Περιελίξεις (windings) Στοχαστικών Ανελίξεων, και Εφαρμογές

Σταυρος Βακερουδης

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ,
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΩΝ-ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σεμινάριο Τμήματος Στατιστικής
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

30 Σεπτεμβρίου 2020

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS AND BUSINESS

Κίνητρα (1)

Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά: Αποτίμηση της αξίας Δικαιωμάτων Προαίρεσης (Options)

- Εκθετικά Συναρτησιακά της Κίνησης Brown σε σχέση με τα Αναλογιστικά και τα Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά.
- Πιο συγκεκριμένα, π.χ. η αποτίμηση της αξίας των Ασιατικών Δικαιωμάτων Προαίρεσης (Options):

$$E\left[\left(\frac{1}{t}\int_0^t ds\ \exp(\beta_s+\nu s)-K\right)^+\right],$$

όπου $(\beta_u, u\geq 0)$ είναι μία πραγματική (μονοδιάστατη) Κίνηση Brown, $\nu\in\mathbb{R}$ και $K\in\mathbb{R}_+$.

- Θα μελετήσουμε τα Εκθετικά Συναρτησιακά της Κίνησης Brown υπό το πρίσμα της επίπεδης Κίνησης Brown:

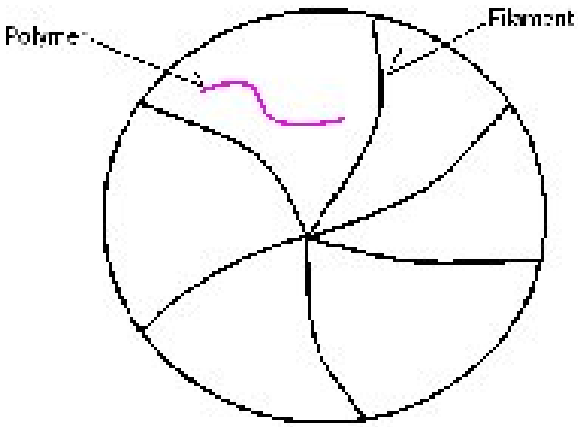
$$\int_0^{T_c^\gamma} ds\ \exp(2\beta_s)\ ,$$

όπου $T_c^\gamma=\inf\{u\geq 0:\gamma_u=c\}$, $c>0$, και $(\gamma_u, u\geq 0)$ μία άλλη πραγματική Κίνηση Brown, ανεξάρτητη από τη β.

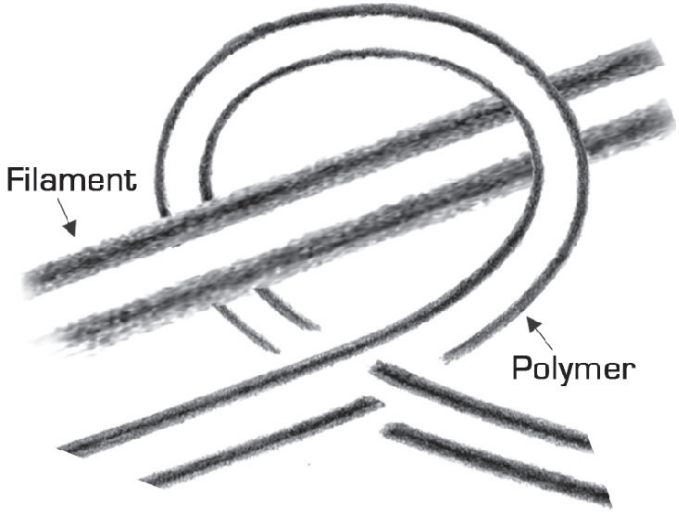
◇ M. Yor (2001), Exponential Functionals of Brownian Motion and Related Processes. Berlin, Springer.

Κίνητρα (2)

Υπολογιστική Βιολογία: Περιστροφή ενός επίπεδου πολυμερούς



(α)



(β)

Σχήμα: (α) Ελεύθερο πολυμερές στο κυτταρόπλασμα, και
(β) μία περιστροφή πολυμερούς σε 3 διαστάσεις.

◇ Σ. B.,M. Yor and D. Holcman (2011). The Mean First Rotation Time of a planar polymer. *J. Stat. Phys.*, Vol. **143**, n. 6, p. 1074-1095.

Πλάνο

1. Κίνηση Brown
   - Τυχαίος περίπατος
   - Κίνηση Brown
2. Εισαγωγή στη Στοχαστική Ανάλυση
   - Στοχαστικό Ολοκλήρωμα Itô
   - Φόρμουλα του Itô
3. Επίπεδη Κίνηση Brown
   - Εισαγωγή
   - Περιελίξεις Επίπεδης Κίνηση Brown
4. Χρόνοι εξόδου από έναν κώνο
   - Οι χρόνοι εξόδου από έναν κώνο T_c^θ και $T_c^{|\theta|}$
   - Εφαρμογές
5. Άλλες Περιελίξεις
   - Ανελίξεις Ornstein – Uhlenbeck
   - Επίπεδες Ευσταθείς (Stable) ανελίξεις
6. Ανοιχτά Προβλήματα
   - Περιελίξεις και Εφαρμογές

Πλάνο

1. Κίνηση Brown
   - Τυχαίος περίπατος
   - Κίνηση Brown
2. Εισαγωγή στη Στοχαστική Ανάλυση
   - Στοχαστικό Ολοκλήρωμα Itô
   - Φόρμουλα του Itô
3. Επίπεδη Κίνηση Brown
   - Εισαγωγή
   - Περιελίξεις Επίπεδης Κίνηση Brown
4. Χρόνοι εξόδου από έναν κώνο
   - Οι χρόνοι εξόδου από έναν κώνο T_c^θ και $T_c^{|\theta|}$
   - Εφαρμογές
5. Άλλες Περιελίξεις
   - Ανελίξεις Ornstein – Uhlenbeck
   - Επίπεδες Ευσταθείς (Stable) ανελίξεις
6. Ανοιχτά Προβλήματα
   - Περιελίξεις και Εφαρμογές

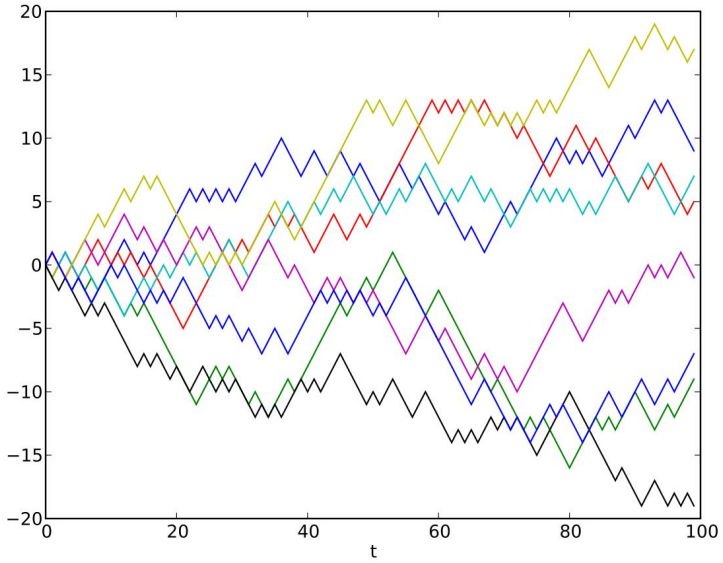
Κίνηση Brown

Εισαγωγή - τυχαίος περίπατος

Έστω τυχαίος περίπατος (αρχόμενος από το 0):

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

όπου $Y_i, i = 1, \ldots, n$ i.i.d. με $P(Y_i = 1) = P(Y_i = -1) = \frac{1}{2}$.



Σχήμα: 8 πραγματοποιήσεις του παραπάνω τυχαίου περίπατου.

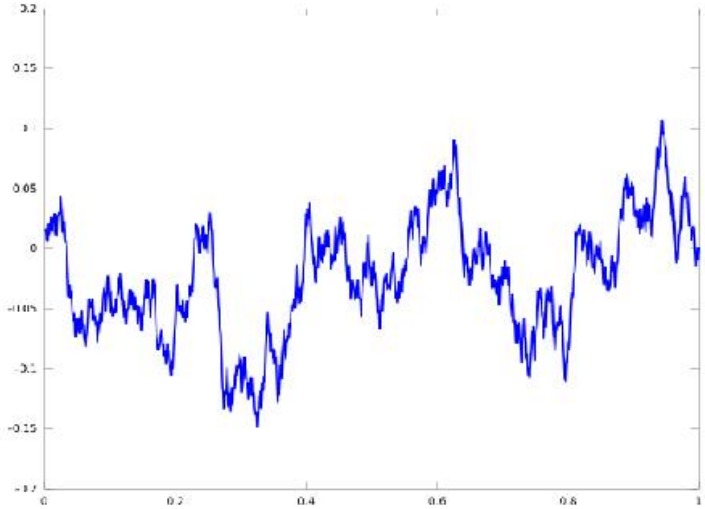
Κίνηση Brown

Διαισθητική προσέγγιση

Εν συνεχεία, σε κάθε Δt κάνουμε βήμα Δx. Με $n_t = \lfloor t/\Delta t \rfloor$, έχουμε:

$$X_t = (\Delta x) \sum_{i=1}^{n_t} Y_i.$$

Παίρνουμε: $\Delta x, \Delta t \to 0$
και προκύπτει Στοχαστική Ανέλιξη συνεχούς χρόνου.



