



**ATHENS UNIVERSITY  
OF ECONOMICS AND BUSINESS**  
DEPARTMENT OF STATISTICS

Collective Risk Theory and Approximations

By

Georgios D. Zaphiropoulos

A THESIS

Submitted to the Department of Statistics  
of the Athens University of Economics and Business  
in partial fulfillment of the requirements for  
the degree of PhD in Statistics

Athens, Greece  
2002



**ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ  
ΑΘΗΝΩΝ**

**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

Αθροιστική Θεωρία Κινδύνου και Προσεγγίσεις

Γεώργιος Δ. Ζαφειρόπουλος

ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής  
του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών  
ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση  
Διδακτορικού Διπλώματος στη Στατιστική

Αθήνα  
Σεπτέμβριος 2002

This Thesis has been approved by the seven-member Examining Committee.

The Members of the Committee

Michael Zazanis  
Assistant Professor, Department of  
Statistics, Athens University of  
Economics and Business, Greece  
(Thesis Supervisor)

Petros Dellaportas  
Assistant Professor, Department of  
Statistics, Athens University of  
Economics and Business, Greece  
(Member of the Advisory Committee)

Nikos Frangos  
Assistant Professor, Department of  
Statistics, Athens University of  
Economics and Business, Greece  
(Member of the Advisory Committee)

Athens, .....

Director of the Graduate Programme

To my family

"One thing I know, that I know nothing"

Sokratis

## **Acknowledgements**

I am indebted to my supervisor Professor Michael Zazanis for his valuable help, guidelines, and continuous encouragement.

Thanks are also extended to Professors Petros Dellaportas and Nikos Frangos for their helpful comments and support. I would also like to thank Professor George Roussa for sending me valuable material.

Many thanks to Professor Evdokia Xekalaki who welcomed and encouraged me in the department in my first postgraduate steps.

## Abstract

Collective risk theory is the area of applied probability concerned with the random fluctuations of the total assets of an insurance company. Ruin probability is one of the most important aspects since it represents the basic measure of risk and can be applied to adjust fundamental characteristics of the insurance company like the premium or the initial capital. Major part of risk theory has been devoted to the computation of the ruin probability either analytically or approximately. Analytic solutions are available only for insurance models with quite strict constraints. Approximations are often the alternative tools.

In this thesis, approximations based on functional central limit theorems applied in order to approximate the surplus process and the ruin probability of an insurance company, which deviates from the usual assumptions.

A time varying claim epoch model is examined. We prove that under specific conditions the surplus process and ruin probabilities can be approximated in terms of a Brownian motion with drift. The approximations are tested experimentally. The accuracy is improved applying *corrected* diffusion approximation. In the case of infinite second moment of the surplus process the diffusion approximation fails. Under specific conditions stable Levy motion can be the alternative approximation.

The time dependence is extended to the distribution of the claims. A new model is introduced and approximated under conditions in both cases of finite and infinite second moments. In the case of finite second moment the tightness issue is solved. These approximations are tested experimentally.

A new model with associated strictly stationary claims follows. The same features are assumed for the claim epochs. It is proved that the surplus process and the ruin probabilities can be approximated in terms of stable Levy motion.

Next a new model with claim epochs with infinite second moment is introduced. Approximations are presented based on either a single or two independent stable Levy motions. The ruin probabilities are approximated too.

Some aspects of reinsurance are also examined. A reinsurance model in proportional and excess of loss case is considered. The retention level that minimizes the insurer's ruin probability is obtained in both cases of finite and infinite second moment. Experimental results are presented. The same problem is solved under

varying reinsurer's loading with respect to the retention level. The method can be applied in models that deviate from the usual Poisson assumptions, since it is based on Diffusion and stable Levy motion approximations.

Furthermore a new premium calculation method is proposed. As a result both insurer's and reinsurer's premiums are obtained. The idea is based on the approximations of their ruin probabilities. These probabilities are first assumed fixed and next are solved either analytically or arithmetically with respect to the premium.

