "Estimation of Functions of Population Means and Regression Coefficients including Structural Coefficients: A Minimum Expected Loss (MELO) Approach," *Journal of Econometrics, 8*, 127-158.

ZIDEK, J.V. (1973): "Estimating the Scale Parameter of the Exponential Distribution with Unknown Location," *Annals of Statistics, 1*, 264-278.

APPLICATIONS OF REFINED ASYMPTOTIC THEORY IN ECONOMETRIC TESTING

BY

SPYRIDON D. SYMEONIDES

A thesis submitted to the
Athens University of Economics and Business Science
for the degree of
Doctor of Philosophy,
July, 1991.

ABSTRACT

This thesis is concerned with some applications of Refined Asymptotic Theory in econometric testing. The fact that there is not any general exact theory of statistical inference forces the acceptance of the asymptotic methods as legitimate solutions of the inferential problems in statistics and econometrics. The use, however, of asymptotic methods in econometrics raises some serious problems due, not only to the uncontrolability of the quantity and quality of economic data, but also to the ad hoc nature of econometric modelling. This is the reason why we seek more information about the small sample properties of econometric estimators and test statistics, employing for this purpose refined asymptotic techniques. Alternative methods of refined asymptotics are discussed in Chapter 1, and the methodological classification of the refined asymptotic techniques of this thesis in the context of the Nagar school is made. The validity of our methods is examined in view of the analytic tools in Magdalinos (1991). Our techniques are proved to be both constructive and rigorous satisfying the ideal of the Econometric Society, i.e. "... to promote studies that aim at the unification of the theoretical-quantitative and the empirical-quantitative approach to economic problems and that are penetrated by constructive and rigorous thinking similar to that which has come to dominate in the natural

sciences".

The purpose of this work is to improve some of the most commonly used econometric tests. It is known that in finite samples there may be a considerable discrepancy between the true and the nominal size of a test, which may lead to erroneous inferences and to incorrect structural specification. Moreover, the well-known conflict among the classical testind procedures is, to a great extend, due to the fact that the Wald, likelyhood ratio, and Lagrange multiplier tests have different sizes. A size correction should eliminate most of the probability of conflict, as the differences between the true and the nominal size are large compared with the differences in power (see e.g. Rothenberg (1982), p. 529).

There are two methods of size correction: the Edgeworth (-type) correction of the critical values (see e.g. Rothenberg (1984b), (1988)) and the Cornish-Fisher correction of the test statistic (see e.g. Cornish and Fisher (1937), Fisher and Cornish (1960)). Although asymptotically equivalent to the order of the required accuracy, these two methods have different properties in the tails of the approximated distributions. The Cornish-Fisher correction method has two important advantages: First, the Cornish-Fisher corrected statistic is a proper random variable, whereas the Edgeworth (-type) expansion is not a proper distribution and it often assigns negative tail "probabilities". Second, in applied research it is more convenient to use the Cornish-Fisher correction because the same Cornish-Fisher corrected statistic can be employed for testing at any level of significance, whereas different Edgeworth (-type) corrected critical values have to be calculated for different significance levels.

Furthermore, instead of using the "asymptotic" form of the test it seems preferable to make "degrees of freedom adjustments" and to derive expansions in terms of the exact rather than the asymptotic distribution of the test statistic. Although the differnce between the two tests tends to zero as the sample size increases, it does so not as fast as one might expect, especially when the number of the structural parameters is large. Since the

accuracy of any asymptotic approximation depends on the nature of the first term in the expansion, the degrees of freedom adjustments may well be used whenever refined asymptotic approximations are employed. The use of the exact distributions rather than the limiting ones suggests the idea of "local exactness". We say that an asymptotic approximation is "locally exact" if it reduces to the exact distribution for a sufficient simplification of the model. In this thesis alternative size correction methods are developed by the use of asymptotic approximations in terms of both the exact and the limiting distributions of the test statistics.

Most of the usual econometric specifications (e.g. the first-order autocorrelated linear model, the linear model with heteroscedastic errors or stachastic coefficients, and the S.U.R. model) are special cases of the generalized linear regression model. Given the wide use of the generalized linear model in econometrics, a great part of this work is devoted to the improvement of the true size of the usual structural tests (i.e. the t and F tests) for the case of the normal linear regression model with nonscalar error covariance matrix.

In Chapter 2 alternative size corrections of the t and F tests are developed for the generalized linear regression model. Specifications of these corrections are given for the case of the linear model with AR(1) errors in Chapter 3, for the heteroscedastic linear model in Chapter 4, and for the S.U.R. model in Chapter 5. Great care has been taken so that these specifications of the size correction formulae of Chapter 2 be as simple and easily applicable as possible. As all the alternative size correction methods have an error of the same order ($O(T^{-3/2})$), their relative performances are compared by the use of Monte Carlo simulations.