Σχήμα: 1 πραγματοποίηση της μονοδιάστατης Κίνησης Brown.

Πλάνο

1. Κίνηση Brown
   - Τυχαίος περίπατος
   - Κίνηση Brown
2. Εισαγωγή στη Στοχαστική Ανάλυση
   - Στοχαστικό Ολοκλήρωμα Itô
   - Φόρμουλα του Itô
3. Επίπεδη Κίνηση Brown
   - Εισαγωγή
   - Περιελίξεις Επίπεδης Κίνηση Brown
4. Χρόνοι εξόδου από έναν κώνο
   - Οι χρόνοι εξόδου από έναν κώνο T_c^θ και $T_c^{|\theta|}$
   - Εφαρμογές
5. Άλλες Περιελίξεις
   - Ανελίξεις Ornstein – Uhlenbeck
   - Επίπεδες Ευσταθείς (Stable) ανελίξεις
6. Ανοιχτά Προβλήματα
   - Περιελίξεις και Εφαρμογές

Κίνηση Brown

Ορισμός

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η Στοχαστική Ανέλιξη (συνεχούς χρόνου) $(B_t, t \geq 0)$ *ονομάζεται Κίνηση Brown αν ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) $B_0 = 0$,

(ii) $\forall t > 0, B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$,

(iii) *(ανεξάρτητες προσαυξήσεις)* $\forall 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_k$, $B_{t_2} - B_{t_1}, B_{t_3} - B_{t_2}, \ldots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ *είναι ανεξάρτητές,*

(iv) *(στάσιμες προσαυξήσεις)* $\forall s, t > 0, B_{t+s} - B_t \overset{(law)}{=} B_s - B_0$,

(v) *οι τροχιές* $(B_t, t \geq 0)$ *είναι σχεδόν βεβαίως συνεχείς.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Οι τροχιές $(B_t, t \geq 0)$ *είναι* $\sigma.\beta.$ *ΠΟΥΘΕΝΑ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΕΣ.*

Κίνηση Brown

Βασικές Ιδιότητες

(i) Η $(B_t, t \geq 0)$ είναι Μαρκοβιανή Ανέλιξη, δηλαδή:
$$P[B_{t+s} \in \mathcal{D} | B_u, 0 \leq u \leq t] = P[B_{t+s} \in \mathcal{D} | B_t].$$

(ii) Η $(B_t, t \geq 0)$ είναι martingale ως προς $\mathcal{A}_t = \sigma(B_t, 0 \leq u \leq t)$:
- $(B_t)_{t \geq 0}$ προσαρμοσμένη στην $\mathcal{A}_t$,
- $E[|B_t|] < \infty, \forall t$,
- $E[B_t | \mathcal{A}_s] = B_s, \forall s < t$.

Άλλα martingales ως προς $\mathcal{A}_t$ (άσκηση): $B_t^2 - t, \exp\{\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}\}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ

(i) *Ομογένεια ως προς το χρόνο:* $\forall s > 0$, $(B_{t+s} - B_s)_{t \geq 0}$*: Κίνηση Brown ανεξάρτητη από* $\sigma(B_u, u \leq s)$.

(ii) *Συμμετρία:* $(-B_t, t \geq 0)$*: Κίνηση Brown.*

(iii) *Scaling:* $\forall c > 0, (cB_{t/c^2}, t \geq 0)$*: Κίνηση Brown.*

(iv) *Αντιστροφή χρόνου:*$X_t : X_0 = 0, (X_t = tB_{1/t}, t > 0)$*:Κίνηση Brown.*

(v) *Με* $t \in [0, 1]$, $B_{1-t} - B_1$*: Κίνηση Brown στο* $[0, 1]$.

(vi) *Αναστροφή χρόνου: δοθέντος σταθερού* u, $B_s \overset{(law)}{=} B_u - B_s$.

Πλάνο

1. Κίνηση Brown
   - Τυχαίος περίπατος
   - Κίνηση Brown
2. Εισαγωγή στη Στοχαστική Ανάλυση
   - Στοχαστικό Ολοκλήρωμα Itô
   - Φόρμουλα του Itô
3. Επίπεδη Κίνηση Brown
   - Εισαγωγή
   - Περιελίξεις Επίπεδης Κίνηση Brown
4. Χρόνοι εξόδου από έναν κώνο
   - Οι χρόνοι εξόδου από έναν κώνο T_c^θ και $T_c^{|\theta|}$
   - Εφαρμογές
5. Άλλες Περιελίξεις
   - Ανελίξεις Ornstein – Uhlenbeck
   - Επίπεδες Ευσταθείς (Stable) ανελίξεις
6. Ανοιχτά Προβλήματα
   - Περιελίξεις και Εφαρμογές

Στοχαστικό Ολοκλήρωμα

Εισαγωγή

$(C_x)_{x\geq 0}$: Στοχαστική Ανέλιξη. Πώς ορίζεται το $\int_0^t C_x dB_x$;

Γνωρίζουμε ότι:

$$\int_0^t f(x)dg(x) = \lim_{\max(t_i - t_{i-1})\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(y_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})],$$

όπου $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$, $y_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Μία πρώτη σκέψη είναι να κάνουμε κάτι παρόμοιο:

$$\left(\int_0^t C_x dB_x\right)(\omega) = \lim_{\max(t_i - t_{i-1})\to 0} \sum_{i=1}^{n} C_{y_i}(\omega)[B_{t_i}(\omega) - B_{t_{i-1}}(\omega)].$$

<u>ΠΡΟΒΛΗΜΑ:</u> $t \mapsto B_t$ (σ.β.) πουθενά παραγωγίσιμη, συνεπώς το όριο δεν υπάρχει για όλα τα (C_x).

Στοχαστική Ανάλυση

Στοχαστικό Ολοκλήρωμα Itô

ΟΡΙΣΜΟΣ (Στοχαστικό Ολοκλήρωμα Itô)

$$\int_0^t C_x dB_x = L^2 - \lim_{\max(t_i - t_{i-1}) \to 0} \sum_{i=1}^{n} C_{t_{i-1}} [B_{t_i} - B_{t_{i-1}}].$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Εδώ το αποτέλεσμα εξαρτάται από το $y_i \in [t_{i-1}, t_i]$. *Γι΄ αυτό επιλέγουμε* $y_i = t_{i-1}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Τετραγωνική Διακύμανση της Κίνησης Brown ($\Delta_i B = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$):

$$E[(\Delta_i B)^2] = Var(\Delta_i B) = t_i - t_{i-1} = \Delta_i t.$$

Αλλιώς: $(dB_t)^2 = dt$.

Πλάνο

1. Κίνηση Brown
   - Τυχαίος περίπατος
   - Κίνηση Brown
2. Εισαγωγή στη Στοχαστική Ανάλυση
   - Στοχαστικό Ολοκλήρωμα Itô
   - Φόρμουλα του Itô
3. Επίπεδη Κίνηση Brown
   - Εισαγωγή
   - Περιελίξεις Επίπεδης Κίνηση Brown
4. Χρόνοι εξόδου από έναν κώνο
   - Οι χρόνοι εξόδου από έναν κώνο T_c^θ και $T_c^{|\theta|}$
   - Εφαρμογές
5. Άλλες Περιελίξεις
   - Ανελίξεις Ornstein – Uhlenbeck
   - Επίπεδες Ευσταθείς (Stable) ανελίξεις
6. Ανοιχτά Προβλήματα
   - Περιελίξεις και Εφαρμογές

Στοχαστική Ανάλυση

Φόρμουλα του Itô

Κανόνας της αλυσίδας (chain rule):

$$df(g(x)) = f(g(x+dx)) - f(g(x)) = [f(g(x))]'\,dx + \frac{[f(g(x))]''}{2}(dx)^2 + \dots$$

$$f(g(t)) - f(g(0)) = \int_0^t df(g(x)) = \int_0^t [f(g(x))]'\,dx = \int_0^t f'(g(x))dg(x).$$

Φόρμουλα του Itô: (επέκταση κανόνα αλυσίδας)

Συνεπώς

$$\boxed{f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t df(B_t) = \int_0^t f'(B_x)dB_x + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_x)dx\ .}$$

Στοχαστική Ανάλυση

Φόρμουλα του Itô

Κανόνας της αλυσίδας (chain rule):

$$df(g(x)) = f(g(x+dx)) - f(g(x)) = [f(g(x))]'\,dx + \frac{[f(g(x))]''}{2}(dx)^2 + \dots$$

$$f(g(t)) - f(g(0)) = \int_0^t df(g(x)) = \int_0^t [f(g(x))]'\,dx = \int_0^t f'(g(x))dg(x).$$

Φόρμουλα του Itô: (επέκταση κανόνα αλυσίδας)

Συνεπώς

$$\boxed{f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t df(B_t) = \int_0^t f'(B_x)dB_x + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_x)dx\ .}$$

Στοχαστική Ανάλυση

Φόρμουλα του Itô

Κανόνας της αλυσίδας (chain rule):

$$df(g(x)) = f(g(x+dx)) - f(g(x)) = [f(g(x))]'\,dx + \frac{[f(g(x))]''}{2}(dx)^2 + \dots$$

$$f(g(t)) - f(g(0)) = \int_0^t df(g(x)) = \int_0^t [f(g(x))]'\,dx = \int_0^t f'(g(x))dg(x).$$