The obtained formulas are applied to address important issues of reinsurance. First conditions are introduced in order reinsurance premiums to be lower than the single insurance premiums. Both cases of claims with finite and infinite second moment are examined in both proportional and excess of loss reinsurance. Second the retention level that minimizes the premium is obtained. Experimental results are also presented. This case is the most interesting from the insured point of view. Third proportional and excess of loss reinsurance are compared. The idea is to obtain the interval  $[x,y]$ . If the retention level of proportional reinsurance belongs in this interval then the proportional reinsurance is cheaper than the excess of loss. Both cases of claims with finite and infinite second moment are examined. Experimental results are presented.

Finally the retention level that minimizes the premiums is re-obtained with respect to the Lunberg's exponent. This new approach is quite different than that of the approximations. Assuming that the claim epochs are Poisson distributed the premiums are computed with respect to the Lunberg's exponent. The method is more general than the simple reinsurance case since more than two companies can be considered. At the same time both proportional and excess of loss case are treated simultaneously. In particular the premium that corresponds to each of these companies is computed from the its Lunberg's equation. The Lunberg's exponent, the loading factor, and the initial capital of each company are assumed as fixed. The sum of these premiums is minimized under constraints.



## Περίληψη

Η αθροιστική θεωρία κινδύνου είναι ο τομέας των εφαρμοσμένων πιθανοτήτων που μελετά τις τυχαίες διακυμάνσεις των συνολικών πόρων μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Ένα από τα σπουδαιότερα μεγέθη του τομέα είναι η πιθανότητα καταστροφής της εταιρείας, αφού αποτελεί βασικό μέτρο κινδύνου. Επιπλέον, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ώστε άλλα θεμελιώδη μεγέθη, της ασφαλιστικής εταιρείας, να καθοριστούν όπως τα ασφάλιστρα και το αρχικό κεφάλαιο. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο ένα μεγάλο κομμάτι της αθροιστικής θεωρίας κινδύνου έχει αφιερωθεί στον αναλυτικό ή και προσεγγιστικό υπολογισμό της πιθανότητας καταστροφής. Οι προσεγγιστικοί λύσεις στο πρόβλημα υπολογισμού της πιθανότητας καταστροφής είναι ιδιαίτερα χρήσιμες, αφού οι αναλυτικές λύσεις είναι δυνατές μόνο σε μοντέλα που ικανοποιούν πολύ συγκεκριμένες συνθήκες.

Στη διατριβή αυτή, προσεγγίσεις που βασίζονται σε κεντρικά οριακά θεωρήματα εφαρμόζονται ώστε να προσεγγιστεί η διαδικασία αποθέματος και η πιθανότητα καταστροφής μιας ασφαλιστικής εταιρείας η οποία αποκλίνει από τις συνήθεις υποθέσεις.

Ένα μοντέλο με χρονικά μεταβαλλόμενες αφίξεις απαιτήσεων εξετάζεται. Αποδεικνύουμε ότι κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες η διαδικασία αποθέματος και οι πιθανότητες καταστροφής μπορούν να προσεγγιστούν από μια Brownian κίνηση με τάση. Οι προσεγγίσεις ελέγχονται πειραματικά. Η ακρίβεια βελτιώνεται εφαρμόζοντας τη διορθωμένη προσέγγιση διάχυσης. Στη περίπτωση της άπειρης δεύτερης ροπής της διαδικασίας αποθέματος η προσέγγιση με διαδικασία διάχυσης αποτυγχάνει. Κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες η Levy κίνηση μπορεί να αποτελέσει την εναλλακτική προσέγγιση.

Η χρονική εξάρτηση μεταφέρεται και στη κατανομή των απαιτήσεων. Ένα νέο μοντέλο παρουσιάζεται και προσεγγίζεται υπό συνθήκες και στις δυο περιπτώσεις πεπερασμένης και άπειρης δεύτερης ροπής. Στη περίπτωση της πεπερασμένης δεύτερης ροπής το θέμα tightness λύνεται. Οι προσεγγίσεις ελέγχονται πειραματικά.

Ένα νέο μοντέλο με associated ισχυρές στάσιμες απαιτήσεις και αφίξεις απαιτήσεων ακολουθεί. Αποδεικνύεται ότι η διαδικασία αποθέματος και οι πιθανότητες καταστροφής μπορούν να προσεγγιστούν μέσω μια Levy κίνησης.