The experimental results confirm our theoretical considerations in favour of the locally exact asymptotic approximations. Furthermore, the experiments show that all the size correction metods correct the size to the right direction and that the locally exact Edgeworth (-type) size corrections of the t and F tests perform better than the corresponding Edgeworth (-type) cor-

rections from the limiting distributions (normal and chi-squared, respectively) almost everywhere in the parameter space. The locally exact Cornish-Fisher correction of the test statistic performs even better in almost all cases. There are cases, however, in which the locally exact corrections perform worse than either the uncorrected, or the Edgeworth (-type) corrected tests from the limiting distributions, for absolute values of the autocorrelation coefficient near unity. Also, there are some cases in which the uncorrected exact t or F tests are better than the Edgeworth (-type) corrected tests from the limiting distributions (normal or chi-squared, respectively) in the heteroscedastic model. Both the above possibilities should be taken seriously into account in applied research. It should be noted that all these results seem to be valid for every possible sample size. Nevertheless, the experiments confirm our theoretical expectation that the importance of all the size corrections decreases as the sample size tends to infinity, because the size of the uncorrected asymptotic tests becomes better as the sample increases.

One can use essentially the same methodology in the exploration of various misspecification tests. In Chapter 6 of this thesis we examine alternative methods for the correction of the size of the Anderson-Rubin-Sargan tests (see Anderson and Rubin (1949), Sargan (1958)) for possible misspecification of a structural equation in a simultaneous equations system. Moreover, the properties of the third-order (local) power of the Anderson-Rubin-Sargan tests are examined for the case in which the instrumental variables are not independent from the stochastic term of the structural equation under consideration. Also, we prove that this interpretation of the Anderson-Rubin-Sargan tests, as tests of overidentifying orthogonality conditions, is more valid than their usual interpretation as structural misspecification tests. Furthermore, we cam make degrees of freedom adjustments and use the Basmann test rather than the ususal Anderson-Rubin-Sargan tests (see Basmann (1960)). Great care has been taken in order to derive simple operational correction formulae. Again, the various size correction methods have an error of the same order

($O(T^{-3/2})$), so that we have to resort to Monte Carlo experimentation in order to compare the relative performances of the alternative size corrections.

From the experiments it seems that, for structural equations with small degree of overidentification, the true size of the uncorrected linearized likelyhood ratio (overidentifiability) and Sargan tests underestimates the nominal size and that the use of the uncorrected (exact) Basmann test makes the situation worse. All the size correction methods correct the size to the right direction, but they overcorrect at least for small significance levels. The probability of overcorrection for the Edgeworth-type corrections is no less than 5 per cent, whereas for the Cornish-Fisher correction it is at most 2 per cent. The problem of overcorrection must be due to the existence of negative "probabilities" in the tails of the Edgeworth-type approximations or negative Cornish-Fisher corrected statistics. The experiments show that the Cornish-Fisher correction performs much better than the Edgeworth-type corrections. It should be noted, however, that for significance levels less than or equal to 5 per cent the uncorrected overidentifiability, Sargan and Basmann tests are the best, whereas for larger levels of significance the locally exact Cornish-Fisher corrected Basmann test becomes eventually the best. The above results do not depend upon the size of the sample used. For structural equations with large degree of overidentification, the experimental results seem to depend on the sample size. The true size of the uncorrected overidentifiability test overestimates the nominal size. The same is true for the uncorrected Sargan and Basmann tests for large sample sizes. On the contrary, in small and intermediate samples the true size of the uncorrected Basmann test underestimates the nominal size whereas the true and nominal sizes of the uncorrected Sagan test are almost equal. Again, all the size corrections correct the size to the right direction and, at least for small significance levels, they all overcorrect the size. However, the probability of overcorection is much smaller in this case not exceeding 3.5 per cent for the Edgeworth-type corrections and 0.5 per cent for the Cornish-Fisher

correction, which remains the best correction method. We must note that for small and intermediate samples it seems preferable to use the uncorrected Sargan test or the locally exact Cornish-Fisher corrected Basmann test. On the other hand, for large sample sizes the uncorrected Basmann test becomes the best. The fact that, in many cases the Edgeworth-type or Cornish-Fisher corrected tests and the exact uncorrected tests perform worse than the uncorrected asymptotic tests, was quite unexpected and deserves furhter study.

The occurrence of a negative Cornish-Fisher corrected statistic is an indication that the sample used is very small relative to the observed correlations, so that the asymptotic methods cannot be employed. A negative corrected statistic is mainly due to a very large value of the uncorrected statistic, and so it is equivalent to an almost certain rejection of the null hypothesis. So, in such cases we do not need to correct the statistic in order to test the hypothesis in question. On the other hand, whenever the uncorrected statistic admits values near the critical value the Cornish-Fisher corrected statistic is unlikely to be negative. Overcorrection may occure in the case of Edgeworth-type corrections too, and it takes the form of negative "critical values". As the critical values of the chi-squared distribution are larger than the critical values of the F distribution, the use of the latter distribution is expected to reduce the probability of such an overcorrection.