Φόρμουλα του Itô: (επέκταση κανόνα αλυσίδας)

$$df(B_x) = f(B_{x+dx}) - f(B_x) = f'(B_x)dB_x + \frac{f''(B_x)}{2}(dB_x)^2 + \dots\ .$$

Συνεπώς

$$\boxed{f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t df(B_t) = \int_0^t f'(B_x)dB_x + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_x)dx\ .}$$

Στοχαστική Ανάλυση

Φόρμουλα του Itô

Κανόνας της αλυσίδας (chain rule):

$$df(g(x)) = f(g(x+dx)) - f(g(x)) = [f(g(x))]'\,dx + \frac{[f(g(x))]''}{2}(dx)^2 + \dots$$

$$f(g(t)) - f(g(0)) = \int_0^t df(g(x)) = \int_0^t [f(g(x))]'\,dx = \int_0^t f'(g(x))dg(x).$$

Φόρμουλα του Itô: (επέκταση κανόνα αλυσίδας)

$$df(B_x) = f(B_{x+dx}) - f(B_x) = f'(B_x)dB_x + \frac{f''(B_x)}{2}\underbrace{(dB_x)^2}_{dx} + \dots\ .$$

Συνεπώς

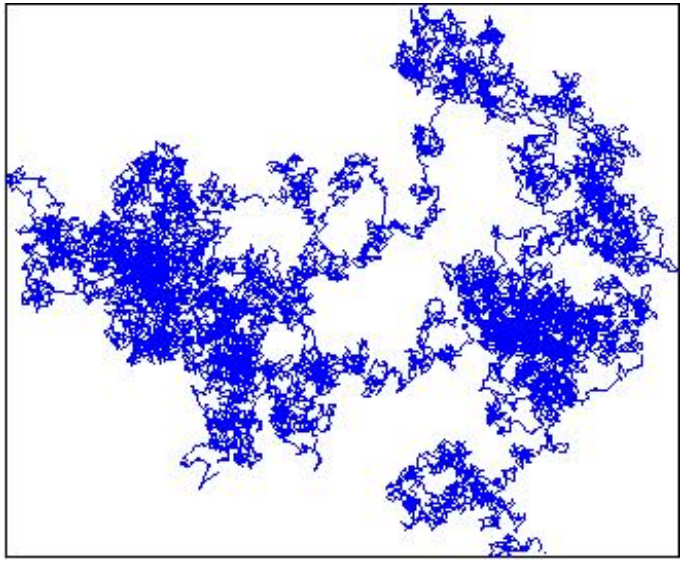
$$\boxed{f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t df(B_t) = \int_0^t f'(B_x)dB_x + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_x)dx\ .}$$

Πλάνο

1. Κίνηση Brown
   - Τυχαίος περίπατος
   - Κίνηση Brown
2. Εισαγωγή στη Στοχαστική Ανάλυση
   - Στοχαστικό Ολοκλήρωμα Itô
   - Φόρμουλα του Itô
3. Επίπεδη Κίνηση Brown
   - Εισαγωγή
   - Περιελίξεις Επίπεδης Κίνηση Brown
4. Χρόνοι εξόδου από έναν κώνο
   - Οι χρόνοι εξόδου από έναν κώνο T_c^{θ} και $T_c^{|\theta|}$
   - Εφαρμογές
5. Άλλες Περιελίξεις
   - Ανελίξεις Ornstein – Uhlenbeck
   - Επίπεδες Ευσταθείς (Stable) ανελίξεις
6. Ανοιχτά Προβλήματα
   - Περιελίξεις και Εφαρμογές

Επίπεδη Κίνηση Brown

Εισαγωγή (1)



Σχήμα: 1 πραγματοποίηση της Επίπεδης Κίνησης Brown.

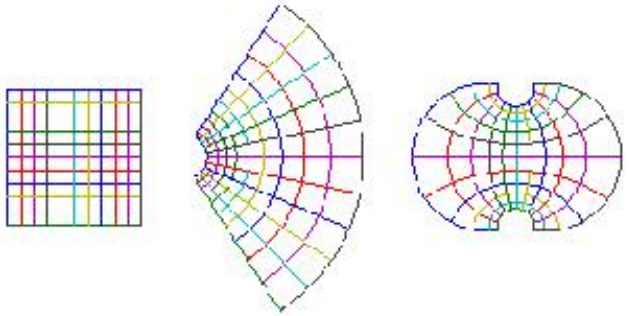
Η διδιάστατη Κίνηση Brown:

- είναι επανερχόμενη σε οποιαδήποτε περιοχή στο επίπεδο,
- δεν επισκέπτεται $\sigma.\beta.$ ΚΑΝΕΝΑ σημείο στο επίπεδο εκτός από το σημείο εκκίνησής της.

Επίπεδη Κίνηση Brown

Εισαγωγή (2)

Η ιδιότητα σύμμορφα αναλλοίωτου (conformal invariance) της Επίπεδης Κίνησης Brown έχει σημαντικές συνέπειες στη δομή των τροχιών της.



Σχήμα: Παραδείγματα σύμμορφων (conformal) απεικονίσεων.

Αποτέλεσε/αποτελεί αντικείμενο μελέτης πολλών σημαντικών ερευνητών (Itô, McKean, Lyons, Kallianpur, Robbins, Spitzer, Williams, Durrett, Yor, Messulam, Pitman, Belisle, Le Gall, Bertoin, Werner, Pap, Bentkus, Shi,...).

Σημαντικό θέμα μελέτης σήμερα: Schramm-Loewner Evolution (SLE) (Schramm (2000), Lawler, Werner, Smirnov, Beffara, Duminil-Copin,...).

Πλάνο

1. Κίνηση Brown
   - Τυχαίος περίπατος
   - Κίνηση Brown
2. Εισαγωγή στη Στοχαστική Ανάλυση
   - Στοχαστικό Ολοκλήρωμα Itô
   - Φόρμουλα του Itô
3. Επίπεδη Κίνηση Brown
   - Εισαγωγή
   - Περιελίξεις Επίπεδης Κίνηση Brown
4. Χρόνοι εξόδου από έναν κώνο
   - Οι χρόνοι εξόδου από έναν κώνο T_c^θ και $T_c^{|\theta|}$
   - Εφαρμογές
5. Άλλες Περιελίξεις
   - Ανελίξεις Ornstein – Uhlenbeck
   - Επίπεδες Ευσταθείς (Stable) ανελίξεις
6. Ανοιχτά Προβλήματα
   - Περιελίξεις και Εφαρμογές

Επίπεδη Κίνηση Brown

Η ανέλιξη των περιελίξεων (windings)

Έστω $(Z_t = X_t + iY_t, t \geq 0)$ μία τυπική Επίπεδη Κίνηση Brown, αρχόμενη από το $x_0 + i0, x_0 > 0$ (θεωρούμε $x_0 = 1$).

$(Z_t, t \geq 0)$ δε συναντάει $\sigma.\beta.$ ποτέ το σημείο 0 αλλά περιστρέφεται γύρω του απείρως συχνά (McKean).

Η συνεχής ανέλιξη των περιελίξεων (windings)

$$\theta_t = \mathrm{Im}(\int_0^t \frac{dZ_s}{Z_s}), t \geq 0$$

είναι καλώς ορισμένη.

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε: $Z_t = |Z_t|\, e^{i\theta_t}$.

Επίπεδη Κίνηση Brown

Αναπαράσταση skew-product

Έτσι, έχουμε: $\log Z_t = \log |Z_t| + i\theta_t$.

Αναπαράσταση skew-product ($Z_t = X_t + iY_t \Rightarrow |Z_t|^2 = X_t^2 + Y_t^2$):

$$\begin{aligned}
\log |Z_t| + i\theta_t &= \int_0^t \frac{dZ_s}{Z_s} = \int_0^t \frac{dX_s + idY_s}{X_s + iY_s} \frac{X_s - iY_s}{X_s - iY_s} \\
&= \int_0^t \frac{X_s dX_s + Y_s dY_s}{X_s^2 + Y_s^2} + i \int_0^t \frac{-Y_s dX_s + X_s dY_s}{X_s^2 + Y_s^2} \\
&= (\beta_u + i\gamma_u) \Big|_{u = H_t = \int_0^t \frac{ds}{|Z_s|^2}} ,
\end{aligned}$$

όπου $(\beta_u + i\gamma_u, u \geq 0)$ είναι μία άλλη μιγαδική Κίνηση Brown, αρχόμενη από $\log 1 + i0$. Άρα:

$$\log |Z_t| = \beta_{H_t} , \quad \theta_t = \gamma_{H_t}.$$

Επιπλέον: $H_u^{-1} = \inf\{t : H_t > u\} = \int_0^u ds \exp(2\beta_s) := A_u(\beta)$.