Στη συνέχεια ένα νέο μοντέλο παρουσιάζεται με αφίξεις απαιτήσεων με άπειρη δεύτερη ροπή. Προσεγγίσεις παρουσιάζονται με βάση μία ή δυο ανεξάρτητες κινήσεις Levy. Προσεγγίζονται επίσης οι πιθανότητες καταστροφής.

Τέλος μερικά θέματα αντασφάλισης αντιμετωπίζονται. Συγκεκριμένα ένα μοντέλο αντασφάλισης θεωρείται. Το επίπεδο συνοχής που ελαχιστοποιεί την πιθανότητα καταστροφής του ασφαλιστή παρουσιάζεται και στις δυο περιπτώσεις πεπερασμένης και άπειρης δεύτερης ροπής. Πειραματικά αποτελέσματα παρουσιάζονται. Το ίδιο πρόβλημα λύνεται στη περίπτωση του μεταβαλλόμενου παράγοντα ασφάλειας του αντασφαλιστή σε σχέση με το επίπεδο συνοχής. Η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί σε μοντέλα που αποκλίνουν από τις συνήθεις Poisson υποθέσεις αφού βασίζεται σε προσεγγίσεις μέσω διαδικασιών διάχυσης και Levy.

Επιπλέον μια νέα μέθοδος υπολογισμού των ασφαλιστρών προτείνεται με αποτέλεσμα των υπολογισμών των ασφαλιστρών ασφαλιστή και αντασφαλιστή. Η ιδέα βασίζεται στη προσέγγιση των πιθανοτήτων καταστροφής τους. Οι πιθανότητες αυτές αρχικά θεωρούνται δεδομένες και στη συνέχεια επιλύονται αναλυτικά ή αριθμητικά σε σχέση με το ασφάλιστρο.

Οι τύποι που παράγονται εφαρμόζονται ώστε να απαντηθούν σημαντικά ερωτήματα της αντασφάλισης. Αρχικά παρουσιάζονται συνθήκες ώστε τα ασφάλιστρα της αντασφάλισης να είναι χαμηλότερα από αυτά της απλής ασφάλισης. Και οι δυο περιπτώσεις πεπερασμένης και άπειρης δεύτερης ροπής εξετάζονται καθώς και οι δυο πολιτικές αντασφάλισης, η αναλογική και η υπέρβασης απώλειας. Στη συνέχεια το επίπεδο συνοχής που ελαχιστοποιεί τα ασφάλιστρα υπολογίζεται. Επίσης παρουσιάζονται πειραματικά αποτελέσματα. Η περίπτωση αυτή είναι και η πιο ενδιαφέρουσα από τη πλευρά του ασφαλιζόμενου. Τέλος συγκρίνονται η αναλογική και η υπέρβαση απώλειας αντασφάλιση. Η ιδέα είναι να υπολογιστεί το διάστημα  $[x,y]$ . Αν το επίπεδο συνοχής της αναλογικής αντασφάλισης ανήκει στο διάστημα αυτό τότε η αναλογική αντασφάλιση είναι πιο φτηνή από αυτή της υπέρβασης απώλειας. Και οι δυο περιπτώσεις πεπερασμένης και άπειρης δεύτερης ροπής εξετάζονται. Επίσης παρουσιάζονται πειραματικά αποτελέσματα.

Το επίπεδο συνοχής που ελαχιστοποιεί τα ασφάλιστρα επαναπροσδιορίζεται σε σχέση με τον εκθέτη του Lunberg. Οι αφίξεις των απαιτήσεων θεωρούνται Poisson. Η μέθοδος είναι πιο γενική από την απλή αντασφάλιση αφού περισσότερες από δυο εταιρείες έχουν χρησιμοποιηθεί. Επίσης η αναλογική και η υπέρβαση απώλειας αντασφάλιση έχουν αντιμετωπιστεί ταυτόχρονα. Συγκεκριμένα το

ασφάλιστρο κάθε εταιρείας υπολογίζεται από την εξίσωση του Lunberg. Ο εκθέτης του Lunberg, ο παράγοντας ασφάλειας και το αρχικά κεφάλαιο κάθε εταιρείας θεωρούνται δεδομένα. Στη συνέχεια υπολογίζεται το άθροισμα των ασφαλίσεων και ελαχιστοποιείται σε σχέση με το επίπεδο συνοχής υπό περιορισμούς.