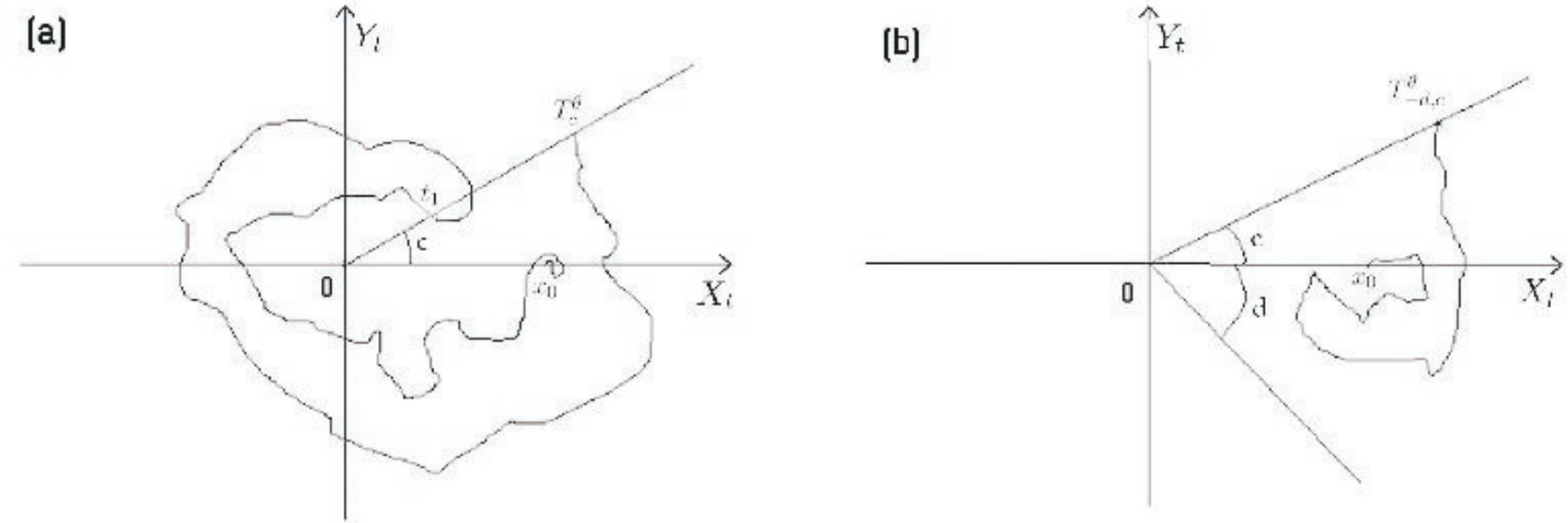
Πλάνο

1. Κίνηση Brown
   - Τυχαίος περίπατος
   - Κίνηση Brown
2. Εισαγωγή στη Στοχαστική Ανάλυση
   - Στοχαστικό Ολοκλήρωμα Itô
   - Φόρμουλα του Itô
3. Επίπεδη Κίνηση Brown
   - Εισαγωγή
   - Περιελίξεις Επίπεδης Κίνηση Brown
4. Χρόνοι εξόδου από έναν κώνο
   - Οι χρόνοι εξόδου από έναν κώνο T_c^θ και $T_c^{|\theta|}$
   - Εφαρμογές
5. Άλλες Περιελίξεις
   - Ανελίξεις Ornstein – Uhlenbeck
   - Επίπεδες Ευσταθείς (Stable) ανελίξεις
6. Ανοιχτά Προβλήματα
   - Περιελίξεις και Εφαρμογές

Επίπεδη Κίνηση Brown

Χρόνοι εξόδου από έναν κώνο

Ενδιαφερόμαστε να μελετήσουμε την κατανομή του $T_c^\theta \equiv \inf\{t : \theta_t = c\}$ και του $T_c^{|\theta|} \equiv \inf\{t : |\theta_t| = c\}$.



Σχήμα: Χρόνοι εξόδου από έναν κώνο για την Επίπεδη Κίνηση Brown.
(a) T_c^θ (t_1 δε μετράει καθώς η γωνία είναι αρνητική) και
(b) $T^\theta_{-d,c} \equiv \inf\{t : \theta_t \notin (-d, c)\}$, $(c, d > 0)$ για μία Επίπεδη Κίνηση Brown, αρχόμενη από $x_0 + i0$.

Επίπεδη Κίνηση Brown

Χρόνοι εξόδου από έναν κώνο και Εκθετικό Συναρτησιακό

Ορίζουμε επίσης:

$$T_c^{\gamma} \equiv \inf\{t : \gamma_t = c\}, \quad T_c^{|\gamma|} \equiv \inf\{t : |\gamma_t| = c\}.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Οι παρακάτω σχέσεις ισχύουν:

$$T_c^{\theta} = \int_0^{T_c^{\gamma}} ds \, \exp(2\beta_s) = A_{T_c^{\gamma}}, \quad \kappa\alpha\iota \quad T_c^{|\theta|} = \int_0^{T_c^{|\gamma|}} ds \, \exp(2\beta_s) = A_{T_c^{|\gamma|}}.$$

Απόδειξη: Από την αναπαράσταση skew-product ($\theta_t = \gamma_{H_t}$), έχουμε:

$$\begin{aligned} T_c^{\theta} &= \inf\{t : \theta_t = c\} = \inf\{t : \gamma_{H_t} = c\} \\ &\overset{s=H_t}{=} \inf\{A_s : \gamma_s = c\} \quad \gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota} \quad t = H_s^{-1} = A_s \\ &= A(\inf\{s : \gamma_s = c\}) = A_{T_c^{\gamma}} \ . \end{aligned}$$

Παρομοίως για τη 2η σχέση. ∎

Οι χρόνοι Διακοπής T_c^θ και $T_c^{|\theta|}$

Δύο Μετασχηματισμοί Gauss-Laplace

ΠΡΟΤΑΣΗ (Β. 2011)

Η κατανομή του T_c^θ χαρακτηρίζεται από ($x \geq 0$):

$$c\,E\left[\sqrt{\frac{\pi}{2T_c^\theta}}\exp\left(-\frac{x}{2T_c^\theta}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\frac{c^2}{(c^2+\log^2(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}))}.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ (Β. 2011)

Η κατανομή του $T_c^{|\theta|}$ χαρακτηρίζεται από ($x \geq 0$ και $m = \frac{\pi}{2c}$):

$$c\,E\left[\sqrt{\frac{2}{\pi T_c^{|\theta|}}}\exp\left(-\frac{x}{2T_c^{|\theta|}}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\frac{2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})^m+(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})^m}.$$

Ο χρόνος Διακοπής $T_c^{|\theta|}$

Πρώτο Παράδειγμα: $c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow m = \frac{\pi}{2c} = 1$

Με $(Z_t = X_t + iY_t = |Z_t| \exp(i\theta_t), t \geq 0)$ μία Επίπεδη Κίνηση Brown, αρχόμενη από $(1, 0)$,
$T_{\pi/2}^{|\theta|} = \inf\{t : X_t = 0\} \overset{(law)}{=} \inf\{t : \eta_t = 1\} = T_1^{\eta}$,
όπου $(\eta_t, t \geq 0)$ μία Κίνηση Brown, αρχόμενη από το 0.
Ο τύπος δίνει:

$$E\left[\sqrt{\frac{\pi}{2T_{\pi/2}^{|\theta|}}} \exp\left(-\frac{x}{2T_{\pi/2}^{|\theta|}}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \frac{2}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{1+x} . \quad (\star)$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι: $T_{\pi/2}^{|\theta|} = T_1^{\eta} \overset{(law)}{=} \frac{1}{N^2}, \ N \sim \mathcal{N}(0,1)$,
αφού: $P(T_1^{\eta} \geq k) = P(\sup_{0 \leq s \leq k} \eta_s \leq 1) = P(|\eta_k| \leq 1) = P(\frac{1}{N^2} \geq k)$.
Το αριστερό μέρος της προηγούμενης σχέσης δίνει λοιπόν:

$$E\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}|N| \exp\left(-\frac{x}{2}N^2\right)\right] = \int_0^{\infty} dy \ y \ e^{-\frac{x+1}{2}y^2} = \frac{1}{1+x} .$$

Ο χρόνος Διακοπής $T_c^{|\theta|}$

Δεύτερο Παράδειγμα: $c = \frac{\pi}{4} \Rightarrow m = \frac{\pi}{2c} = 2$

Άσκηση: Επιβεβαιώστε τον τύπο για $c = \frac{\pi}{4} \Rightarrow m = \frac{\pi}{2c} = 2$:

$$E\left[\sqrt{\frac{\pi}{8\,T_{\pi/4}^{|\theta|}}}\exp\left(-\frac{x}{2\,T_{\pi/4}^{|\theta|}}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{1+x}}\frac{2}{1+2x}\ .$$

Απόδειξη με χρήση της Ταυτότητας του Bougerol

ΠΡΟΤΑΣΗ (Bougerol 1983)

Για σταθερό $u > 0$,

$$\boxed{\sinh(\beta_u) \overset{(law)}{=} \hat{\beta}_{A_u = \int_0^u ds \exp(2\beta_s)}\ ,}$$

όπου $(\hat{\beta}_t, t \geq 0)$ *είναι μία Κίνηση Brown, ανεξάρτητη από* A_u.

Από την Αναπαράσταση skew-product, για:

$$T_c^\gamma = \inf\{t : \gamma_t = c\}, \quad T_c^\theta = \inf\{t : \theta_t = c\},$$

έχουμε $A_{T_c^\gamma} = \int_0^{T_c^\gamma} ds \exp(2\beta_s) = H_u^{-1} \Big|_{u = T_c^\gamma} = T_c^\theta$.

Η Ταυτότητα του Bougerol για $u = T_c^\gamma$ $(\hat{N} \sim \mathcal{N}(0,1))$ δίνει

$$\sinh(\beta_{T_c^\gamma}) \overset{(law)}{=} \hat{\beta}_{T_c^\theta}.$$

◇ Σ. Β. (2012), Bougerol's identity in law and extensions. *Probability Surveys*, **9**, pp. 411–437.

Πλάνο

1. Κίνηση Brown
   - Τυχαίος περίπατος
   - Κίνηση Brown
2. Εισαγωγή στη Στοχαστική Ανάλυση
   - Στοχαστικό Ολοκλήρωμα Itô
   - Φόρμουλα του Itô
3. Επίπεδη Κίνηση Brown
   - Εισαγωγή
   - Περιελίξεις Επίπεδης Κίνηση Brown
4. Χρόνοι εξόδου από έναν κώνο
   - Οι χρόνοι εξόδου από έναν κώνο T_c^θ και $T_c^{|\theta|}$
   - Εφαρμογές
5. Άλλες Περιελίξεις
   - Ανελίξεις Ornstein – Uhlenbeck
   - Επίπεδες Ευσταθείς (Stable) ανελίξεις
6. Ανοιχτά Προβλήματα
   - Περιελίξεις και Εφαρμογές

Επίπεδη Κίνηση Brown

Θετικές και Αρνητικές Ροπές και ένα Τοπικό Οριακό Θεώρημα

ΘΕΩΡΗΜΑ

Για $0 < c < d$, $T_c^\theta \geq T_{-d,c}^\theta \geq T_c^{|\theta|}$. *Συνεπώς, για* $p > 0$,

(i) $E\left[(T_{-d,c}^\theta)^p\right] < \infty \quad \Leftrightarrow \quad p < \frac{\pi}{2(c+d)}$, *(Spitzer 1958)*

(ii) $E\left[(T_c^\theta)^{-p}\right] \leq E\left[(T_{-d,c}^\theta)^{-p}\right] \leq E\left[(T_c^{|\theta|})^{-p}\right] < \infty$. *(B., Yor 2012)*

(iii) $\frac{2\theta_t}{\log t} \xrightarrow[t\to\infty]{(law)} C_1 \overset{(law)}{=} \gamma_{T_1^\beta}$, *(Spitzer 1958)*
όπου C_1 *είναι μία τυπική Cauchy τ.μ., δηλαδή με σ.π.π.* $(\pi(1+x^2))^{-1}$, *και* $T_1^\beta \equiv \inf\{t : \beta_t = 1\}$.

(iv) $(\log t)\ P(T_c^\theta > t) \xrightarrow{t\to\infty} (4c)/\pi$. *(B. 2011)*
Άρα, για $q > 0$, $E[(\log T_c^\theta)_+^q] < \infty \quad \Leftrightarrow \quad q < 1$,
όπου $(\cdot)_+$ *δηλώνει το θετικό μέρος.*

(v) *Για* $d > c$, $(\log t)\ P(c < \theta_t < d) \xrightarrow{t\to\infty} \frac{2}{\pi}(d-c)$.

Πλάνο

1. Κίνηση Brown
   - Τυχαίος περίπατος
   - Κίνηση Brown
2. Εισαγωγή στη Στοχαστική Ανάλυση
   - Στοχαστικό Ολοκλήρωμα Itô
   - Φόρμουλα του Itô
3. Επίπεδη Κίνηση Brown
   - Εισαγωγή
   - Περιελίξεις Επίπεδης Κίνηση Brown
4. Χρόνοι εξόδου από έναν κώνο
   - Οι χρόνοι εξόδου από έναν κώνο T_c^{θ} και $T_c^{|\theta|}$
   - Εφαρμογές
5. Άλλες Περιελίξεις
   - Ανελίξεις Ornstein – Uhlenbeck
   - Επίπεδες Ευσταθείς (Stable) ανελίξεις
6. Ανοιχτά Προβλήματα
   - Περιελίξεις και Εφαρμογές

Ανελίξεις Ornstein-Uhlenbeck

Εισαγωγή

Θεωρούμε μία ανέλιξη Ornstein-Uhlenbeck (OU):

$$Z_t = z_0 + \tilde{Z}_t - \lambda \int_0^t Z_s ds,$$

$\tilde{Z}_t$: μιγαδική Κίνηση Brown, $z_0 \in \mathbb{C}$ (έστω $z_0 = 1 + i0$) και $\lambda \geq 0$.
θ_t^Z η συνεχής ανέλιξη περιελίξεων της Z.

$T_c^{(\lambda)} \equiv T_c^{\theta^Z} \equiv \inf\left\{t \geq 0 : \left|\theta_t^Z\right| = c\right\}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Μπορούμε να γράψουμε:

$$Z_t = e^{-\lambda t}\left(1 + \int_0^t e^{\lambda s} d\tilde{Z}_s\right) = e^{-\lambda t}\mathbb{B}_{\alpha_t} \ ,$$

όπου $\mathbb{B}$ *είναι μία Επίπεδη Κίνηση Brown αρχόμενη από το* $(1, 0)$ *και* $\alpha_t = \frac{e^{2\lambda t}-1}{2\lambda}$.

Ανελίξεις Ornstein-Uhlenbeck

Ταυτότητες σχετικές με την ανέλιξη περιελίξεων

ΠΡΟΤΑΣΗ (Β. 2011)

$$\theta_t^Z = \theta_{\alpha_t}^{\mathbb{B}}, \quad \alpha_t = \frac{e^{2\lambda t}-1}{2\lambda},$$

$$T_c^{(\lambda)} = \frac{1}{2\lambda}\ln\left(1+2\lambda T_c^{|\theta|}\right), \quad T_c^{|\theta|}$$: *χρόνος εξόδου μίας Επίπεδης Κίνηση Brown.*

Σκιαγράφηση απόδειξης: Η φόρμουλα του Itô δίνει:

$$dZ_s = e^{-\lambda s}(-\lambda)\mathbb{B}_{\alpha_s}ds + e^{-\lambda s}d\left(\mathbb{B}_{\alpha_s}\right).$$

Διαιρούμε με $Z_s = e^{-\lambda s}\mathbb{B}_{\alpha_s}$, και παίρνουμε:

$$\frac{dZ_s}{Z_s} = (-\lambda)ds + \frac{d\mathbb{B}_{\alpha_s}}{\mathbb{B}_{\alpha_s}}.$$

Συνεπώς: $\theta_t^Z = \theta_{\alpha_t}^{\mathbb{B}}$.
Επιπλέον, $\alpha^{-1}(t) = \frac{1}{2\lambda}\ln(1+2\lambda t)$. ∎

Πλάνο

1. Κίνηση Brown
   - Τυχαίος περίπατος
   - Κίνηση Brown
2. Εισαγωγή στη Στοχαστική Ανάλυση
   - Στοχαστικό Ολοκλήρωμα Itô
   - Φόρμουλα του Itô
3. Επίπεδη Κίνηση Brown
   - Εισαγωγή
   - Περιελίξεις Επίπεδης Κίνηση Brown
4. Χρόνοι εξόδου από έναν κώνο
   - Οι χρόνοι εξόδου από έναν κώνο T_c^θ και $T_c^{|\theta|}$
   - Εφαρμογές
5. Άλλες Περιελίξεις
   - Ανελίξεις Ornstein – Uhlenbeck
   - Επίπεδες Ευσταθείς (Stable) ανελίξεις
6. Ανοιχτά Προβλήματα
   - Περιελίξεις και Εφαρμογές

Επίπεδες Ευσταθείς (Stable) ανελίξεις

Εισαγωγή

Έστω $(Z_t, t \geq 0)$ μία τυπική ισότροπη ευσταθής ανέλιξη με δείκτη ευστάθειας $\alpha \in (0,2)$ με πεδίο τιμών στο μιγαδικό επίπεδο αρχόμενη από $z_0 + i0, z_0 > 0$ (έστω $z_0 = 1$).

Ιδιότητες της Z:

- έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις,
- οι τροχίες της είναι συνεχείς εκ δεξιών και έχουν όρια εξ αριστερών (càdlàg),
- αν $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο, $E\left[\exp\left(i\langle \lambda, Z_t\rangle\right)\right] = \exp\left(-t|\lambda|^\alpha\right)$, για κάθε $t \geq 0$ και $\lambda \in \mathbb{C}$,
- είναι διερχόμενη,
- $\lim_{t\to\infty} |Z_t| = \infty$ $\sigma.\beta.$,
- δεν επισκέπτεται $\sigma.\beta.$ ποτέ σημεία στο επίπεδο.

Ακολουθώντας τους Bertoin και Werner (1996), μπορύμε να ορίσουμε την ανέλιξη των περιελίξεων της Z: $\theta = (\theta_t, t \geq 0)$.

Εισάγουμε επίσης το ρολόι: $H(t) \equiv \int_0^t \frac{ds}{|Z_s|^\alpha}$,
και το αντίστροφό του: $A(u) \equiv \inf\{t \geq 0, H(t) > u\}$.

Επίπεδες Ευσταθείς (Stable) ανελίξεις

Ανάλογο του Θεωρήματος του Spitzer

Οι Bertoin και Werner (1996) απέδειξαν ότι $(\theta_{A(u)}, u \geq 0)$ είναι μία πραγματική συμμετρική ανέλιξη Lévy ρ χωρίς Γκαουσιανή συνιστώσα.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Bertoin και Werner 1996)

Η οικογένεια ανελίξεων $\left(c^{-1/2}\theta_{\exp(ct)}, t \geq 0\right)$ συγκλίνει κατά κατανομή στο χώρο $D([\,0,\infty\,),\mathbb{R})$ εφοδιασμένο με την τοπολογία του Skorohod (ασθενής σύγκλιση), όταν $c \to \infty$, το $\left(\sqrt{r(\alpha)}B_t, t \geq 0\right)$, όπου $(B_s, s \geq 0)$ είναι μία πραγματική Κίνηση Brown και $r(\alpha)$ είναι μία σταθερά εξαρτώμενη από το δείκτη ευστάθειας α.

Αποδείξεις:

- Bertoin και Werner (1996), με χρήση μίας ανέλιξης «τύπου Ornstein-Uhlenbeck» και επιχειρήματα εργοδικότητας.
- Doney και B. (2012), με χρήση της συνέχειας της συνάρτησης σύνθεσης $\rho_{H(\cdot)}$. ∎

Καινούργια αποτελέσματα:

- Doney και B. (2012), περίπτωση $t \to 0$ και $Z_0 \neq 0$.
- Kyprianou και B. (2016), περίπτωση $t \to 0$ και $Z_0 = 0$.

Πλάνο

1. Κίνηση Brown
   - Τυχαίος περίπατος
   - Κίνηση Brown
2. Εισαγωγή στη Στοχαστική Ανάλυση
   - Στοχαστικό Ολοκλήρωμα Itô
   - Φόρμουλα του Itô
3. Επίπεδη Κίνηση Brown
   - Εισαγωγή
   - Περιελίξεις Επίπεδης Κίνηση Brown
4. Χρόνοι εξόδου από έναν κώνο
   - Οι χρόνοι εξόδου από έναν κώνο T_c^θ και $T_c^{|\theta|}$
   - Εφαρμογές
5. Άλλες Περιελίξεις
   - Ανελίξεις Ornstein – Uhlenbeck
   - Επίπεδες Ευσταθείς (Stable) ανελίξεις
6. Ανοιχτά Προβλήματα
   - Περιελίξεις και Εφαρμογές

Ανοιχτά Προβλήματα

1) Συνέχεια στη μελέτη των περιελίξεων (windings):

- για άλλες ανελίξεις,
- σε άλλες διαστάσεις.

2) Ταυτότητα το Bougerol (περαιτέρω μελέτη και γενικεύσεις):

- για άλλες ανελίξεις,
- σε άλλες διαστάσεις.

3) Μετασχηματισμός Gauss-Laplace και ιδιότητα απεριόριστης διαιρετότητας για μη-ακέραιες τιμές.

4) Περισσότερες εφαρμογές:

- επέκταση της μελέτης της σχέσης αποτίμησης Ασιατικών δικαιωμάτων προαίρεσης (options) και περιελίξεων,
- μελέτη του τρισδιάστατου βιολογικού προβλήματος.

Ευχαριστώ για την προσοχή σας.

Αναφορές

- Σ. Β. (Απρίλιος 2011). Windings of some Planar Stochastic Processes and applications to the rotation of a polymer. PhD thesis, UPMC-Paris VI.
- Σ. Β. (2011). On hitting times of the winding processes of planar BM and of OU processes, via Bougerol's identity. *TVP-SIAM Th. Prob. Ap.* **56** (3).
- Σ. Β., M. Yor και D. Holcman (2011). The Mean First Rotation Time of a planar polymer. *J. Stat. Phys.* **143** (6).
- Σ. Β. (2012). Bougerol's identity in law and extensions. *Probab. Sur.* **9**.
- Σ. Β. και M. Yor (2012). Some infinite divisibility properties of the reciprocal of planar BM exit time from a cone. *Electr. Com. Probab.* **17**.
- Σ. Β. και M. Yor (2013). Integrability properties and Limit Theorems for the first exit times from a cone of planar BM. *Bernoulli* **19** (5A).
- R.A. Doney και Σ. Β. (2013). Windings of planar stable processes. *Sém. de Probab.* **XLV**.
- Σ. Β. (2015). On the windings of complex-valued Ornstein-Uhlenbeck processes driven by a Brownian motion and by a Stable process. *Stochastics* **87** (5).
- A. E. Kyprianou και Σ. Β. (2018). Stable windings at the origin. *Stochastic Processes and their Applications* **128** (5).

Ταυτότητα του Bougerol

ΠΡΟΤΑΣΗ (Bougerol 1983)

Για σταθερό $u > 0$, $\boxed{\sinh(\beta_u) \overset{(law)}{=} \hat{\beta}_{A_u(\beta)=\int_0^u ds \exp(2\beta_s)}\ ,}$

όπου $(\hat{\beta}_t, t \geq 0)$ *είναι μία Κίνηση Brown, ανεξάρτητη από* $A_u(\beta)$.

Απόδειξη: (Alili, Dufresne και Yor 1997)
i) Για $S_u = \sinh(\beta_u)$ έχουμε (Itô Φόρμουλα) :
$dS_u = d\sinh(\beta_u) = \sqrt{S_u^2 + 1}\ d\beta_u + \frac{1}{2} S_u du$.

ii) $(\gamma_s, s \geq 0)$: μονοδιάστατη Κίνηση Brown, ανεξάρτητη από $(\beta_s, s \geq 0)$. Αντιστροφή του χρόνου: u: σταθερό, $\beta_s \overset{(law)}{=} \beta_u - \beta_s$:
$\hat{\beta}_{A_u(\beta)} = \int_0^u e^{\beta_s} d\gamma_s \overset{(law)}{=} e^{\beta_u} \int_0^u e^{-\beta_s} d\gamma_s = Q_u$.

Itô Φόρμουλα στην Q_u (με δ μονοδιάστατη Κίνηση Brown):
$dQ_u = \frac{1}{2} Q_u du + (Q_u d\beta_u + d\gamma_u) = \frac{1}{2} Q_u du + \sqrt{Q_u^2 + 1}\ d\delta_u$. ∎

Απόδειξη με χρήση της Ταυτότητας του Bougerol

Μετασχηματισμός Gauss-Laplace του T_c^θ

ΠΡΟΤΑΣΗ

Για $c > 0$ σταθερό:

$$\sinh(C_c) \overset{(law)}{=} \hat{\beta}_{(T_c^\theta)},$$

$(C_c, c \geq 0)$: *ανέλιξη Cauchy,* $(\hat{\beta}_u, u \geq 0)$: *πραγματική Κίνηση Brown, ανεξάρτητη από* T_c^θ.

Απόδειξη: $\sinh(\beta_{T_c^\gamma}) \overset{(law)}{=} \hat{\beta}_{T_c^\theta}$.

Όμως, από την ιδιότητα scaling της Κίνησης Brown: $\beta_{T_c^\gamma} \overset{(law)}{=} \sqrt{T_c^\gamma}\beta_1$,

και γνωρίζουμε ότι $(N, \hat{N} \sim \mathcal{N}(0,1))$: $\beta_1 \overset{(law)}{=} N$,

$$\begin{aligned} T_c^\gamma &= \inf\{t : \gamma_t = c\} = \inf\{t : \frac{1}{c}\gamma_t = 1\} \overset{(law)}{=} \inf\{t : \gamma_{t/c^2} = 1\} \\ &\overset{s=t/c^2}{=} \inf\{c^2 s : \gamma_s = 1\} = c^2 T_1^\gamma \overset{(law)}{=} \frac{c^2}{\hat{N}^2} , \end{aligned}$$

αφού: $T_1^\gamma \overset{(law)}{=} \frac{1}{\hat{N}^2}$. Τελικώς: $\beta_{T_c^\gamma} \overset{(law)}{=} c\,\frac{N}{\hat{N}} \overset{(law)}{=} c\,C_1 \overset{(law)}{=} C_c$. ∎

Απόδειξη με χρήση της Ταυτότητας του Bougerol

Μετασχηματισμός Gauss-Laplace του T_c^θ

$$\sinh(C_c) \overset{(law)}{=} \hat{\beta}_{(T_c^\theta)} \ ,$$

και ταυτοποιούμε τις σ.π.π. των 2 μελών (σ.π.π. τ.μ. Cauchy (c): $h_c(y) = \frac{c}{\pi(c^2+y^2)}$):
στο αριστερό μέλος:

$$P(\sinh(C_c) \leq k) = P(C_c \leq a(k)), \quad a(k) = \arg\sinh(k)$$

$$= \int_0^{a(k)} h_c(v)dv \overset{v=a(x)}{=} \int_0^k h_c(a(x))a'(x)dx, \quad a'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \int_0^k \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ h_c(\arg\sinh x)dx = \int_0^k \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ \frac{c}{\pi(c^2+a(x)^2)} \ dx \ ;$$

στο δεξί μέλος:

$$P(\hat{\beta}_{(T_c^\theta)} \leq k) \quad = \quad \int_0^k E\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi T_c^\theta}} \exp\left(-\frac{x^2}{2T_c^\theta}\right)\right] dx \ ,$$

και παρατηρούμε ότι $a(y) = \arg\sinh(y) = \log(y + \sqrt{1+y^2})$.

Απόδειξη με χρήση της Ταυτότητας του Bougerol

Μετασχηματισμός Gauss-Laplace του $T_c^{|\theta|}$

Για $c > 0$ σταθερό, εφαρμόζουμε την Ταυτότητα του Bougerol με $u = T_c^{|\gamma|}$

$$\sinh(\beta_{T_c^{|\gamma|}}) \overset{(law)}{=} \hat{\beta}_{T_c^{|\theta|}},$$

όπου $h_{-c,c}(y) = \frac{1}{2c}\frac{1}{\cosh(my)} = \frac{1}{c}\frac{1}{e^{my}+e^{-my}}, \quad m = \frac{\pi}{2c},$

είναι η σ.π.π. της $\beta_{T_c^{|\gamma|}}$,

και ταυτοποιούμε τις σ.π.π. των 2 μελών:

στο αριστερό μέλος: $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} h_{-c,c}(\arg\sinh x) \equiv \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} h_{-c,c}(a(x))$ ·

στο δεξί μέλος: $E\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi T_c^{|\theta|}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2T_c^{|\theta|}}\right)\right]$. ∎

Η σ.π.π. του $\beta_{T_c^{|\gamma|}}$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Η σ.π.π. της $\beta_{T_c^{|\gamma|}}$ δίνεται από τον τύπο:

$$h_{-c,c}(x) = \left(\frac{1}{2c}\right)\frac{1}{\cosh(\frac{x\pi}{2c})} = \left(\frac{1}{c}\right)\frac{1}{e^{\frac{x\pi}{2c}} + e^{-\frac{x\pi}{2c}}} \ .$$

Σκιαγράφηση της Απόδειξης: Προκύπτει από το γεγονός ότι (Lévy 1980 και Biane-Yor 1987):

$$E\left[\exp(i\lambda\beta_{T_c^{|\gamma|}})\right] = \frac{1}{\cosh(\lambda c)} \ ,$$

$$\begin{aligned} E\left[\exp(i\lambda\beta_{T_c^{|\gamma|}})\right] &= \frac{1}{\cosh(\pi\lambda\frac{c}{\pi})} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\frac{\lambda c}{\pi})x}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\cosh(\frac{x}{2})}dx \\ &\overset{y=\frac{cx}{\pi}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda y}\frac{1}{2\pi}\frac{\frac{\pi}{c}}{\cosh(\frac{y\pi}{2c})}dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda y}\frac{1}{2c}\frac{1}{\cosh(\frac{y\pi}{2c})}dy \ . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Κίνηση Brown

Μετασχηματισμός Laplace του T_c^θ

ΠΟΡΙΣΜΑ

Έστω

$$\varphi(x) \equiv E\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi T_c^\theta}} \exp\left(-\frac{x}{2T_c^{|\theta|}}\right)\right],$$

ο Μετασχηματισμός Gauss-Laplace του $1/2T_c^\theta$ *υπό* P. *Άρα, Μετασχηματισμός Laplace του* $1/2T_c^\theta$ *υπό* $Q_c = \sqrt{\frac{\pi}{2T_c^\theta}}\, c \cdot P$ *δίνεται από τον τύπο:*

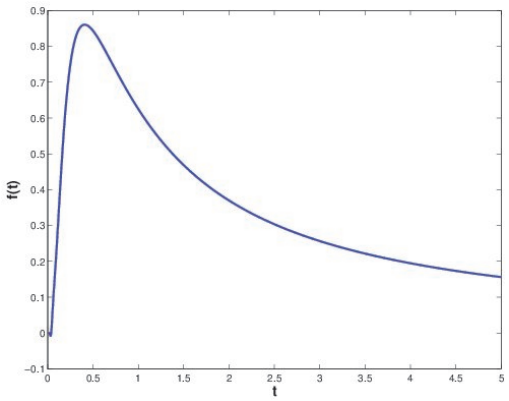
$$E_{Q_c}\left[\exp\left(-\frac{x}{2T_c^\theta}\right)\right] = \int_x^\infty \frac{dw}{\sqrt{w-x}}\, \varphi(w).$$

Η σ.π.π. του $T_c^{|\theta|}$

ΠΡΟΤΑΣΗ

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2}c} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\nu_k)}{\Gamma(2\nu_k)} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{1}{4t}} M_{\frac{1}{2},\nu_k}(\frac{1}{2t}),$$

όπου $M_{a,b}(\cdot)$ είναι η συνάρτηση Whittaker με παραμέτρους a και b, και $\nu_k = \frac{\pi}{4c}(2k+1)$.



Σχήμα: Γράφημα της $f(t)$, με $c = 2\pi$.

Ο χρόνος διακοπής $T_c^{|\theta|}$

Δεύτερο Παράδειγμα: $c = \frac{\pi}{4} \Rightarrow m = \frac{\pi}{2c} = 2$

$$\begin{aligned} T_{\pi/4}^{|\theta|} &= \inf\{t : X_t + Y_t = 0, \text{ ή } X_t - Y_t = 0\} \\ &= \inf\{t : \frac{X_t^0 + Y_t}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ ή } \frac{X_t^0 - Y_t}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\} \\ &= T_{1/\sqrt{2}} \wedge \tilde{T}_{1/\sqrt{2}} \overset{(law)}{=} \frac{1}{2}\left(T \wedge \tilde{T}\right) \end{aligned}$$

$$E\left[\sqrt{\frac{\pi}{4(T \wedge \tilde{T})}} \exp\left(-\frac{x}{T \wedge \tilde{T}}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \frac{2}{1+2x}. \quad (\star)$$

Χρησιμοποιούμε: $T \overset{(law)}{=} \frac{1}{N^2}$, $\tilde{T} \overset{(law)}{=} \frac{1}{\tilde{N}^2}$, οπότε:

$$E\left[\left(|N| \vee |\tilde{N}|\right) \exp\left(-x\left(N^2 \vee \tilde{N}^2\right)\right)\right] = C \int_0^\infty du\, u\, e^{-xu^2} e^{-\frac{u^2}{2}} \int_0^u dy\, e^{-\frac{y^2}{2}}.$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Fubini, παίρνουμε τη σχέση $(\star)$.

Ταυτότητες κατά νόμον σχετικές με την Ταυτότητα του Bougerol

Ορισμένες ταυτότητες κατά νόμον

ΠΡΟΤΑΣΗ (Β. 2011)

Έστω $(\delta_u, u \geq 0)$ μία πραγματική Κίνηση Brown, ανεξάρτητη από την Επίπεδη Κίνηση Brown $(Z_u, u \geq 0)$, αρχόμενη από το 1. Για κάθε $b \geq 0$, οι ακόλουθες ταυτότητες κατά νόμον ισχύουν:

- $H_{T_b^\delta} \overset{(law)}{=} T^\beta_{a(b)}, \quad a(b) = \arg\sinh(b)$
- $\theta_{T_b^\delta} \overset{(law)}{=} C_{a(b)}$
- $\bar{\theta}_{T_b^\delta} \overset{(law)}{=} |C_{a(b)}|,$

C_A: τυχαία μεταβλητή Cauchy με παράμετρο A, $\bar{\theta}_u = \sup_{s \leq u} \theta_s$.

Ιδέα της απόδειξης:

Από την ιδιότητα της συμμετρίας, η Ταυτότητα του Bougerol μπορεί να γραφεί ως:

$$\sinh(\bar{\beta}_u) \overset{(law)}{=} \bar{\delta}_{A_u(\beta)}.$$

Θεώρημα του Spitzer

Μη-υπολογιστική απόδειξη

ΠΡΟΤΑΣΗ

$(\delta_u, u \geq 0)$: πραγματική Κίνηση Brown, ανεξάρτητη από την Επίπεδη Κίνηση Brown $(Z_u, u \geq 0)$, αρχόμενη από το 1.

$$\frac{1}{\log t}\left(\theta_{T^{\delta}_{\sqrt{t}}} - \theta_t\right) \xrightarrow[t\to\infty]{(P)} 0,$$

που υπονοεί το Θεώρημα του Spitzer: $\frac{2}{\log t}\,\theta_t \xrightarrow[t\to\infty]{(law)} C_1.$

Ιδέα της απόδειξης του Θεωρήματος του Spitzer:

$$\frac{1}{\log b}\,\theta_{T^{\delta}_b} \overset{(law)}{=} \frac{C_{a(b)}}{\log b} \xrightarrow[b\to\infty]{(loi)} C_1.$$

$b = \sqrt{t}$, και εφαρμόζουμε τη «μέθοδο pinching» του Williams. ∎

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

T^{δ}_b είναι ανεξάρτητη από την ανέλιξη $(\theta_u, u \geq 0)$.

Πρώτη ροπή του $\ln\left(T_c^{|\theta|}\right)$ - Ολοκληρωτική Αναπαράσταση

ΠΡΟΤΑΣΗ

$$E\left[\ln\left(T_c^{|\theta|}\right)\right] = \ln(2) + c_E + 2\int_0^\infty \frac{dz}{\cosh\left(\frac{\pi z}{2}\right)} \ln(\sinh(cz)),$$

όπου $c_E = -\Gamma'(1)$ είναι η σταθερά του Euler.

Σκιαγράφηση της Απόδειξης: Προκύπτει από την Αναπαράσταση skew-product: $T_c^{|\theta|} = A_{T_c^{|\gamma|}}$.
Χρησιμοποιώντας την Ταυτότητας του Bougerol και την Ιδιότητα scaling της Κίνησης Brown έχουμε:

$$E\left[\left|\sinh(\beta_{T_c^{|\gamma|}})\right|^2\right] = E\left[\left|\hat{\beta}_{A_{T_c^{|\gamma|}}}\right|^2\right] = E\left[A_{T_c^{|\gamma|}}\right] E\left[\left|\hat{\beta}_1\right|^2\right],$$

όπου η σ.π.π. της $\beta_{T_c^{|\gamma|}}$ δίνεται από:

$$h_{-c,c}(y) = \left(\frac{1}{2c}\right)\frac{1}{\cosh(\frac{y\pi}{2c})} = \left(\frac{1}{c}\right)\frac{1}{e^{\frac{y\pi}{2c}} + e^{-\frac{y\pi}{2c}}}. \quad \blacksquare$$

Ιδιότητα απεριόριστης διαιρετότητας (infinite divisibility)

Ο Μετασχηματισμός Gauss-Laplace ($x \geq 0$ και $m = \frac{\pi}{2c}$):

$$c\, E\left[\sqrt{\frac{2}{\pi\, T_c^{|\theta|}}}\exp\left(-\frac{x}{2\, T_c^{|\theta|}}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\frac{2}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})^m + (\sqrt{1+x}-\sqrt{x})^m},$$

«κρύβει» την ιδιότητα της απειροστικής διαιρετότητας (infinite divisibility) για τη τ.μ. $T_c^{|\theta|}$.

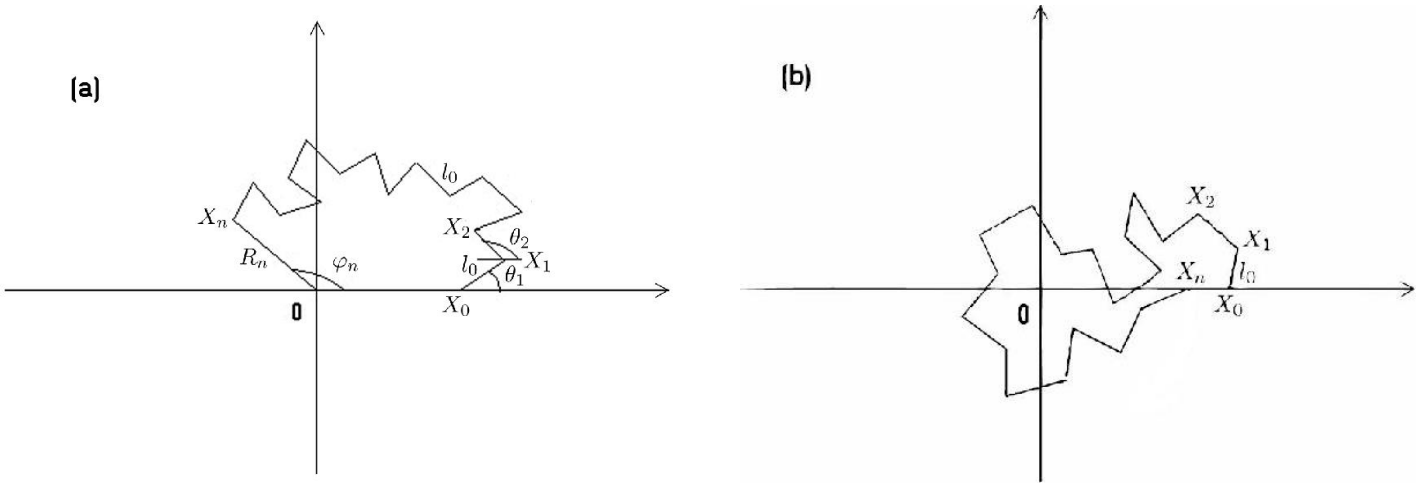
Πράγματι, στο δεξί μέλος έχουμε το Μετασχηματισμό Laplace μίας απειροστικώς διαιρετέας τυχαίας μεταβλητής (τουλάχιστον για ακέραιο m). (B., Yor 2012)

Πιο συγκεκριμένα, πρόκειται για το Μετασχηματισμό Laplace της:

- για $m = 2k+1$, $\gamma_{1/2} + \sum_{j=1}^{k} a_j \mathbf{e}_j$,
- και για $m = 2k$, $\mathbf{e} + \sum_{j=1}^{k} b_j \mathbf{e}_j$.

Εισαγωγή

Πολυμερές: Στοχαστική Μοντελοποίηση



Σχήμα: Επίπεδο πολυμερές:
(a) τυχαίος σχηματισμός, (b) η n-οστή άκρη κάνει μία πλήρη περιστροφή.

Μοντέλο: συλλογή από n άκαμπτες ράβδους με σταθερά ίσα μήκη (l_0) και άκρες $(X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $X_0 = (L, 0)$, $(L > 0)$.
Η δυναμική της i-οστής ράβδου χαρακτηρίζεται από τη γωνία $\theta_i(t)$ ως προς τον άξονα $\overrightarrow{Ox}$ (D: σταθερά διάχυσης, $(B_i(t), i \leq n)$: n-διάστατη Κίνηση Brown):

$$(\theta_i(t), i \leq n) \overset{(law)}{=} \sqrt{2D}\,(B_i(t), i \leq n)\,.$$

Μέσος Χρόνος Περιστροφής

Θέση του ελεύθερου άκρου

$$\begin{cases} X_1(t) = L + l_0 e^{i\sqrt{2D}B_1(t)} \\ \vdots \\ X_n(t) = X_{n-1}(t) + l_0 e^{i\sqrt{2D}B_n(t)} \end{cases} \Rightarrow X_n(t) = L + l_0 \sum_{k=1}^{n} e^{i\sqrt{2D}B_k(t)}.$$

$$X_n(t) = R_n(t) e^{i\varphi_n(t)},$$

$\varphi_n(t)$: ολική γωνία ως προς την αρχή των αξόνων $\mathbf{0}$,
$R_n(t)$: ακτινική απόσταση.

$$\tau_n \equiv \inf\{t > 0, |\varphi_n(t)| = 2\pi\}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ:
Υπολογισμός του Μέσου Χρόνος Περιστροφής $E[\tau_n]$ ασυμπτωτικά.

Υποθέσεις: $nl_0 > L$, $n \geq 3$ και $|\varphi_n(0)| < 2\pi$.

Συμπέρασμα

Κυρίως αποτέλεσμα σχετικα με το επίπεδο πολυμερές

Ο μέσος χρόνος περιστροφής επίπεδου πολυμερούς είναι:

$$E\left[\tau_n\right] \approx \frac{\sqrt{n}}{8D}\left[2\ln\left(\tilde{c}_n\right) + 0.08\frac{1}{\tilde{c}_n^2} + Q\right],$$

$\tilde{c}_n \equiv \frac{E\left(\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{i}{\sqrt{2D}}\theta_k(0)}\right)}{\sqrt{n}}$,
$(\theta_k(0), 1 \leq k \leq n)$: ακολουθία γωνιών αρχικού σχηματισμού,
n: αριθμός ράβδων,
D: σταθερά διάχυσης, και $Q \approx 9.54$.

Μαθηματικά Χρηματοοικονομικά (1)

Θέλουμε να χαρακτηρίσουμε την κατανομή της

$$A_t = \int_0^t \exp(2\beta_u)du.$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε τη «μέθοδο pinching» του Williams. Υπολογίζουμε

$$A_{T_c^\gamma} - A_t = \int_t^{T_c^\gamma} \exp(2\beta_u)du, \quad (c = f(t))$$

που είναι μία τυχαία μεταβλητή που υπάρχει. Αν τώρα κανονικοποιήσουμε με κατάλληλη $g(t)$, έχουμε

$$\frac{1}{g(t)}\left(A_{T_c^\gamma} - A_t\right) \xrightarrow[t\to\infty]{(P)} 0,$$

συνεπώς η μελέτη της $(g(t))^{-1}A_{T_c^\gamma}$ συνεπάγεται παρόμοια αποτελέσματα για την $(g(t))^{-1}A_t$.

Μαθηματικά Χρηματοοικονομικά (2)

Μετασχηματισμός Gauss-Laplace του A_t

ΠΡΟΤΑΣΗ

Η κατανομή του $A_t = \int_0^t ds\ \exp(2\beta_s)$ *χαρακτηρίζεται από* ($x \geq 0$ *και* $a(u) = \arg\sinh(u)$)*:*

$$E\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi A_t}}\exp\left(-\frac{x}{2A_t}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\frac{1}{\sqrt{1+x}}\exp\left(-\frac{(a(\sqrt{x}))^2}{2t}\right).$$

Απόδειξη: Υπενθύμιση της Ταυτότητας του Bougerol: για t σταθερό,

$$\sinh(\beta_t) \overset{(law)}{=} \hat{\beta}_{A_t},$$

και ταυτοποιούμε τις σ.π.π. των 2 μελών:

στο αριστερό μέλος: $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\exp\left(-\frac{(a(y))^2}{2t}\right)$,

στο δεξί μέλος: $E\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi A_t}}\exp\left(-\frac{y^2}{2A_t}\right)\right]$.

Τελειώνουμε με την αλλαγή μεταβλητής: $x = y^2$. ∎

Μετασχηματισμός Gauss-Laplace του $A_t(\beta)$

Απεριόριστη διαιρετότητα του $\frac{1}{A_t(\beta)}$

$\frac{1}{A_t(\beta)}$ είναι απεριόριστα διαιρετέα τ.μ. υπό το μέτρο Wiener W ;

ΠΡΟΤΑΣΗ

Για το $A_t(\beta) = \int_0^t ds \exp(2\beta_s)$, *ισχύει η ακόλουθη αναπαράσταση:*

$$\frac{1}{4A_t(\beta)} \, (\upsilon\pi\acute{o}\ P_t) \overset{(law)}{=} \frac{N^2}{4} + \frac{1}{A\left(b_{4t}\right)},$$

όπου: $P_t \equiv \left(\frac{t}{A_t(\beta)}\right)^{1/2} \cdot W$, N: *τυπική κανονική τ.μ. και* $b_s \equiv (b_s(v), v \leq s)$: *η γέφυρα Brown μήκους* s.